

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 4(184)

|  |        |
|--|--------|
| Krzywe lustra<br><i>dr hab. Piotr Kielanowski</i>                        | str. 1 |
| Ruch Księżyca i zaćmienia<br><i>dr Tomasz Kwast</i>                      | str. 4 |
| Zadania  | str. 5 |
| Patrz w niebo  | str. 6 |
| Jednym cięciem podzielić kwadrat...<br><i>doc. dr Lesław W. Szczerba</i> | str. 6 |
| Mała Delta   | str. 8 |
| Korespondencyjny Klub Fizyków  | str. 9 |
| Bez pochodnych<br><i>dr Michał Krych</i>                                 | str.10 |
| Mapy i dziwne atraktory<br><i>dr hab. Ryszard Kutner</i>                 | str.11 |
| Kącik prac uczniowskich  | str.13 |
| Klub 44  | str.14 |
| Drobiazgi  | str.16 |
| Kilka uwag o kreśleniu owalu<br><i>dr inż. Janusz Kondrasiuk</i>         | str.17 |

### W następnym numerze:

#### Metoda okrężna

#### UWAGA CZYTELNICY

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe informuje, że począwszy od numeru 5 ulega zmianie cena naszego pisma. Obecnie będzie ona wynosić 100,- zł. Konieczność podwyższenia ceny wynika ze znacznego wzrostu kosztów: papieru o 89% i druku o 13% w stosunku do ubiegłego roku. Wzrosły również pozostałe koszty jak transportu, energii, telekomunikacji itp. Nowa cena pokrywa w najniezbędniejszej tylko wielkości niezależny od wydawcy wzrost kosztów wydawania, które powodują zwiększenie wysokości dopłaty.

Nowe ceny prenumeraty podane są w stopce redakcyjnej.

Dla prenumeratorów indywidualnych cena czasopisma pozostaje bez zmiany do terminu wygaśnięcia prenumeraty.

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astrofizyczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc.dr Jan A. Gaj  
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc.dr Tomasz Hofmoki – v-przewodniczący  
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc.dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Małowski  
 dr Zbigniew Płochocki  
 dr Jan Rempala  
 prof.dr Konrad Rudnicki  
 prof.dr Grzegorz Sitariski  
 prof.dr Józef I. Smak  
 prof.dr Kazimierz Stępień  
 prof.dr Mieczysław Subotowicz  
 doc.dr Andrzej Szymacha  
 doc.dr Aniela Wolska  
 prof.dr Andrzej Woszczyk  
 prof.dr Wojciech Żakowski –  
 przewodniczący

#### WARUNKI I CENY PRENUMERATY

Zgłoszenia na prenumeratę:  
**w terminie**

- do dnia 10 listopada na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

#### przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”,
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszkających się na tych terenach.

#### Ceny prenumeraty:

kwartalnej 300 zł  
 półrocznej 600 zł  
 rocznej 1200 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę – przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictwo RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 dr Lidia Goettig  
 dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nacz.  
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos – red. nacz.  
 dr Tomasz Kwast  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska  
 Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa  
 tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń  
 ul. Poznańska 38  
 00-689 Warszawa  
 tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,  
 2,50 ark. druk.,  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Prasowych  
 Zakładach Graficznych  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28  
 Nr zam. 395/89, A-77  
 Skład systemem TeX  
 wykonała redakcja.

Dr hab. Piotr KIELANOWSKI

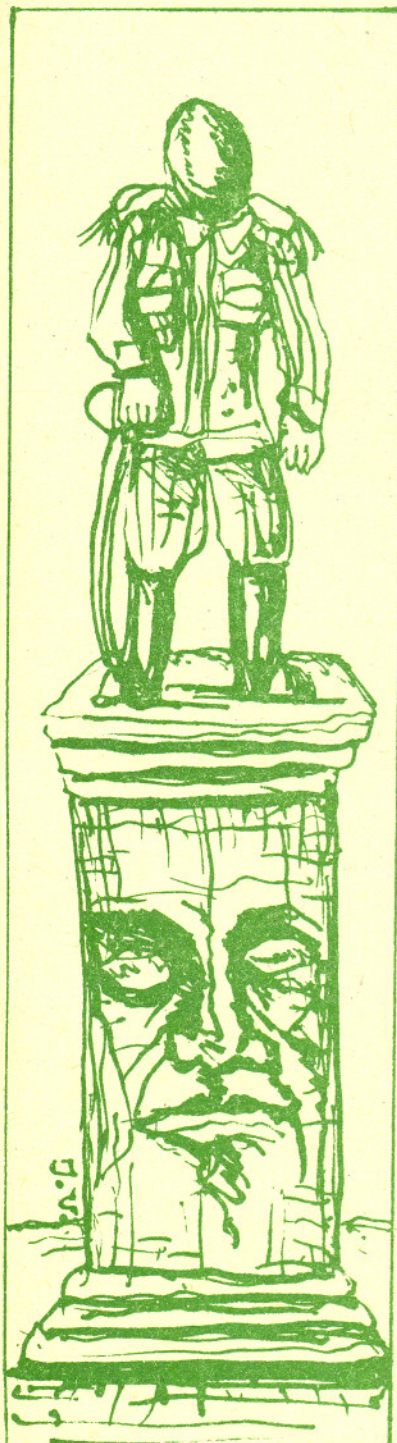
Własności luster nikogo nie dziwią. Każdy z nas codziennie spędza mniej lub więcej czasu przed lustrem i nikt nie jest zaskoczony tym, że jeśli mruga prawym okiem, to jego odbicie odmruguje do niego lewym. W lustrze widzimy więc swój obraz, ale przetworzony: „lewo” zamienia się na „prawo” i odwrotnie. Każdy z nas wierzy, że jest podobny do obrazu widzianego w lustrze. Dokładniejsze zastanowienie się nad podobieństwem do obrazu w lustrze nasuwa nam następujące refleksje. Ja jestem praworęczny, ale moje odbicie jest mańkutom. Hm... to jednak istnieją różnice. Do dużo radykalniejszych wniosków doszlibyśmy, gdyby można było obejrzeć nasze organy wewnętrzne. Jasne jest, że nasz obraz ma serce po prawej stronie, wątrobę po lewej itd. Nie ma człowieka, który miałby tak rozłożone organy. W lustrze, zamiast siebie, widzimy więc stworzenie, o którym z pewnością możemy powiedzieć, że nie istnieje! Przyczyną tego faktu jest to, że nie jesteśmy niezmiennicy ze względu na odbicia w lustrze. Ważne jest tutaj, że człowiek o własnościach obrazu w lustrze **nie istnieje**. Jeśli zobaczylibyśmy kogoś, kto ma serce po prawej stronie, to od razu stwierdzilibyśmy, że jest to odbicie lustrzane, a nie rzeczywista osoba. Gdyby część ludzi miała wszystkie organy położone po przeciwnej stronie niż nasze, to fakt zamiany położenia naszych organów nie stanowiłby jeszcze o braku niezmienniczości ze względu na odbicia w lustrze: patrząc na obraz nie moglibyśmy z całą pewnością stwierdzić, czy patrzymy na własny obraz, czy ktoś złośliwy zamienił nam lustro na przezroczystą szybę, a po drugiej stronie umieścił kogoś ładnego podobnego do nas, mańkuta, z sercem po prawej stronie, itd.

Czasami zadaje się podchwytliwe pytanie: dlaczego lustro zamienia „prawo” na „lewo”, a nie zamienia „góry” na „dół”? Pytanie to może w pierwszej chwili zaskoczyć, ale odpowiedź jest prosta: dlatego, że lustro ustawione jest pionowo. Jeśli lustro ustawimy poziomo (lustrem jest również powierzchnia gładkiego jeziora), to wtedy „górze” staje się „dołem” (patrz zdjęcie). Lustro w zależności od ustawienia może zmieniać obrazy na różne sposoby.

Zastanówmy się teraz, co można zrobić, jeśli mamy dwa lustra. Można je, oczywiście, ustawiać w różnych wzajemnych konfiguracjach. Jeśli jedno lustro ustawimy pionowo, a drugie poziomo, to obserwując obraz odbity przez dwa lustra zobaczymy siebie do góry nogami i wszystko zamienione „prawo – lewo”. Co to oznacza? Oznacza to, że zobaczymy siebie samego do góry nogami, ale nasz obraz nie będzie mańkutom i będzie mrugać do nas prawym okiem, jeśli mrugniemy prawym (proszę sprawdzić!). Widać więc, że drugie lustro poprawiło to, co zepsuło pierwsze i wspólne działanie dwu luster równoważne jest obrotowi o 180°. Odkrycie nasze nie jest nowe. Fakt ten z pewnością zna każda aktorka, a także wiele pań, które mają potrójne lustra (po obu stronach lustra środkowego dwa lustra umieszczone na zawiasach). W lustrze takim można się obejrzeć z każdej niemalże strony, a ponadto dzięki podwójnemu odbiciu można obejrzeć się tak, jak nas widzą inni, to znaczy bez zmian „górze – dół” i „prawo – lewo”. Radzę spróbować ustawić dwa lustra pod kątem i obejrzeć się. Początkowo nasze odbicie wydaje się trochę dziwne.

Niezmienniczość ze względu na odbicia (a raczej jej brak) w otaczającym nas świecie nie ma żadnych poważniejszych konsekwencji poza tym, że większość urzędzeń, które tego wymagają, jest przystosowana do praworęcznych, a lekarze operujący serce otwierają klatkę piersiową po lewej stronie itp. Dużo istotniejszą rolę odgrywa badanie niezmienniczości ze względu na odbicia w mikroświecie. Łamanie symetrii ze względu na odbicia obserwuje się również na poziomie fizyki subatomowej. Fakt ten, dość przełomowy dla fizyki cząstek elementarnych, został zaproponowany teoretycznie, a następnie udowodniony doświadczalnie ponad 30 lat temu. Eksperyment ten polegał na wykryciu asymetrii w rozpadach jąder atomowych, których momenty pędu (spiny) były ustawione równoległe do zewnętrznego pola magnetycznego (patrz *Delta* 10/1987).

W fizyce mikroświata, podobnie jak w życiu codziennym, możemy zapytać, co się dzieje, jeśli ustawimy dwa lustra zamiast jednego. Odpowiedź jest prosta. Złożenie dwu odbić jest równoważne obrotowi i drugie lustro wszystko naprawia, co zepsuło pierwsze. Mamy tu również i niespodziankę. Okazuje się, że w fizyce mikroświata dysponujemy nie jednym, lecz trzema różnymi rodzajami luster.



## EUREKA!

Synteza jądrowa sposobem domowym

Kilka tygodni temu na Uniwersytecie w Utah w USA rozległ się grzmiący okrzyk „Eureka!”. Prasa codzienna, a za nią radio i telewizja poinformowały o epokowym odkryciu dokonanym przez dwóch chemików: Amerykanina Stanleya Ponsa i Brytyjczyka Martina Fleischmanna. Przeprowadzili oni w temperaturze pokojowej kontrolowaną reakcję fuzji jąder deuteru uzyskując wyraźnie dodatni bilans energii. Ta szokująca wiadomość wpadła w osłupienie środowiska naukowego i wszystkich, którym nieobce są dotychczasowe wyniki wieloletnich, żmudnych i ogromnie kosztownych badań w zakresie syntezy termojądrowej (*Delta* 12/1987). Wydawało się, że droga wiedzie poprzez ogromne temperatury, rzędu dziesiątek milionów K, potrzebne do przezwyciężenia bariery wynosi około 300 keV. Wyścig miał się rozegrać między tokamakami a metodą implozji laserowej. Czyżby jednak ostateczne rozwiązanie miało być tak zaskakująco odmienne i tak przy tym proste? Na to pytanie starają się odpowiedzieć wszyscy, którzy mają kawałek palladu i odrobinę ciężkiej wody (tj. wody, w której zamiast izotopu wodoru  $^1\text{H}$  występuje deuter, czyli izotop wodoru o jeden neutron cięższy  $^2\text{H}$ ). Przepis na fuzję deuteru jest krótki i prosty. Przygotuj elektrolit z ciężkiej wody z małą domieszką wodorotlenku litu. Elektrody, z których katodę musi stanowić pallad nasycony wcześniej deuterem, zanurz w elektrolicie i podłącz do baterii kilkuwoltowej tak, aby gęstość prądu w elektrolicie wynosiła kilkadziesiąt mA/cm<sup>2</sup> elektrody palladowej. Po upływie kilkudziesięciu godzin na katodzie zacznie zachodzić reakcja syntezy deuteru objawiająca się zwiększonym wydzieleniem ciepła, jak również emisją neutronów o energii 2,45 MeV, które pochodzą z reakcji:  $d + d \rightarrow ^3\text{He} + n$ . Jeśli chodzi o ilość wydzielającego się ciepła i liczbę emitowanych neutronów – to napływające, również z innych niż Utah ośrodków, doniesienia są bądź sprzeczne, bądź niekonkretne. Efekt zależy podobno silnie od objętości elektrody palladowej i gęstości przepuszczanego prądu. Pierwsze próby teoretycznego wytlumaczenia biorą pod uwagę ogromną koncentrację deuteru w palladzie dochodzącą do 1 atomu deuteru na 1 atom palladu w fazie pełnego nasycenia. Rozważa się możliwość modyfikacji bariery elektrostatycznej jąder deuteru w palladzie, w wyniku czego możliwe byłoby bez wzrostu temperatury zbliżenie się jąder na mniejsze odległości, co prowadziłoby do zwiększenia prawdopodobieństwa syntezy na drodze efektu tunelowego.

