

Uwaga miłośnicy astronomii !

Dla osób interesujących się astronomią (nie tylko harcerzy) ZHP organizuje obozy w czasie wakacji, a także zajęcia w ciągu roku szkolnego (kluby, spotkania itp.).

Zainteresowanych prosimy o kontakt:

Andrzej Piłski
ul. Katedralna 8
14 - 530 Frombork

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(182)

Supernowa w Wielkim Obłoku Magellana <i>dr Maciej Kozłowski</i>	str. 1
Ciąg $(\sin n)^n$ albo o aproksymacjach diofantycznych <i>mgr Sławomir Cynk</i>	str. 4
Deterministyczny chaos <i>dr hab. Ryszard Kutner</i>	str. 5
Mala Delta	str. 8
Co to jest liczba rzeczywista ? <i>dr hab. Marek Kordos</i>	str. 10
Kącik prac uczniowskich	str. 12
Patrz w niebo	str. 13
Zadania	str. 13
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16
Dwa wieki mechaniki analitycznej <i>mgr Henryk Drozdowski</i>	str. 17

W następnym numerze:

Pozytonium

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmokił - v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzembowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Małowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz Sitarski
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski -
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski - z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos - sekr. red.
dr hab. Marek Kordos - red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański - grafik

Adres Redakcji
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127
02-017 Warszawa

tel. centr. 28-52-31
Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
Nr zam. 3997/88, U-57.
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI I CENY PRENUMERATY NA 1989 ROK

Zgłoszenia na prenumeratę:
w terminie

- do dnia 10 listopada br. na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok 1989,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych - instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora - przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”,
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich - przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszczących się na tych terenach.

Ceny prenumeraty:

kwartalnej 210 zł
półrocznej 420 zł
rocznej 840 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę - przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.



Dr Maciej KOZŁOWSKI

Supernowa SN 1987a, którą mieszkańcy południowej półkuli mogli oglądać gołym okiem od 23 lutego do jesieni 1987 roku na tle Wielkiego Obłoku Magellana, przejdzie do historii astronomii nie tylko jako najjaśniejsza na niebie od czasów supernowej Keplera z 1604 roku, ale także jako supernowa niezwykła. Niezwykła nie tylko dlatego, że w maksimum blasku (około 20 maja 1987 r.) świeciła jako gwiazda trzeciej wielkości, a więc z mocą wystarczającą dla użycia najbardziej wyrafinowanych technik obserwacyjnych współczesnej astronomii, które umożliwiły prześledzenie wielu szczegółów będących dotychczas poza zasięgiem teleskopów, ale także z racji swej odmienności.

Zacząć trzeba od tego, że po raz pierwszy wiemy dokładnie, kiedy nastąpił wybuch supernowej. Tym razem stało się to 23 II 1987 r. o godzinie 7³⁰ czasu Greenwich, a więc na 22 godziny przed jej odkryciem optycznym przez Iana Sheltona w obserwatorium Las Campanas w Chile (pedant odejmie jednak od tego momentu 170 000 lat, czyli tyle, ile trwa wędrówka światła od Wielkiego Obłoku Magellana do Ziemi). W tamtej chwili trzy detektory, zbudowane zresztą w zupełnie innym celu – po to, aby zbadać hipotetyczny rozpad protonu w skali 10³¹ lat – zanotowały niespodziewany, trwający około 10 sekund, błysk neutrin. Ścisłe – schwytano ich łącznie 21, w tym 11 w japońskim detektorze Kamiokande, 8 w amerykańskim IMB i 2 w radzieckim detektorze BAKSAN, ale że neutrina skrajnie słabo oddziałują z materią, oznacza to, że przez każdy centymetr kwadratowy przekroju Ziemi przeszło wówczas 10¹¹ neutrin. Nawiasem mówiąc, wszystkie one w drodze do detektorów musiały przesyć na wskroś kulę ziemską, jako że wymienione detektory znajdują się na szerokościach geograficznych, na których Obłoki Magellana są zawsze pod horyzontem. Ale cóż to dla neutrin ...

Dla ścisłości trzeba tu wspomnieć także o pięciu kłopotliwych neutrinach, zanotowanych przez radziecko-włoski detektor, umieszczony w tunelu pod Mont Blanc. Na swoje nieszczęście pośpieszyły się one aż o 4,5 godziny w stosunku do pozostałych neutrin, a w dodatku analiza ich energii prowadzi do wniosku, że supernowa wyemitowała energię 10-krotnie większą, niż to, co na gruncie naszej znajomości fizyki można uznać za rozsądne. Być może, przyszli fizycy wytłumaczą naturę tych neutrin, ale na razie doniesienie o ich rejestracji jest przyjmowane z rezerwą i we wszystkich analizach są one raczej pomijane.

Błysk neutrinowy przekonuje nas jednoznacznie, że przyczyną wybuchu była implozja („kolaps”) jądra gwiazdy – teoria mówi, że dzieje się to w ciągu setnych części sekundy i przydarza się gwiazdom najbardziej masywnym. Zapadnięte jądro tworzy gwiazdę neutronową,

a praktycznie cała jej energia wiązania grawitacyjnego zamienia się w energię ciepłą, powodując ogrzanie materii do fantastycznych temperatur sięgających 10¹² K i w efekcie produkcję termicznych neutrin, które w ciągu około 10 sekund prawie całą tę energię wynoszą w przestrzeń międzygwiazdową. Energię wiązania gwiazdy neutronowej możemy łatwo oszacować sami, przyjmując jej masę jako $M = 1,5 M_{\odot}$ (symbol M_{\odot} oznacza tu masę Słońca, czyli 2×10^{30} kg) i promień $R = 15$ km przy stałej grawitacyjnej $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²

$$U = \frac{GM^2}{R} = 1,8 \times 10^{46} \text{ J.}$$

(Zauważmy, że Słońce w ciągu swego trwającego 4,5 miliarda lat życia wyprodukowało ponad 1000 razy mniej energii.) Skala czasowa 10 sekund bierze się stąd, że materia o gęstości przewyższającej tu 10¹⁴ g/cm³ jest dla neutrin nieprzezroczysta i tyle czasu zabiera im dyfuzja do powierzchni gwiazdy neutronowej, skąd już swobodnie ulatują, nie oddziałując z resztą gwiazdy ani – praktycznie – z niczym już więcej. Nawiasem mówiąc, energia świetlna emitowana przez supernową (8×10^{41} J) i przewyższająca ją znacznie energia kinetyczna wyrzuconej materii (2×10^{44} J) to łącznie zaledwie około 1% energii unoszonej przez neutrina! Wracając do zarejestrowanych neutrin: analiza ich energii, z uwzględnieniem faktu, że aparatura rejestrowała tylko antyneutrina elektronowe, podczas gdy teoria mówi, że w tych samych ilościach wyemitowane zostało także 5 innych gatunków neutrin, wskazuje na to, że jeśli wybuch nastąpił w Obłoku Magellana, to ich łączna energia była rzędu 10⁴⁶ J. A więc zgadza się ...

