

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5(185)

Promieniowanie gamma z kosmosu <i>dr hab. Tadeusz Jarzębowski</i>	str. 1
Korespondencyjny Klub Fizyków	str. 3
O metodzie okrężnej <i>dr Grzegorz Łukaszewicz mgr Marek Szafranowski</i>	str. 4
Patrz w niebo	str. 7
Mała Delta	str. 8
Jeszcze jedna własność trójkątów równobocznych <i>mgr Sławomir Cynk</i>	str.10
Zadania	str.11
Obalamy prawa fizyki <i>doc. dr Jan Gaj</i>	str.12
Klub 44	str.14
Drobniarzy	str.16
Kącik prac uczniowskich	str.17

### W następnym numerze:

Ekstrapolacje



Szkolne Koło Matematyczne oraz Klub *Młody Cybernetyk* przy Zespole Szkół w Dziadkowie zapraszają do udziału w II Wakacyjnej Sesji Matematycznej i Cybernetycznej. Impreza z udziałem pracowników naukowych odbędzie się od 1 do 7 sierpnia 1989 roku w Dziadkowie.

Zgłoszenia należy kierować pod adresem  
 Klub *Młody Cybernetyk*, Zespół Szkół  
 ul. Grunwaldzka 4  
 13-200 Dziadkovo.

Organizator przewiduje wpłatę 2000 zł jako wpisowe, którą to kwotę należy wpłacić w sposób podany w potwierdzeniu przyjęcia zgłoszenia.

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc.dr Jan A. Gaj  
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc.dr Tomasz Hofmokl – v-przewodniczący  
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc.dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 dr Zbigniew Płochocki  
 dr Jan Rempała  
 prof.dr Konrad Rudnicki  
 prof.dr Grzegorz Sitarski  
 prof.dr Józef I. Smak  
 prof.dr Kazimierz Stepien  
 prof.dr Mieczysław Subotowicz  
 doc.dr Andrzej Szymacha  
 doc.dr Aniela Wolska  
 prof.dr Andrzej Woszczyk  
 prof.dr Wojciech Żakowski –  
 przewodniczący

#### WARUNKI I CENY PRENUMERATY

Zgłoszenia na prenumeratę:  
**w terminie**

- do dnia 10 listopada na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

#### przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszczących się na tych terenach.

#### Ceny prenumeraty:

kwartalnej 300 zł  
 półrocznej 600 zł  
 rocznej 1200 zł

**Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę** – przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa. PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Cena 1 egzemplarza zł 100,-

#### Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 dr Lidia Goettig  
 dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
 dr Tomasz Kwast  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska  
 Jacek Urbański – grafik

#### Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa  
 tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń  
 ul. Poznańska 38  
 00-689 Warszawa  
 tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,  
 2,50 ark. druk.,

papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Prasowych

Zakładach Graficznych  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28

Nr zam. 980/89

Skład systemem TeX  
 wykonała redakcja.



# Promieniowanie gamma z kosmosu

Dr hab. Tadeusz JARZĘBOWSKI

Ziemska atmosfera dość poważnie odcina nas od promieniowania dochodzącego z kosmosu, przepuszczając je praktycznie tylko w dwóch zakresach: dziedzinie widzialnej i krótszych fal radiowych. Promieniowanie gamma, o którym chcemy dziś mówić, absorbowane jest na wysokości kilkunastu kilometrów. Kwanty gamma przekazują tam część swojej energii wolnym elektronom – jest to tzw. odwrotny efekt Comptona. Promieniowanie elektromagnetyczne zaliczamy do zakresu gamma, jeżeli jego fala jest krótsza od  $10^{-9}$  cm, tj. częstość przekracza  $10^{19}$  Hz, a energia kwantu  $10^5$  eV. Te należące do najbardziej energetycznych kwanty promieniowania powstają w trakcie procesów, w których zaangażowane są już cząstki o dużych energiach. Bardzo skutecznym mechanizmem są tu np. zderzenia wysokoenergetycznych protonów z jądrami atomowymi gazu międzygwiazdowego. Powstają wówczas mezony, które rozpadają się na elektrony, neutrino i – właśnie – kwanty gamma.

Tam, gdzie występują silne pola magnetyczne, może wchodzić w grę mechanizm synchrotronowy lub cyklotronowy. Wirujący wokół linii pola elektron emituje promieniowanie. Gdy jest to elektron relatywistyczny (o energii dużo większej od  $mc^2$ ), występuje emisja ciągła w szerszym zakresie długości fal, a w przypadku nierelatywistycznym częstość emitowanego promieniowania, nazywana cyklotronową, zależy tylko od natężenia pola  $H$  i wyraża się wzorem

$$\nu = \frac{eH}{mc}$$

Podstawiając tu wartości liczbowe stwierdzamy, że np. promieniowanie o częstości  $10^{19}$  Hz jest emitowane w polu magnetycznym  $H$  rzędu  $10^{13}$  Gs. Pola tego rzędu powinny występować na gwiazdach neutronowych.

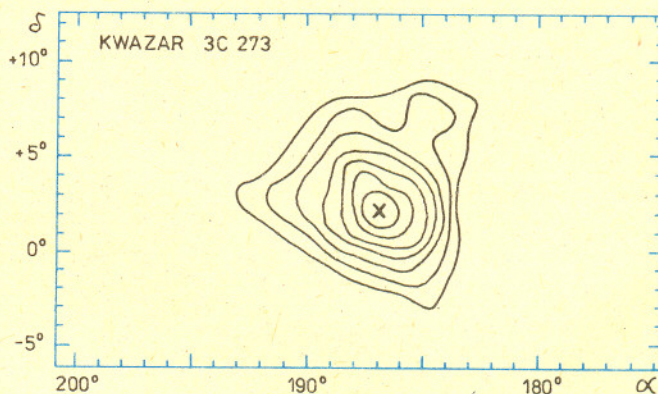
W dziedzinie gamma – podobnie jak i w innych zakresach widma elektromagnetycznego – należy też oczekiwać linii widmowych, tj. promieniowania o ściśle określonych długościach fal. Taką najbardziej oczywistą jest tu linia powstająca w procesie anihilacji pary pozyton-elektron. W wyniku kolizji tych cząstek powstają na ogół dwa kwanty o energii  $E = mc^2 = 0,511$  MeV każdy.

Całego szeregu linii należy oczekiwać w licznych procesach jądrowych, mamy tam bowiem bardzo często do czynienia z jądrami w stanach wzbudzonych. Przechodząc następnie na niższe poziomy energetyczne jądro takie wypromieniowuje różnicę energii w postaci kwantów gamma. Wzbudzenie jądra może też być skutkiem kolizji z inną cząstką. Emitowane przy tym linie zawierają się w przedziale od 1 do 10 MeV.

## Aparatura

Urządzenie do obserwacji nadchodzącego z kosmosu promieniowania gamma w niczym nie przypomina znanych nam teleskopów. Kierunek, z którego promieniowanie gamma dociera, określa się za pomocą tzw. komory iskrowej, tj. detektora śladowego cząstek naładowanych. Mianowicie kwant gamma może wytworzyć parę pozyton-elektron i właśnie ich ślad zdradza kierunek

pierwotnego promieniowania. Dokładność, z jaką za pomocą takiego „teleskopu” można określić położenie źródła na niebie, jest niewielka: są to stopnie, w najlepszym wypadku około jednego stopnia. Pozycję określa się więc tu z błędem rzędu dwóch średnic tarczy Księżycy! Na rysunku 1 przedstawione są izofoty źródła promieniowania gamma, które identyfikowane jest z kwazarem 3C 273 (krzyżyk podaje jego pozycję optyczną i radiową).



Rys. 1. Izofoty promieniowania gamma kwazara 3C 273. Krzyżyk ukazuje jego pozycję radiową i widzialną.

Dobrze jest uświadomić sobie, że obserwacje polegają tu na rejestrowaniu pojedynczych zdarzeń. Mówimy tu więc o zliczaniu kwantów. Oto przykład. Strumień promieniowania gamma wspomnianego kwazara 3C 273 wynosi  $10^{-6}$  fotonów/cm<sup>2</sup> · s. Powierzchnia czynna komory iskrowej liczy około 100 cm<sup>2</sup>. A zatem rejestrowany jest tu jeden kwant na każde  $10^4$  sekund, czyli co parę godzin.

Opisana tu pokrótce aparatura od około dwudziestu lat instalowana jest na pokładach balonów, a od 1972 roku – sztucznych satelitów. Wtedy został wystrzelony satelita SAS-2. Najwięcej informacji dostarczył następny satelita gamma, COS-B, który działał w latach 1975–1982.

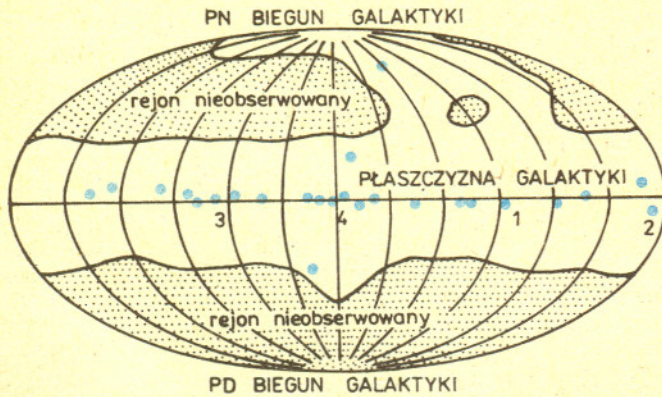
Przejdźmy teraz do omówienia wyników obserwacji. Najpierw najbliższa nas gwiazda.

## Słońce

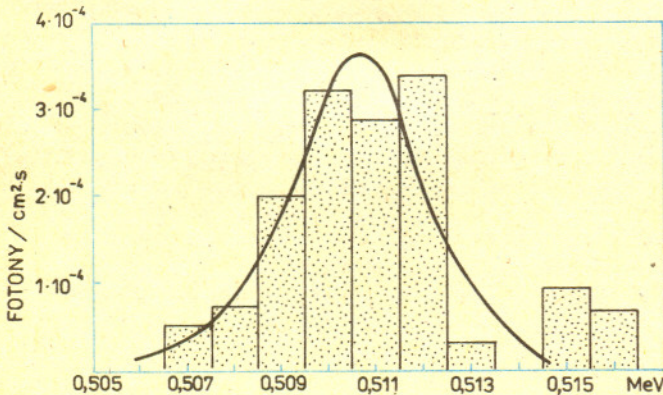
W centralnych częściach naszej gwiazdy, tam gdzie zachodzą reakcje jądrowe, produkowane jest, oczywiście, permanentnie promieniowanie gamma; ale ono na zewnątrz nie wychodzi. Tak wysokoenergetycznych kwantów nie emituje też względnie chłodna fotosfera Słońca. Można jednak przypuszczać, że w gorącej koronie, w okresach silnej aktywności, taka emisja wystąpi. Aparatura satelitów typu OSO (*Orbiting Solar Observatory*) potwierdziła to. W koronie słonecznej ujawniła się w szczególności pochodząca z anihilacji pozytonów i elektronów linia 0,511 MeV. Dość intensywnie prezentuje się tam też linia 2,23 MeV, powstająca podczas reakcji przechwycenia neutronu przez jądro wodoru (proton + neutron → deuter +  $\gamma$ ). Obserwuje się też kilka innych linii, w szczególności linie 4,4 MeV emitowaną przy przechodzeniu do poziomu podstawowego jądra węgla <sup>12</sup>C.



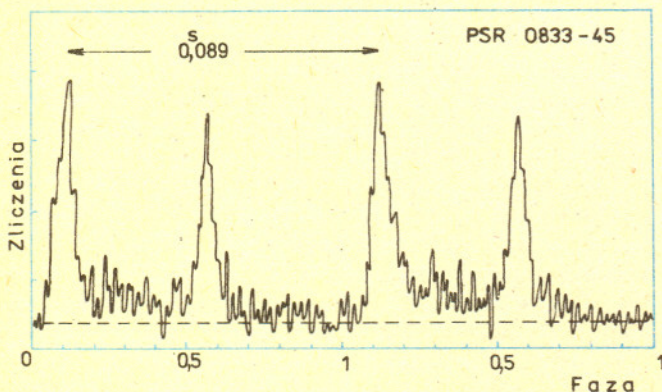
We wszystkich prawie zakresach widma elektromagnetycznego daje się zaobserwować promieniowanie ciągłe tła nieba. Najbardziej interesujący jest tu niewątpliwie rejon fal milimetrowych i centymetrowych, gdzie występuje tak ważne z punktu widzenia kosmologii promieniowanie reliktowe. Na przeciwnym krańcu widma, w dziedzinie rentgenowskiej i gamma, też się obserwuje świecenie tła nieba. Natężenie tego, przypuszczalnie również izotropowego, promieniowania zmniejsza się wraz z malejącą długością fali; niemniej udało się już zarejestrować kwanty gamma aż do rejonu długości fal  $10^{-13}$  cm ( $10^9$  eV).



Rys. 2. Niebo w promieniach gamma. Punkty przedstawiają zaobserwowane dotychczas źródła punktowe.



Rys. 3. Świecenie centrum Galaktyki w rejonie linii 0,511 MeV. Zacięniowane prostokąty podają obserwowane natężenia w danym zakresie energii.



Rys. 4. Obserwowane pulsacje w dziedzinie gamma pulsara radiowego PSR 0833 - 45.

Na rysunku 2 przedstawiona jest mapka sfery niebieskiej w tzw. współrzędnych galaktycznych, to jest takich, których podstawę stanowi płaszczyzna Galaktyki. Zacięniowany rejon to jeszcze *terra incognita* - obszar nie badany w dziedzinie gamma. Na części zbadanej widzimy 25 „gwiazd gamma”. Są to wszystkie z poznanych, jak dotąd, źródeł punktowych. Jak widzimy, rozmieszczone są one głównie w pobliżu płaszczyzny tego naszego skupiska gwiazdowego. Obiekt oddalony najbardziej od płaszczyzny Galaktyki, usytuowany już blisko jej północnego bieguna, to znany dobrze kwazar 3C 273 - jego obraz w promieniach gamma przedstawiał rysunek 1.