Sceptyków jest jeszcze ciągle wielu, dotychczas milczą wielkie, słynne laboratoria i specjaliści, na których opinii czekamy. Rewelacja zaś czeka na zaklasyfikowanie, na swoje miejsce w historii nauki, być może – wśród największych osiągnięć wprowadzających nas wprost w XXI wiek.

Pisane 12 kwietnia 1989 r. L. G.

Pierwszy rodzaj – to dobrze znane lustra, których działanie polega na tym, że zamieniają „prawo” na „lewo”. Operację odbicia w takim lustrze oznaczamy literą  $P$ . Drugi typ lustra działa w taki sposób, że zamienia wszystkie cząstki elementarne, z których składa się dany obiekt, na antycząstki (antycząstką antycząstki jest cząstka). Operację odbicia w lustrze drugiego typu oznaczamy przez  $C$ . Trzeci rodzaj „lustra”, którym nie będę się zajmował, to obserwowanie danego zjawiska wstecz w czasie. Oznaczane jest ono przez  $T$ .

Zajmiemy się teraz własnościami lustra (operacji)  $C$ . Dla fizyki makroskopowej operacja ta nie ma żadnego znaczenia, gdyż nie udało się ani wytworzyć, ani zaobserwować antymaterii w znaczących ilościach. Dlatego zajmiemy się własnościami operacji  $C$  w fizyce mikroświata. Jak mówiłem, antycząstką antycząstki jest cząstka. Dlatego  $C^2 = 1$ . Podwójne odbicie za pomocą lustra  $C$  jest operacją tożsamościową. Następne pytanie dotyczy własności obrazów w lustrze  $C$ : czy procesy zachodzące między antycząstkami mają jakiś związek z procesami między cząstkami? (np. czy struktura poziomów energetycznych atomu antywodoru jest taka sama jak atomu wodoru?). Pytanie to można zadać inaczej: czy można zaprojektować takie doświadczenie, by ktoś odległy od nas mógł po jego przeprowadzeniu stwierdzić, czy jest zbudowany z materii, czy antymaterii. Okazuje się, że eksperymenty takie można przeprowadzić. Eksperymenty te są bardzo podobne do tych, które pozwalają na określenie strony prawej i lewej (patrz *Delta* 10/1987) i muszą w nich uczestniczyć oddziaływania słabe. Innymi słowy – tylko oddziaływania słabe są niesymetryczne dla obu typów luster  $C$  i  $P$ . Wszystkie inne typy oddziaływań są niezmiennicze ze względu na operację  $C$ .

Poprzednio widzieliśmy, że podwójne odbicie w lustrze usuwa wady obrazu. Mając dwa typy luster  $P$  i  $C$  można zastanowić się, co się stanie, jeśli będziemy obserwować proces zachodzący dzięki oddziaływaniom słabym, odbity kolejno przez lustra  $P$  i  $C$ . Wady obu luster mogą się znosić, ale mogą się też kumulować. Okazuje się, że wady tych luster nieomalże całkowicie się znoszą! To, co psuje jedno lustro, drugie naprawia. Przez pewien czas przypuszczano nawet, że naprawianie to jest całkowite. Jednakże doświadczenie czterech fizyków: Christensona, Cronina, Fitcha i Turlaya, przeprowadzone w 1964 r., wykazało, że oddziaływania słabe nie są niezmiennicze ze względu na operację  $CP$  (superpozycję  $C$  i  $P$ ).

Omówienie tego doświadczenia zaczniemy od przypomnienia specyficznych własności mezonów  $K$ . Należą one do tej samej rodziny co mezony  $\pi$ , są jednak od nich cięższe, a co ważniejsze – niemożliwe jest przejście typu  $K - \pi$  za pośrednictwem oddziaływań silnych (tzn. jądrowych). Z tego wynika, że produkcji mezonu  $K$ , w wyniku oddziaływań silnych, musi towarzyszyć produkcja antymezonu  $K$  albo innej podobnej cząstki. Własność ta doprowadziła do wprowadzenia nowej liczby kwantowej – dziwności, zachowanej przez oddziaływania silne. Mezony  $\pi$  i  $K$  mają wewnętrzny moment pędu (spin) równy 0, a przy odbiciu lustrzanym ( $P$ ) są antysymetryczne. Dlatego mówi się o nich, że są mezonami pseudoskalarnymi. Liczby kwantowe mezonów  $K$  są następujące:

| mezon       | ładunek | dziwność |
|-------------|---------|----------|
| $K^+$       | +1      | +1       |
| $K^0$       | 0       | +1       |
| $K^-$       | -1      | -1       |
| $\bar{K}^0$ | 0       | -1       |

Okazuje się, że oddziaływania słabe (prowadzące np. do rozpadu swobodnego neutronu) **nie zachowują dziwności**. Fakt ten prowadzi do wniosku, że możliwe jest przejście typu  $K - \pi$ , a więc np. rozpad  $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$ . Znacznie ciekawsze są własności neutralnych mezonów  $K$ . Okazuje się, że słabe oddziaływania mogą prowadzić do przejścia  $K^0 - \bar{K}^0$ , a więc w wyniku tych oddziaływań mezony  $K^0$  i  $\bar{K}^0$  tracą swoją tożsamość. Ma to poważne konsekwencje. Przyjmijmy na chwilę, że lustro  $CP$  jest doskonałe, to znaczy oddziaływania słabe są niezmiennicze ze względu na operację  $CP$ . Wówczas przy rozpadzie mezonu  $K^0$  po odbiciu przez lustro  $CP$  powinniśmy otrzymać ten sam obraz. Jest to jednak niemożliwe, bowiem  $K^0$  i  $\bar{K}^0$  nie są symetryczne w lustrze  $CP$ . Z mezonów tych można utworzyć dwie kombinacje: symetryczną  $K_1$  i antysymetryczną  $K_2$ :

$$(1) \quad K_1 = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \quad i \quad K_2 = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}}$$



**Rozwiązanie zadania M 538.** Niech  $p_k$  oznacza szansę wylosowania białej kuli z  $k$ -tej urny. Oczywiście  $p_1 = \frac{b}{b+c}$ ; zatem  $p_2 = p_1 \frac{b+1}{b+c+1} + (1-p_1) \frac{b}{b+c+1} = \frac{b+\frac{b}{b+c}}{b+c+1} = \frac{b}{b+c}$ . Jasne jest, że w takim razie  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{b}{b+c}$ .



JESZCZE RAZ  
Z CAŁĄ MOCĄ  
PODKREŚLAM, IŻ  
NIENAWIDZĘ  
SYMETRII



**Rozwiązanie zadania M 540.** Dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  mamy  $x(1-x) \leq 1/4$ . Zatem  $(1-a_n)a_{n+1} > (1-a_n)a_n$ , czyli ciąg  $(a_n)$  jest rosnący. Ponieważ jest ograniczony, ma granicę  $a$  spełniającą warunek  $(1-a)a \geq 1/4$ , czyli  $a = 1/2$ .

(Własności symetrii stanów  $K_1$  i  $K_2$  względem odbicia w lustrze  $CP$  wynikają z następujących rozważań. Zachodzi  $CK^\circ = \bar{K}^\circ$  i  $PK^\circ = -K^\circ$  oraz  $\bar{C}K^\circ = K^\circ$  i  $\bar{P}K^\circ = -K^\circ$ . Mamy więc:  $CPK^\circ = -\bar{K}^\circ$  i  $CP\bar{K}^\circ = -K^\circ$ . Stąd wynika, że  $CPK_1 = K_1$  i  $CPK_2 = -K_2$ .) Operacja „mieszania” mezonów jest odwracalna i mezony  $K^\circ$  oraz  $\bar{K}^\circ$  można wyrazić poprzez mezony  $K_1$  i  $K_2$ :

$$(2) \quad K^\circ = \frac{K_1 + K_2}{\sqrt{2}} \quad \text{ i } \quad \bar{K}^\circ = \frac{K_2 - K_1}{\sqrt{2}}$$

Mezony  $K_1$  i  $K_2$  nie mają określonych własności względem oddziaływań silnych, natomiast mają określone własności przy oddziaływaniach słabych. Na odwrót jest dla mezonów  $K^\circ$  i  $\bar{K}^\circ$ . Produkcja mezonów  $K$  następuje w wyniku oddziaływań silnych, a więc mówimy o produkcji mezonów  $K^\circ$  i  $\bar{K}^\circ$ , a nie  $K_1$  albo  $K_2$ . Rozpady mezonów  $K$  następują w wyniku oddziaływań słabych, a więc możemy mówić tylko o rozpadach mezonów  $K_1$  i  $K_2$ .

Mezony  $K_1$  i  $K_2$  są różnymi cząstkami, muszą więc mieć różne czasy życia i masy, a także różne sposoby rozpadu. Można wykazać, że czas życia  $K_1$  powinien być dużo krótszy niż  $K_2$ . Mezon  $K_1$  nie może się rozpaść na trzy mezony  $\pi$ . Wynika to z tego, że mezon  $K_1$  jest symetryczny w lustrze  $CP$ , natomiast trójka mezonów  $\pi$  jest antysymetryczna. Dominujący sposób rozpadu mezonu  $K_1$  jest więc na dwa mezony  $\pi$ . Mezon  $K_2$  nie może rozpadać się na parzystą liczbę mezonów  $\pi$ , ponieważ jest antysymetryczny, a parzysta liczba mezonów  $\pi$  jest symetryczna. Mezon  $K_2$  może się więc rozpadać na trzy mezony  $\pi$ .

Obraz ten w głównych zarysach został potwierdzony doświadczalnie i okazało się, że czas życia mezonu  $K_2$  jest około 1000 razy dłuższy niż mezonu  $K_1$ . Szybko się również zorientowano, że badanie rozpadów neutralnych mezonów  $K$  można wykorzystać do zbadania niezmienniczości  $CP$ . Idea doświadczenia jest bardzo prosta: weźmy wiązkę mezonów  $K^\circ$ , które ulegają rozpadowi w wyniku oddziaływań słabych. Ze wzoru (2) wynika, że wiązka ta jest mieszaniną mezonów  $K_1$  i  $K_2$ . Poczekajmy teraz, aż wszystkie mezony  $K_1$  się rozpadną i zostaną tylko mezony  $K_2$ , a następnie sprawdźmy, czy będziemy nadal obserwować rozpady na dwa mezony  $\pi$ . Zaobserwowanie takich rozpadów będzie dowodem, że symetria lustra  $CP$  nie jest dokładna. Doświadczenie dało wynik, że para  $(\pi^+ \pi^-)$  występuje jako stan końcowy rozpadu mezonu  $K_2$  w jednym przypadku na 500 rozpadów. Łamanie  $CP$  zostało więc doświadczalnie udowodnione.

Doświadczenie to zostało przeprowadzone 25 lat temu, a więc w czasach zamierzonych dla większości naszych Czytelników. Można spytać, czy w międzyczasie zaobserwowano łamanie  $CP$  dla innych cząstek elementarnych. Odpowiedź jest negatywna. Czyniono wiele prób, by sprawdzić „lustro”  $CP$  także dla innych cząstek niż neutralne mezony  $K$  i nie doprowadziły one, jak na razie, do wykrycia żadnego nowego przypadku łamania  $CP$ . Efekty łamania  $CP$  są zawsze zbyt małe, a dokładność niezwykle trudnych i pracochłonnych eksperymentów okazywała się za każdym razem niewystarczająca. Obecnie wiąże się największe nadzieje z możliwością zaobserwowania łamania  $CP$  w układzie neutralnych mezonów  $B^\circ - \bar{B}^\circ$  (mezonów o liczbie kwantowej  $B$ ). Układ ten wykazuje wiele podobieństw do układu  $K^\circ - \bar{K}^\circ$ , przy czym mieszanie mezonów  $B^\circ - \bar{B}^\circ$  jest, jak się niedawno okazało, dużo większe niż oczekiwano. Na wyniki eksperymentalne przyjdzie nam jeszcze poczekać pewien czas, bo i ten eksperyment, jeśli zostanie przeprowadzony, będzie bardzo trudny.