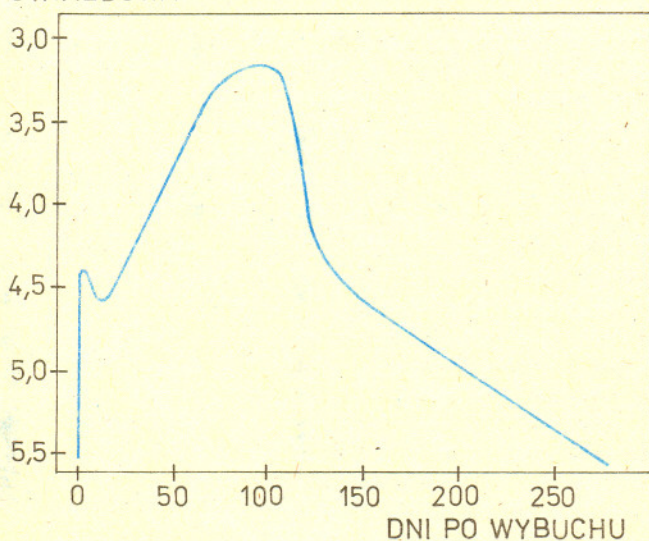
Konkurencyjny mechanizm, który lubimy przypisywać supernowym typu I, to eksplozywne zapalenie się węgla w jądrze gwiazdy, składającym się z materii zdegenerowanej – takiej, z jakiej zbudowane są białe karły. Są powody, aby przypuszczać, że w wyniku tej eksplozji następuje rozerwanie całej gwiazdy – sugeruje to teoria, a potwierdzają pozostałości po supernowych, których większość nie zawiera śladu obiektu centralnego. Natomiast neutrina – aczkolwiek są emitowane – to nie w takiej ilości, jak po grawitacyjnym zapadnięciu się jądra gwiazdy.

W tym miejscu pora na wyjaśnienie różnic między supernowymi typu I i II. Otóż już wkrótce po odkryciu supernowych (F. Zwicky, W. Baade – druga połowa lat trzydziestych) okazało się, że ich krzywe blasku (przedstawiające zmiany jasności w czasie) dzielą się wyraźnie na dwie kategorie, przy czym kategoria I jest bardzo jednorodna, natomiast krzywe kategorii II wykazują silne indywidualne zróżnicowania. Po przyjrzeniu się widmom supernowych wyodrębniono dodatkową cechę różniącą oba typy: w supernowych typu I nie widać

ślądu wodoru, natomiast w widmach supernowych typu II linie wodorowe są bardzo silne. Interpretacja tego i innych faktów przywiodła nas ku przeświadczeniu, że supernowa typu I to wybuch gwiazdy, niegdyś o masie 3 – 8 M_{\odot} , która w czasie swego życia straciła większość materii, redukując się do węglowo-tlenowego zdegenerowanego jądra, z niezbyt masywną otoczką helową, helowo-wodorową, a jeszcze lepiej – z drugą towarzyszącą gwiazdą, powoli tracącą masę. Otoczką lub towarzyszy potrzebne są po to, aby masa jądra mogła rosnąć, a gdy zbliży się ona do krytycznej wartości 1,4 M_{\odot} , znanej jako granica Chandrasekhara, wówczas węgiel zapala się i następuje katastrofa, w wyniku której gwiazda przestaje istnieć. Z kolei gwiazda, która ma wybuchnąć jako supernowa typu II, musi mieć większą masę startową. Ewoluuje ona na tyle szybko, że jądro w przerwach między spalaniem się poprzedniego i zapaleniem się następnego pierwiastka nie ma czasu, aby ostygnąć na tyle, by materia w nim stała się zdegenerowana, a tylko zdegenerowana materia jest niebezpieczna. Do czasu ... Żelazo nie chce się już palić, bo spośród wszelkich pierwiastków nukleonów są w nim związane najsilniej. Powstanie żelaznego jądra o masie przewyższającej masę Chandrasekhara przesądza jego los: kurcząc się stopniowo, wcześniej czy później zostanie ono zgniecione przez narastającą siłę samograwitacji, nastąpi implozja, a reszta gwiazdy zostanie wyrzucona w przestrzeń z prędkościami sięgającymi 20 000 km/s.

Nieco uwagi trzeba poświęcić jeszcze krzywom blasku supernowych typów I i II. Statystyka jest tu spora – corocznie odkrywa się obecnie co najmniej kilkanaście supernowych w mniej lub bardziej odległych galaktykach. O skali czasowej narastania jasności wiemy mniej. Statystyka jest tu uboższa, bo zwykle zauważamy supernową dopiero w maksimum blasku. Często jest to jednak po 1 – 2 tygodniach. W epoce po maksimum blasku jasność supernowych typu I przez 1 – 2 miesiące spada szybciej, a potem następuje długi etap wolniejszego, liniowego w skali wielkości gwiazdowych, czyli eksponencjalnego w skali (liniowej) spadku jasności, zawsze

JASNOŚĆ GWIAZDOWA



Rys.1. Krzywa blasku SN 1987a.

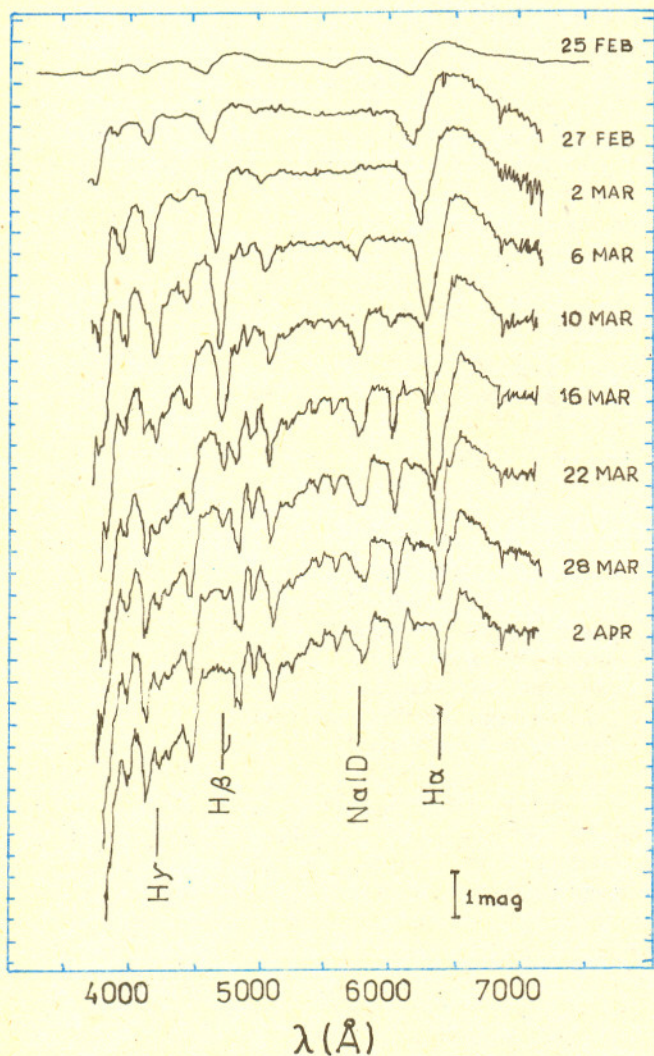
w tym samym tempie: o 50% w ciągu 60 dni. Krzywa blasku przypomina tu znaną ze szkoły średniej krzywą rozpadu promieniotwórczego. I nic dziwnego, bo ... supernowe typu I są promieniotwórcze! A wszystko to dzięki właściwościom materii zdegenerowanej, którą zapalenie się węgla ogrzewa na tyle mocno, że następuje wówczas cały łańcuch syntez jądrowych, w wyniku których połowa masy jądra zamienia się na nikiel 56. Ten jest β -promieniotwórczy i z połówkowym okresem rozpadu 6 dni zamienia się na kobalt 56, który też jest β -promieniotwórczy i z okresem połówkowym 77 dni rozpada się na żelazo 56. I to jest właśnie to! Rozpad promieniotwórczy ogrzewa materię, a ta świeci pod jego dyktando. Nie należy zapominać o ekspansji materii, w wyniku której jasność spada nieco szybciej niż skala czasowa rozpadu $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$. Jeśli idzie o krzywe blasku supernowych typu II, to są one bardzo zróżnicowane i żaden ich element nie daje się tak prosto wyjaśnić, jak „ogon” krzywych blasku supernowych typu I.