Gdybyśmy zatem mieli wzrok czuły na promieniowanie gamma (i znajdowali się ponad absorbującą warstwę atmosfery ziemskiej), patrząc na niebo dostrzegliśmy owe „gwiazdy”. Ale zauważylibyśmy też, że niezależnie od tych źródeł punktowych promieniowanie gamma dochodzi również z okalającego całe niebo pasa równika galaktycznego; a zatem i w dziedzinie gamma występuje coś w rodzaju Drogi Mlecznej. Jak można było przypuszczać, najintensywniej świeci rejon centrum tej naszej wyspy gwiazdowej (który przypada w gwiazdozbiore Strzelca). Z tego też rejonu obserwuje się linię emisyjną 0,511 MeV (rys. 3). W centralnych częściach Galaktyki zachodzą zatem nieustannie procesy anihilacji pozytonów i elektronów. Z obliczeń wynika, że dla powstania linii o takim natężeniu, jakie się obserwuje, w ciągu każdej sekundy musi ulec anihilacji  $10^{43}$  pozytonów. Skąd taka ilość pozytonów? - Odpowiedzi na razie nie ma.

### Pulsary gamma

Spośród zaznaczonych na mapce nieba źródeł punktowych sześć zidentyfikowano ze znanymi obiektami. Cztery z nich to pulsary. Wymienimy je tutaj wraz z okresami pulsacji  $P$  (liczba porządkowa odpowiada liczbie zaznaczonej na rysunku 2):

- |                          |               |
|--------------------------|---------------|
| 1) PSR 0833 - 45 (Vela), | $P = 0,089$ s |
| 2) PSR 0531 + 21 (Krab), | $P = 0,033$ s |
| 3) PSR 1953 + 29,        | $P = 0,006$ s |
| 4) PSR 1802 - 23,        | $P = 0,112$ s |

Pierwszy z wymienionych, widoczny w gwiazdozbiore Żagla (Vela), to gwiazda pierwszej wielkości na firmamencie nieba gamma, to najjaśniejsze z tych 25 źródeł punktowych. Jego pulsacje w dziedzinie gamma, rejestrowane przez satelitę COS-B, przedstawione są na rysunku 4. Pulsar ten emituje też fale radiowe i widzialne; okresy pulsacji w tych zakresach są identyczne z okresem w dziedzinie gamma. Fakt ten stanowi najoczywistszy dowód, że promieniowanie ze wszystkich tych trzech zakresów pochodzi od tego samego ciała niebieskiego.

O mgławicy Krab i o znajdującym się tam pulsarze słyszeliśmy już niewątpliwie. To pozostałość po wybuchu owej znakomitej supernowej naszej Galaktyki z roku 1054. W zimowy wieczór można tę mgławicę dostrzec przez lornetkę powyżej gwiazdozbioru Oriona. Z podaną okresowością 33 ms pulsar ten emituje również impulsy w dziedzinie radiowej, widzialnej i rentgenowskiej.

Pulsary to gwiazdy neutronowe. Średnice tych gwiazd są rzędu 20 kilometrów, a skoro masa zbliżona jest do masy Słońca, to gęstość wynosi - bagatela - około  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>.



Występujące na nich pola magnetyczne powinny być rzędu  $10^{12} \div 10^{13}$  Gs. Obserwowany okres pulsacji to po prostu okres obrotu gwiazdy wokół osi. Zwróćmy uwagę, że wymieniając tutaj czwórka ma bardzo krótkie okresy – rzędu milisekund. Gwiazdy neutronowe emitujące promieniowanie gamma należą do najszybciej wirujących!

I jeszcze jeden kwiatek z poletka pulsarów gamma. Otóż mało kto zapewne domyśliłby się, że pulsacje gamma dają się zarejestrować również ... z powierzchni Ziemi. Rzecz w tym, że wpadający do atmosfery ziemskiej kwant gamma może wywołać lawinę cząstek. Z fizyki wiadomo, że jeżeli prędkość cząstki naładowanej przekracza prędkość fazową dla danego ośrodka, cząstka ta emituje tzw. promieniowanie Czerenkowa. Jest to promieniowanie z zakresu widzialnego, może więc dotrzeć do powierzchni Ziemi. A zatem np. promieniowanie gamma pulsara z mgławicy Krab jest źródłem błysków promieniowania Czerenkowa, zachodzących w okresie 33 milisekund. Zostało to zaobserwowane przez naziemne teleskopy.

Na zakończenie jeszcze coś z wieści najnowszych. W sąsiedniej galaktyce, w Wielkim Obłoku Magellana, wybuchła niedawno supernowa. Przy eksplozji na taką skalę, przy wyzwaniu tak kolosalnych ilości energii, można spodziewać się niejednej rewelacji. Największą z nich były neutrino; zarejestrowano je i był to wielki sukces astrofizyki. Promieniowania gamma, oczywiście, też należało oczekiwać. Uniosły się więc w górę balony z aparaturą. Biegającym od supernowej kwantom gamma skryć się nie udało. Co więcej, z teorii wynika, że przy tego typu wybuchach należy oczekiwać linii kobaltu – 0,847 MeV oraz 1,238 MeV. Aparatura i te linie zarejestrowała.

Z braku miejsca na tym dziś zakończymy. Z tematyki kosmicznych źródeł promieniowania gamma pozostało jeszcze jedno bardzo ciekawe zjawisko: rozbłyski gamma. O nich więc w oddzielnym artykule.



Rozwiązanie zadania F 269.

Wewnątrz przewodnika pole magnetyczne jest równe zeru. Z warunków brzegowych wynika, że na jego powierzchni znika składowa prostopadła wektora indukcji pola magnetycznego. W celu określenia pola magnetycznego wytwarzanego przez płaszczyznę posłużymy się metodą obrazów. Wyobraźmy sobie, że pod rozpatrywaną płaszczyznę umieścimy w takiej samej od niej odległości prostoliniowy przewodnik (obraz), w którym prąd płynie w przeciwnym kierunku. Siła działająca na jednostkę długości badanego przewodnika ze strony obrazu przewodnika wynosi  $F = I \cdot B \cdot l$  ( $l = 1$ ), gdzie  $B$  jest indukcją wytwarzaną przez obraz przewodnika. Siła ta jest skierowana do góry. Warunek, przy którym przewodnik będzie swobodnie wisiał nad płaszczyzną na wysokości  $h$ , ma postać

$$F = \rho g, \quad \text{czyli} \quad \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot 2h} = \rho g$$

Wynika stąd, że wysokość  $h$  wynosi

$$h = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \rho g} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

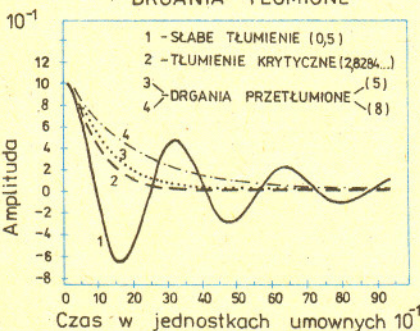
1. Spróbuj w ciemności odrywać taśmę klejącą od twardego izolującego podłoża (kawałek pleksiglasu). Może uda Ci się zobaczyć na linii odrywania delikatne niebieskie lub białoniebieskie świecenie. W procesie odrywania się taśmy tworzą się na jej powierzchni obszary naładowane elektrycznie, między którymi przeskakują drobne iskierki. Zjawisko zależy od rodzaju kleju, materiału, z którego zrobiona jest taśma i rodzaju twardego podłoża. Jeśli udało Ci się zaobserwować świecenie, to możesz przystąpić do dalszych badań. W tym celu trzeba zaopatrzyć się w różne bardzo drobne proszki. Może to być sucha mąka, bardzo drobno zmielony tymianek, pietruszka, rozmaryn lub proszek z kopiarek. Drobny proszek można otrzymać naklejając taśmę na podłoże, odrywamy i podłoże posypujemy delikatnie proszkiem stracając jego nadmiar. Proszek skupi się wokół ładunków odtwarzając ich rozkład. Zjawisko to wykorzystywane jest w kopiarkach elektrostatycznych, a znane jest od przeszło dwustu lat. Szerzej o tym zjawisku można przeczytać w amerykańskim czasopiśmie *Scientific American* wydawanym również w rosyjskiej wersji językowej *В Мире Науки* Nr 6, str. 80, rocznik 1988.

2. Opisanie poniżej doświadczenie zaproponował Jerzy Ginter. Jego opis ukaże się w podręczniku fizyki dla klasy III LO, który wyjdzie w połowie 1989 r. Celem doświadczenia jest zbadanie, jak zmienia się ruch wahadła, gdy pojawia się dodatkowa siła tłumiąca wahania, której wartość jest proporcjonalna do prędkości ruchu. Rozwiązanie teoretyczne wymaga znajomości prostych równań różniczkowych. Rysunek przedstawia rozwiązania w zależności od wielkości tłumienia. Jest to wykres zależności wychylenia wahadła (amplitudy) od czasu w jednostkach umownych dla różnych wartości parametru charakteryzującego tłumienie: 0,5 – słabe tłumienie,  $\sqrt{8}$  – tłumienie krytyczne, 5 i 8 – drgania przetłumione. (Wartości liczbowe parametru tłumienia nie mają żadnego szczególnego znaczenia, odpowiadają jedynie sytuacji na wykresie.)

Zbadaj, czy zauważysz przewidziane teoretycznie prawidłowości. W tym celu przygotuj wahadło z nitki zakończoną kulką z plasteliny, do której przyczep kilka nitki z włóczki. Zaczep gdzieś drugi koniec nitki tak, aby wahadło mogło wahać się swobodnie i podstaw pod nie miednicę z wodą. Im bardziej nitki będą „zamiatały” po wodzie, tym większe będzie tłumienie. Przyślij dokładny opis, jak wykonywałeś doświadczenie i czy zauważyleś prawidłowości przewidziane teoretycznie. Jeśli zauważysz odstępstwa, to postaraj się je wytłumaczyć. Czy na podstawie przeprowadzonych obserwacji możesz odpowiedzieć na pytanie: w jakich warunkach powinien pracować idealny amortyzator samochodu?

Listy prosimy przysyłać pod adresem:  
Korespondencyjny Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,  
00-681 Warszawa, ul. Hoża 69.

DRGANIA TŁUMIONE





# O metodzie okrężnej

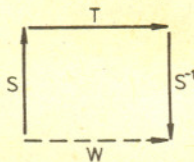
Dr Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Mgr Marek SZAFRAŃSKI

## 1. Ogólne cechy metody

Metoda okrężna jest zasadą heurystyczną pomocną przy rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Istota metody sprowadza się do zastąpienia postawionego przed nami problemu innym, równoważnym mu problemem, który następnie rozwiązujemy w trzech kolejnych etapach. Najogólniej rzecz ujmując – pierwszy krok metody polega na przejściu od problemu otwartego do pokrewnego mu zadania, które potrafimy rozwiązać. Drugim krokiem jest rozwiązanie tak przeformułowanego zadania. W kroku trzecim powracamy do zadania wyjściowego wykorzystując rezultaty drugiego kroku (w pewnym sensie trzeci krok jest więc odwrotnością pierwszego). W ten sposób zastępujemy operację bezpośredniego rozwiązywania problemu, nazwijmy ją  $W$ , złożeniem trzech opisanych wyżej operacji, które oznaczymy odpowiednio przez  $S$ ,  $T$  oraz  $S^{-1}$ . Powyższy rozkład wyjściowego zadania możemy teraz wyrazić w postaci następującego złożenia

$$(*) \quad W = S^{-1}TS,$$

co stanowi symboliczny zapis schematu metody okrężnej. Bardziej obrazowe przedstawienie graficzne schematu metody (rys. 1) uzasadnia jej nazwę. Jeżeli dowolne przekształcenia (operacje)  $W$  oraz  $T$  są w relacji (\*) wraz z pewnym odwracalnym przekształceniem  $S$ , to mówimy, że  $W$  i  $T$  są sprzężone za pomocą  $S$ . Czasami wygodniej nam będzie zapisywać sprzężenie (\*) w formie:  $W \sim_S T$ .



Rys. 1

Okazuje się, że taka dekompozycja zadania ma niezwykle szeroki zakres zastosowań, wykraczający znacznie poza zagadnienia czysto matematyczne. Zilustrujemy to prostym przykładem. Przypuśćmy, że postawiono przed nami niewykonalne na pozór zadanie przeniesienia wody w sienie. Mając na uwadze naszkicowaną ideę postępujemy tak: najpierw zamrażamy wodę, następnie przenosimy w sienie lód, który w końcu rozmrażamy. Przykład ten, jakkolwiek nieco żartobliwy, dobrze ilustruje cechy charakterystyczne metody: trój etapowość procesu oraz wzajemną odwrotność jego dwóch skrajnych etapów.

Rzymska legenda podaje, iż westalka Tuccia oskarżona o cudzołóstwo przeniosła w cudowny sposób wodę w sienie dowodząc tym swojej niewinności.

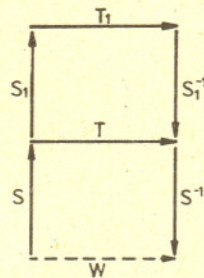
Relacja sprzężenia przekształceń jest dobrze znana i szeroko stosowana w wielu działach matematyki i jako taka nie wymaga rekomendacji. Czytelnikowi należy się zatem uzasadnienie podjęcia tego tematu w niniejszym artykule.