Liczba danych doświadczalnych dotyczących łamania symetrii  $CP$  jest niezwykle mała. Z faktem tym związany jest brak teoretycznego zrozumienia łamania  $CP$ . Sytuacja ta wyraźnie kontrastuje z przypadkiem łamania symetrii  $C$  lub  $P$ , które rozumiemy bardzo dobrze: łamanie  $C$  i  $P$  jest maksymalne, a do jego opisu nie potrzeba wprowadzać żadnych nowych parametrów. Niestety, nie istnieje ogólnie przyjęta teoria łamania  $CP$ . Do jego opisu wymagane jest wprowadzenie nowych, małych parametrów i w zależności od wariantu teorii łamanie  $CP$  powinno być obserwowalne w różnych sytuacjach. Wykonane doświadczenia, które nie doprowadziły do wykrycia nowych przypadków łamania  $CP$ , pozwoliły na wyeliminowanie niektórych teorii. Widzimy więc, że chociaż nie były one pozytywne, dały nam cenne informacje.

Na zakończenie chciałbym zwrócić uwagę na sprawę nieco inną. Mogłoby się wydawać, że zjawisko, które jest niezwykle słabe i trudno obserwowalne, nie powinno odgrywać w przyrodzie żadnej istotnej roli. Okazuje się, że jest całkowicie na odwrót: łamanie  $CP$  jest przyczyną ilościowej przewagi materii nad antymaterią we Wszechświecie. Innymi słowy – gdyby nie łamanie symetrii  $CP$ , nasz świat byłby zupełnie inny, a my nie istnielibyśmy.

# Ruch Księżyca i zaćmienia

Dr Tomasz KWAST

ZŁOŻYŁEM  
DUŻ PODANIE  
O PODNIESIENIE  
STAWKI ZA  
WYCIĘ DO  
KSIĘŻYCA



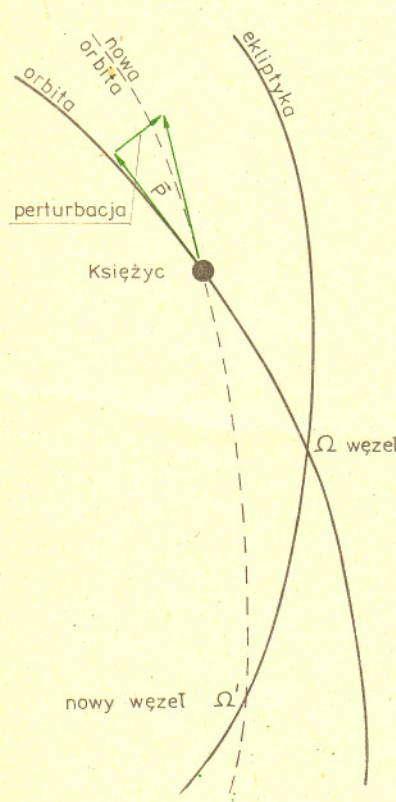
Jeżeli pojedyncza planeta obiega samotną gwiazdę, to – jak wiadomo – jej orbita jest elipsa, w której w jednym z ognisk znajduje się właśnie ta gwiazda itd. – tu można by zacytować pozostałe dwa prawa Keplera, rządzące ruchem owej planety. W rezultacie taki idealny ruch samotnej planety nazywa się wręcz ruchem keplerowskim.

Sytuacja taka jest jednak z reguły bardzo rzadko spotykana. Na ogół mamy do czynienia z wieloma ciałami i, oczywiście, każde z nich działa grawitacyjnie na wszystkie pozostałe. W naszym Układzie Słonecznym tak się złożyło, że Słońce zdecydowanie przeważa masą wszystkie planety (nawet razem wzięte), a same planety dzielą spore odległości i dlatego można uważać, że każda z nich obiega Słońce w przybliżeniu keplerowsko – ale właśnie tylko w przybliżeniu! Mówimy, że keplerowski ruch planet jest perturbowany, a siły wywołujące odchylenia od niego nazywamy perturbacjami; same odchylenia zresztą też.

Ilościowe uwzględnienie perturbacji jest zasadniczo proste. Znając startową konfigurację planet znamy siły, jakie działają wtedy na każdą z nich, a więc i przyspieszenie każdej planety. W małym przedziale czasu przyspieszenia te można uważać za stałe, a wtedy położenia i prędkości planet po upływie tego czasu obliczyć jest nietrudno. Tak dostajemy nową konfigurację ciał, zatem nowe przyspieszenia i cały cykl obliczeń się powtarza. Jest to niezwykle żmudne i, oczywiście, aż się prosi powierzyć tę robotę komputerowi. Tak dostajemy ciągi współrzędnych prostokątnych wszystkich planet w chwilach odpowiadających początkom (lub końcom) kolejnych, ustalonych odstępów czasu. Wynik ten będzie mocno nieprzejrzysty – chcielibyśmy się raczej dowiedzieć, jak wskutek perturbacji zmieniają się prawie keplerowskie orbity planet. Inaczej mówiąc, chcielibyśmy poznać zależność od czasu elementów orbit. Informacje na ten temat można, rzecz jasna, wydobyć z opisanego tu całkowania równań ruchu, droga do nich wydaje się jednak dość zawiła.

Tymczasem niektóre z tych informacji można uzyskać w wyniku niemal tylko „machania rękami”. Będą to informacje co prawda tylko jakościowe, niemniej jednak chyba pouczające. Rozważmy ruch Księżyca wokół Ziemi. Ruch ten byłby keplerowski, gdyby nie oddziaływanie ze strony przede wszystkim Słońca – jest ono źródłem największej siły perturbującej, w porównaniu z którą oddziaływanie planet jest skromnym dodatkiem (por. *Delta* 1/1987). Tak czy inaczej wszystkie planety (powiedzmy – prawie wszystkie) i Słońce znajdują się zawsze w płaszczyźnie ekliptyki, natomiast Księżyc nie, gdyż jego orbita jest do ekliptyki nachylona pod kątem około  $5^\circ$ . Wobec tego z całą pewnością Księżyc jest przy każdej okazji „ściągany” ku płaszczyźnie ekliptyki, a skutek tego widać natychmiast z bardzo prostego rozumowania. Wyobraźmy sobie dla prostoty, że wektor pędu Księżyca  $\vec{p}$  (rysunek) został zaburzony prostym doń impulsem siły skierowanej właśnie ku ekliptyce. Orbita zawsze musi być styczna do aktualnego wektora pędu, jasne więc, że nowa orbita przyjmie położenie takie, jak wskazano na tym rysunku. Jak widać, nowe nachylenie orbity jest mniejsze, a węzeł  $\Omega$  przesunął się w kierunku przeciwnym do ruchu Księżyca, czyli „cofnął się”. Czytelnik z łatwością sam może się przekonać, że w innym miejscu orbity perturbacja skierowana ku ekliptyce może spowodować wzrost nachylenia, ale węzeł zawsze ulegnie cofnięciu. W rzeczywistości, ma się rozumieć, perturbacja nie działa prostopadle i w ogóle jest zmienna, zatem nachylenie będzie zmieniać się rozmaicie (inne elementy orbity również), ale węzły zawsze będą się cofać. Zachodzi więc tzw. precesja orbity Księżyca. Odbywa się ona nawet dość szybko, bo węzły dokonują pełnego obiegu ekliptyki w ciągu 18,6 lat, o czym pisała nasza redakcyjna koleżanka w „Patrz w niebo” w *Delcie* 8/1987. Analogicznie zachowuje się orbita sztucznego satelity Ziemi, który jest stale „ściągany” ku płaszczyźnie równika ziemskiego przez znajdujący się tam „nadmiar” masy – Ziemia jest wszak nieco spłaszczona.

Zjawisko precesji orbity Księżyca oprócz tego, że określa warunki widoczności Księżyca, ma zasadnicze znaczenie dla występowania zaćmień (zarówno Księżyca, jak i Słońca). Otóż, aby zaszło zaćmienie np. Słońca (Księżyca), Księżyc musi spełniać dwa warunki: być w nowiu (odpowiednio w pełni) oraz znajdować się dostatecznie blisko któregoś węzła swojej orbity. Znając średnice i odległości Słońca, Ziemi i Księżyca można by obliczyć, że ma to być nie więcej niż  $17^\circ,6$  dla zaćmienia Słońca i  $11^\circ,9$  dla zaćmienia Księżyca.





Przyjmijmy teraz dwie definicje:

**miesiąc synodyczny** – odstęp czasu między kolejnymi dwoma nowiami (inaczej też: okres, w jakim powtarzają się fazy Księżyca) – wynosi on 29,530587 dni;

**miesiąc smoczy** – odstęp czasu między kolejnymi przejściami Księżyca przez ten sam węzeł jego orbity – wynosi on 27,212219 dni.

Teraz możemy sformułować podstawowe prawo rządzące następstwem zaćmień: jeżeli kiedyś nastąpiło zaćmienie, to tego samego typu zaćmienie zajdzie również po upływie całkowitej liczby miesięcy zarówno synodycznych, jak i smoczycych. Tak określone zaćmienia stanowią tzw. serię zaćmień. Miesiąc synodyczny i smoczy są, oczywiście, niewspółmierne, ale ich stosunek dość dobrze przybliża ułamek  $223/242$ , czyli następne zaćmienie w serii zajdzie po upływie 223 miesięcy synodycznych (6585,321 dni) lub inaczej po upływie 242 miesięcy smoczycych (6585,357 dni). Fakt ten zauważono już w starożytności, a bizantyjski astronom Suidas nazwał ten okres sarosem. Saros trwa więc nieco ponad 18 lat, w przybliżeniu  $6585\frac{1}{3}$  dni. Stąd wniosek, że następne w serii zaćmienie Słońca będzie widoczne w długości geograficznej o  $120^\circ$  bardziej na zachód, o tyle bowiem obróci się Ziemia w ciągu  $\frac{1}{3}$  dnia, a więc w tym samym miejscu Ziemi następne w serii zaćmienie Słońca można zobaczyć dopiero po upływie trzech sarosów.

W ciągu sarosu Księżyc 223 razy znajduje się w punkcie odpowiadającym nowiowi, punkty te zatem średnio rozłożone są co  $360^\circ/223 = 1^\circ,61$ , a to w łuku  $2 \cdot 17^\circ,6$  mieści się 22 razy. Ponieważ węzły są dwa, to znaczy, że w ciągu sarosu średnio nastąpią 44 zaćmienia Słońca, każde należące do innej serii. Analogiczne rozumowanie dla zaćmień Księżyca prowadzi do wniosku, że w czasie sarosu zajdzie ich  $4 \cdot 11^\circ,9/1^\circ,61 = 29$ . Jak widać, zaćmienia Księżyca w ogóle są rzadsze, a widzimy je jednak częściej, ponieważ jeżeli takie zaćmienie już nastąpi, to widoczne jest z całej półkuli Ziemi zwróconej ku Księżycowi.

Wskutek przybliżonej jednak tylko współmierności miesięcy synodycznego i smoczego każda seria zaćmień ma swój początek i koniec, a więc przewidywanie zaćmień na podstawie sarosu musi kiedyś zawieść. Teraz nie ma to jednak większego znaczenia, gdyż obliczamy zaćmienia i tak metodami bardziej nowoczesnymi.

*Redaguje dr Rafał SZTENCEL*

**M 538.** W każdej z  $n$  urn jest  $b$  białych kul i  $c$  czarnych. Z pierwszej urny wylosowano kulę i przełożono ją do drugiej urny, z drugiej urny wylosowano kulę i przełożono ją do trzeciej urny, itd. Jaka jest szansa wylosowania białej kuli z  $n$ -tej urny?

Rozwiązanie na str. 3

**M 539.** Niech  $O$  oznacza początek trójwymiarowego układu współrzędnych. Dane jest  $n$  odcinków:  $OB_1, \dots, OB_n$ ; kąty między każdą parą odcinków nie przekraczają  $90^\circ$ . Czy istnieje taki obrót przestrzeni (wokół  $O$ ), który umieści wszystkie odcinki w dodatnim oktancie układu współrzędnych (czyli w zbiorze punktów, które mają wszystkie współrzędne nieujemne)?