Powróćmy do SN 1987a. Natychmiast po jej odkryciu stało się jasne, że jest to supernowa typu II, ponieważ w jej widmie dominują charakterystyczne szerokie linie absorpcyjne wodoru. Tylko że jakaś ... słaba. Przeciętna supernowa typu II, wybuchając w odległości Wielkiego Obłoku Magellana, powinna osiągnąć blask gwiazdy pierwszej wielkości (supernowa typu I powinna być jeszcze jaśniejsza), tymczasem ta, choć pojaśniała rekordowo szybko, już w dobę po odkryciu zaczęła słabnąć, sięgając zaledwie wielkości gwiazdowej 4,5. To szybkie tempo zmian jasności jest zupełnym unikatem wśród supernowych – niczego podobnego dotychczas nie obserwowano! Znajduje jednak wyjaśnienie na gruncie tego, co wiemy o gwiazdzie, która wybuchła. Okazuje się bowiem, że po raz pierwszy w historii obserwacji supernowych wiemy, co wybuchło, i co więcej – wcale nie gwiazda bezimienna. Pozycja supernowej na niebie wskazuje na gwiazdę Sk-69.202 (Sk od nazwiska Sanduleak, autora katalogu jasnych gwiazd w Wielkim Obłoku Magellana) – niebieskiego nadolbrzyma (dla znawców astronomii: typu widmowego B3Ia), jedną z jaśniejszych (12,24 mag) gwiazd w Wielkim Obłoku Magellana.

I tu zdziwienie: teoria ewolucji gwiazd przyzwyczała nas do poglądu, że jako supernowe typu II wybuchają czerwone nadolbrzymy (dla ścisłości: nie każdemu z nich jest pisany ten los), a charakterystyki dotychczas obserwowanych supernowych raczej to potwierdzały. Specjaliści od teorii ewolucji, komentując niespodziankę – w najbliższym otoczeniu Sk-69.202 z pewnością nie było żadnego czerwonego olbrzyma – wyjaśnili, że nie ma tu jednak kryzysu teorii ewolucji gwiazd. W istocie nie wyklucza ona wybuchów niebieskich olbrzymów, a mówi jedynie, że są one mało prawdopodobne. Czynnikiem sprzyjającym są tu: niska obfitość pierwiastków cięższych niż hel w materii, z której gwiazda powstała, duża masa początkowa gwiazdy oraz silna utrata materii przez gwiazdę w trakcie jej życia. Pierwsza z tych okoliczności prawdopodobnie ma miejsce w przypadku Sk-69.202, ponieważ całe Obłoki Magellana są wyraźnie uboższe w pierwiastki ciężkie niż nasza Galaktyka. Specjaliści skłaniają się ku pogładowi, że Sk-69.202 w niedalekiej przeszłości była jednak czerwonym nadolbrzymem, tracąc w tym stadium sporo masy, która nie zdążyła zresztą daleko odpłynąć i da jeszcze o sobie znać w oddziaływaniu z produktami eksplozji.

Jeśli idzie o masę początkową Sk-69.202, to wnosimy, że była ona większa niż $10 M_{\odot}$. Próba modelowego odtworzenia tego, co zaobserwowano po wybuchu, najlepiej udaje się przy założeniu, że była to gwiazda o początkowej masie $17 - 20 M_{\odot}$, zredukowanej później do $12 M_{\odot}$. Jej struktura przed wybuchem wyglądałaby następująco: w środku żelazne jądro o masie około $1,5 M_{\odot}$, nad nim około $2 M_{\odot}$ materii cięższej niż hel, powyżej warstwa zawierająca $2,5 M_{\odot}$ helu i ponad tym helowo-wodorowa otoczka o masie $6 M_{\odot}$. Promień takiej gwiazdy wynosi około 3×10^{10} m, a więc 50 razy więcej, niż promień Słońca, zaś jej jasność przewyższa jasność Słońca 130 000 razy.

Model ten dobrze odtwarza szybkie zmiany jasności bezpośrednio po wybuchu: gwiazda gęsta i niezbyt rozległa szybko reaguje na przebiegającą przez nią falę detonacyjną niż czerwony olbrzym, którego promień potrafi przewyższać promień Słońca kilka tysięcy razy. Tłumaczy on nawet pewien wzrost jasności, który nastąpił poczynając od ósmego dnia po wybuchu, ale ... nie cały. Jasność zaś supernowej niespodziewanie rosła aż do 85 dnia po wybuchu, osiągając w maksimum 3 mag. Tęgo już nie da się wytłumaczyć prostym wyświecaniem energii materii ogrzanej przez falę uderzeniową.



Rys.2. Początkowe widma SN 1987a w dziedzinie widzialnej. Szerokie, przesunięte ku falam krótszym linie świadczą o ekspansji materii.

Potrzebny jest dodatkowy zastrzyk energii przechowanej jako od chwili wybuchu. Może pulsar? Silnie namagnetyzowana gwiazda neutronowa intensywnie wyhamowuje swój ruch obrotowy (na początku np. 1000 obr./s) mogąc w ten sposób dostarczyć olbrzymiej ilości energii do otaczającej ją materii. Sprawa wyjaśniła się definitywnie, kiedy po trwającym do 130. dnia od chwili wybuchu szybszym spadku blasku jasność poczęła spadać wolniej, w charakterystycznym tempie 0,01 wielkości gwiazdowej na dobę, czyli o połowę w ciągu 70 dni. A więc radioaktywna supernowa!

Ile promieniotwórczego niklu potrzeba, aby wytłumaczyć krzywą blasku SN 1987a? Otóż, nie tak dużo, jak w przypadku supernowych typu I. Wystarczy $0,07 M_{\odot}$. Nie implikuje to, że przyczyną wybuchu było zapalenie się węgla; nadal upieramy się, że nastąpiła tam implozja żelaznego jądra. Syntezę zaś pewnej ilości promieniotwórczego niklu przy wybuchu supernowej typu II niektórzy teoretycy nawet przewidywali ...

Spośród ciekawostek dotyczących supernowej warto wspomnieć, że średnica powierzchni świecącej jest już mierzalna. Np. w listopadzie 1987 roku wynosiła ona 0,02 sekundy łuku, co oznacza ekspansję ze średnią prędkością 4000 km/s. Jest to wyraźnie mniej niż maksymalna prędkość, wyznaczona z przesunięć dopplerowskich linii widmowych, przewyższająca 20 000 km/s, ale pamiętajmy, że najszybsze warstwy najszybciej stygną i przestają świecić.

Inną ciekawostką jest to, że SN 1987a to najjaśniejszy w historii astronomii obiekt pozagalaktyczny (mowa o jasności pozornej, a nie absolutnej). Na tyle jasny, że możliwa była rejestracja jego widm optycznych w wysokiej skali rozdzielczości. W widmach tych znaleziono około 30 systemów wąskich linii absorpcyjnych, pochodzących od różnych obłoków materii międzygwiazdowej, znajdujących się między Wielkim Obłokiem Magellana a nami. Z linii tych można dowiedzieć się wiele o odległościach, rozmiarach i składzie chemicznym obłoków (jeden z tych systemów należy prawdopodobnie powiązać z materią straconą przez Sk-69.202 przed wybuchem). Jest to najlepsze w historii prześwietlenie naszej Galaktyki, potwierdzające skądinąd, że SN 1987a leży poza jej granicami.