Otóż, po pierwsze, mimo szerokiego rozpowszechnienia samej idei jej jedność i uniwersalność pozostają skryte bogactwem form i różnorodnością nazw, jakie przybiera ona w różnych dziedzinach, na gruncie których się pojawia. Mówimy zatem o podobieństwie (algebra liniowa), o sprzężeniu (teoria grup przekształceń), o transformacjach całkowitych (równania różniczkowe) etc., lecz idea tkwiąca u podstaw każdego z tych pomysłów jest jedna.

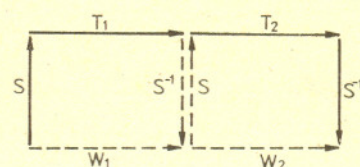
Wydaje się, że ujęcie omawianej idei w ramy pewnej metody heurystycznej jest dostatecznie ogólnym punktem widzenia, dającym możliwość jej efektywnego zastosowania na różnych polach i pozwalającym na systematyzację wielu pozornie odmiennych zagadnień.

Po drugie, sprzężenie jako relacja równoważności posiada szereg matematycznie oczywistych własności, takich jak

- (i)  $W \sim_I W$ ,
- (ii)  $W \sim_S T \implies T \sim_{S^{-1}} W$ ,
- (iii)  $(W \sim_S T \ \& \ T \sim_{S_1} T_1) \implies W \sim_{S_1 S} T_1$  oraz specyficzną dla niej własność:
- (iv)  $(W_1 \sim_S T_1 \ \& \ W_2 \sim_S T_2) \implies W_2 W_1 \sim_S T_2 T_1$ .



Rys. 2



Rys. 3

Własności (i)–(iv) opisują pewne cechy strukturalne metody decydujące o jej użyteczności. Dzięki nim uzyskujemy dodatkowe narzędzia ułatwiające analizę rozpatrywanego zadania. Zwracamy uwagę, że w zastosowaniach trudność bezpośredniego rozwiązania zadania  $W$  jest zwykle skupiona w jednym z elementów  $S$ ,  $T$  lub  $S^{-1}$ . Często, jeśli  $S$  zawiera w sobie „genialnie prosty pomysł”,  $S^{-1}$  wymaga „fundamentalnego twierdzenia z długim dowodem”. W dalszym ciągu prezentujemy pewną liczbę przykładów (głównie matematycznych, z zasady łatwych bądź znanych), których cechą wspólną jest użycie metody okrężnej jako wytrychu pozwalającego otworzyć zamknięte drzwi. Prostota niektórych z nich jest zamierzona i nie powinna skłaniać do uznania samej idei za całkiem trywialną.

## 2. Przykłady zastosowań

**P1. Geodezyjne na stożku.** Zadanie polega na połączeniu punktów  $A$  i  $B$  na powierzchni stożka (na dowolnej powierzchni prostowalnej) najkrótszą linią leżącą w całości na tej powierzchni, tj. linią geodezyjną. W poniższym przepisie na rozwiązanie tego zadania łatwo dostrzec schemat metody okrężnej:

- 1) rozwinąć powierzchnię,
- 2) połączyć odcinkiem prostej punkty  $A$  i  $B$  na rozwiniętej powierzchni,
- 3) zwinąć powierzchnię z powrotem.

**P2. Przekaz komunikatów na odległość.** Bezpośredni przekaz  $W$  komunikatu słownego od nadawcy  $A$  do znacznie oddalonego odbiorcy  $B$  zostaje w praktyce telekomunikacyjnej zastąpiony złożeniem trzech następujących etapów:

- $S$  – przetworzenie mowy na sygnał elektryczny (mikrofon),
- $T$  – przesłanie sygnału elektrycznego (kabel, linia telefoniczna),
- $S^{-1}$  – odtworzenie sygnału akustycznego (głośnik).



W sytuacji, gdy połączenie punktów  $A$  i  $B$  linią przesyłową jest niemożliwe bądź nieopłacalne, etap  $T$  podlega dalszemu rozkładowi, w którym występuje  $S_1$  - emisja fali elektromagnetycznej (nadajnik),  $T_1$  - propagacja fali (ośrodek),  $S_1^{-1}$  - detekcja (odbiornik).  
Ostatecznie mamy więc

$$W = S^{-1}TS = S^{-1}(S_1^{-1}T_1S_1)S = (S_1S)^{-1}T_1(S_1S).$$

Przykład ten ilustruje metodę nakładania pętli okrążeń wyrażoną przez własność (iii).

### P3. Potęgowanie macierzy symetrycznej.

Z własności (iv) wynika natychmiast implikacja (iv')  $W \sim_S T \implies W^m \sim_S T^m$  ( $W^m = \underbrace{WW \dots W}_m$ )

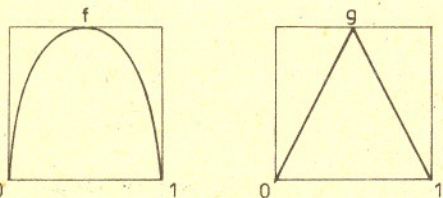
mająca ważne zastosowania przy iteracjach przekształceń, np. przy potęgowaniu macierzy. Dla dowolnej macierzy symetrycznej  $W$  wymiaru  $n$  istnieje taka nieosobliwa macierz  $S$ , że zachodzi związek  $W = S^{-1}TS$ , gdzie  $T$  jest pewną macierzą diagonalną:  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Chcąc obliczyć macierz  $W^m = WW \dots W$ , znajdujemy najpierw macierz diagonalną  $T$ , której potęgę wyznaczamy z łatwością:  $T^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$ . W ostatnim kroku obliczamy potęgę macierzy  $W$  według wzoru  $W^m = S^{-1}T^mS$  w myśl własności (iv').

### P4. Dyskretne układy dynamiczne.

Innym przykładem dotyczącym iteracji przekształceń jest badanie dyskretnych układów dynamicznych na odcinku jednostkowym. Problem polega tym razem na tym, aby mając dane przekształcenie ciągłe  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , np.  $f(x) = 4x(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , opisać trajektorię dowolnego punktu  $x$  z tego odcinka, tj. ciąg  $(f^n(x))_{n=0}^\infty$ . Okazuje się, że znalezienie ogólnego wzoru na  $n$ -krotne złożenie funkcji  $f$  przekracza nasze możliwości nawet w tak prostym przypadku jak przytoczony powyżej. Musimy zatem uciekać się do innych sposobów. Odpowiednio dobrana zmiana zmiennej, tj. bijekcja  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ustala sprzężenie funkcji  $f$  z dostatecznie prostą funkcją  $g$

$$f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi,$$

np.  $g$  może być kawałkami liniowa (piłokształtna) postaci:  $g(y) = 2y$ , gdy  $y < \frac{1}{2}$  i  $g(y) = 2 - 2y$ , gdy  $y \geq \frac{1}{2}$ . Obie funkcje przedstawiono na rysunku 4. W odróżnieniu od  $f$  funkcja  $g$  potęguje się w sposób regularny:  $g^n$  ma także postać piłokształtną o  $2^{n-1}$  „zębach”. (Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do artykułu A. Zdunik „Chaos na odcinku”, *Delta* 7/1984).



**P5. Obliczanie całek oznaczonych.** Obliczanie całek sprowadza się często do zastosowania schematu metody okrężnej. W przypadku całki Gaussa

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

operacja  $W$  polega na obliczeniu wyrażenia  $I$ ,  $S$  oznacza podnoszenie do kwadratu,  $S^{-1}$  pierwiastkowanie,

a  $T$  polega na obliczeniu  $I^2$ , co pozwala na przejście od zadania jedno- do dwuwymiarowego

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dzięki zwiększeniu wymiaru uzyskujemy wzbogacenie zasobu narzędzi, jakimi dysponujemy, w postaci współrzędnych biegunowych  $(r, \theta)$  określonych w  $\mathbf{R}^2$  wzorami

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Teraz rachunek przebiega już łatwo

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi,$$

skąd  $I = \sqrt{\pi}$ .

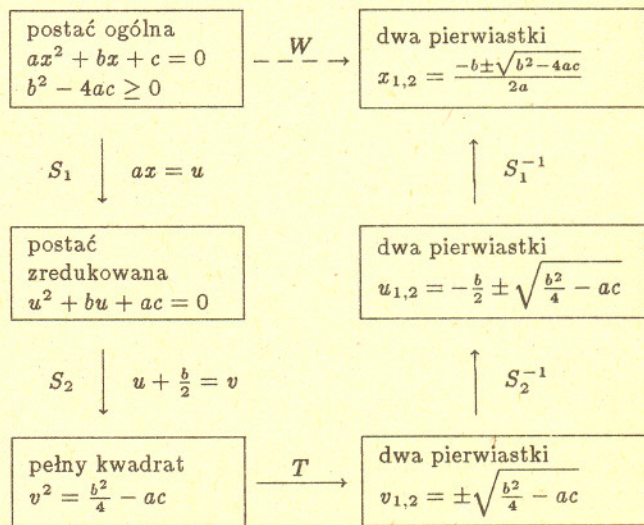
Zauważmy na zakończenie tej serii przykładów, że nawet metoda dowodu „przez zaprzeczenie” (*a contrario*) ujawnia strukturę okrężną. W tym przypadku rolę operacji  $S$  spełnia negacja  $N$ , która jest inwolucją ( $N^2 = Id$ ). Dlatego też w dowodzie tego typu negacja pojawia się dwukrotnie, raz jako  $S$  i raz jako  $S^{-1}$ .

## 3. Metoda okrężna jako heureka

Powyższe przykłady mogą skłonić Czytelnika do postawienia następującego pytania: jak – stojąc w obliczu nie rozwiązanej problemu – dobrać przekształcenie  $S$  pozwalające zainicjować zastosowanie metody. Naszym zdaniem można wyróżnić w sposób naturalny dwie zasady wskazujące przynajmniej na właściwy kierunek poszukiwań przekształcenia  $S$ . Dyrektywy te nazywamy w dalszym ciągu zasadą abstrakcji i zasadą strukturalizacji; wybór jednej z nich sugeruje sam problem stojący przed rozwiązującym.

**3.1. Zasada abstrakcji** polega na sprowadzeniu zadania niejako do „postaci kanonicznej”. Chodzi tu mianowicie o uwypuklenie istoty trudności przez abstrahowanie od zaciemniających szczegółów, co może wiązać się z chwilową rezygnacją z pełnej ogólności rozważań. Dla ilustracji tej dyrektywy przytoczymy dwa przykłady.

**P6. Równanie kwadratowe.** Rozwiązanie równania kwadratowego można sprowadzić (za pomocą liniowej zmiany zmiennej) do pierwiastkowania, co ilustruje poniższy diagram.





**P7. Liniowe równanie różniczkowe.** Naskicujemy sposób rozwiązywania liniowego równania różniczkowego (jednorodnego) o stałych współczynnikach postaci:

$$\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Przyjmując oznaczenia:

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad \text{oraz} \quad b = (b_1, \dots, b_n)^T$$

możemy zapisać to równanie wektorowo:

$$Df(x)b = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zakładamy przy tym, że  $b \neq 0$ . Rozwiązanie takiego równania polega na opisanu zbioru wszystkich funkcji gładkich  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , które spełniają punktowo to równanie. Za pomocą liniowego podstawienia

$$\bar{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

zadanego nieosobliwą macierzą  $A$  wymiaru  $n \times n$ , możemy przeformułować to równanie następująco:

$$D\bar{f}(\bar{x})\bar{b} = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie:  $\bar{b} = Ab$ ,  $\bar{f} = f \circ A^{-1}$ . Jeśli  $A$  jest macierzą takiego obrotu w  $\mathbb{R}^n$ , który nadaje wektorowi  $b$  kierunek pierwszego wektora bazowego  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , tj.

$$\bar{b} = Ab = |b| \cdot e_1,$$

to równanie to zredukuje się do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_1}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Takie równanie spełnione jest przez funkcje, które nie zależą od pierwszej zmiennej  $\bar{x}_1$  (i tylko przez takie funkcje). Zatem rozwiązanie ogólne wyjściowego równania stanowią funkcje postaci:

$$f = \bar{f} \circ A,$$

gdzie  $\bar{f}$  jest dowolną funkcją gładką niezależną od pierwszej zmiennej.

**3.2. Zasada strukturalizacji** polega na takim przeformułowaniu problemu, które wzbogaca ubogie – lub ujawnia ukryte – własności strukturalne zadania. Dobrze ilustruje to przykład 5, w którym przejście do wyższych wymiarów umożliwiło nam skorzystanie z narzędzi nie mających jednowymiarowych odpowiedników. Aby lepiej wyjaśnić powyższe lakoniczne streszczenie tej dyrektywy, prezentujemy kolejne dwa przykłady.

**P8. Szereg liczbowy.** Mamy wyznaczyć sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ . Ponieważ szeregi funkcyjne mają bogatszą teorię niż liczbowe, wprowadzimy dodatkowy parametr  $x$  kładąc

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

Szereg powyższy jest (jako szereg potęgowy) bezwzględnie zbieżny i różniczkowalny na przedziale  $(-2, 2)$ . Wyjściowe zadanie polega w tym kontekście na znalezieniu wartości  $S(1)$ . Należy zauważyć, że szereg pochodnych jest szeregiem geometrycznym, a więc jego suma może być jawnie obliczona:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2-x},$$

$$\text{skąd } S(x) = \int_0^x S'(u) du = \int_0^x \frac{du}{2-u} = -\ln(2-x) + \ln 2.$$

Mamy więc ostatecznie  $S(1) = \ln 2$ .

Czytelnik z łatwością dopatry się tu schematu dwustopniowego  $W = S_1^{-1} S_2^{-1} T S_2 S_1$ , w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$W$  – sumowanie szeregu wyjściowego,

$S_1$  – wprowadzenie parametru,

$S_2$  – różniczkowanie,

$T$  – sumowanie szeregu geometrycznego,

$S_2^{-1}$  – całkowanie,

$S_1^{-1}$  – usunięcie parametru (obliczenie wartości funkcji w punkcie).