Rozwiązanie na str. 6

**M 540.** Ciąg  $(a_n)$  spełnia warunki:

$$0 < a_n < 1, \quad (1 - a_n)a_{n+1} > 1/4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykazać, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ .

Rozwiązanie na str. 3

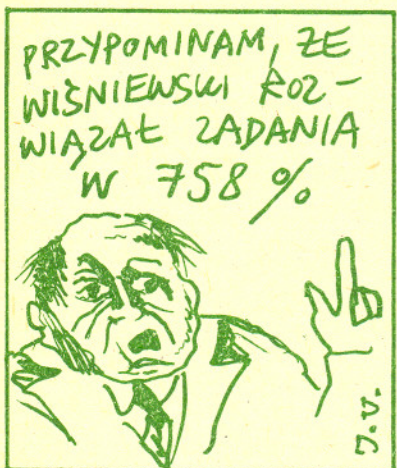
*Redaguje dr Rafał STAROŃSKI*

**F 266.** Gazowy argon Ar, mający względną przenikalność dielektryczną  $\epsilon \cong 6 \times 10^{-4} + 1$ , jest umieszczony w jednorodnym polu elektrostatycznym o natężeniu  $E = 300$  V/cm. Ocenic przesunięcie „centrum masy” powłoki elektronowej atomu argonu względem jądra. Liczba atomowa argonu  $Z_{Ar} = 18$ . Przyjąć, że w przypadku braku zewnętrznego pola elektrostatycznego powłoki elektronowe są sferycznie symetryczne.

Rozwiązanie na str. 7

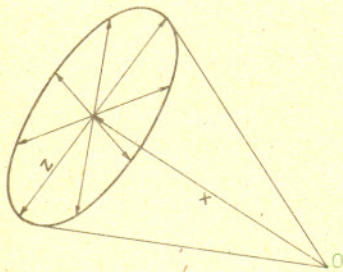
**F 267.** Czy możliwy jest pomiar przyspieszenia rakiety metodą czysto elektryczną, tj. poprzez pomiar różnic potencjałów czy też natężenia prądu w prostym obwodzie? Oszacować wielkość odpowiedniego efektu w przypadku, gdy przyspieszenie  $a$  wynosi  $10 \cdot g$ , a długość  $l$  przewodnika równa jest 10 m. Zewnętrzne pola elektryczne i magnetyczne można zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 10



**Rozwiązanie zadania M 539.**

Na ogół taki obrót nie istnieje. Oto przykład: weźmy wektory  $x + z_1, x + z_2, \dots, x + z_8$ , gdzie  $|x| = 1, |z_i| = 1$ , ponadto końce wektorów  $z_i$  są rozmieszczone na okręgu oraz  $x \perp z_i$ .



Kąty między  $x + z_i$  i  $x + z_j$  nie przekraczają  $90^\circ$  – wystarczy zauważyć, że iloczyn skalarny  $(x + z_i, x + z_j) = |x|^2 + (z_i, z_j) \geq 0$ .

Przypuśćmy teraz, że wszystkie punkty  $x + z_i$  leżą w dodatnim oktancie. Rozpatrzmy dwa wektory z naszego zbioru:  $x + z$  i  $x - z$  (opuszczamy dla wygody wskaźniki przy  $z$ ); niech  $x = (x_1, x_2, x_3), z = (z_1, z_2, z_3)$ . Ma być  $x_1 + z_1 \geq 0, x_1 - z_1 \geq 0$ , skąd  $|z_1| \leq x_1$ .

Podobnie  $|z_2| \leq x_2, |z_3| \leq x_3$ . Ale jednocześnie  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , czyli musi być

$|z_i| = x_i, i = 1, 2, 3$ , i to dla każdego  $z \in \{z_1, \dots, z_8\}$ . Rozpatrzmy teraz dwa prostopadłe wektory  $u, v \in \{z_1, \dots, z_8\}$ .

W takim razie dla każdego układu znaków  $\frac{\pm u \pm v}{\sqrt{2}} \in \{z_1, \dots, z_8\}$ .

Mielibyśmy zatem, wybierając  $i$  takie, że  $x_i \neq 0, \frac{1}{\sqrt{2}}|\pm u_i \pm v_i| = x_i$  dla każdego układu znaków, a skądinąd  $|u_i| = |v_i| = x_i$  – sprzeczność.

Uwaga. Zadanie pochodzi od dr. Adama Jakubowskiego (UMK). Autor rozwiązania (UW) pragnie zachować incognito.

Wielki Obłok Magellana zasłużył się ostatnio astronomii nie tylko tym, że pojawiła się w nim supernowa. Tak się złożyło, że przyczynił się on – chyba już definitywnie – do pogrzebienia pojęcia supermasywnych gwiazd. Otóż w centrum obłoku zjonizowanego wodoru znanego pod nazwą 30 Doradus lub NGC 2070 lub po prostu Tarantula znajduje się gwiazdopodobny obiekt (o symbolicznej nazwie R136a) o średnicy nie przekraczającej 10 lat świetlnych, a emitujący tyle energii co przynajmniej 50 mln Słońc. Byłby więc to obiekt mocno osobliwy wymagający wytłumaczenia, w jaki sposób tak wielka moc może być produkowana w tak małej objętości. Możliwości były dwie: albo supermasywna gwiazda o masie rzędu 1000 Słońc, albo supergęsta gromada składająca się z normalnych gwiazd. Rozstrzygnięcie mogłyby przynieść obserwacje wykonane z rozdzielczością lepszą niż 1".

I takie obserwacje zostały wykonane. W 1985 r. grupa badaczy pod kierunkiem Anthony'ego Moffata z Uniwersytetu w Montrealu stwierdziła, że R136a jest bardzo zwartą grupą co najmniej ośmiu bardzo gorących gwiazd o jasności absolutnej nie większej niż  $-8$  mag. Zostało to zresztą potwierdzone przez inny zespół badaczy z RFN.

Moffat i jego współpracownicy uzyskali podobny rezultat odnośnie innej mgławicy NGC 3603 w Kilu, której gwiazdopodobny centralny obiekt ma katalogową nazwę HD 97950. Okazał się on również gromadą gwiazd, nawet jeszcze bardziej zwartą niż w Tarantuli.

Ale to jeszcze nie koniec „zashug” Wielkiego Obłoku Magellana. Mianowicie w 1988 roku M. Heydari-Malayeri z ESO doniósł, że znajdujący się w tym Obłoku obiekt Sanduleak  $-66^\circ 41'$ , uważany dotychczas za jedną z najmaszywniejszych i najjaśniejszych gwiazd, jest w istocie znowu minigromadą co najmniej pięciu ciasno upakowanych gorących gwiazd.

Analogiczny wynik uzyskano dla innej superjasnej gwiazdy –  $\eta$  Carinae. Okazała się minigromadą czterech gwiazd, między którymi odległości nie przekraczają  $0,03$ . A obiektów tego rodzaju jest więcej. W rezultacie są podstawy przypuszczać, że górna granica masy gwiazd jest rzędu 200 Słońc, a może mniej, ale w każdym razie nie tysiące! Fakt ten może mieć poważne konsekwencje nawet kosmologiczne. Chodzi o to, że skoro tak zwane dotychczas najjaśniejsze gwiazdy widziane w licznych galaktykach i traktowane jako wskaźniki odległości są w rzeczywistości gromadami, to znaczy, że wyznaczone w ten sposób odległości tych galaktyk były zbyt małe. Wszechświat może więc jest większy, niż nam się dotychczas zdawało.

dr Tomasz KWAST

## Jednym cięciem podzielić kwadrat na dwa przystające trójkąty

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Przedшкоłak rozwiąże natychmiast tytułowe zadanie: złapie nożyczki, przetnie wzdłuż przekątnej i gotowe. Jedyna trudność, jaka tu może się pojawić, to taka, że wnikliwe (co jest eleganckim odpowiednikiem precyzyjniejszego, lecz grubiańskiego „wścibskie”) dziecko nie zrozumie słowa „przystaje”. Nasz Wścib... , przepraszam, Wnikliwy Przedшкоłak może być tym słowem w zadaniu zaskoczony: przyzwyczał się, że negocjatorzy przystają (lub nie przystają) na propozycje strony przeciwnej, ale (jak pragnę nie leżakować po obiadku) na jakie propozycje mają przystawać trójkąty z zadania? Ponieważ odpowiedź „Nie garb się” jest, co prawda, poprawna, ale nie na temat, należy wytłumaczyć Wnikliwemu, że w tym przypadku idzie nie o „przystawanie na” lecz o „przystawanie do”. Jeden trójkąt przystaje do drugiego, jeśli można przystawić jeden do drugiego tak, by się pokryły. Niektórzy przy sprawdzaniu pokrywania mrużą jedno oko. Nie jest to jednak konieczne i można się obejść bez mrużenia. Nasz Wnikliwy złapie trójkąty, przystawi, zmruży jedno oko i... rzeczywiście, przystają!





**Rozwiązanie zadania F 266.**  
Moment dipolowy atomu argonu w zewnętrznym polu o natężeniu  $E$  możemy zapisać w postaci

$$p = Zxe = \epsilon_0 \alpha E,$$

gdzie  $x$  – przesunięcie powłoki elektronowej,  $Z$  – liczba elektronów w atomie,  $\alpha$  – polaryzowalność atomu:

$$\alpha = \frac{Zxc}{\epsilon_0 E}.$$

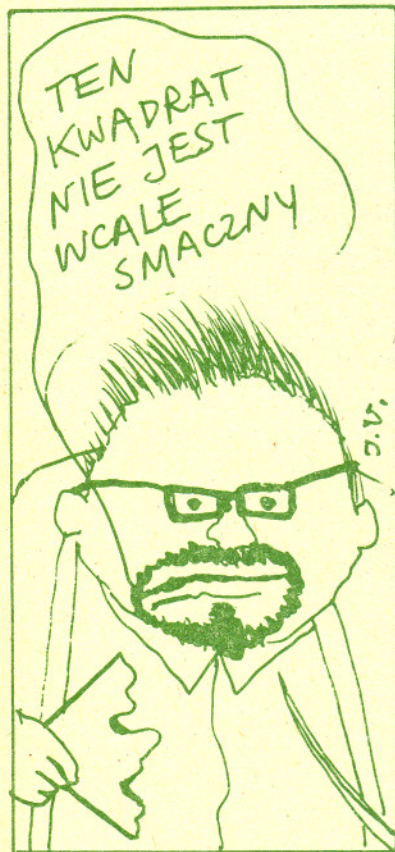
Przenikalność dielektryczna  $\epsilon$  jest związana z polaryzowalnością  $\alpha$  relacją

$$\epsilon = 1 + n_0 \alpha,$$

gdzie  $n_0 = 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  jest koncentracją atomów w warunkach normalnych (liczba Loschmidta). Otrzymujemy stąd

$$x = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E / (n_0 Z e) \approx 2 \times 10^{-16} \text{ cm}.$$

Ta deformacja jest znikomo mała w porównaniu z rozmiarami atomu, które są rzędu  $10^{-8} \text{ cm}$ .



Takie podejście nie tylko do geometrii, ale do całej matematyki pochodzi od S. Leśniewskiego (*Podstawy ogólnej teorii mnogości*, I, Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, Mat.-Przyrod. 2, Moskwa 1916) i nosi nazwę *mereologii*. Geometrię w mereologii próbował zbudować A. Tarski (*Les fondaments de la géométrie des corps*, Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Kraków 1929). Rezultatem pracy Tarskiego jest jednak tylko dowód możliwości budowy geometrii w oparciu o mereologię.

Wyrafinowany matematyk nie będzie miał trudności z pojęciem przystawania. On wie, że trójkątów nie bierze się w rękę i nie przystawia, lecz przekształca przez izometrię. Może się natomiast zastanowić nad znaczeniem słowa „podzielić”, ale sam szybko znajdzie wyjaśnienie. Należy podać dwa trójkąty rozłączne, które w sumie (mnogociowej) dadzą kwadrat.

Ponieważ podział ma być dokonany jednym cięciem, łatwo zauważyć, że musi to być cięcie wzdłuż przekątnej, a więc wymaganą izometrią będzie albo symetria osiowa względem tej przekątnej, albo symetria środkowa względem środka kwadratu. Przy symetrii środkowej okazuje się, że aby trójkąty były przystające, środek kwadratu musi jednocześnie należeć (lub jednocześnie nie należeć) do obu trójkątów, ale wówczas trójkąty te nie będą podziałem kwadratu. Przy rozważaniu symetrii osiowej sprawa jest jeszcze gorsza: kłopoty są z całą przekątną. Wniosek może być tylko jeden: tytułowe zadanie nie da się rozwiązać, a kwadrat – podzielić na dwa przystające trójkąty.