Z tych wszystkich powodów SN 1987a dołącza chwalebnie do słynnej kompanii sześciu historycznych supernowych naszego tysiąclecia, którą stanowią: SN 1006 (najjaśniejsza), SN 1054 (Krab), SN 1181 (3C58), SN 1572 (Tycho Brahe), SN 1604 (Kepler) i najbardziej tajemnicza, Cas A, której nikt nie widział, choć w zasadzie powinien, a która wybuchła gdzieś około roku 1680. Jest jednocześnie pierwszą supernową typu II odkrytą w galaktyce nieregularnej, choć z różnych powodów nie jest to niespodzianka - dotychczas pytaliśmy raczej, dlaczego w galaktykach nieregularnych wciąż odkrywa się same supernowe typu I. A może są one po prostu słabsze, podobnie jak słabszą okazała się SN 1987a?

Astronomia poświęca supernowym sporo uwagi nie bez powodu. Bez supernowych bowiem nie nastąpiłaby synteza wielu pożytecznych pierwiastków, a gdyby nawet nastąpiła, to pozostałyby one uwięzione we wnętrzach gwiazd. Nie miałyby z czego powstać Ziemia i siłą rzeczy, my sami.

Ciąg $(\sin n)^n$ albo o aproksymacjach diofantycznych

Mgr Sławomir CYNK

Kilka lat temu dużą popularnością wśród studentów matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego cieszył się następujący problem z analizy matematycznej:

Czy zbieżny jest ciąg $a_n := (\sin n)^n$?

Ufundowano nawet nagrodę za jego rozstrzygnięcie.

Wyrazy ciągu a_n o numerach parzystych są dodatnie, więc ciąg ten nie może być zbieżny do liczby ujemnej. Równie łatwo możemy wykazać, że badany ciąg nie ma granicy dodatniej. Przypuśćmy bowiem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, gdzie c jest liczbą dodatnią. Wtedy otrzymalibyśmy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = c^0 = 1$, co, oczywiście, nie jest prawdą.

W ten sposób w naszym śledztwie pozostała niesprawdzona tylko jedna podejrzana – liczba zero. Zanim wykluczmy i ją (a więc w konsekwencji wykażemy, że ciąg a_n nie jest zbieżny), przypomnijmy-przedstawmy kilka faktów. Wszystkie one wiążą się z przybliżaniem liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, czyli tak zwanymi aproksymacjami diofantycznymi.

Niech x będzie liczbą rzeczywistą niewymierną. Liczbę wymierną p/q nazywamy **najlepszym przybliżeniem** liczby x , jeśli dla dowolnej liczby naturalnej $r \leq q$ oraz dowolnej liczby całkowitej s prawdziwa jest nierówność $|qx - p| \leq |rx - s|$ (innymi słowy, jest to takie przybliżenie liczby x za pomocą liczby wymiernej, że biorąc dowolne inne przybliżenie za pomocą liczby wymiernej o mianowniku nie przekraczającym q popełnimy większy błąd względny w stosunku do mianownika).

W dalszym ciągu posłużymy się następującymi własnościami najlepszych przybliżeń (które uzasadnimy później):

1. Dwa różne najlepsze przybliżenia tej samej liczby niewymiernej mają różne mianowniki.
2. Najlepsze przybliżenie jest zawsze ułamkiem nieskracalnym.
3. Jeśli liczba wymierna p/q jest najlepszym przybliżeniem liczby wymiernej x , to spełniona jest nierówność

$$|qx - p| \leq 1/q.$$

4. Jeśli p_n/q_n jest ciągiem różnych najlepszych przybliżeń liczby x , to $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n/q_n) = x$.
5. Każda liczba niewymierna ma nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń, których mianowniki są liczbami nieparzystymi.

Korzystając z wypisanych faktów udowodnimy, że liczba zero nie jest granicą ciągu a_n . Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Niech ciąg p_n/q_n będzie nieskończonym ciągiem różnych najlepszych przybliżeń liczby $\pi/2$ o mianownikach nieparzystych. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |\cos p_n| &= |\sin(\pi/2 - p_n)| = \\ &= \left| \sin \left((\pi/2 - p_n) + ((q_n - 1)/2)\pi \right) \right| = \\ &= |\sin(q_n\pi/2 - p_n)|. \end{aligned}$$

Ale dla dowolnej liczby rzeczywistej t mamy $|\sin t| \leq |t|$, więc w konsekwencji

$$|\cos p_n| = |\sin(q_n\pi/2 - p_n)| \leq |q_n\pi/2 - p_n| \leq 1/q_n,$$

a stąd

$$|\sin p_n| = \sqrt{1 - (\cos p_n)^2} \geq 1 - |\cos p_n| \geq 1 - 1/q_n.$$

Ciąg q_n składa się z różnych liczb naturalnych, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, a ponieważ ciąg p_n/q_n jest zbieżny do $\pi/2$, więc również $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$. Na mocy założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mamy zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin p_n)^{p_n} = 0$. Z drugiej strony

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin p_n)^{p_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - (1/q_n)\right)^{q_n} \right)^{p_n/q_n} = e^{-\pi/2} > 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność kończącą dowód, że ciąg a_n nie jest zbieżny.

Pozostały nam jeszcze do udowodnienia wypisane własności najlepszych przybliżeń. Pierwsze dwie z nich są na tyle proste, że ich dowód pozostawimy starannemu Czytelnikowi. Własność trzecia jest wnioskiem z udowodnionego w 1842 roku przez Dirichleta twierdzenia nazywanego obecnie jego nazwiskiem.

Twierdzenie Dirichleta. Niech x będzie liczbą niewymierną. Dla dowolnej liczby naturalnej Q istnieją takie liczby całkowite p, q , że $1 \leq q \leq Q$ oraz

$$|xq - p| \leq 1/Q.$$

Dowód. Rozważmy następujący układ $Q + 1$ liczb $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Qx\}$ (gdzie $\{t\}$ oznacza część ułamkową liczby t) z przedziału $[0, 1]$. Dwie spośród nich różnią się nie więcej niż o $1/Q$. Oznacza to, że istnieją takie liczby całkowite r_1, r_2, s_1, s_2 , że $0 \leq r_1 < r_2 \leq Q$ oraz $|r_1x - s_1 - (r_2x - s_2)| \leq 1/Q$. Przyjmując $q = r_1 - r_2$, $p = s_1 - s_2$ otrzymamy tezę twierdzenia.

Własność czwarta jest wnioskiem z własności pierwszej i trzeciej. Dowód własności piątej składa się z dwóch części. Najpierw zauważmy, że dowolna liczba niewymierna ma nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń. Załóżmy, że jest przeciwnie. Przypuśćmy, że p/q jest najlepszym przybliżeniem liczby x o największym mianowniku. Wtedy dla dowolnej liczby wymiernej s/r mamy $|rx - s| \geq |qx - p|$. Liczba x jest niewymierna, więc $|qx - p| > 0$, a zatem istnieje taka liczba naturalna Q , że $|qx - p| > 1/Q$. Ale w ten sposób dowiedliśmy, że dla dowolnej liczby wymiernej s/r zachodzi $|rx - s| > 1/Q$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność z twierdzeniem Dirichleta. W ten sposób wykazaliśmy, że istnieje nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń liczby x . Ustawmy je w kolejności rosnących mianowników. Wykażemy, że spośród dowolnych dwóch wyrazów uzyskanego ciągu przynajmniej jeden ma mianownik nieparzysty. Przypuśćmy, że jest przeciwnie – niech liczby $(2p + 1)/2q$ i $(2s + 1)/2r$ będą kolejnymi najlepszymi przybliżeniami liczby x . Ale wtedy liczba $(p + s + 1)/(q + r)$ jest „lepszym przybliżeniem” liczby x niż $(2p + 1)/2q$, czyli istnieje lepsze przybliżenie x o mianowniku większym niż $2q$, a mniejszym niż $2r$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód własności piątej, a w konsekwencji również dowód rozbieżności ciągu a_n .