**P9. Trójkąty pitagorejskie.** Ten klasyczny problem polega na opisanu zbioru wszystkich trójek  $(a, b, c)$  liczb całkowitych, które spełniają wzór Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pomijając jedno oczywiste rozwiązanie – trójkę trywialną  $(0, 0, 0)$  – wszystkie pozostałe spełniają równanie

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Dla względnie pierwszych  $a, b, c$  problem sprowadza się zatem do opisanu zbioru  $X$  punktów okręgu jednostkowego o obu współrzędnych wymiernych

$$X = S^1 \cap \mathbb{Q}^2.$$

Nasuwa to nam myśl znalezienia takiej parametryzacji okręgu  $S^1$ , przy której wszystkie (i tylko takie) punkty będą wyróżnione. Do takiej parametryzacji prowadzą znane tożsamości trygonometryczne

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Mianowicie w interesującej nas sytuacji tangensy te są liczbami wymiernymi. Szukamy więc takich liczb wymiernych  $w$ , by

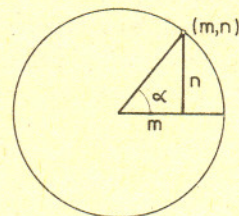
$$\cos 2\alpha = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2w}{1 + w^2},$$

a zatem szukamy rozwiązań równania

$$\left(\frac{1 - w^2}{1 + w^2}\right)^2 + \left(\frac{2w}{1 + w^2}\right)^2 = 1,$$

czyli

$$(1 - w^2)^2 + (2w)^2 = (1 + w^2)^2.$$



Rys. 5

Jeśli więc  $w = \frac{m}{n}$ , to mamy

$$(n^2 - m^2)^2 + (2nm)^2 = (n^2 + m^2)^2.$$

Zatem wszystkie względnie pierwsze trójki  $(a, b, c)$ , spełniające wzór Pitagorasa, są postaci

$$(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2),$$

a wobec tego wszystkie takie trójki to

$$(k(n^2 - m^2), 2knm, k(n^2 + m^2)), \quad \text{dla } k, n, m \in \mathbb{N}$$

(aby się przekonać o konieczności wprowadzenia współczynnika  $k$ , wystarczy rozpatrzyć trójkę  $(9, 12, 15)$ ).



## 4. Uwagi końcowe

Na zakończenie wymienimy w telegraficznym skrócie kilka hasłowych przykładów. Interpretacje ich, w kontekście metody okrężnej, pozostawiamy bardziej zaawansowanym Czytelnikom w charakterze pożytecznego ćwiczenia. A oto zapowiedziane przykłady:

**P10.** Znajdowanie rozwiązań równań różniczkowych (transformata Fouriera, równanie algebraiczne, odwrotna transformata Fouriera (wzbogacona o teorię całek osobliwych)).

**P11.** Dowody istnienia rozwiązań równań różniczkowych (przestrzenie Sobolewa (Biesowa, inne), dowody dla rozwiązań uogólnionych, twierdzenia „o włożeniu” (Sobolewa, inne)).

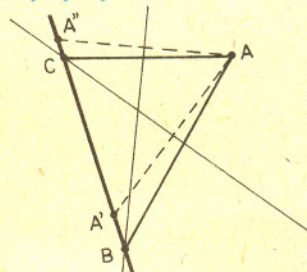
**P12.** Obniżanie rzędu układu równań (układ równań Lagrange’a, inwolutywne przekształcenie Legendre’a, wspaniale symetryczny układ równań Hamiltona).

Na tym zakończymy prezentację zebranych przykładów w nadziei, iż stanowią one dostateczną ilustrację metody okrężnej.

Autorzy pragną wyrazić serdeczne podziękowania prof. Z.A. Melzakowi z University of British Columbia w Vancouver, Kanada, za jego uwagi na temat heurystyki matematycznej w ogóle, a w szczególności metody okrężnej, które były inspiracją do napisania niniejszego tekstu. Nazwa „metoda okrężna” jest próbą znalezienia polskiego odpowiednika dla angielskiego terminu *bypass* użytego w omawianym kontekście przez prof. Melzaka w jego interesującej książce pt. *Bypasses. A simple approach to complexity*, J. Wiley and Sons, 1983, do której odsyłamy Czytelników zainteresowanych rozwinięciem poruszonych tematów.



**Rozwiązanie zadania M 543.** Niech  $A$  będzie danym wierzchołkiem. Przekształcając  $A$  przez symetrię względem każdej z danych dwusiecznych otrzymujemy punkty  $A'$  i  $A''$ , które leżą na prostej zawierającej bok trójkąta. W oczywisty sposób znajdujemy  $B$  i  $C$ .



Konstrukcja ta jest możliwa, jeśli dwusieczne dzielą płaszczyznę na kąty ostre.



**Rozwiązanie zadania F 268.** Ocenę można łatwo przeprowadzić dla cząstek opuszczających słup ze średnią prędkością

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

skierowaną prostopadle do powierzchni słupa. Pole magnetyczne w pobliżu powierzchni słupa (walca) wynosi

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

W tym polu cząstki wylatujące z obszaru wysokiej temperatury będą poruszać się po okręgu, którego promień otrzymamy z relacji

$$\frac{mv^2}{r} = evB$$

Stąd otrzymujemy

$$I = \frac{2\pi R}{\mu_0 e r} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ A.}$$

## Patrz w niebo

Fizyka cząstek elementarnych coraz częściej znakomicie wspomaga astronomię – nawet więcej: współczesna astronomia bez fizyki cząstek elementarnych nie mogłaby istnieć. Przecież choćby tak podstawowa sprawa, jak „dlaczego gwiazdy świecą”, zawdzięcza swoje wyjaśnienie właśnie rozwojowi fizyki mikroświata. Korzyści w drugą stronę są zresztą też oczywiste, mianowicie to Wszechświat tu i ówdzie stwarza cząstkom elementarnym takie warunki, jakich fizycy długo jeszcze (albo i nigdy) nie wytworzą w żadnym laboratorium.

Astronomowie i fizycy są jednakowo zainteresowani neutrinami. Te znane od dawna cząstki są nadal tak tajemnicze, że nawet nie ma pewności, czy ich masa jest zerowa czy nie. A to ma ogromne znaczenie dla przyszłych losów Wszechświata. Gdyby masa neutrin była dostatecznie duża, to znaczyłyby, że gęstość Wszechświata jest większa niż nam się teraz wydaje, może nawet większa od krytycznej, tzn. obecne rozszerzanie się Wszechświata może kiedyś ustanie i zacznie się jego kurczenie. Tak więc masa neutrin może mieć znaczenie wręcz „ostateczne”.

Ale ciekawych zagadnień nie trzeba szukać aż tak daleko. Nasze spokojne i pocziwe skądinąd Słońce kryje jeszcze niejedną zagadkę. Jak wiadomo, Słońce emituje mniej neutrin, niż należałoby oczekiwać na podstawie naszej aktualnej o nim wiedzy. Ogromna większość neutrin słonecznych powstaje w jednej z bocznych gałęzi reakcji proton-proton, w której produkowana jest głównie energia. Uważa się, że aby teoretyczny strumień neutrin był równy obserwowanemu, temperatura centralna Słońca powinna być nieco niższa niż to wynika ze współczesnych modeli gwiazdy. Tempo produkcji neutrin w owej bocznej gałęzi cyklu p-p jest, na szczęście, bardzo czułe na temperaturę, można więc uzgodnić je z obserwowanym strumieniem neutrin niewiele zmieniając tempo produkcji samej energii. I wszystko byłoby w porządku, gdyby znalazł się rozsądny powód, by temperaturę centralną obniżyć.

Otóż powód taki został zaproponowany. Amerykańscy fizycy, William Press i David Spergel, wysunęli hipotezę, że pewne cząstki przewidywane przez nie sprawdzone dotychczas teorie w rodzaju „wielkiej unifikacji” czy „supersymetrii” mogą rozwiązać ten problem. Cząstki te, zwane kosmionami lub wimpami (od *Weakly Interacting Massive Particles* – słabo oddziałujące masywne cząstki), obecne w Słońcu w ilości jedna na bilion innych, ułatwiałyby transport energii z wnętrza Słońca. W rezultacie Słońce mogłoby mieć obserwowaną moc przy nieco niższej temperaturze wnętrza i problem neutrin zostałby rozwiązany.

Oczywiście, to co tu powiedzieliśmy, jest niesłychanie gołosłowne i Czytelnik nadal nie wie, „jak jest naprawdę”. Ale nie wiedzą tego również rozliczni specjaliści i zresztą nie w tym rzecz. Nierozstrzygniętych zagadek jest bez liku, a chciałem na przykładzie słonecznych neutrin pokazać, jak ważny i „interdyscyplinarny” może być marginesowy, zdawałoby się, problem pochodzący z naszego najbliższego otoczenia.

dr Tomasz KWAST



# mata delta



## Oko



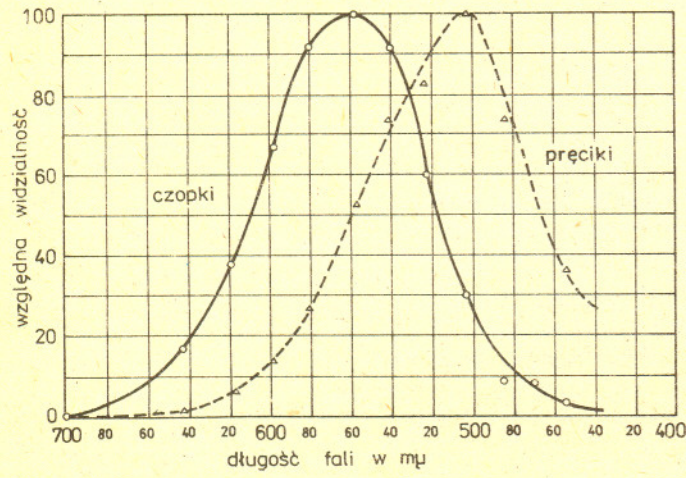
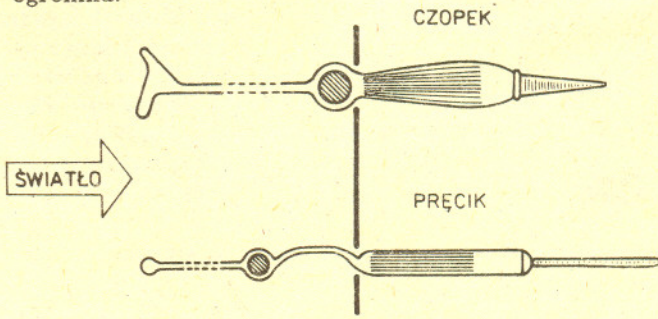
Ruch oczu jest warunkiem koniecznym, aby widzieć. Gdy obserwujemy przedmiot, poruszamy oczami. Ruch oczu odbywa się skokowo. Jeżeli oczy zatrzymałyby się na jakimś przedmiocie, to po kilku sekundach zanikłyby impulsy przekazywane do mózgu. Okazuje się, że powstawanie impulsów jest możliwe jedynie przy zmianach natężenia światła padającego na receptory. Dlatego porażenie mięśni gałki ocznej powoduje ślepotę, nawet przy sprawnym oku.

Miejsce, w którym do gałki ocznej wnika nerw wzrokowy, nazywa się plamką ślepą – padające tam fotony nie są rejestrowane. Miejsce najbardziej wrażliwe na światło zwane jest plamką żółtą. Człowiek ma jedną taką plamkę (w każdym oku). Tyleż mają ptaki śpiewające, gołębie, kury czy dzięcioły. Ale już dwie mają ptaki drapieżne, jerzyki, zimorodki i papugi. Rekordzistami są jaskółki i rybitwy – mają po trzy żółte plamki.

W plamce żółtej (punkcie, przez który przechodzi oś optyczna oka) znajdują się same czopki. Jest to najbardziej czuły obszar widzenia barwnego. Gdy chcemy zobaczyć coś dokładnie, staramy się, aby obraz oglądanego przedmiotu padał na plamkę żółtą. Ale w ciemności, gdy patrzymy „na wprost”, nasze widzenie nie jest tak ostre, jak przy patrzeniu na bok. Słabo oświetlone obiekty można lepiej zobaczyć patrząc na nie z boku, gdyż w plamce żółtej nie ma czulszych pręcików.

Największe zagęszczenie czopków w siatkówce człowieka wynosi 20 sztuk na 100  $\mu\text{m}^2$ . W siatkówce myszolewa na tej samej powierzchni zdarza się ich do 100 sztuk.

Oko jest wspaniałym przyrządem optycznym. Potrafi przystosować się do dużego, jak i małego natężenia światła. Możemy obserwować przedmioty oświetlone jaskrawym światłem słonecznym, ale też możemy postrzegać przedmioty w ciemnościach, przy milionach razy słabszym natężeniu światła. Żaden aparat fotograficzny nie może konkurować z takim przyrządem. Tęczówka zmieniająca średnicę źrenicy pozwala tylko w niewielkim stopniu regulować strumień światła wpadającego do oka. Tak duża zdolność oka do przystosowania się do zmian oświetlenia jest możliwa dzięki złożonej budowie siatkówki, na której powstają obrazy oglądanych przedmiotów. Składa się ona z dwóch rodzajów receptorów - pręcików i czopków. Ich liczba jest ogromna.



Liczba czopków oceniana jest na kilka milionów, a pręcików - na kilkadziesiąt milionów. Czopki wykonują swe funkcje przy dobrym oświetleniu i umożliwiają widzenie barwne. Przy słabym oświetleniu oko przełącza się na odbiór czulszymi pręcikami, które pozwalają dostrzegać jedynie odcienie szarości. Dlatego też o zmierzchu wszystko wydaje się nam szare. Oczywiście, to przełączenie nie jest gwałtowne. Wraz ze spadkiem oświetlenia zmienia się też stopniowo czułość oka na barwy. W ciągu dnia oko jest najbardziej czułe na światło zielone o długości fali 560 nm. O zmroku maksimum czułości przesuwa się w stronę fal krótszych i przypada na fale o długości 510 nm.