Taki wniosek jest całkowicie poprawny i zupełnie niezadowolający. Cóż bowiem za sztuki magiczne wyczyniał nasz Wnikliwy Przedszkolak z nożyczkami, że mu wyszło?

Można obarczyć winą Przedszkolaka. Udało mu się, a innym, nawet bardziej predestynowanym do sukcesu, nie. To niesprawiedliwe i niesłuszne. W tej sytuacji należy zakazać posługiwania się nożyczkami w obecności kwadratów i utworzyć specjalny urząd do wprowadzania zakazu w życie. Jednym z pierwszych obowiązków urzędu będzie sporządzenie listy tych, których zakaz nie obowiązuje. Obowiązywać musi wszystkich przedszkolaków bez wyjątku. Wyjątek można natomiast zrobić dla Wyrafinowanych. Oni i tak wiedzą, że podziału zrobić się nie da.

Inną możliwością jest doszukiwanie się czegoś niedobrego w rozumowaniu Wyrafinowanego. Trudności są z pojedynczym punktem. Punkt to coś tak małego, że może by go tak zaniedbać? Nie popieramy strusiej polityki. Nie można zaniedbywać czegoś, co realnie istnieje. Ale czy punkt istnieje realnie? Czy rzeczywiście figury składają się z punktów? Pogląd, że się składają, ma za sobą długą tradycję i jest poparty przez poglądy plejady wybitnych autorytetów, poczynając, powiedzmy, od Euklidesa. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie przyjęciu postawy rewolucyjnej i ogłoszeniu, że figura nie składa się z punktów.

Intuicje, jakie wiążę z pojęciem figury, są następujące: na kartce papieru rysuję linię zamkniętą nie przecinającą się. Linia ta rozcina płaszczyznę na dwie części. Jedna z nich jest ograniczona, i to właśnie jest figura, przy czym linia podziału do niej nie należy. Zarzuty przeciwko takiemu stawianiu sprawy są dwa: Dlaczego figury muszą być ograniczone? Po drugie w tej definicji *implicite* używa się pojęcia punktu! Odpowiedź na pierwszy zarzut jest łatwa. Do tytułowego zadania wystarczą figury ograniczone. Można by nawet wprowadzić taki termin, ale oszczędniej jest przymiotnik „ograniczony” opuszczać. Skoro o nieograniczonych mamy nie mówić, to co za różnica? W istocie powinniśmy jeszcze opatrzyć termin „figura” przymiotnikiem „płaska”. Odcinek nie jest figurą i o to wielu mogłoby mieć pretensje. Trudniej jest z drugim zarzutem. Byłby on nie do odparcia, gdybym powyższy opis chciał uznać za formalną definicję figury. W teoriach formalnych definiowanie *ignotum per ignotum* (nieznanego przez nieznanego) jest uważane za błąd. W rozważaniach intuicyjnych możemy sobie na to pozwolić, zwłaszcza że nie mamy aksjomatyki, która mogłaby służyć jako definicja nie opierająca się na pojęciach wcześniej zdefiniowanych.

Mamy zatem pojęcie figury i Czytelnicy chyba się ze mną zgodzą, że można sobie figurę wyobrazić, nie zastanawiając się w ogóle nad punktami. Potrzebne mi jeszcze będzie pojęcie części figury. Pseudodefinicja (z użyciem punktów) jest prosta: jedna figura jest częścią drugiej wówczas, gdy jest w niej zawarta. Dlaczego zatem nie posługiwać się terminem zawierania? Tylko dlatego, że sugeruje on jakieś elementy figury, a więc punkty, których tak bardzo chcemy uniknąć. Założenie, że punkt (dla zakamieniających cantorystów: zbiór jednopunktowy) nie jest figurą, ma poważne konsekwencje. Nie można rozróżnić figury z brzegiem i figury bez brzegu. Mamy po prostu kwadraty i trójkąty, a nie kwadraty lub trójkąty z brzegiem lub bez brzegu. Wymaga to modyfikacji pewnych pojęć. Przyzwyczajeni jesteśmy mówić, że figury przecinają się, gdy mają wspólny punkt. Teraz o punktach mówić nie wolno, zatem figury przecinają się, jeśli mają wspólną figurę. Oznacza to, że figury nie przecinają się, gdy nie istnieje figura wspólna. Natomiast sumą dwóch figur  $A$  i  $B$  jest najmniejsza figura, której  $A$  i  $B$  są częściami.

Przy takim rozumieniu terminów otrzymujemy upragnioną zgodność naiwnego rozwiązania zadania przez Przedszkolaka z naukową analizą Wyrafinowanego. Uff...



# 5

# mała delta

JEDNAKOWOŻ KWADRAT PO DŁUGIM  
GOTOWANIU W ROSOLE ORAZ  
WCALE NIEKRÓTKIM DUSZENIU  
W JARZYNACH OKAZAŁ SIĘ  
ZUPEŁNIE MIEJADALNY, ALE JA MAM  
NA TEN KWADRAT KONSUMENTA

A jednak można!

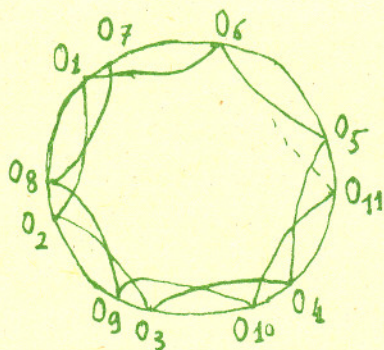


L.W. Szczerba wykazał w swoim artykule, że nikomu nie uda się jednym cięciem podzielić kwadratu na dwa przystające trójkąty (co zrobić z przekątną?) i jak geometryści mogą omijać te trudności inaczej określając figury geometryczne. Poniżej pokażę, że założenie o „jednym cięciu” jest istotne i podam przepis na podział kwadratu na kilka zbiorów, z których da się złożyć dwa trójkąty przystające.

Będziemy mówić, że zbiory  $A$  i  $B$  są równoważne przez rozkład, jeśli  $A$  można podzielić na kawałki (niekoniecznie spójne), które po obrotach i przesunięciach dają  $B$ . Zaczniemy od prostego przykładu. Zbiór liczb naturalnych  $N = \{1, 2, \dots\}$  i zbiór liczb naturalnych z wyrzuconą liczbą 13 są równoważne. Wystarczy zbiór  $N$  podzielić na zbiór liczb podzielnych przez 13 i zbiór liczb niepodzielnych przez 13, a następnie ten pierwszy zbiór przesunąć o 13 w prawo.



Tak wyrzucamy 13 ze zbioru liczb naturalnych.

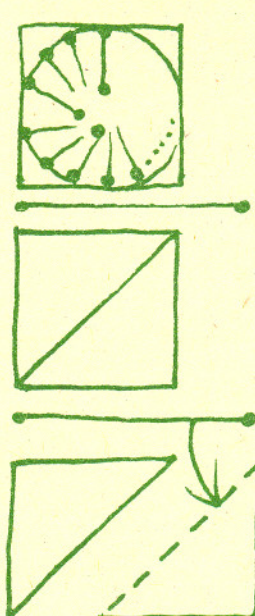


Inny przykład to równoważność okręgu i okręgu z wyrzuconym punktem. Weźmy okrąg o promieniu 1 i punkt  $O$  na tym okręgu. Do pierwszego zbioru zaliczamy punkt  $O$  i jego kolejne obrazy przy obrotach o kąty  $1, 2, 3, \dots$  w lewo (kąty są mierzone w mierze łukowej), a do drugiego całą resztę. Obracając pierwszy zbiór o kąt 1 w lewo wyrzucamy punkt  $O$  z okręgu.

Jak teraz postąpić z kwadratem (o boku 1)? Wykażemy najpierw, że kwadrat jest równoważny z kwadratem plus odcinek o długości  $\sqrt{2}$  (wzięty wraz z końcami). W kwadrat wpisujemy okrąg i wybieramy trzy odcinki o długości  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  zaczynające się na okręgu i leżące na promieniach tworzących kąty  $\frac{1}{3}$ . Pierwszy z tych odcinków bierzemy z obydwoma końcami, dwa pozostałe z jednym końcem leżącym na okręgu. Pierwsze trzy zbiory to narysowane odcinki, czwarty – obrazy tych odcinków przy obrotach w lewo o kąty 1, 2, 3, ..., piąty – reszta kwadratu. Z pierwszych trzech zbiorów składamy odcinek o długości  $\sqrt{2}$ , czwarty zbiór obracamy o 1 w prawo i ... już.

Wystarczy teraz podzielić otrzymany kwadrat wzdłuż przekątnej, przy czym przekątną zaliczamy do jednej figury, do drugiej figury dokładamy odcinek o długości  $\sqrt{2}$  w miejsce „brakującej” przekątnej. Zadanie wykonane.

Małą Deltę przygotował Jerzy RYLL



Wydział Fizyki  
Uniwersytetu Warszawskiego  
**KOESPONDENCYJNY  
KLUB FIZYKÓW**

Ponad rok przy Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego działa Korespondencyjny Klub Fizyków. Jedynym warunkiem należenia do klubu jest zamiłowanie do eksperymentowania, samodzielne wykonywanie doświadczeń i rozwiązywanie prostych problemów fizycznych. Piszą do nas przeważnie uczniowie szkół podstawowych i stopnia licealnego. Nie brak listów od czytelników dorosłych. Nie stawiamy granicy wieku. My z kolei posyłamy propozycje doświadczeń i problemów do rozwiązania. Mamy również obfitą korespondencję, w której autorzy listów przedstawiają nurtujące ich problemy związane z fizyką. Niestety, nie brak również „wynalazców *perpetuum mobile*”. Chcielibyśmy, aby jak najwięcej zainteresowanych mogło wziąć udział w pracach klubu i dlatego co miesiąc będziemy zamieszczać w *Delcie* nasze propozycje problemów do rozwiązania. Członkowie klubu otrzymują te same propozycje listownie i to znacznie wcześniej ze względu na cykl wydawniczy *Delt*y. Jeżeli któraś z propozycji zainteresuje Ciebie i wykonasz doświadczenie, napisz do nas przesyłając opis wyników. Na pewno dostaniesz odpowiedź do domu, a najciekawsze wypowiedzi zamieścimy w *Delcie*. Nasz adres:

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego  
Korespondencyjny Klub Fizyków  
00-681 Warszawa  
ul. Hoża 69

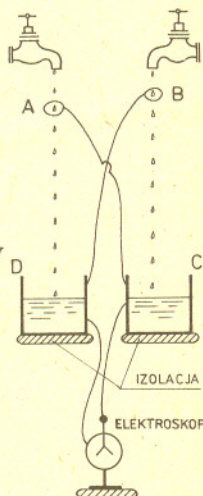
A oto nasze propozycje na kwiecień:

1. **Wypozażenie:** ostro zaostrzony ołówek (może być dowolny, podobny do ołówka patyczek, pręcik itp.), gumka do wycierania, kątomierz, blat stołu lub dowolna płaska powierzchnia.  
**Zadanie:** wyznaczyć wartość liczbową współczynnika tarcia gumki o podłoże. Czy widzisz różnicę między wartością współczynnika tarcia statycznego i dynamicznego?

2. **Wypozażenie:** piłeczka pingpongowa, odkurzacz.  
**Zadanie:** zamontuj wąż odkurzacza do otworu dmuchającego (większość odkurzaczy ma tę możliwość), włącz odkurzacz, wyłot węża, z którego dmucha powietrze, ustaw pionowo do góry, wstaw w ten strumień powietrza piłeczkę pingpongową. Powinna się utrzymać w strumieniu. Zbadaj, w jakich warunkach ucieka ze strumienia. Czy potrafisz wyjaśnić zjawisko?

3. Doświadczenie do wykonania w pracowni szkolnej.

**Wypozażenie:** elektroskop, przewody elektryczne, trzy podkładki izolacyjne – na przykład z parafiny, dwa kubki metalowe, dwa cylindry metalowe bez denek lub dwa pierścienie z drutu o średnicy około 1,5 cm.  
**Zadanie:** Zbudować generator Kelvina zgodnie z rysunkiem zamieszczonym na tylnej okładce *Delt*y 2/1989 (patrz również szkic obok). Między kubkami ustawionymi na izolatorze włączmy elektroskop stojący również na izolatorze. Doświadczenie lepiej się udaje, jeżeli elektroskop lekko naładujemy – na przykład dotykając potartą palcówką ebonitową lub szklaną. Otwieramy krany. W miarę spadania kropli elektroskop ładuje się. Jeżeli go rozładujemy, to zjawisko będzie się powtarzać, elektroskop ponownie się naładuje. Wyjaśnij zasadę działania generatora. Czy szybkość ładowania się elektroskopu zależy od położenia cylindrów lub pierścieni względem kranu (blisko czy daleko)?