Na zakończenie zauważmy, że rozwiązaliśmy problem z analizy matematycznej korzystając z pewnych prostych faktów z teorii liczb.

Rys.1. Trzy nieliniowe oscylatory (masy powiązane sprężynkami nie spełniającymi prawa Hooke'a) połączone w płaski układ. Wychylenia kolejnych mas z ich położenia równowagi oznaczono odpowiednio przez u_1, u_2 i u_3 . Równania ruchu mas, zapisane w formie różnicowej, mają następującą postać

$$\ddot{u}_j(t_n) \approx \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t} - \frac{u_j(t_n) - u_j(t_{n-1}))}{\Delta t} = F(u_{j+1}(t_n) - u_j(t_n)) - F(u_j(t_n) - u_{j-1}(t_n)) \quad \text{dla } j = 1, 2, 3,$$

gdzie kropki oznaczają, jak zwykle, pochodną względem czasu, natomiast siła F dana jest wzorem

$$F(z) = z - \alpha z^2.$$

W powyższych wzorach oznaczyliśmy $z = u_{j+1} - u_j$, $j = 1, 2, 3$, przy czym $u_0 = u_3$ i $u_4 = u_1$.

Równania ruchu tych oscylatorów możemy znacznie uprościć przeprowadzając zamianę zmiennych. Postępując tak jak Lunsford i Ford, otrzymamy równania ruchu w następującej postaci:

$$\ddot{q}_1 = -q_1 - 2q_1q_2,$$

$$\ddot{q}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2.$$

Spróbujcie sami swoich sił w rachunkach działając kilkietapowo. Najpierw przechodzimy do nowych zmiennych ξ_j , $j = 1, 2, 3$, gdzie

$$u_j = \sum_{k=1}^3 A_{jk} \xi_k, \quad [A_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

W zmiennych ξ_j równania ruchu przybierają następującą postać:

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_3 - 2\ddot{u}_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2)\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2)\right) \right],$$

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2)\right) - 2F(\sqrt{2}\xi_2) + F(-\sqrt{2}\xi_2) \right],$$

$$\ddot{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \ddot{u}_3) = 0.$$

Proszę zauważyć, że przekształcenie A zostało tak dobrane, aby prędkość $\dot{\xi}_3$ była stała. Po drugie, żadne z równań ruchu nie zawiera już ξ_3 . Oznacza to, że możemy rozpatrywać nasze oscylatory w dwuwymiarowym układzie współrzędnych (ξ_1, ξ_2) . Na koniec przeskalowujemy zmienne $q_j = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \xi_j$, $j = 1, 2$ oraz czas $t \rightarrow \sqrt{3}t$. Prowadzi to także do przeskalowania

energii $E \rightarrow \frac{\alpha^2}{6} E$.

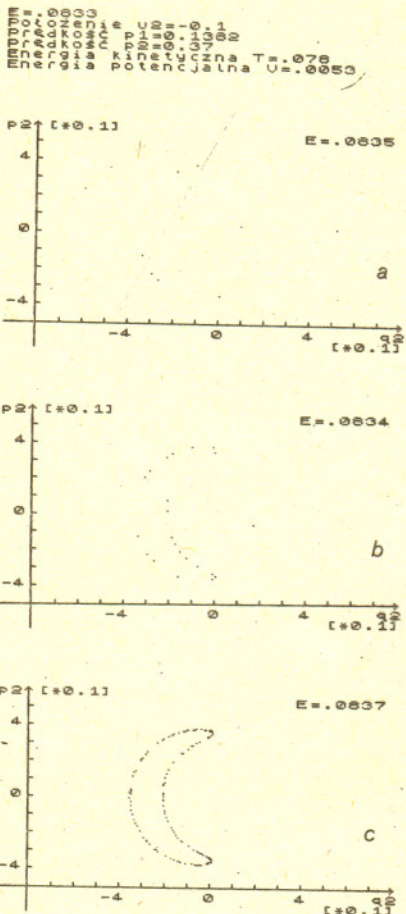
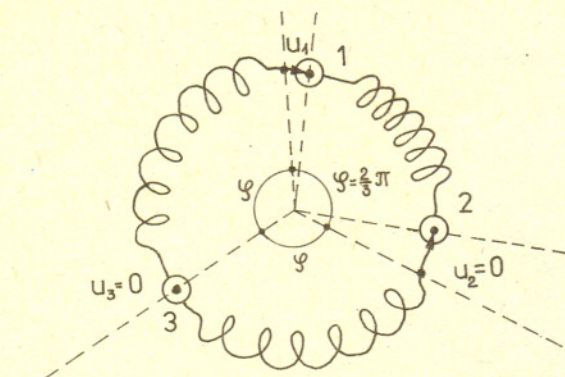
Równania tej postaci otrzymali Hénon i Heiles analizując trójwymiarowy ruch gwiazdy w galaktyce mającej symetrię walcową. (Proszę przy okazji zwrócić uwagę na wspaniałą intelektualną wolę: z jednej strony anharmoniczne oscylatory, z drugiej - galaktyki pełne gwiazd.)

Powyższy układ dwóch równań nieliniowych można rozwiązać metodą ekstrapolacji parabolicznej (o tej metodzie możecie przeczytać także w *Kąciku Fizyki Komputerowej* nr 5, *Fizyka w Szkole* nr 3/1988). Załączony program komputerowy znajduje rozwiązanie w głównej pętli zatytułowanej „Dynamika”, między liniami 730 i 870. Proszę zauważyć, że zastosowano następujące oznaczenia: $x_j = q_j(t_{n+1})$, $q_j = q_j(t_n)$, $u_j = q_j(t_{n-1})$, $j = 1, 2$. Ponadto wprowadzono pomocniczą zmienną $p_j = \dot{q}_j(t_n)$.

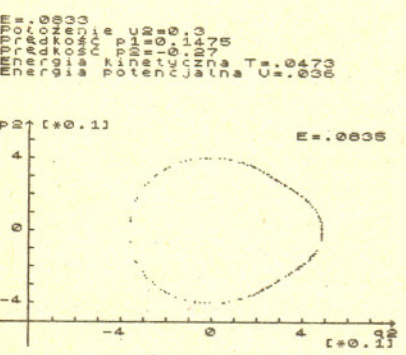
Najważniejsze wyniki

Rezultaty obliczeń można obejrzeć na rysunkach 2, 3 i 5. Otrzymano je dla trzech różnych wartości całkowitej energii układu.

Rysunek 2 przedstawia ciąg trzech kolejnych ujęć migawkowych, pokazujących, jak powstaje zbiór punktów utworzonych przez przecięcie jednej trajektorii fazowej w przestrzeni trójwymiarowej (q_1, q_2, \dot{q}_2) z płaszczyzną $(0, q_2, \dot{q}_2)$, przy założeniu, iż w tych punktach prędkość $\dot{q}_1 > 0$. Tego typu konstrukcja (patrz rysunek 4) nosi już dzisiaj nazwę mapy Hénona - Heilesa i takiej też nazwy będziemy odtąd używać. Punkty układają się na regularnej krzywej, chociaż zarówno ich zgęszczenia, jak też kolejność pojawiania się mają nieco chaotyczny charakter. Inną tego typu mapę przedstawiono przykładowo na rysunku 3.