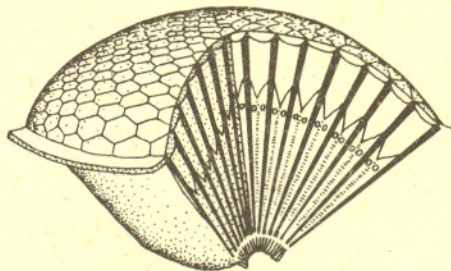
Wiedząc o tym możemy zrozumieć szereg zjawisk. Być może niektórzy z Was zwrócili uwagę, że przedmioty żółte i czerwone, bardzo dobrze widoczne w świetle dziennym na tle zielonych czy niebieskich, o zmroku wydają się znacznie ciemniejsze, prawie czarne. Obserwacje te możecie przeprowadzić szczególnie teraz wychodząc do ogrodu i obserwując zmiany postrzeganych natężeń barw kwiatów i liści o zachodzie Słońca. W ciągu dnia żółte i czerwone kwiaty wydają się jaśniejsze od liści. Po zachodzie Słońca liście wydają się jaśniejsze od kwiatów. Odwrotny efekt obserwuje się dla kwiatów niebieskich i fioletowych. Przez teleskopy prawie zawsze widzimy „biało-czarne” obrazy słabych mgławic. Ale na kolorowych zdjęciach widać barwy, jakich nikt okiem nie obserwował. Nie są to barwy sztuczne, po prostu natężenie światła jest zbyt małe, aby zareagowały na nie czopki w naszym oku. Omawiane zjawisko nosi nazwę efektu Purkiniego.

Czy zastanawiałeś się, dlaczego oko nie jest czułe na promieniowanie elektromagnetyczne spoza zakresu światła widzialnego, tj. od 400 do 760 nm? Promieniowanie o długości fali mniejszej niż 400 nm jest niebezpieczne dla oka. Rogówka i soczewka pochłaniają to promieniowanie chroniąc przed nim siatkówkę. Z kolei kwanty promieniowania podczerwonego o długości fali większej niż 760 nm mają zbyt małą energię, aby pobudzić receptory.

Prawdę mówiąc lepiej, żeby oko nie było czułe na podczerwień. Powód jest bardzo prosty. Każdy przedmiot nie tylko pochłania, ale i emituje światło. Ciało nasze, w tym i oko, emituje światło, którego maksimum przypada na fale o długości 9000 nm. Aby uprościć analizę, potraktujmy nasze oko jako ciało doskonale czarne ogrzane do temperatury 310 K (37° C). Według prawa Stefana-Boltzmana natężenie promieniowania  $E$  jest proporcjonalne do  $T^4$  i wynosi 510 W/m<sup>2</sup>. Stąd strumień światła emitowany przez wewnętrzną warstwę oka, której powierzchnia wynosi około 17 cm<sup>2</sup>, jest równy  $\Phi = ES = 0,867$  W. Dla porównania, całkowita moc świecy w zakresie widzialnym jest rzędu 1 W. W odległości 1 m od świecy strumień światła wpadający do oka przez źrenicę o promieniu 1 mm wynosi  $\Phi = 1 \text{ W} \cdot (10^{-3} \text{ m}/1 \text{ m})^2 = 10^{-6}$  W. Jest więc milion razy słabszy od strumienia emitowanego przez oko. Oko samo by się oślepiło!

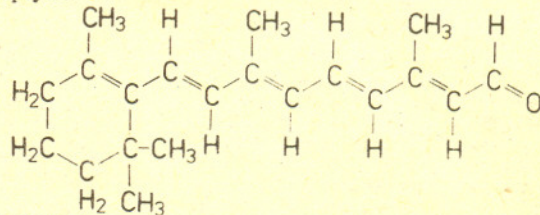
Na podstawie: Wikientij Bułat *Zjawiska optyczne w przyrodzie*.

Owady mają oczy pojedyncze lub złożone, przy czym niektóre (np. część motyli, pluskwiaki, karaluchy, pewne muchy) mają oczy i takie, i takie. Oko złożone składa się z różnej liczby pojedynczych oczek (od 13 u much krwiozerczych do 12 746 u ważek). Natomiast każde z pojedynczych oczek ma dokładnie 7 komórek siatkówki (receptorów światła).



Złożone oczy owadów są dwóch rodzajów: apozycyjne i superpozycyjne. Te pierwsze składają się z wielkiej liczby specjalnych komórek, zwanych fasetkami (ommatidia), ułożonych stożkowo na powierzchni kulistej. Komórki wzrokowe znajdują się w głębi fasetek i dlatego odbierają światło wtedy, gdy pada wzdłuż osi optycznej lub pod niewielkim do niej kątem. Odległość od źródła światła owady określają na podstawie liczby fasetek, które odbierają światło. Układ fasetek pozwala owadom dosyć dokładnie ocenić prędkość poruszania się przedmiotów. Oko złożone owadów posłużyło za wzór do budowy prostego przyrządu do szybkiego oceniania prędkości samolotów. W oczach superpozycyjnych błony oddzielające poszczególne oczka są przezroczyste, co daje lepsze wykorzystanie światła, ale psuje ostrość widzenia.

Bodziec energetyczny, powstający w przeciku, gdy padnie na niego światło, to energia wyzwalamąca się w reakcji (podobnej do fotosyntezy), w której rodopsyna (purpura wzrokowa) przekształca się na retinen i białko zwane opsyną. Nerw wzrokowy przekazuje ten bodziec do mózgu. W czopkach proces ten przebiega podobnie, tylko substancja przekształcana jest inna – jodopsyna.



Struktura retineny.

Poszczególne komórki siatkówki produkują bodziec energetyczny już po padnięciu na nią jednego fotonu. Jednak nerw wzrokowy przekazuje bodziec dalej dopiero wtedy, gdy otrzyma jednocześnie sygnał od czterech (a czasem dopiero od dziesięciu) sąsiadujących komórek.

Widzenie barw opiera się na obecności w czopkach barwników pochłaniających światło o pewnych długościach fali. Czopek reaguje zatem tylko na światło barwy różnej od obecnych w nim pigmentów. Ciekawe, że nośnikami pigmentów są obecne w czopkach kropelki tłuszczu.

Najbardziej rozpowszechnionym poglądem na widzenie barwne jest teoria, w myśl której istnieją tylko trzy rodzaje czopków, odpowiadające trzem podstawowym kolorom – jak w kolorowej telewizji.

Nie wszystkie oczy mają zdolność akomodacji, regulowania ostrości widzenia. U ssaków ostrość reguluje ciało rzęskowe zmieniające kształt soczewki. U głowonogów regulacja ostrości przebiega jak w aparacie fotograficznym – przez zmianę odległości soczewki i siatkówki (oko staje się głębsze lub płytsze). Ptaki na ogół dysponują obiema metodami akomodacji.



# Jeszcze jedna własność trójkątów równobocznych

Mgr Sławomir CYNK

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

### NOWY RODZAJ PAMIĘCI W NOWYM KOMPUTERZE

Steve Jobs — współzałożyciel znanej firmy komputerowej Apple i współtwórca popularnego mikrokomputera Macintosh jest obecnie właścicielem kolejnej firmy komputerowej NeXT. W październiku 1988 r. Jobs zaprezentował w USA pierwszy mikrokomputer opracowany przez NeXT. Jest on oparty na nowym, 32 bitowym mikroprocesorze Motoroli 68030 (25 MHz) z koprocesorem 68882 i zawiera w wersji standardowej pamięć 8 Mb (megabajtów). Do tego wszystkiego dołączony jest programowalny cyfrowy przetwornik sygnału — Motorola DSP56001 (20 MHz). Natomiast dla fizyka najciekawszą rzeczą w komputerze NeXT jest nowy rodzaj magnetooptycznego zapisu danych po raz pierwszy pojawiający się w sprzedaży. Dotychczas dostępne były dwa rodzaje optycznych dysków. Dyski, z których można tylko odczytywać dane (CD ROM), oraz dyski, na których można dane raz zapisać i wielokrotnie odczytywać (WORM). Na termomagnetooptycznym dysku zainstalowanym w komputerze NeXT możliwy jest zarówno zapis, jak i usuwanie wprowadzonych danych. Dyski pokryte są cienką warstwą aluminium oraz warstwą optycznie aktywnego materiału magnetycznego. Może to być bizmutek manganu MnBi, związki europu EuS i EuSe lub bardziej skomplikowane granaty magnetyczne zbudowane z samaru, itru, galu, żelaza i tlenu. Bardzo krótki, silny impuls światła lasera padający na niewielki obszar magnetyka (średnica wiązki może wynosić kilka mikrometrów) podgrzewa go powyżej tzw. temperatury Curie niszcząc istniejący zapis magnetyczny. W trakcie stygnięcia włączane jest pole magnetyczne, skierowane prostopadle do powierzchni dysku. W podgrzanych punktach powstaje trwałe, lokalne namagnesowanie odpowiadające zapisaniu informacji 0. Następnie kierunek pola magnetycznego zostaje odwrócony na przeciwny i laser ponownie podgrzewa wyróżnione punkty zapisując w tych punktach informację 1. Takich elementarnych komórek pamięci na 5¼ calowym dysku można obecnie umieścić około kilku miliardów. Całkowita pojemność dysku firmy NeXT wynosi więc 256 Mb plus dodatkowe 30% przeznaczone na zapisy kontrolne. Odczytywanie dysku wykonywane jest przez słabą spolaryzowaną wiązkę tego samego lasera. Wskutek tzw. zjawiska Faradaya płaszczyzna polaryzacji wiązki przechodzącej przez magnetyk i odbitej od aluminium ulega skręceniu zależnie od lokalnego namagnesowania. Zapis 0 lub 1 odpowiada przeciwnym kierunkom skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Odbite światło analizuje układ zbudowany z polaryzatora i detektora. Należy sądzić, że ten nowy rodzaj zapisu termomagnetooptycznego zastąpi wkrótce szeroko obecnie stosowany, ale bardziej wrażliwy, zapis magnetyczny.

Uczniom szkół średnich, przygotowującym się do egzaminu dojrzałości, znane jest zadanie:

Wyznaczyć wszystkie trójkąty, w których kąty tworzą ciąg arytmetyczny, a boki ciąg geometryczny.

Rozwiązanie nie jest trudne. Co się jednak stanie, gdy ktoś „przypadkowo” przestawi w treści zadania dwa słowa i sformułuje inny problem:

Wyznaczyć wszystkie trójkąty, w których kąty tworzą ciąg geometryczny, a boki ciąg arytmetyczny.

Otrzymane w ten sposób zadanie jest trudniejsze od oryginalnego i na maturę raczej się nie nadaje. Aby je rozwiązać, zajmijmy się zupełnie innym problemem.

Każdy, kto choć raz widział sinusoidę, wie, że funkcja „sinus” jest w przedziale  $(0, \pi)$  wklęsła (lub, jak niektórzy mówią, „wypukła do góry”). Oznacza to, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in (0, \pi)$  zachodzi nierówność

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Okazuje się, że prawdziwa jest podobna zależność dla średniej geometrycznej. Sformułujemy ją w postaci analogicznej nierówności, prawdziwej dla dowolnych liczb  $x, y \in (0, \pi)$

$$\sin\sqrt{xy} \geq \sqrt{\sin x \sin y}.$$

Zanim jednak udowodnimy tę nierówność, wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\alpha \in (0, 1)$  funkcja

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin \alpha t}$$

jest w przedziale  $(0, \pi)$  funkcją malejącą. Różniczkując funkcję  $g$  uzyskujemy

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\sin \alpha t \cdot \cos t - \alpha \sin t \cdot \cos \alpha t}{(\sin \alpha t)^2} = \\ &= \frac{1}{(\sin \alpha t)^2} \left( (1 - \alpha) \sin t \cdot \cos \alpha t - (\sin t \cdot \cos \alpha t - \sin \alpha t \cdot \cos t) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(\sin \alpha t)^2} (1 - \alpha) t \left( \frac{\sin t}{t} - \frac{\sin(1 - \alpha)t}{(1 - \alpha)t} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ  $\frac{1}{(\sin t)^2} (1 - \alpha) t > 0$ , a funkcja  $\frac{\sin t}{t}$  jest malejąca w przedziale  $(0, \pi)$ , więc pochodna funkcji  $g$  jest w przedziale  $(0, \pi)$  niedodatnia, czyli funkcja  $g$  jest w tym przedziale malejąca.

Możemy teraz przejść do dowodu naszej nierówności.

Niech  $x, y \in (0, \pi)$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $x \leq y$ . Liczba  $\alpha = \sqrt{\frac{x}{y}}$

należy do przedziału  $(0, 1)$ , więc funkcja  $g(t) = \frac{\sin t}{\sin \alpha t}$  jest w przedziale  $(0, \pi)$  malejąca.

Ponieważ  $\sqrt{xy} \leq y$ , więc  $g(\sqrt{xy}) \geq g(y)$ , czyli

$$\frac{\sin\sqrt{xy}}{\sin x} \geq \frac{\sin y}{\sin\sqrt{xy}}.$$

Z ostatniej zależności, po prostych przekształceniach, otrzymujemy żadaną nierówność.

A teraz wróćmy do podanego na początku zadania.