W rachunku różniczkowym dowodzi się, że jeśli funkcja  $f$  ma pochodne dowolnego rzędu i to, na przykład, wspólnie ograniczone, to można ją rozwinąć w szereg Taylora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

I na odwrót, jeśli  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x - x_0)^n$ , to funkcja  $f$  jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i  $f^{(n)}(x_0) = a_n$ . Na przykład dla funkcji sinus i punktu  $x_0 = 0$  mamy

$$(*) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A czy można ten ostatni wzór udowodnić bez używania rachunku różniczkowego?

Zauważmy, że jeśli wykażemy, iż dla każdego  $n$  i  $0 \leq x \leq \pi/2$  jest prawdziwa nierówność

$$(**) \quad \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sin x \leq \sum_{n=0}^{2m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

to będzie z tego wynikać (\*). Wykażę poniżej, w jaki sposób można uzyskać tę nierówność dla  $m = 1$ , czyli nierówność

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

korzystając wyłącznie z elementarnych wzorów

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{dla } 0 < x < \pi/2$$

i z teorii ciągów zbieżnych.

Mamy dla  $0 < x < \pi/2$

$$\sin x > x \cos x = x(1 - 2 \sin^2 x) > x \left(1 - 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = x - \frac{1}{2} x^3.$$

Konstruujemy taki ciąg  $(a_n)$ , że  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_n > \frac{1}{6}$  oraz dla każdej liczby  $x \in (0, \pi/2)$  zachodzi nierówność  $\sin x > x - a_n x^3$ . Dla takiego ciągu mamy

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} > 3 \left(\frac{x}{3} - a_n \left(\frac{x}{3}\right)^3\right) - 4 \frac{x^3}{27} = x - x^3 \left(\frac{a_n}{9} + \frac{4}{27}\right).$$

Przyjmując  $a_{n+1} = \frac{1}{9} a_n + \frac{4}{27}$  otrzymujemy, iż

$$\sin x > x - a_{n+1} x^3 \quad \text{dla } x \in (0, \pi/2).$$

Oczywiście,  $a_{n+1} = \frac{1}{9} a_n + \frac{4}{27} > \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{27} = \frac{1}{6}$ . Mamy też  $a_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} a_n + \frac{4}{27} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} (a_n - \frac{1}{6})$ . A zatem  $a_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9}\right)^n (a_0 - \frac{1}{6})$ , czyli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$ .

Wykazaliśmy zatem, że dla  $x \in (0, \pi/2)$  zachodzi

$$\sin x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x - a_n x^3) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Z powyższej nierówności wynika, iż

$$\begin{aligned} \sin x &= 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} < 3 \frac{x}{3} - 4 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^3 = \\ &= x - \frac{4}{27} x^3 + \frac{2}{243} x^5 - \frac{x^7}{3^9} + \frac{x^9}{2 \cdot 3^{12}} < x - \frac{4}{27} x^3 + \frac{2}{243} x^5. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio przyjmijmy  $\alpha_0 = \frac{4}{27}$ ,  $\beta_0 = \frac{2}{243}$  i załóżmy, że  $\sin x < x - \alpha_n x^3 + \beta_n x^5$  dla  $x \in (0, \pi/2)$ , gdzie  $\alpha_n < \frac{1}{6}$ ,  $0 < \beta_n < \frac{1}{120}$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin x &< 3 \left(\frac{x}{3} - \alpha_n \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \beta_n \left(\frac{x}{3}\right)^5\right) - 4 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^3 < \\ &< x - \left(\frac{1}{9} \alpha_n + \frac{4}{27}\right) x^3 + \left(\frac{1}{81} \beta_n + \frac{2}{243}\right) x^5 = x - \alpha_{n+1} x^3 + \beta_{n+1} x^5, \end{aligned}$$

gdzie określiliśmy:  $\alpha_{n+1} = \frac{1}{9} \alpha_n + \frac{4}{27}$ ,  $\beta_{n+1} = \frac{1}{81} \beta_n + \frac{2}{243}$ . I znów  $\alpha_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} (\alpha_n - \frac{1}{6})$  i  $\beta_{n+1} - \frac{1}{120} = \frac{1}{81} (\beta_n - \frac{1}{120})$ , czyli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{6}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{1}{120}$  i wobec tego

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Pozostawiam Czytelnikom zbadanie, jak dowodzić nierówności (\*\*) dla następnych  $m$ .



## Rozwiązanie zadania F 267.

W układzie odniesienia związanym z rakieta na elektryony w umocowanym i ustawionym równoległe do wektora przyspieszenia pręcie działa siła bezwładności  $ma$ . W stanie równowagi siła ta jest równoważona siłą  $eE$  ze strony pola elektrycznego.

W konsekwencji na końcach przewodnika o długości  $l$  powstaje w czasie przyspieszania różnica potencjałów  $U = E l = ma l / e$ . A więc przyspieszenie można zmierzyć przez pomiar różnicy potencjałów  $U$ . Przy  $a = 10g$  i  $l = 10$  m otrzymujemy  $U \cong 6 \times 10^{-9}$  V. Technika współczesna w zasadzie umożliwia pomiar tak małych napięć. Jednakże warto pamiętać, że najprostszym sposobem takiego pomiaru, tj. połączenie końców badanego przewodnika z urządzeniem pomiarowym za pomocą dwóch innych przewodników zawodzi, bowiem na ich końcach też powstaje różnica potencjałów. Zamiast tego można zmierzyć amplitudę prądu płynącego w przewodniku przy cyklicznej zmianie jego orientacji o  $180^\circ$ .

# Mapy i dziwne atraktory

Dr hab. Ryszard KUTNER

Czy wiecie, że tradycyjna mechanika klasyczna Newtona przeżywa swoją drugą młodość? Spytacie – jakże to możliwe, aby w mechanice, dobrze nam przecież znanej np. ze szkolnego podręcznika, było coś jeszcze naprawdę do odkrycia? A jednak. W ramach klasycznej, lecz nieliniowej, mechaniki Newtona zaobserwowano na drodze eksperymentów komputerowych zupełnie nowe efekty, których istnienia domyślali się tylko nieliczni, jak H. Poincaré i A. Einstein.

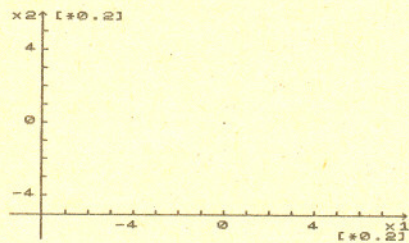
## Szybkie mapowanie

W poprzednim artykule z tego cyklu (*Delta 2/1989*) mówiliśmy o chaosie w tak porządnym układach, w których na pierwszy rzut oka nie ma dla niego miejsca. Były to mianowicie tzw. układy hamiltonowskie, dla których możemy jawnie wypisać zarówno energię kinetyczną, jak też potencjalną. Mówiąc obrazowo, chociaż niezbyt ściśle, zajmowaliśmy się układami konserwatywnymi, nie kontaktującymi się z otoczeniem, a dokładniej ich ewolucją w przestrzeni fazowej. W tym celu konstruowaliśmy za pomocą programu komputerowego dwuwymiarową mapę Hénona-Heilesa dla konkretnego przypadku trzech nieliniowych, sprzężonych ze sobą oscylatorów (czyli układu o niewielkiej liczbie stopni swobody). Na drodze eksperymentu komputerowego obserwowaliśmy efekt polegający na tym, że konstruowana mapa, **powyżej pewnej progowej wartości energii całkowitej**, miała obok obszarów regularnych także obszary o przypadkowym rozrzucie punktów. Aby otrzymać ten wynik, musieliśmy jednak czekać długo, około 15 minut (i to w przypadku, gdy program pracował pod dobrym polskim kompilatorem języka BASIC, ToBoS-FP lub jego udoskonaloną wersją ToBoS-DYD na mikrokomputer np. ZX Spectrum 48k). Podobnie miała się rzecz z analizą profesjonalną: trzeba było czekać długo na wynik pracy nawet największych komputerów. I wtedy N.J. Zabusky (jeden ze współodkrywców solitonu) podsunął M. Hénonowi i C. Heilesowi pomysł, aby napisać algorytm pozwalający otrzymać wprost, punkt po punkcie, trajektorię leżącą na mapie nie analizując pełnej trajektorii układu w przestrzeni fazowej i zyskując tym samym znacznie na czasie. Chodziło zresztą nie tylko o to. Towarzyszyło takiej procedurze głębokie pytanie: czy dysponując samą mapą można odtworzyć pełną przeszłość i przyszłość danego układu?

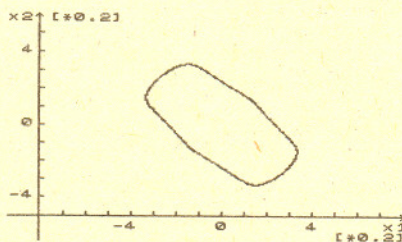
Przypatrzymy się zatem otrzymanej mapie (rys. 1) uzyskanej załączonym programem o nazwie MAPOWANIE – 2D. Obszar obejmowany przez mapę można podzielić na dwie różne części. Pierwsza z nich, wewnętrzna, jest uporządkowana i składa się z regularnych, zamkniętych trajektorii (z których wybraliśmy przykładowo dwie) oraz z punktu leżącego w środku. Eksperymentując wspomnianym programem zauważycie zapewne, że tego typu współśrodkowych krzywych (w obszarze ograniczonym od zewnątrz największą z nich) jest nieskończenie wiele. Co więcej, punkty należące do danej krzywej zapełniają ją jak gdyby chaotycznie. Jest to, jak się wydaje, jedyna nieregularność pojawiająca się w tej części. Druga część, na zewnątrz, ma już wyraźnie nieregularny charakter. Należy podkreślić, iż reprezentuje ona, tak jak i poprzednie, jedną trajektorię w przestrzeni fazowej. Właśnie tego typu trajektorie noszą nazwę **orbit stochastycznych** lub **ergodycznych**, o czym mówiliśmy już w poprzednim artykule.

Na potrzeby tego artykułu nie odróżnia się mapy, czyli pewnego odwzorowania, od tzw. cięcia Poincarého jako obrazu, tzn. rezultatu działania tego odwzorowania. Innymi słowy – mapę utożsamia się z cięciem Poincarého.

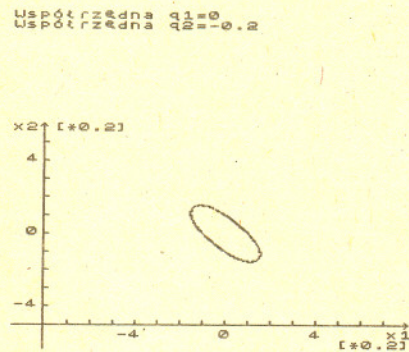
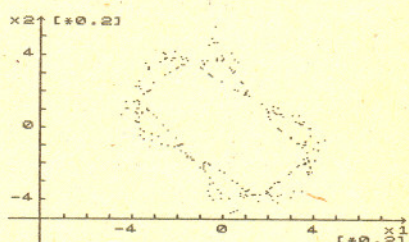
```
Współt rzędna q1=0
Współt rzędna q2=0
```



```
Współt rzędna q1=0
Współt rzędna q2=0.475
```



```
Współt rzędna q1=0
Współt rzędna q2=0.5
```



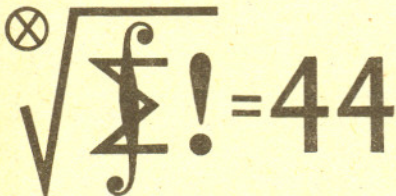
Rys. 1





## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązywanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 175 ( $WT=1,65$ ) i 176 ( $WT=3,09$ )  
z numeru 9/1988

|                     |              |          |
|---------------------|--------------|----------|
| Adam Ruszel         | - Krosno     | 45,46pkt |
| Andrzej Bonk        | - Chełmża    | 44,73pkt |
| Zbigniew Surduka    | - Czechowice | 43,71pkt |
| Edward Orzechowski  | - Warszawa   | 43,68pkt |
| Grzegorz Zakrzewski | - Trzcianka  | 43,36pkt |
| Adam Przedzięcki    | - Warszawa   | 42,85pkt |
| Rafał Latała        | - Warszawa   | 39,81pkt |

Pan Ruszel – po raz pierwszy, a pan  
Bonk – po raz trzeci (już dziewiąty  
Weteran Ligi matematycznej).