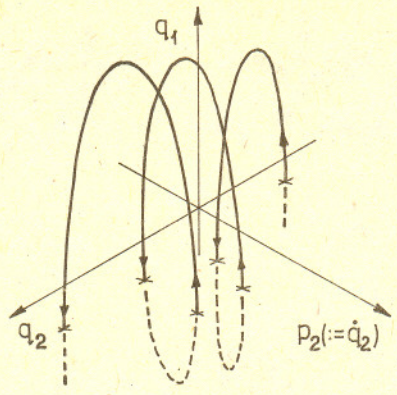


Rys.2

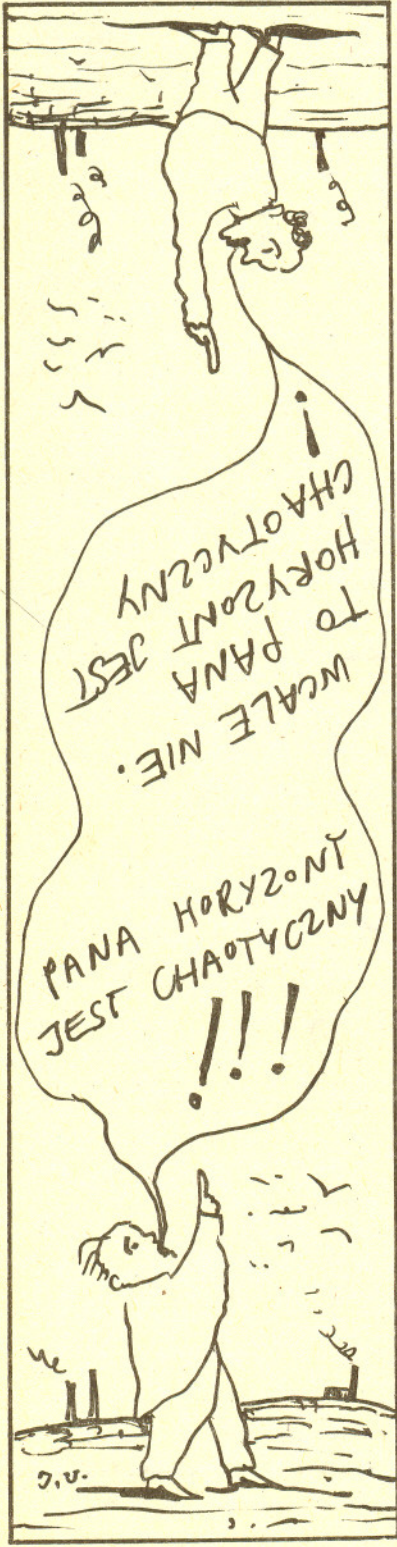


Rys.3

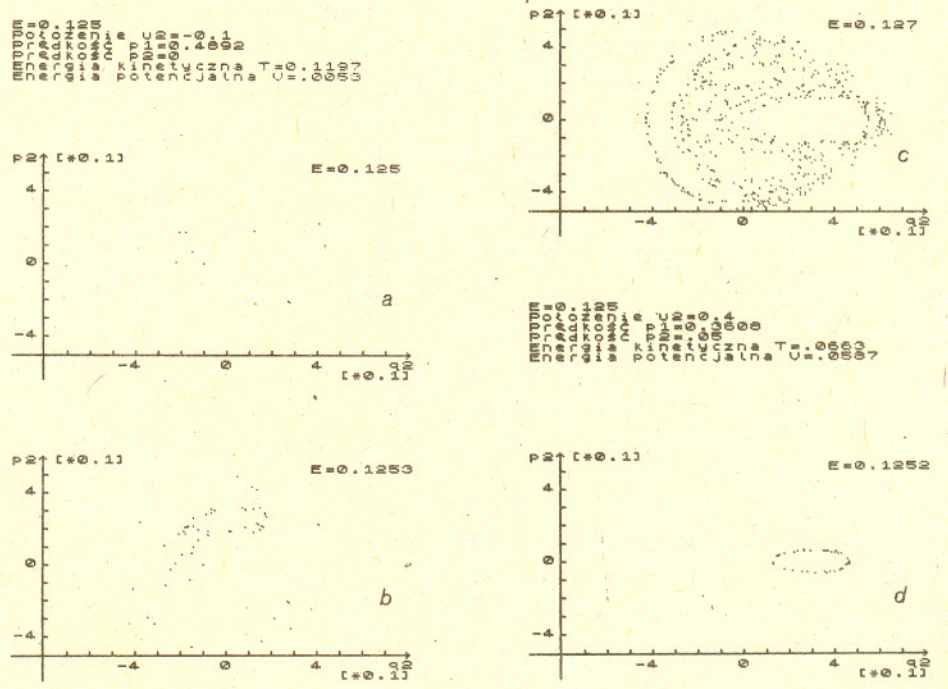
1. G. Contopoulos, *On the Existence of a Third Integral of the Motion*, Astr.J., tom 63, str.1 (1963).
2. M. Hénon i C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*, Astr.J., tom 69, str.73 (1964).
3. G.H. Lunsford i J. Ford, *On the Stability of Periodic Orbits for Nonlinear Oscillator Systems in Regions Exhibiting Stochastic Behaviour*, J.Math.Phys., tom 13, str.700 (1972).



Rys.4. Definicja mapy Hénona - Heilesa jako zbioru punktów π_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots$), dla których $q_1 = 0$ oraz $q_1 > 0$. (Nie jest to całkiem ścisła definicja, bowiem wymaga jeszcze zdefiniowania przekształcenia transformującego dowolny punkt π_j w następny π_{j+1} . Można by je tutaj wprowadzić, wymagałoby to jednak całego szeregu wyjaśnień. Wprowadzimy je dopiero w jednym z następnych artykułów z tego cyklu (przy okazji omawiania problemu bifurkacji).



Spróbujcie pobawić się załączonym programem poszukując coraz to innych map Hénona - Heilesa, w szczególności odtworzyć dziwne rezultaty przedstawione na rysunku 4, które stanowią centralny punkt niniejszych rozważań. Na czym więc polega znaczenie tych rezultatów ?



Rys.5

Otóż, powyżej pewnej energii progowej pojawiają się orbity chaotyczne (zwane też stochastycznymi lub ergodycznymi). Jak widać na rysunku 5, mapa Hénona - Heilesa takich orbit składa się ze zbioru (niemal) chaotycznie rozrzuconych punktów. Rysunki 5a, 5b i 5c obrazują powstawanie orbity chaotycznej. Na tych rysunkach widać również i białe plamy. Tam mogą być następne orbity. Jedną z nich pokazuje przykładowo rysunek 5d. Nie ma ona charakteru chaotycznego. Spróbujcie sami zbadać pozostałe „podejrzane” miejsca. A może przeprowadzicie eksperymenty komputerowe dla większych wartości energii ? Zwróćcie uwagę, że wtedy obszary chaotyczne zwiększają się kosztem zajętych przez orbity regularne.

Przedstawione tutaj rezultaty zadomowiły się już na dobre w fizyce, dając impuls do nowego spojrzenia na zagadnienia związane z chaosem. Pragnę w zakończeniu podkreślić, że w szkole, jak też na studiach, uczy się ze zrozumiałych względów przede wszystkim rozwiązywalnej (całkowalnej) mechaniki klasycznej, prawie zapominając o tych zagadnieniach, które nie mają prostych rozwiązań. Innymi słowy, nie dyskutuje się olbrzymiej mnogości problemów niecałkowalnych. A przecież masowa już dzisiaj obecność komputerów otwiera przed nami unikalną możliwość analizowania, np. na drodze symulacji komputerowych, właśnie problemów niecałkowalnych. Artykuły z tego cyklu mają, między innymi, za zadanie przybliżyć Wam tę filozofię. Myślę, nie będąc chyba odosobniony, że rola eksperymentów komputerowych we wspomaganiu badań nad układami niecałkowalnymi będzie systematycznie rosła.