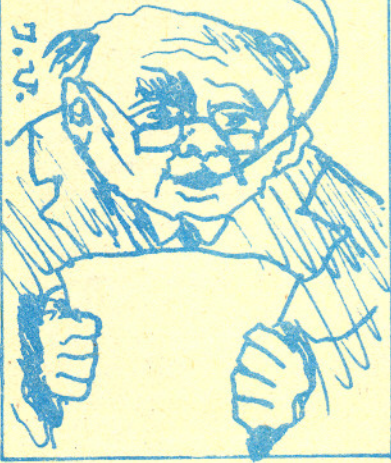
Niech  $A, B, C$  będą kątami, a  $a, b, c$  bokami trójkąta o zadanych własnościach, wypisanymi w kolejności od największego do najmniejszego. Wtedy  $2b = a + c$ ,  $B = \sqrt{A \cdot C}$  oraz, na podstawie twierdzenia sinusów,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

Korzystając z wypisanych powyżej faktów otrzymujemy

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B = 2 \sin(\pi - B) = 2 \sin(A + C).$$



NINIEJSZYM  
PRAGNĘ ZADAĆ  
KŁAM PLOTKOM,  
ŻE TRÓJKĄT  
MAKZEŃSKI  
I BERMUDZKI,  
TO TRÓJKĄTY  
RÓWNOBoczNE



Równość tę możemy, stosując znane wzory, przekształcić w następujący sposób

$$2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cdot 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2},$$

czyli

$$\cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \cos \frac{A+C}{2} = \\ &= \cos \frac{A-C}{2} - \cos \frac{A+C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Ale na mocy udowodnionej nierówności wiemy, że

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \left( \sin \sqrt{\frac{A}{2} \cdot \frac{C}{2}} \right)^2 = \left( \sin \frac{B}{2} \right)^2,$$

więc

$$\sin \frac{B}{2} \leq 2 \left( \sin \frac{B}{2} \right)^2,$$

skąd mamy

$$\sin \frac{B}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad B \geq \frac{\pi}{3}.$$

Z drugiej strony  $A+B+C = \pi$ . Jednocześnie  $A+C \geq 2\sqrt{AC}$  (przy czym równość zachodzi jedynie dla  $A=C$ ), a zatem

$$\pi = A+B+C \geq 2\sqrt{AC} + B = 3B \geq \pi,$$

więc  $A+C = 2\sqrt{AC}$ . Otrzymujemy stąd, że

$$A = C = B = \frac{\pi}{3}.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że jedynym trójkątem, w którym boki tworzą ciąg arytmetyczny, a kąty ciąg geometryczny, jest trójkąt równoboczny.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 541.** Wykazać, że istnieje przekształcenie afiniczne płaszczyzny przeprowadzające narysowany obok sześciokąt na sześciokąt foremny.

Rozwiązanie na str. 13

**M 542.** Udowodnić, że dla każdego  $x$  rzeczywistego

$$e^x \leq x + e^{x^2}.$$

Rozwiązanie na str. 14

**M 543.** Skonstruować trójkąt mając dany wierzchołek i dwie proste zawierające dwusieczne nie przechodzące przez niego.

Rozwiązanie na str. 7

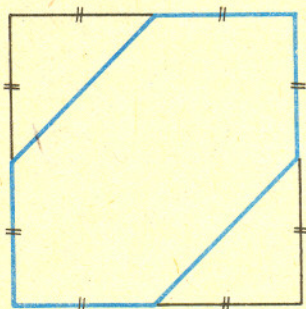
Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 268.** Jednym ze sposobów otrzymywania wysokich temperatur, niezbędnych do przeprowadzenia kontrolowanej reakcji termojądrowej, jest tzw. magnetyczna termoizolacja. Ucieczka szybkich cząstek ze strefy o wysokiej temperaturze jest ograniczona polem magnetycznym. Ocenic wielkość natężenia prądu w słupie wyładowania gazowego o promieniu 3 cm niezbędną do tego, aby elektrony mające prędkość równą średniej kwadratowej prędkości ruchu termicznego, odpowiadającego temperaturze  $T = 10^6$  K, nie były w stanie oddalić się od powierzchni słupa na odległość większą niż  $r = 3 \cdot 10^{-3}$  cm.

Rozwiązanie na str. 7

**F 269.** Prostoliniowy przewodnik znajduje się nad nadprzewodzącą płaszczyzną. W przewodniku płynie stały prąd. Zakładając jednorodną gęstość przewodnika  $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$  kg/m należy znaleźć wysokości nad płaszczyzną, na jakiej zawisnie ten przewodnik, jeśli popłynie w nim prąd  $I = 20$  A.

Rozwiązanie na str. 3





Galileo Galilei (1564 – 1642), w Polsce zwany nieraz z tajemniczych powodów Galileuszem – jeden z największych uczonych wszystkich czasów. Zajmował się astronomią, matematyką i fizyką. Tu nie mogę się oprzeć pokusie zrobienia dygresji: W naszym kraju panuje nieznaną wśród licznych innych nacji zwyczaj tłumaczenia nazwisk. Choć jestem skłonny zgodzić się z przyjętym na świecie zwyczajem tłumaczenia imion przynajmniej najslawniejszych ludzi, to tłumaczenie nazwisk wydaje mi się całkowitym nieporozumieniem. Konia z rzędem temu, kto skłoni Francuzów, żeby się domyślił, że pod mianem Kartezjusza kryje się ich znakomity rodak René Descartes.

Człowiek często kieruje się w życiu uczuciami. Fizycy nie są wyjątkiem. Kochają oni swoje dzieci – teorie fizyczne – i często, podobnie jak wielu ludzi swym prawdziwym dzieciom, wyrządzają im swą ślełą miłością krzywdę.

Uczucie każe nieraz fizykowi zapomnieć, że racją bytu teorii jest zgodność z opisywaną przez nie rzeczywistością, a nie odwrotnie. Dlatego też warto od czasu do czasu spojrzeć krytycznym okiem na nasze wyobrażenia o świecie fizycznym. Dziś obalamy prawo, które sformułował nie byle kto, a mianowicie Galileo Galilei:

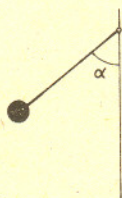
## Izochronizm wahadła

Może przypadkiem, Czytelniku, masz 17 lat? W tym właśnie wieku Galileo Galilei obserwował w katedrze w Pizie wahający się żyrandol i zauważył, że niezależnie od amplitudy wahań ich okres jest zawsze taki sam. Nawiasem mówiąc – do porównywania okresów wahań używał jako stopera ... swojego pulsu. Był to, jak się wydaje, jedyny sukces pedagogiczny jego ojca, który wysłał młodego Galileo na studia medyczne do Pizy w nadziei, że uchroni go przed naukami ścisłymi. Wkrótce jednak skapitulował i wyraził zgodę na studia matematyczne syna, za co powinniśmy mu być wdzięczni.

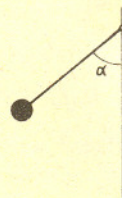
Pozostawmy jednak teraz wiekopomne dzieło życia naszego bohatera własnemu losowi, a zajmijmy się prawem izochronizmu wahadła. Dla uproszczenia rozumowania zajmijmy się wahadłem matematycznym, czyli punktową masą  $m$  zawieszoną na nierozciągliwej nici o długości  $l$ . O prawie tym powiem krótko i zdecydowanie:

## To jest nieprawda.

Gdybyś miał wątpliwości, opierał się na autorytecie podręcznika czy nauczyciela – możesz sam sprawdzić. W tym celu trzeba wykonać dwa identyczne wahadła zawieszając na nitkach o równej długości dwa ciężarki. Wychylamy oba wahadła o ten sam kąt (rys. 1) i jednocześnie puszczaemy. Jeśli starannie odmierzyłeś długość nitki, oba wahadła będą wahać się ze zgodnymi fazami. A teraz uwaga – obalamy prawo izochronizmu. Jedno wahadło wychylamy o mały kąt, a drugie o możliwie duży – jak na rysunku 2.



Rys. 1

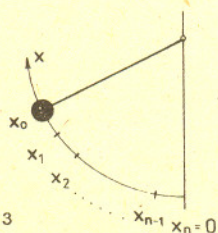


Rys. 2

Już po chwili zauważysz, że wahadła, które początkowo wahały się ze zgodnymi fazami, rozstroją się – wahadło o większej amplitudzie znacznie się opóźnia. W pewnym momencie zauważysz nawet, że fazy obu wahadeł staną się przeciwne! Skoro już przekonałeś się, że prawo izochronizmu jest niesłuszne, zainteresujesz się zapewne,

## Czy to się da obliczyć?

Każdy zapytany o to student fizyki powie Ci natychmiast, że ściśle rozwiązanie równania ruchu wahadła matematycznego nie wyraża się przez funkcje elementarne. Będzie Cię straszyl całkami eliptycznymi, aby odejść w chwale wybitnego specjalisty pozostawiając Cię z nie rozwiązany problemem. Jeżeli nie zrazi Cię kontakt z fachowcem, spróbujesz pewnie zabrać się do rzeczy samodzielnie. Jak? – skoro ściśle się nie da, trzeba uciec się do metody przybliżonej. Ależ to na nic – powiesz – w przybliżeniu ruch wahadła jest ruchem harmonicznym, a ten z kolei jest naprawdę izochroniczny – okres drgań oscylatora harmonicznego nie zależy od amplitudy. To prawda, ale nie upadajmy na duchu. Trzeba znaleźć lepsze przybliżenie. Najprostsze, jakie mogę Ci zaproponować, jest następujące: dzielisz ruch wahadła na pewną liczbę – powiedzmy  $n$  – etapów (rys. 3) od maksymalnego wychylenia  $x_0$  do zera ( $x_n = 0$ ). Jest to tylko 1/4 okresu, ale pozostałe ćwiartki są takie same, więc nie ma potrzeby się nimi zajmować. Oczywiście, droga jest dla każdego etapu taka sama i wynosi 1/n amplitudy  $x_0$ . Czas przebycia każdego etapu znajdziemy dzieląc drogę przez prędkość średnią, którą obliczymy (uwaga – tu robimy przybliżenie!) jako średnią arytmetyczną prędkości na początku i na końcu etapu. Potrzebne prędkości w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  znajdziemy, oczywiście, z zasady zachowania energii. Teraz pozostaje nam tylko dodać czasy przebycia wszystkich etapów, całość pomnożyć przez 4 (bo znaleźliśmy ćwiartkę okresu) i już mamy okres wahań.



Rys. 3

Stwierdzenie, że prawo izochronizmu nie jest słuszne, brzmi bardzo radykalnie. Gdybyśmy chcieli pozbyć się z fizyki wszystkich praw, które w pewnych warunkach nie są zgodne z doświadczeniem, ogromna większość tej nauki ległaby w gruzach. Nie moglibyśmy stosować praw mechaniki klasycznej ani do makroświata (bo przy wielkich prędkościach są niesłuszne), ani do mikroświata (bo tam z kolei obowiązują mechanika kwantowa). Mówiąc więc poważnie, nie należy potępiać w czambuł praw, którym zdarza się grzech niezgodności z doświadczeniem, ale trzeba zdawać sobie sprawę z ich ograniczeń.



## A jak to będzie wyglądać w praktyce?

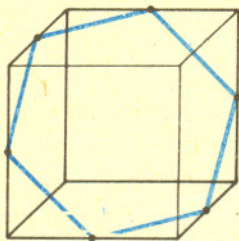
zapytasz teraz. Spróbujmy wyliczyć to dla któregoś, powiedzmy,  $i$ -tego etapu:

	początek etapu	koniec etapu
wychylenie (długość łuku)	$x_{i-1}$	$x_i$
wychylenie kątowe	$\alpha_{i-1} = x_{i-1}/l$	$\alpha_i = x_i/l$
energia potencjalna *	$E_{pi-1} = -mgl \cos \alpha_{i-1}$	$E_{pi} = -mgl \cos \alpha_i$
energia kinetyczna **	$E_{ki-1} = E - E_{pi-1} = mgl(\cos \alpha_{i-1} - \cos \alpha_0)$	$E_{ki} = E - E_{pi} = mgl(\cos \alpha_i - \cos \alpha_0)$
prędkość	$v_{i-1} = \sqrt{2E_{ki-1}/m} = \sqrt{2gl(\cos \alpha_{i-1} - \cos \alpha_0)}$	$v_i = \sqrt{2E_{ki}/m} = \sqrt{2gl(\cos \alpha_i - \cos \alpha_0)}$
prędkość średnia $i$ -tego etapu	$v_{si} = (v_{i-1} + v_i)/2$	
droga	$\Delta x = x_{i-1} - x_i = x_0/n$	
czas dla $i$ -tego etapu	$\Delta t_i = \Delta x/v_{si}$	

\*Zero energii potencjalnej wybrałem w punkcie zawieszenia wahań.

\*\*Energia całkowita równa się energii potencjalnej przy maksymalnym wychyleniu.

### Rozwiązanie zadania M 541.



Wystarczy zauważyć, że nasz sześciokąt jest rzutem prostokątnym sześciokąta foremnego, który z kolei jest przekrojem sześcianu.

```

10 REM **** program "galileo" oblicza okres wahan ****
20 INPUT "przyspieszenie ziemskie";G
30 INPUT "dlugosc";L
40 INPUT "amplituda";X0
50 INPUT "liczba etapow";N
60 T=0
70 FOR I=1 TO N
80 X1=X0-X0/N*(I-1)
90 X2=X1-X0/N
100 V1=SQR(2*G*L*(COS(X1/L)-COS(X0/L)))
110 V2=SQR(2*G*L*(COS(X2/L)-COS(X0/L)))
120 VS=(V1+V2)/2
130 T=T+(X1-X2)/VS
140 NEXT I
150 T=T*4
160 PRINT T
170 GOTO 50
    
```

```

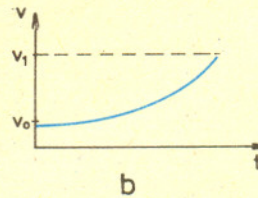
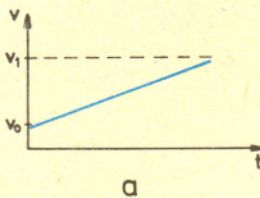
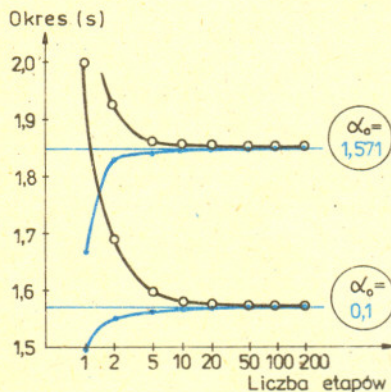
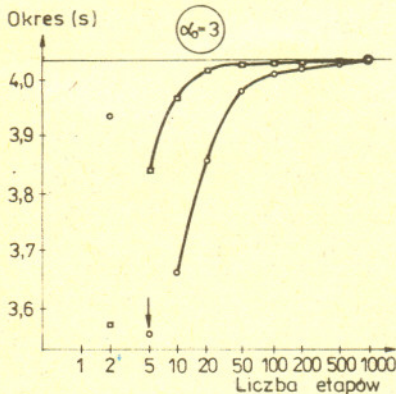
:REM inicjuje liczenie czasu
:REM wychylenie poczatkowe etapu
:REM wychylenie koncowe etapu
:REM predkosc poczatkowa
:REM predkosc koncowa
:REM predkosc srednia
:REM dodaje czas przebycia etapu
:REM bo sa cztery cwiartki
    
```

Jeżeli jesteś cierpliwy, możesz teraz posługując się powyższą tabelką wykonać stosowne obliczenia, na przykład dzieląc amplitudę najpierw na 2, potem 5 i 10 etapów i sprawdzić, czy otrzymany wynik w miarę powiększania liczby etapów ustala się. Gdybyś nie grzeszył cierpliwością, a miał dostęp do komputera, proponuję Ci program w BASICU, który wykona czarną robotę.