## Zadania z matematyki nr 189, 190

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**189.** Rozpatrujemy trójkąt  $T$  i czworokąt  $Q$  opisane na danym kole  $K$ . Wyznaczyć kąty oraz określić wzajemne położenie figur  $T$  i  $Q$ , dla których pole części wspólnej  $T \cap Q$  jest minimalne.

**190.** Dane są liczby naturalne  $m, n \geq 1$ ; zakładamy, że  $m$  jest liczbą nieparzystą. Czy liczby  $2^m - 1$  i  $2^n + 1$  muszą być względnie pierwsze?

Zadanie 190 zaproponował pan Andrzej Pawłowski z Zabrza.

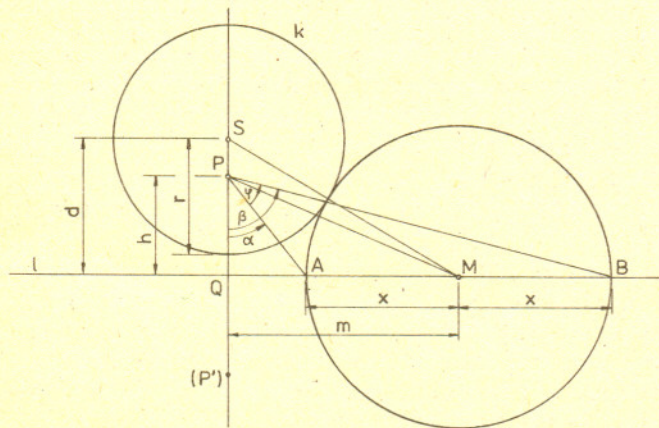
## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1988

Przypominamy treść zadań:

**181.** Na płaszczyźnie dany jest okrąg  $k$  oraz rozłączna z nim prosta  $l$ . Czy istnieje poza prostą  $l$  punkt, z którego wszystkie zawarte w  $l$  średnice okręgów stycznych zewnętrznie do  $k$  widać pod jednakowym kątem?

**182.** Jakie liczby  $n \in \mathbb{N}$  mają własność: dla dowolnych liczb  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  o sumie 1 można rozbić ciąg  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots)$  na  $n$  podciągów tak, by suma szeregu utworzonego z wyrazów  $i$ -tego podciągu była równa  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )?

**181.** Oznaczmy środek i promień okręgu  $k$  przez  $S$  i  $r$ ; odległość punktu  $S$  od prostej  $l$  – przez  $d$ , a rzut punktu  $S$  na prostą  $l$  – przez  $Q$ . Jeśli istnieje poza prostą  $l$  punkt spełniający postawiony warunek, to musi on leżeć na prostej  $QS$ . Jeśli pewien punkt prostej  $QS$  spełnia warunek zadania, to jego obraz w symetrii względem prostej  $l$  także spełnia ten warunek. Możemy zatem ograniczyć poszukiwania do punktów półprostej  $QS^+$ .



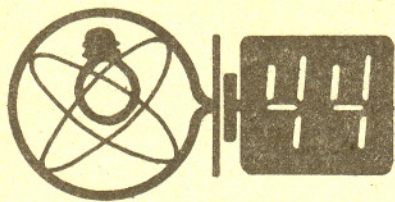
Niech  $P$  będzie dowolnym punktem tej półprostej (różnym od  $Q$ ) i niech  $AB$  będzie jedną z rozpatrywanych w zadaniu średnic, a  $M$  – jej środkiem. Możemy przyjąć, że trójki punktów  $(S, Q, M)$  i  $(S, A, B)$  są dodatnio zorientowane. Przyjmijmy jeszcze oznaczenia:  $|QP| = h$ ,  $|QM| = m$ ,  $|MA| = |MB| = x$ ,  $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA}) = \alpha$ ,

$\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB}) = \beta$ . Okrąg o środku  $M$  i promieniu  $x$  jest styczny do  $k$ , a więc  $(x+r)^2 = |SM|^2 = d^2 + m^2$ , czyli  $m^2 - x^2 = r^2 - d^2 + 2rx$ . Odcinek  $AB$  jest widoczny z punktu  $P$  pod kątem  $\varphi = \beta - \alpha \in (0; \pi/2)$ . Obliczmy tangens tego kąta:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{m+x}{h} - \frac{m-x}{h}}{1 + \frac{m-x}{h} \cdot \frac{m+x}{h}} = \\ &= \frac{2hx}{h^2 + m^2 - x^2} = \frac{2hx}{h^2 + r^2 - d^2 + 2rx} \end{aligned}$$

Otrzymane wyrażenie ma wartość stałą (przy zmiennym  $x$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $h^2 + r^2 - d^2 = 0$ . Stąd odpowiedź: istnieją poza prostą  $l$  dwa punkty, z których rozważane średnice są widoczne pod jednakowym kątem; są to punkty  $P$  i  $P'$  położone na prostej  $QS$  symetrycznie względem punktu  $Q$ , w odległości  $\sqrt{d^2 - r^2}$  od tego punktu.

**182.** Rozbicie, o jakim mowa, jest zawsze wykonalne, gdy  $n \leq 3$ . Dla  $n = 1$  i  $n = 2$  jest to oczywiste. Dla  $n = 3$ : jeżeli  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ , to co najmniej dwie z liczb  $a_i$  nie przekraczają  $1/2$  i można każdą z nich przedstawić jako sumę szeregu utworzonego z niektórych wyrazów ciągu  $(1/4, 1/8, 1/16, \dots)$ ; niewykorzystane wyrazy złożą się na trzecią z tych liczb. (Dopuszczamy podciągi puste.) Natomiast dla każdego  $n \geq 4$  łatwo znaleźć takie liczby  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  ( $\sum a_i = 1$ ), żeby omawiane rozbicie nie istniało. Przykład: dla  $n = 4$ :  $a_1 = a_2 = a_3 = 1/5$ ,  $a_4 = 2/5$ ; dla  $n \geq 5$ :  $a_1 = \dots = a_n = 1/n$  (w każdym z tych przykładów jest niemożliwe „zmieszczenie” dwóch egzemplarzy liczby  $1/4$  jako składników szeregów o sumach  $\bar{a}_i$ ).



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 73 (WT=1,88) i 74 (WT=2,33)  
z numeru 9/1988

|                       |            |       |     |
|-----------------------|------------|-------|-----|
| Adam Sikorski         | - Lublin   | 36,96 | pkt |
| Roman Musiał          | - Katowice | 36,67 | pkt |
| Paweł Perkowski       | - Szczecin | 36,28 | pkt |
| Piotr Koczyński       | - Warszawa | 33,28 | pkt |
| Wiesław Kacprzak      | - Kraków   | 32,92 | pkt |
| Aleksander Surma      | - Myszków  | 27,49 | pkt |
| Dzierzysław Lipniacki | - Lublin   | 26,88 | pkt |
| Jerzy Lipkowski       | - Elbląg   | 23,40 | pkt |

87. Czy kosmonauta unoszący się swobodnie w przestrzeni kosmicznej (nie obracający się względem swego środka masy) może dokonać obrotu swego ciała, na przykład o 180°, nie wykorzystując żadnych oddziaływań z ciałami zewnętrznymi ani odrzutu? Jeśli jest to możliwe, to w jaki sposób?

88. Kwadratowa ramka o boku  $a$  z drutu miedzianego o polu przekroju poprzecznego  $S$  wiruje – ze stałą prędkością kątową  $\omega$  – w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  wokół osi leżącej w płaszczyźnie ramki, równoległej do jednego z jej boków i prostopadłej do kierunku pola magnetycznego. Obliczyć maksymalną wartość momentu siły, jaki musi pokonać silniczek napędzający ramkę. Opór właściwy miedzi wynosi  $\rho$ .  
Czy wynik ulegnie zmianie i jak, jeśli ramka będzie zawierała  $n$  zwojów cieńszego drutu, wykonanego z tej samej ilości miedzi, co ramka pierwotna?

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1988**

Przypominamy treść zadań:

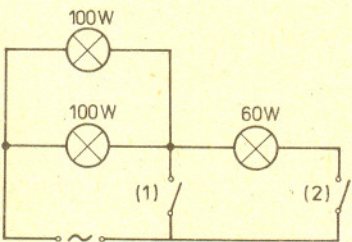
79. Podłączając trójlampowy żyrandol z dwiema żarówkami 100-watowymi i jedną 60-watową do sieci zaopatrzonej w dwa wyłączniki stwierdzono, że żarówki 100 W świecą normalnie przy włączonym wyłączniku (1) oraz przy obu wyłącznikach włączonych, podczas gdy żarówka 60 W świeci tylko przy włączonym wyłączniku (2).

Podać schemat obwodu elektrycznego.

80. Jaka jest prędkość ultrachłodnych neutronów o energii kinetycznej  $10^{-7}$  eV i jak zachowują się one w ziemskim polu grawitacyjnym?

Czy wiązka ultrachłodnych neutronów ulega dyfrakcji na kryształach?

W jaki sposób można by przechowywać takie neutrony przez pewien czas w ograniczonej przestrzeni?



79. Schemat poszukiwanego obwodu elektrycznego podany jest na rysunku. Przy włączonym wyłączniku (2) i wyłączonym wyłączniku (1) żarówka 60-watowa świeci w takim układzie tylko nieco słabiej niż normalnie, natomiast włókna żarówek 100-watowych nie grzeją się na tyle, aby ich świecenie było dostrzegalne przy normalnym oświetleniu. Związane jest to z dużym współczynnikiem temperaturowym oporu elektrycznego wolframu. Opór włókna zimnego jest wielokrotnie niższy od oporu włókna rozżarzonego, dzięki temu opór równoległe połączonych żarówek 100-watowych jest niewielki w porównaniu z oporem żarówki 60-watowej, a wydzielana na nich moc jest także odpowiednio mała.

80. Prędkość neutronu obliczamy ze wzoru  $v = \sqrt{2E/m}$ . Podstawiając wartość energii kinetycznej neutronu  $E = 10^{-7}$  eV =  $10^{-7} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}$  J oraz masy neutronu (z tablic)  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, otrzymujemy  $v = 4,4$  m/s = 16 km/h. Ciało rzucone z taką prędkością do góry uniesie się na wysokość  $h = v^2/2g \approx 1$  m ( $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>).

Wnioskujemy stąd, że ultrachłodne neutrony poruszają się w ziemskim polu grawitacyjnym po torach parabolicznych – jak kulki makroskopowe o niedużych prędkościach.

Dyfrakcja cząstek na kryształach uzależniona jest od odpowiadającej im długości fali do Broglie'a  $\lambda = h/p$  ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s – stała Plancka,  $p$  – pęd cząstki).

Zauważalna dyfrakcja zachodzi wtedy, gdy długość fali de Broglie'a jest porównywalna z odległościami międzyatomowymi. W naszym przypadku  $\lambda = h/\sqrt{2mE} \approx 10^{-7}$  m. Tymczasem odległości międzyatomowe w kryształach są rzędu  $10^{-10}$  m, czyli o 3 rzędy wielkości mniejsze. Ultrachłodne neutrony „widzą” więc kryształ jako jednorodne ciało nie ulegając dyfrakcji na poszczególnych atomach.

Poszczególne substancje mają – podobnie jak dla światła – różne współczynniki załamania dla ultrachłodnych neutronów (tu uwidacznia się falowa natura tych cząstek). Dla większości substancji współczynniki załamania są mniejsze od jedności, a zatem odbijają one całkowicie neutrony padające pod odpowiednio dużym kątem (na zasadzie optycznego całkowitego wewnętrznego odbicia).

Przy bardzo małej prędkości padania (zależnej od rodzaju substancji) całkowite odbicie neutronów następuje nawet dla padania prostopadłego, dzięki temu ultrachłodne neutrony można przechowywać w odpowiednich „pudełkach”. Sposobem na przechowywanie takich neutronów w ograniczonej przestrzeni byłoby także umieszczenie ich np. w ciekłym helu: dzięki zderzeniom neutronów z atomami helu ich dyfuzja poza pierwotny obszar zachodziłaby bardzo powoli.

Fizyka ultrachłodnych neutronów jest bardzo ciekawa, toteż w jednym z następnych numerów zamieścimy obszerniejszy artykuł na ten temat.