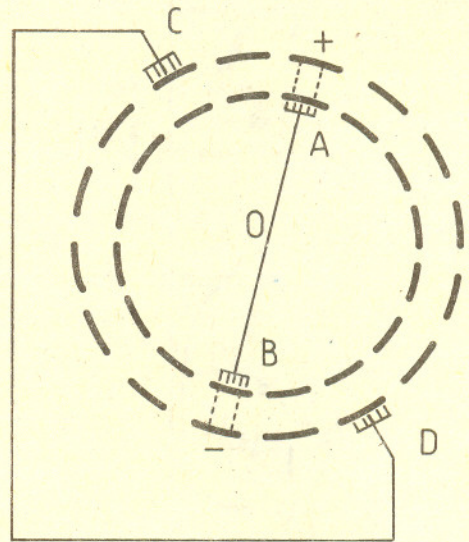
mata delta

Jak działa maszyna elektrostatyczna ?

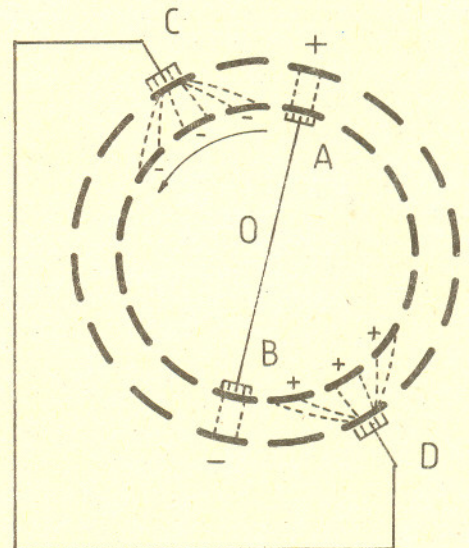
Kto słuchał wykładów wprowadzających w naukę o elektryczności, z pewnością pamięta maszynę elektrostatyczną. Ta przemysłna konstrukcja, która swym tajemniczym zachowaniem wytwarzała wokół siebie błyski iskier, gromkie trzaski i zapach ozonu, na pewno niejednemu utkwiała mocno w pamięci. Tajemniczość tej maszyny potęgował może i fakt, że w polskiej literaturze fizycznej nie można znaleźć jasnego opisu jej działania.

Spróbujmy więc nadrobić ten brak. Maszyny elektrostatyczne powstały już na początku badań zjawisk elektryczności, bowiem pierwsze znane konstrukcje pochodzą od A. Volty i J. C. Wilckego (1777). Ta, którą spotykamy w szkolnych laboratoriach, zbudowana została przez W. Holtza i udoskonalona przez J. Wimshursta. Może wyprodukować krótkotrwałe impulsy prądu o natężeniu 10^{-5} A. Jest więc bezpieczna, choć osiągnęte napięcia są rzędu miliona voltów.

Maszyna Holtza to dwie wirujące w przeciwnych kierunkach ebonitowe lub szklane tarcze, na obrzeżu których w stałych odstępach kątowych przyklejono cienkie wycinki staliolowe. Konstrukcję uzupełniają dwie pary szczotek ślizgających się po wycinkach i dwa metalowe grzebienie łączące maszynę z dwiema butelkami lejdejskimi stanowiącymi bieguny maszyny. Niech wycinek na zewnętrznej tarczy naprzeciwko szczotki A otrzyma przypadkowo niewielki dodatni ładunek (rys.1) (nie trudno o to przy potarciu szczotek o wycinki). Wówczas wycinek po przeciwnej stronie szczotki B naładuje się ładunkiem ujemnym. Między tą parą zewnętrznych i wewnętrznych wycinków dotykanych przez szczotki A i B powstanie słabe pole elektryczne, które jest zaznaczone dwiema przerywanymi liniami. Przesuńmy wewnętrzną



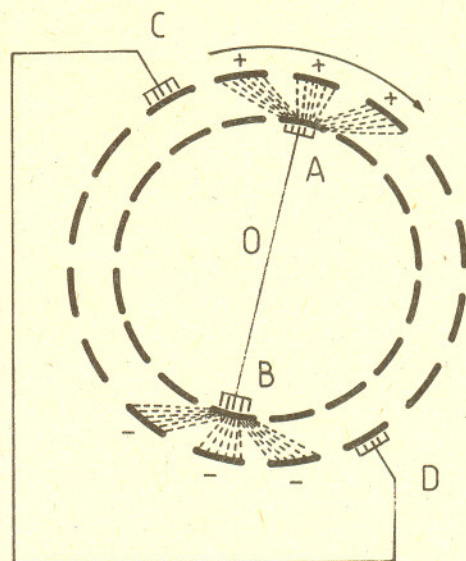
Rys.1



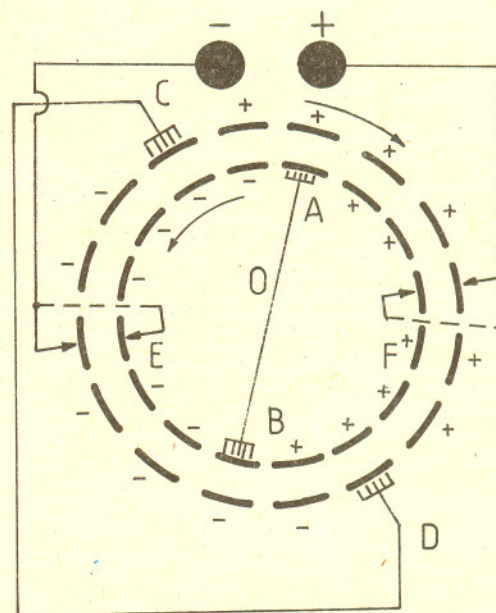
Rys.2

tarczę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o trzy wycinki, a zewnętrzna tarcza niech pozostanie w spoczynku. Rysunek 2 przedstawia rezultat tego ruchu. Wycinki

te przez chwilę znalazły się w słabym polu elektrycznym, a następnie zostały z niego usunięte. Szczotki *A* i *B* umożliwiły wypływ z nich ładunków, zatem indukcyjnie zostały one naładowane słabym ładunkiem. Znajdują się teraz naprzeciwko wycinków zewnętrznej tarczy dotykanych przez szczotki *C* i *D*. Wycinki te skupiają na sobie linie sił pola elektrycznego, a jest ich teraz w przybliżeniu już 2×3 na każdym. Jeśli przesuniemy teraz zewnętrzną tarczę w kierunku ruchu wskazówek zegara (wewnętrzna jest nieruchoma), to wycinki, które podczas swego ruchu prześlizną się pod szczotkami *C* i *D*, indukcyjnie otrzymają ładunek trzykrotnie większy niż początkowy. Obecnie (rys.3) te trzy naładowane wycinki zewnętrznej tarczy znajdują się naprzeciwko wycinków dotykanych przez szczotki *A* i *B*. Skupia się teraz na nich w przybliżeniu 3×6 linii sił pola elektrycznego, zatem ładunek, który się na tych wewnętrznych wycinkach pojawi, jeśli wysuniemy je spod szczotek, będzie z grubsza dziewięciokrotnie większy od początkowego. Ciągły ruch obu tarcz w przeciwnych stronach sprawi, że w kącie *AOD* wycinki na obu tarczach będą miały ładunek tylko dodatni, a w kącie *COB* tylko ujemny. Ładunek ich w wyniku indukcyjnego ładowania, które zachodzi w kącie *AOC* i *BOD*, będzie coraz większy przy każdym obrocie tarcz. Do przenoszenia ładunków na bieguny maszyny wystarczy użyć metalowych grzebieni *E* i *F* (rys.4). Z ostrzy wypływać będzie ładunek ujemny, jeśli w pobliżu jednego z nich pojawi się wycinek naładowany dodatnio. Pozostały na grzebieniu ładunek dodatni gromadzić się będzie na butelce lejdejskiej. W przypadku bieguna ujemnego mechanizm jest analogiczny.