Kiedy już upewnisz się, że dzielisz ruch na dostatecznie wiele etapów, aby osiągnąć żadaną dokładność,

możesz zmieniać amplitudę i zobaczyć, jak wpływa ona na okres wahań. Wyniki swoich obliczeń przedstawiam na wykresach.

Widać, że przy amplitudzie kątowej  $\alpha_0 = \pi/2$  okres wahań wydłuża się o 18% w porównaniu z okresem dla małych amplitud, a więc całkiem znacząco. Jeszcze większe zmiany okresu można osiągnąć dla amplitud większych od  $\pi/2$ , ale wtedy ciężarek wahań musiałby być zamocowany na lekkim pręcie, a nie na nitce. Jak widzisz, Czytelniku, zbieżność proponowanej metody nie jest zbyt szybka i gdybyś chciał poznać wartość okresu dla amplitudy różnej od użytych w powyższych rachunkach, osiągnięcie sensownej dokładności bez komputera wymagałoby sporej cierpliwości. Możesz jednak poprawić metodę obliczeń, jeżeli sprytnie przeprowadzisz uśrednianie. Jak skuteczne może być takie ulepszenie, widać na rysunkach (linie kolorowe). Nie zdradzę Ci sposobu uśredniania, jakiego użyłem, aby poprawić zbieżność procedury, ale zwrócę Twą uwagę na pewną wadę średniej prędkości równej  $(v_1 + v_2)/2$ . Ten sposób uśredniania jest ściśły dla ruchu jednostajnie zmiennego. Rysunki przedstawiają zależność prędkości od czasu w ruchu ze stałym (a) oraz rosnącym (b) przyspieszeniem.



Widać z nich, że gdy w ruchu jednostajnie zmiennym żadna z prędkości nie jest uprzywilejowana, to przy rosnącym przyspieszeniu prędkość w czasie ruchu jest bliska prędkości początkowej znacznie dłużej niż prędkości końcowej. Należałoby więc przy uśrednianiu przywiązać większą wagę do tej prędkości, przy której przyspieszenie jest mniejsze. Jak to zrobić? Zaproponuj, Czytelniku, metodę i opisz ją w liście do Redakcji. Może uda Ci się uzyskać szybszą zbieżność niż przedstawiona powyżej. Najciekawsze propozycje wydrukujemy.



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

## Zadania z matematyki nr 191, 192

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**191.** Wyznaczyć liczbę permutacji  $(x_1, \dots, x_{30})$  zbioru  $\{1, \dots, 30\}$  spełniających warunki:

$$x_{i-2} < x_i \text{ dla } 3 \leq i \leq 30, \quad x_{i-3} < x_i \text{ dla } 4 \leq i \leq 30.$$

**192.** Dowieść, że dla każdej trójki liczb dodatnich  $a, b, c$  jest spełniona nierówność

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Zadanie 192 zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1989

Przypominamy treść zadań:

**188.** Czy istnieje sześciokąt wypukły, którego pole  $S$  oraz średnica  $d$  spełniają zależność  $3S > 2d^2$ ?

**184.** Dane  $x_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 44$ );  $\sum x_i = \sum x_i^2 = 44$ . Dowieść, że  $\sum x_i^{44} \geq 44$ .

**183.** Sześciokąty takie istnieją. Oto dwa przykłady:

1) Sześciokąt o wierzchołkach  $A = (20, 0)$ ,  $B = (0, 25)$ ,  $C = (-27, 17)$ ,  $D = (-30, 0)$ ,  $E = (-27, -17)$ ,  $F = (0, -25)$ . Średnica  $d = 50$ ; pole  $S = 1685$ .

2) Do boku  $CE$  pięciokąta foremnego  $ABCEF$  o przekątnej długości  $d$  doklejamy trójkąt równoramienny  $CDE$  ( $|CD| = |DE|$ ) taki, że  $|AD| = d$ . Powstaje sześciokąt o polu równym w przybliżeniu  $0,672 \cdot d^2$ .

Dla obu tych sześciokątów spełniona jest nierówność  $3S > 2d^2$ .

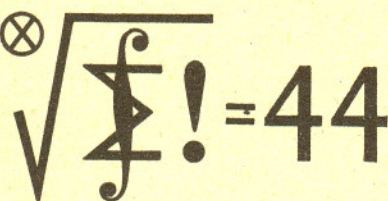
Uwaga. Te przykłady ilustrują następującą ogólniejszą konstrukcję: niech  $A = (a, 0)$ ,  $B = (0, \frac{1}{2}d)$ ,  $D = (a - d, 0)$ ,  $F = (0, -\frac{1}{2}d)$ , gdzie  $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})d \leq a \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}d$  (po to, by długości boków czworokąta  $ABDF$  nie przekraczały  $d$ ); umieszczamy punkty  $C$  i  $E$  odpowiednio w II i III ćwiartce układu współrzędnych „tak daleko, jak się da”, by średnica sześciokąta  $ABCDEF$  nie przekroczyła  $d$  (tj. tak, żeby  $|AC| = |AE| = |BE| = |CF| = d$ ). Można obliczyć, że wówczas  $C = (x, y)$ ,  $E = (x, -y)$ , gdzie  $x = \frac{1}{4}(2a - \lambda d)$ ,  $y = \frac{1}{4}(2\lambda a - d)$ ,  $\lambda = \sqrt{(15d^2 - 4a^2)/(d^2 + 4a^2)}$ , oraz że  $8S = (d^2 + 4da - 4a^2)\lambda + 2d(2a - d)$ . Stosunek  $S/d^2$  przekracza  $2/3$  dla  $a$  z przedziału  $(\alpha d; \beta d)$ , gdzie  $\alpha = 0,335\dots$ ,  $\beta = 0,477\dots$  i osiąga maksimum  $0,67498\dots$  dla  $a = \gamma d$ ,  $\gamma = 0,402\dots$  (wartości przybliżone).

W szczególności, przyjmując  $d = 50$ ,  $a = 20$  (czyli  $a/d = 0,4$ ) otrzymujemy  $x = -26,98\dots$ ,  $y = 17,09\dots$ , co po nieznacznym zaokrągleniu daje pierwszy z podanych wyżej przykładów. Przykład drugi odpowiada wzięciu wartości  $a/d = \frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 0,363\dots$

Nie wiemy, czy wzmiankowane wyżej maksimum w obrębie klasy sześciokątów otrzymanych w wyniku opisanej konstrukcji stanowi globalne maksimum wartości  $S/d^2$  w klasie wszystkich sześciokątów wypukłych.

**184.** Korzystamy z nierówności Bernoulliego  $((1 + t)^k \geq 1 + kt$  dla  $t > -1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \sum x_i^{44} &= \sum x_i(1 + (x_i - 1))^{43} \geq \sum x_i(1 + 43(x_i - 1)) = \\ &= \sum x_i(43x_i - 42) = 43 \sum x_i^2 - 42 \sum x_i = 44. \end{aligned}$$



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 177 ( $WT=1,47$ ) i 178 ( $WT=3,18$ )  
z numeru 10/1988

Grzegorz Zakrzewski - Trzcianka	47,86 pkt
Rafał Latała - Warszawa	43,99 pkt
Zbigniew Surduka - Czechowice	43,71 pkt
Edward Orzechowski - Warszawa	43,68 pkt
Adam Przeździecki - Warszawa	42,85 pkt
Kazimierz Serbin - Sanok	41,76 pkt
Piotr Kumor - Olsztyn	41,16 pkt

Pan Zakrzewski kończy drugie  
okrażenie.



**Rozwiązanie zadania M 542.**  
Przekształćmy nierówność do postaci

$$(*) \quad 1 \leq xe^{-x} + e^{x^2-x}.$$

Pochodna prawej strony wynosi

$$(1-x)e^{-x} + (2x-1)e^{x^2-x};$$

jest równa zero, gdy

$$(**) \quad e^{x^2} = \frac{x-1}{2x-1}.$$

Wykażemy, że jedynym rozwiązaniem  
tego równania jest  $x = 0$ .

Dla  $x < 0$  mamy

$$e^{x^2} > 1 > \frac{x-1}{2x-1},$$

dla  $x > 1/2$  mamy

$$e^{x^2} > 1 > \frac{x-1}{2x-1}.$$

Mamy też dla  $x < 1/2$

$$\frac{x-1}{2x-1} > 1 + x.$$

Funkcja  $e^{x^2}$  jest wypukła, a zatem  
w przedziale  $(0, 1/2)$  jej wartości są  
mniejsze niż wartości funkcji liniowej  
przyjmującej w punktach 0 i  $1/2$  te  
same wartości co  $e^{x^2}$ . Wystarczy teraz  
zauważyć, że

$$e^{(1/2)^2} = e^{1/4} < 4^{1/4} < 1 + \frac{1}{2},$$

by stwierdzić, że na przedziale  $(0, 1/2)$   
mamy

$$e^{x^2} < \frac{x-1}{2x-1}.$$

Jedynym rozwiązaniem  $(**)$  jest  
więc  $x = 0$ . Jedynym punktem, w  
którym prawa strona  $(*)$  może mieć  
ekstremum, jest  $x = 0$ . Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (xe^{-x} + e^{x^2-x}) = \infty,$$

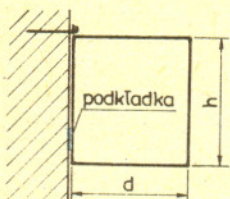
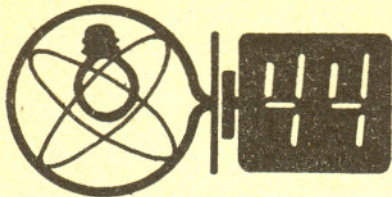
musi to być minimum. Dowód został  
zakończony.

Uwaga. Ciekawe, jaka jest najmniejsza  
stała  $a$ , dla której

$$e^x \leq x + e^{ax^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

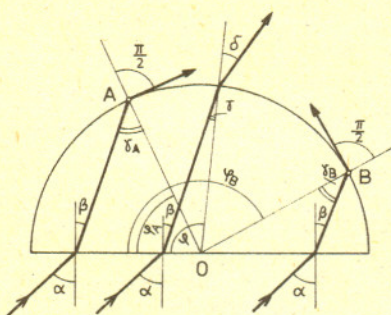
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 75 (WT=1,46) i 76 (WT=2,97)  
z numeru 10/1988

Adam Sikorski	- Lublin	41,39 pkt
Roman Musiał	- Katowice	39,76 pkt
Fawel Perkowski	- Szczecin	37,74 pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	36,17 pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	34,59 pkt
Dziersław Lipniacki	- Lublin	30,12 pkt
Aleksander Surma	- Myszków	29,71 pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	24,86 pkt
Tomasz Wietecha	- Tarnów	22,34 pkt

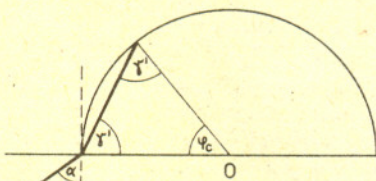
81. Stężenie kwasu siarkowego w roztworze określamy na podstawie jego gęstości. Jeśli  $\rho_w$  oznacza gęstość wody,  $\rho_k$  – gęstość czystego kwasu, natomiast  $s$  – stężenie „wagowe” roztworu (masę kwasu w jednostce objętości roztworu), to gęstość roztworu – przy założeniu, że objętość roztworu jest równa sumie objętości wody i kwasu – wynosi

$$(1) \quad \rho_r = \rho_w + s(\rho_k - \rho_w) / \rho_k.$$

Do wyznaczenia gęstości wykorzystamy pionowe drgania pływającej w cieczy próbki. Zmiana siły wyporu przy wychyleniu takiego pływaka z położenia równowagi o  $\Delta x$  wynosi  $\Delta F = \rho g S \Delta x$ , gdzie  $\rho$  – gęstość cieczy,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $S$  – pole poprzecznego przekroju próbki. Okres drgań pływaka  $T$  obliczamy



Rys. 2



Rys. 3

89. Prostopadłościenną szafkę o wysokości  $h = 0,5$  m i głębokości  $d = 0,4$  m pragniemy zawiesić na dwóch hakach umieszczonych w ścianie. Proste, długie haki stalowe są luźno osadzone w poziomych otworach wywierconych w betonowej ścianie. Szafkę wieszamy za pomocą zaczepów zamocowanych w jej górnych narożach, a dla ustalenia punktów styku „pleców” szafki ze ścianą stosujemy cienkie podkładki (rys. 1), które mogą mieć współczynnik tarcia  $f_1$  od wartości zanedbywalnie małej do 0,75. Jaką wartość współczynnika tarcia należy dobrać i w którym miejscu przytwierdzić podkładki, aby zminimalizować niebezpieczeństwo wyciągnięcia haków ze ściany przez szafkę? Przyjmujemy, że środek ciężkości szafki pokrywa się z jej środkiem geometrycznym, a współczynnik tarcia stali o beton wynosi  $f_2 = 0,5$ . Czy zastosowanie dodatkowych haków podpierających dolną, przysięcienną krawędź szafki mogłoby poprawić sytuację?