Wodór międzygwiazdowy promieniuje falę elektromagnetyczną o długości 21 cm. Postuluje się, że każda dostatecznie rozwinięta cywilizacja kiedyś zaczyna śledzić budowę Galaktyki siłą rzeczy na tej właśnie długości fali, zatem w tym też zakresie warto nadawać własne sygnały, aby najprędzej zostać posłyszonym. Reżyser filmowy Steven Spielberg 29 IX 1985 dokonał symbolicznego uruchomienia najnowszego urządzenia do nasłuchiwania sygnałów cywilizacji pozaziemskich. Urządzenie składa się z 30-metrowego radioteleskopu i odbiornika zdolnego odbierać jednocześnie 8,4 mln kanałów częstości w pobliżu fali 21 cm (1,43 GHz). Kanały pokrywają pasmo 420 kHz, a ich zawrotna liczba umożliwił odbiór „audycji” ewentualnych nadawców bez względu na jej możliwe dopplerowskie przesunięcie. System nosi nazwę META (*Megachannel Extra-Terrestrial Assay*) i znajduje się w pobliżu Harvardu (Cambridge, stan Massachusetts).



Najcięższym zbadanym niedawno jądrem atomowym o liczbie protonów równej liczbie neutronów jest  ${}^{80}_{40}\text{Zr}_{40}$ . Jest to najbardziej egzotyczne ze znanych jąder, ma ono 10 neutronów mniej od najbliższego stabilnego izotopu Zr. Promieniowanie gamma tego jądra zidentyfikowano na wiązce akceleratora w Daresbury (Wielka Brytania) w 1987 r. Trzeba było zastosować skomplikowane techniki koincydencyjne, aby wyodrębnić widmo gamma jądra  ${}^{80}\text{Zr}$  produkowanego z przekrojem czynnym  $10 \mu\text{b}$  (mikrobarńów). Było ono „schowane” w tle promieniowania innych jąder wytwarzanych równocześnie z przekrojami czynnymi aż  $10^4$  razy większymi. Znalezione zostały dwa pierwsze stany wzbudzone  ${}^{80}\text{Zr}$  i można już stwierdzić, że deformacja kwadrupolowa tego jądra wynosi około 0,4.



Dzięki tzw. odbłyśnikowi pozostawionemu na Księżycu przez wyprawę Apollo 11 ciągle możliwe jest prowadzenie systematycznych laserowych pomiarów odległości Księżycy. Właściwie trzeba powiedzieć precyzyjniej: mierzona jest odległość konkretnego odbłyśnika od konkretnego lasera, ponieważ dokładność tych pomiarów jest lepsza niż 1 metr. 29 VI 1985 na Uniwersytecie Teksaskim odbyła się uroczystość zamknięcia laserowego dalmierza pracującego z teleskopem 2,7-metrowym i uruchomienia nowego lasera z teleskopem 76 cm. Stary laser został przekazany do muzeum przyrządów naukowych w Smithsonian Institution.



Kilka cytatów z artykułu *Bliskie spojrzenie na 37* zamieszczonego w Journal of Recreational Mathematics:  
 Richard M. Nixon został 37 prezydentem Stanów Zjednoczonych w 1969 roku i  $19 + 6\sqrt{9} = 37$  i powinien nim być do 1973 roku ( $1 + 9(7 - 3) = 37$ ). Inicjały R, M i N są 18, 13 i 14 literami alfabetu, przy czym  $37(13 + 14) = 999$ , a  $666 = 37 \cdot 18$ .  
 37 jest jedenastą nieparzystą liczbą pierwszą, a jednocześnie jest też liczbą pierwszą.  
 $\frac{1}{e} = 0,367 \dots \approx 0,37$ .  
 $2^{37} = 13738 \dots$   
 $\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots$   
 37 liczbą Fibonacciego jest  $24157817$  i  $24 + 15 + 7 + 8 - 17 = 37$ .

W ZSRR podjęto decyzję o budowie urządzenia (tzw. kolajdera) do przyspieszania i zderzania elektronów i pozytonów VLEPP w Sierpuchowie. Dwa pięciokilometrowe liniowe akceleratory będą przyspieszać elektrony i pozytony do energii 500 GeV. W Sierpuchowie prowadzone są również prace przy budowie akceleratora UNK mającego przyspieszać protony do energii 3000 GeV. Największy obecnie akcelerator elektronów i pozytonów TRISTAN w laboratorium KEK w Japonii osiąga energię 27 GeV, a największy akcelerator protonów i antyprotonów TEVATRON w Laboratorium Fermiego w USA pozwala uzyskać energię 900 GeV.



Wprowadzenie przez Hamiltona formalnego rachunku wektorowego (np. takich „wektorów”, jak  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ), ciągle jeszcze obecnych w niektórych podręcznikach analizy) zyskało sobie nieprawdopodobną popularność i to nie tylko wśród matematyków. O metodach Hamiltona pisano wiersze, śpiewano piosenki, powstawały *fancluby* Hamiltona, a ich członkowie, niekiedy dość agresywnie, naklinali do uznania geniuszu swego mistrza. Nad granicą Francji i Niemiec dochodziło do starć i bójek ze zwolennikami niemieckiej szkoły rachunku wektorów – algebry liniowej Grassmanna. Mimo że trudno popierać burdy i chuligaństwo, to jednak iza się w oku kręci na wspomnienie czasów, gdy matematycy wywoływali emocje takie, jak dziś piłkarze.



Firma Arco Solar Inc. podała do wiadomości, że opracowała nowy rodzaj baterii słonecznych. Baterie te w postaci cienkich powłok mają sprawność około 11% – znacznie wyższą niż dotychczasowe baterie podobnego typu. Choć ich sprawność jest niższa niż baterii monokrystalicznych (najlepsze mają sprawność 28–29%), to ich niski koszt produkcji stwarza nadzieję na otrzymanie nowych, konkurencyjnych źródeł zasilania wykorzystujących energię słoneczną.



Każdy wie, że najdłużej obserwowaną kometą jest kometa Halleya, mianowicie pierwsze jej obserwacje pochodzą z Chin z 240 r. p.n.e., a ostatnie z jej ostatniego zbliżenia do Słońca w 1986 r. W tym czasie kometa wykonała 29 obiegów wokół Słońca. Ale najwięcej powrotów, bo 53, zaobserwowano u komety Enckego (od 1786 do 1984). Najdłużej obserwowaną podczas jednego pojawienia była ostatnio też kometa Halleya, ale najdłużej obserwowana nieuzbrojonym okiem była Kometa Napoleońska 1811I: od 25 marca 1811 r. do połowy stycznia 1812 r., z dwumiesięczną przerwą, gdy kometa była w pobliżu Słońca. Natomiast najkrócej obserwowana była kometa 1963II Anderson. W okresie 22–25 listopada 1963 r. wykonano cztery jej fotografie w ciągu czterech kolejnych nocy. W jeszcze krótszym zakresie czasu były obserwowane komety widziane tylko podczas całkowitych zaćmień Słońca, np. 16 kwietnia 1893 r., ale komet tych nie skatalogowano.



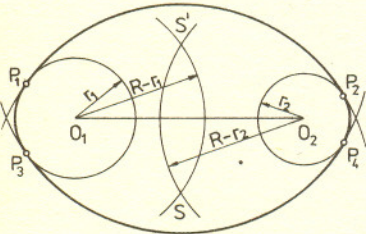
W dowolnym ostrokątnym trójkącie prowadzimy symetralne boków – proste  $k$ ,  $l$  i  $m$ . Jeśli połączymy punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, to w powstałym trójkącie proste  $k$ ,  $l$  i  $m$  będą wysokościami. Powtarzając tę operację jeszcze raz otrzymamy trójkąt, w którym proste  $k$ ,  $l$  i  $m$  będą dwusiecznymi kątów. A czy da się równie prosto opisać to, co otrzymamy przy kolejnych powtórzeniach tej operacji?

Dr inż. Janusz KONDRASIUK

W technice często użyteczne są elementy mające kształt owalu, czyli gładkiej wypukłej krzywej zamkniętej. Takim owalem jest, oczywiście, okrąg. Jest też nim elipsa, ale wykonanie detalu o tym kształcie jest, w praktyce produkcyjnej, kłopotliwe. Dlatego też owale stosowane w technice są zazwyczaj gładko połączonymi łukami okręgów. Powstaje pytanie, jak je kreślić. Uściślijmy jeszcze pojęcie gładkości: dwa łuki łączą się gładko we wspólnym punkcie, jeśli mają w nim wspólną styczną.

**Zadanie.** Dane są dwa okręgi o środkach  $O_1$  i  $O_2$  i promieniach, odpowiednio,  $r_1$  i  $r_2$ . Znaleźć łuki okręgów o promieniu  $R$  łączące się gładko z tymi okręgami.

**Rozwiązanie.** Z punktu  $O_1$  zakreślamy okrąg o promieniu  $R - r_1$ , a z punktu  $O_2$  - o promieniu  $R - r_2$ . Punkty  $S$  i  $S'$  przecięcia tych okręgów są środkami szukanych łuków. Gładkość połączenia zapewnia fakt, że proste  $O_1S$ ,  $O_1S'$ ,  $O_2S$  i  $O_2S'$  zawierają promienie stykających się okręgów. Czytelnik zechce sam ustalić, dla jakich parametrów  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  i  $R$  (w istocie są cztery parametry, bo nie jest istotne położenie  $O_1$  i  $O_2$ , lecz tylko ich odległość) zadanie ma rozwiązanie, z którego powstaje owal.



Często, szczególnie gdy owal ma zastępować elipsę, żądamy, by miał on dwie osie symetrii. Na parametry też nakładamy dodatkowe warunki - zazwyczaj chcemy, by owal był wpisany w dany prostokąt. Jak łatwo się przekonać, nie zapewnia to jednoznaczności. Oto trzy przykłady konstrukcji z dodatkowo przyjętymi warunkami dla owalu wpisanego w prostokąt o bokach  $2a$  i  $2b$  ( $a > b$ ).

**Konstrukcja 1.** Oznaczmy przez  $O$  środek prostokąta. Na prostej zawierającej dłuższą oś symetrii prostokąta odkładamy od  $O$  odcinki o długości  $(1 + \frac{1}{n})(a - b)$ , a na zawierającej krótszą - odcinki o długości  $(\frac{n}{2} + 1)(a - b)$ . Końce tych odcinków będą środkami łuków stycznych, odpowiednio do krótszych i dłuższych boków prostokąta.

Czytelnik zechce sprawdzić (przez porównanie z Zadaniem), że otrzymamy owal, oraz odgadnąć znaczenie parametru  $n$ .

**Konstrukcja 2.** Oznaczmy środki kolejnych boków prostokąta przez  $A$  i  $B$ . Na odcinku  $AB$  wybieramy taki punkt  $C$ , że  $BC = a - b$ . Symetralna odcinka  $AC$  wyznacza na prostych zawierających osie symetrii prostokąta dwa spośród czterech szukanych środków okręgów, co pozwala dokończyć rysunek.

I znów prosimy Czytelnika o sprawdzenie poprawności konstrukcji. Nie ma w niej już niczego dowolnego (gdy prostokąt jest dany). Dołączony przez nas warunek to żądanie, by łuki o większym promieniu miały rozwartość  $2 \arctg \frac{b}{a}$  (proszę sprawdzić).

**Konstrukcja 3.** Z dowolnego wierzchołka  $D$  prostokąta i z jego środka prowadzimy proste  $d$  i  $e$  tworzące z bokami prostokąta kąt  $45^\circ$ . Oznaczmy punkt ich przecięcia przez  $O'$ . Z punktu  $O'$  kreślimy okrąg pomocniczy, styczny do obu osi symetrii prostokąta. Z wierzchołka  $D$  prowadzimy styczną  $f$  do okręgu pomocniczego, przecinającą osie w dwóch spośród czterech szukanych środków okręgów (i kończymy konstrukcję).

To też trzeba sprawdzić, jak też odgadnąć sens przyjętego tym razem ograniczenia.

I jeszcze jedna uwaga: owal nazywamy foremny, gdy łuk o większym promieniu, spośród łuków okręgów składających się na owal, ma rozwartość  $60^\circ$ . Można taki owal umieścić w dowolnym prostokącie, jeśli tylko w Konstrukcji 1 przyjmujemy  $n = \sqrt{3} + 1$ . W Konstrukcjach 2 i 3 (gdzie nie mamy żadnej swobody) owal foremny powstaje, odpowiednio, gdy  $a = \sqrt{3}b$  i  $a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b$ .