90. Czy można tak dobrać wilgotność otoczenia (powietrza) i średnicę kropelek wody, aby krople te całkowicie zamieniały się w parę nie pobierając ciepła z otoczenia? Napięcie powierzchniowe wody w temperaturze 300 K wynosi  $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$ , ciepło parowania wody –  $r = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ .

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1989**

Przypominamy treść zadań:

81. Mając naczynie z kwasem siarkowym nieco rozcieńczonym i drugie z wodą destylowaną, chcemy sporządzić w trzecim naczyniu roztwór kwasu o znanym stężeniu. Jedyne przyrządy pomiarowe, jakim dysponujemy, to zegarek ze stoperem. Ponadto mamy jeszcze długą, wąską próbkę obciążoną u dołu, która w obu cieczach pływa w pozycji pionowej.

W jaki sposób możemy wyznaczyć stężenie sporządzonego roztworu?

82. Równoległa wiązka światła pada na całą płaską powierzchnię szklanego półwalca pod kątem  $45^\circ$ , w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi. Z jakiej części bocznej powierzchni półwalca wychodzi światło, jeśli współczynnik załamania światła dla szkła wynosi  $n$ ?

analogicznie jak dla ciężarka zawieszono na sprężynie, otrzymując wzór

$$(2) \quad T = 2\pi \sqrt{m / (Sg\rho)}.$$

W tym przypadku jednak  $m$  oznacza masę pływaka powiększoną o pewną wielkość, wyrażającą bezwładność samej cieczy (która również ulega przyspieszaniu podczas drgań pływaka). Nie znając wszystkich wielkości we wzorze (2) wyznaczamy gęstość roztworu na podstawie pomiaru okresu drgań pływaka w roztworze ( $T_r$ ) oraz w wodzie ( $T_w$ )

$$\rho_r = \rho_w (T_w / T_r)^2.$$

Ze wzoru (1) uzyskujemy bezpośrednią zależność między okresem drgań pływaka w roztworze kwasu a jego stężeniem.

82. Wiązka promieni załamanych na płaskiej powierzchni półwalca biegnie w szkłe pod kątem

$$\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

względem normalnej do tej powierzchni (rys. 2).

Przez powierzchnię cylindryczną wyjdą ze szkła promienie, dla których kąt padania  $\gamma$  na tę powierzchnię jest mniejszy od kąta granicznego

$$\gamma_g = \arcsin \frac{1}{n}.$$

Z rysunku widać, że skrajne wartości kąta  $\varphi$ , odpowiadające punktom granicznym A i B, są określone przez związki:

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma_g, \quad \varphi_B = \frac{\pi}{2} + \beta + \gamma_g.$$

Stąd znajdujemy przedział kątów  $\varphi$ , dla których światło wychodzi na zewnątrz

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n} - \arcsin \frac{1}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n} + \arcsin \frac{1}{n}.$$

Oczywiście, kąt  $\varphi$  nie może przyjmować wartości większych od  $\pi$ . Z drugiej strony przedział kątów  $\varphi$  ograniczony jest od dołu wartością kąta  $\varphi_c$ , poniżej którego występuje obszar cienia (rys. 3)

$$\varphi_c = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n},$$



# DROBIAZGI

Każdy równoległobok wpisany w prostokąt i mający boki równoległe do przekątnych tego prostokąta ma taki sam obwód. Każdy inny czworokąt wpisany w prostokąt ma obwód większy.

Nowe pomiary wykonane przez satelitę Nimbus 7 wskazują, że rozmiary „dziury ozonowej” nad biegunem południowym będą chyba mniejsze niż w okresie 1982–1987. We wrześniu 1988 r. zanotowano jedynie 15% spadek koncentracji ozonu w porównaniu z 50% spadkiem w tym samym miesiącu w 1987 r. Ozon w górnych warstwach atmosfery spełnia bardzo ważną rolę, gdyż chroni Ziemię przed zbyt intensywnym napromieniowaniem ultrafioletowym.

W czasie każdej zabawy co najmniej dwóch uczestników ma wśród jej uczestników tyle samo znajomych.

Wszystko wskazuje na to, że alfa Oriona – Betelgeuse jest członkiem układu potrójnego, na dodatek otoczonego dyskiem pyłowym. Stwierdzili to francuscy astronomowie Francois i Claude Roddier oraz Margarita Karovska kilka lat temu. Bliższy satelita Betelgeusy obiega ją w odległości rzędu 5 j.a., a dalszy 50 j.a. Natura tych satelitów jest nieznaną – nie mogą to być gorące gwiazdy, gdyż byłoby to widać w widmie układu, a jeżeli są to chłodne gwiazdy (jak sama Betelgeuse), to odróżnienie ich widm może być skrajnie trudne. Odkrycie potrójnego układu Betelgeusy dokonane zostało dzięki teleskopowym obserwacjom naziemnym.

Naukowcom radzieckim udało się wytworzyć substancję plastyczną będącą ferromagnetykiem. Co ciekawsze, nie zawiera ona atomów metali. Wytworzona substancja należy do grupy polidiacetylenów i składa się z długich łańcuchów atomów węgla z naprzemiennymi pojedynczymi, podwójnymi i potrójnymi wiązaniami.

Liczba  $a_{n+1}$  to suma sześciątów cyfr (dziesiętnych) liczby  $a_n$ . Jeśli wystartujemy od liczby  $a_0$  podzielnej przez 3, to ciąg ustabilizuje się na liczbie 153. Wystarczy zauważyć, że jeśli  $a_n > 10\,000$ , to  $a_{n+1} < a_n$ ; jeśli 3 dzieli  $a_n$ , to dzieli też  $a_{n+1}$  i następnie sprawdzić powyżej podane twierdzenie dla liczb  $a_0$  mniejszych od 10 000.

W ciągu ostatnich 8 miesięcy zanotowano około 300 przypadków „wirusów” komputerowych. „Zainfekowanych” było ponad 48 000 komputerów.

Liczbę  $B_n$  ( $n$ -tą liczbę Bella) różnych podziałów na niepuste rozłączne podzbiory zbioru  $n$ -elementowego wyraża wzór

$$B_n = (e^x - 1)^{(n)}(0).$$

O tym, że kawałek magnesu może lewitować nad nadprzewodnikiem (lub nadprzewodnik nad magnesem), wie każdy. Można to czasem zobaczyć w telewizji, można przeczytać o tym też np. w książce Feynmana *Wykłady z fizyki*. Mniej znany jest za to fakt, że pierścień wykonany z nadprzewodnika będzie „wisiał” w horyzontalnym polu magnetycznym. Aby się o tym przekonać, powtórz szkolny rachunek dla ramki z drutu spadającej w poziomo skierowanym polu magnetycznym, a następnie znajdź wynik graniczny dla oporu ramki  $R \rightarrow 0$ .

11 maja 1983 roku kometa IRAS-Araki-Alcock znajdowała się w odległości 7,5 mln km od Ziemi. W tym dniu dwie grupy badaczy odebrały radarowe echo od tej komety. Dokonano tego za pomocą 64-metrowego radioteleskopu w Goldstone (California) i 300-metrowego w Arecibo (Puerto Rico).

Dwa leżące na sferze okręgi przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzna zawierająca jeden z tych okręgów przechodzi przez wierzchołek stożka stycznego do sfery wzdłuż drugiego okręgu.

Lasery i masery emitują zwykle tak olbrzymie ilości fotonów, że w ich zachowaniu nie obserwuje się dyskretnego (kwantowego) charakteru emisji fotonów. W 1985 r. Meschede, Walther i Müller skonstruowali maser składający się z jednego atomu i tak słabego pola elektromagnetycznego, że obecne były jedynie dwa – trzy fotony. Za pomocą tego mikromasera można zmierzyć cykliczną zmianę energii na skutek absorpcji i powtórnej emisji fotonu we wnętrzu masera.

Każda liczba naturalna większa od 77 jest sumą liczb naturalnych, których suma odwrotności równa się 1.

Blaise Pascal wynalazł urządzenie, które (jak się wydaje) powinno być znane „od zawsze”. Mianowicie tarczkę. Było to urządzenie strategiczne, które znacznie wzmocniło siłę armii Ludwika XIV. Pozwalało ono bowiem znacznie sprawniej sypać szanice. Jak każdy wynalazek militarny, przyniósł swojemu twórcy wynagrodzenie wielokrotnie przewyższające jego „cywilne” gratyfikacje.

Supernowa SN 1987A w dalszym ciągu intryguje astronomów i astrofizyków. Obserwacja strumienia neutrin z wybuchu supernowej doskonale zgadzała się z hipotezą powstawania gwiazdy neutronowej. Astronomowie oczekują, że nowo narodzone gwiazdy neutronowe powinny być pulsarami. Jednak do sierpnia 1988 r. nie zaobserwowano pulsara w SN 1987A.



## Szacowanie

Jeżeli oznaczymy boki trójkąta przez  $a, b, c$  i odpowiadające im środkowe przez  $k, l, m$ , to rozpatrując trójkąty takie, jak na rysunku 1, otrzymamy sześć nierówności postaci takiej, jak

$$\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}l > \frac{1}{2}a,$$

co po zsumowaniu daje

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}).$$

Rozpatrując trójkąty takie, jak na rysunku 2, otrzymujemy sześć nierówności postaci

$$a + \frac{1}{2}b > l,$$

które po zsumowaniu dają

$$(\text{suma środkowych}) < \frac{2}{3} \cdot (\text{obwód}).$$

Łącznie zatem mamy

$$(*) \quad \frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}) < \frac{3}{2} \cdot (\text{obwód}).$$

Oszacowaliśmy zatem sumę środkowych przez obwód trójkąta. Czy oszacowanie (\*) można poprawić? Oczywiście, tak. Sumując 3 nierówności (rys. 3) postaci

$$\frac{2}{3}k + \frac{2}{3}l < a$$

poprawiamy współczynnik w dolnym oszacowaniu z  $\frac{1}{2}$  na  $\frac{3}{4}$ . Współczynnik w górnym oszacowaniu też daje się poprawić. Odbijając trójkąt kolejno względem środków boków (jak na rysunku 4) otrzymamy 3 nierówności postaci

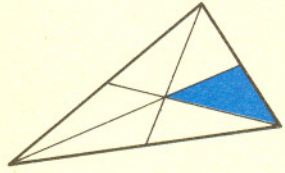
$$a + b > 2m,$$

co poprawia ten współczynnik z  $\frac{3}{2}$  na 1. Zatem nierówność (\*) można zastąpić mocniejszą:

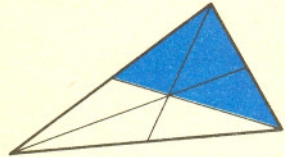
$$\frac{3}{4} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}) < (\text{obwód}).$$

A czy to oszacowanie można poprawić? „Dolny” współczynnik na pewno poprawić się nie da. Rozpatrując ciąg coraz to bardziej płaskich trójkątów równoramiennych o stałej podstawie  $a$  (rys. 5) stwierdzamy, że suma środkowych może być dowolnie bliska trzem czwartym obwodu. A „górny” współczynnik?

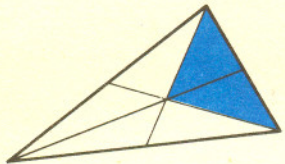
Podobne oszacowania można przeprowadzić dla sumy przekątnych wielokąta. I tam też można postawić pytanie, czy są one najlepsze. Dla czworokąta np. z czterech trójkątów takich, jak na rysunku 6, otrzymamy oszacowanie dolne, a z takich, jak na rysunku 7, oszacowanie górne.



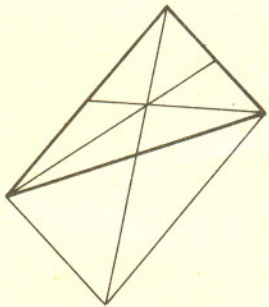
Rys. 1



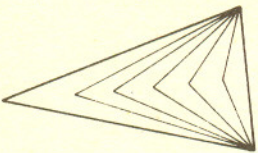
Rys. 2



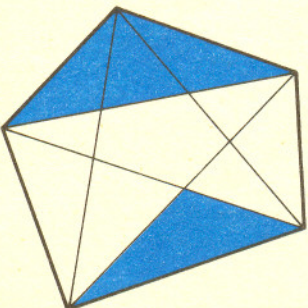
Rys. 3



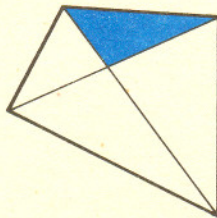
Rys. 4



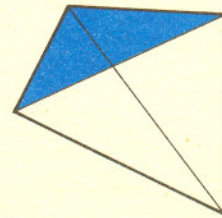
Rys. 5



Rys. 8



Rys. 6



Rys. 7

Łącznie więc, jako początek szacowania, będziemy mieli

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma przekątnych czworokąta}) < (\text{obwód}).$$

I to możemy spróbować poprawić lub wykazać, że poprawić się nie da.

Dla pięciokąta (sumując, odpowiednio, po pięć nierówności otrzymanych z trójkątów takich, jak na rysunku 8) otrzymujemy oszacowanie

$$(\text{obwód}) < (\text{suma przekątnych pięciokąta}) < 2 \cdot (\text{obwód}).$$

Czy można je poprawić?

A jak uzyskać oszacowanie dla  $n$ -kąta?