Rys.3



Rys.4

zobaczymy małe iskierek świadczące o obecności ładunków. Będą one czerwone tam, gdzie gromadzić się będą ładunki dodatnie i fioletowe przy ładunkach ujemnych.

Poznawszy już zasadę pracy maszyny elektrostatycznej z pewnością nie odmówimy jej twórcom ogromnej pomysłowości i wyobraźni.

Małą Deltę przygotował Jerzy DRYZEK

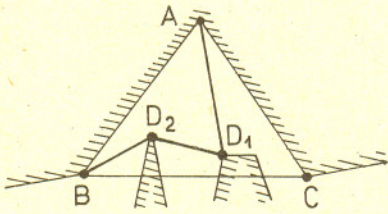
Od redakcji: Różnokolorowego świecenia wycinków, niestety, nie udało nam się zaobserwować, ale widzieliśmy takie świecenie elektrod w rurze do wyładowań przy częściowym odpompowaniu powietrza.

Co to jest liczba rzeczywista?

Dr hab. Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania M 532.

Co najmniej jeden z kątów wielokąta jest wypukły. Gdyby bowiem wszystkie kąty były wklęsłe, dopełnienie wielokąta byłoby też wielokątem, a to jest niemożliwe: wielokąt jest zbiorem ograniczonym.



Niech teraz kąt BAC będzie wypukły. Jeśli przekątna BC nie leży we wnętrzu wielokąta, to pewien wierzchołek (na rysunku oznaczony D_1) leży w trójkącie domkniętym ABC . Jeśli z kolei przekątna BD_1 nie leży we wnętrzu wielokąta, to istnieje wierzchołek $D_2 \neq D_1$ należący do trójkąta domkniętego ABD_1 . Ponieważ jest tylko skończony wiele wierzchołków, postępując w ten sposób dojdziemy w końcu do przekątnej BD_n , leżącej we wnętrzu wielokąta.



Rozwiązanie zadania F 262.

Na soczewkę i jednocześnie na kulkę pada promieniowanie, którego moc wynosi

$$P = \beta \frac{\pi D^2}{4},$$

gdzie D jest średnicą soczewki. Promień kulki jest równy promieniowi obrazu tarczy słonecznej, który wynosi $r = \alpha F/2$; F oznacza ogniskową soczewki. Kulka nie tylko pochłania padające promieniowanie, ale też sama je wypromiowuje. Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmann'a wypromiowana moc wynosi

$$P' = \sigma T^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{4},$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ jest stałą Stefana - Boltzmann'a. Poszukiwaną temperaturę znajdziemy z bilansu energii padającej i wypromiowanej

$$\frac{\beta \pi D^2}{4} = \sigma T^4 4\pi \frac{\alpha^2 F^2}{4}.$$

Skąd

$$T = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\sigma\alpha} \left(\frac{D}{F}\right)^2} \approx 1,7 \cdot 10^3 \text{ K}.$$



Rozwiązanie zadania M 533.

Wynika to z zadania 532. Podamy jednak inny dowód.

Proste, zawierające boki wielokąta, dzielą płaszczyznę na obszary wypukłe (każdy z nich jest częścią wspólną półpłaszczyzn). Każdy z nich leży albo całkowicie wewnątrz, albo na zewnątrz wielokąta. Obszary leżące wewnątrz dają w sumie cały wielokąt, a same są wielokątami wypukłymi, które można bez trudu podzielić na trójkąty.

Pierwszy artykuł pierwszego numeru *Delty* to *Czy liczby rzeczywiste są naprawdę rzeczywiste?* Romana Sikorskiego. Można się z niego dowiedzieć bardzo wiele o liczbach rzeczywistych, ale gdyby szukać tam odpowiedzi na pytanie, co to takiego te liczby, to okaże się, że liczbami rzeczywistymi są obiekty spełniające aksjomatykę Richarda Dedekinda. To, oczywiście, prawda, ale trudno sobie wyobrazić, że przez ponad dwa tysiące lat uprawiania matematyki do czasów Dedekinda liczba rzeczywista była pojęciem mętnym i wszystko, co o niej wiedzano, było tylko intuicyjne.

Dirk J. Struik w *Krótkim zarysie historii matematyki* pisze, że Dedekind dokończył tylko pracę Eudoksosa. Spróbujmy więc zapoznać się z tym, co zrobił Eudoksos. Dokonanie, o którym pisze Struik, jest znane jako *Eudoksosa teoria proporcji*. Można się zdziwić: cóż ciekawego może być w teorii proporcji – przecież wszystko da się wyprowadzić ze znanego już czwartoklasistom prawa, że „iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych”. Ale taki pogląd jest słuszny tylko przy założeniu, że mamy do czynienia z proporcją liczb rzeczywistych. Tymczasem Eudoksos takimi liczbami nie dysponował. Co więcej, właśnie jego teoria proporcji wprowadziła to pojęcie do matematyki, a za jej pośrednictwem do przyrodoznawstwa. Zacznijmy więc od początku.

Jest powszechnie wiadome, że pitagorejczycy twierdzili, iż wszystko jest liczbą. Wiadomo też, że ich osiągnięcia dotyczyły głównie geometrii, a nie liczb. Te dwie informacje nie są sprzeczne – liczby wydawały się pitagorejczykom dlatego ważniejsze, że były mniej zrozumiałe. I, jak każdy taki obiekt, dawały pożywkę nie tylko intelektowi, lecz także mistycyzmowi. Stąd np. najważniejszymi liczbami były 1, 2, 3 i 4. Powód stanowiło stwierdzenie, że jeden punkt wyznacza miejsce, dwa punkty – prostą, trzy – płaszczyznę, a cztery – przestrzeń. Nie byłyby to jeszcze specjalnie mistyczne, gdyby nie uzyskiwane stąd wnioski (co chyba lepiej byłoby napisać w cudzysłowie). Pierwszy nie jest jeszcze tak bardzo naciągany: dlatego liczyć należy w systemie dziesiętkowym (bo 10 to suma najważniejszych liczb). Drugi wniosek jest już bardzo wątpliwej natury: istnieje pod Ziemią zupełnie do niej podobny obiekt Antichton – powód stanowi zliczenie „wszystkich” obiektów kosmicznych. Więc zliczmy: Ziemia, Słońce, Księżyc, sfera niebieska gwiazd stałych, Merkury, Wenus, Mars, Jowisz i Saturn – wyraźnie widać, że jednego brakuje. I, proszę pamiętać, wszystko to pochodzi od naprawdę wybitnych myślicieli. Gdyby ktoś chciał takich ciekawostek więcej, niech poszuka informacji o liczbach trójkątnych, pięciokątnych, piramidalnych itp. Zestawienie tego z naprawdę godną podziwu wiedzą geometryczną pitagorejczyków zaskakuje.

Oczywiście, istniał związek między ich medytacjami arytmetycznymi i geometrycznymi (jak zresztą i dwiema jeszcze godnymi medytacji dyscyplinami – astronomią i muzyką). Liczbę w geometrii reprezentował odcinek (pomysł naturalny – my dzisiaj robimy podobnie posługując się osią liczbową). Wyniknęły zresztą z tego niepokonalne dla pitagorejczyków kłopoty – odcinki mogą być niewspółmierne, a to nie powinno mieć, ich zdaniem, miejsca. Gdyby jednak kłopot polegał tylko na tym, pewnie w końcu jakoś by sobie z tym poradono. Drugi kłopot był poważniejszy. Chodziło o to, jak związać z liczbami inne pojęcia geometryczne (np. pole, objętość, rozwartość kąta) czy fizyczne (np. ciężar), dla których nie istnieje sensownie określony, odpowiadający im odcinek. Tę właśnie trudność pokonał uczeń Platona – Eudoksos.



Rozwiązanie zadania F 263.
Średnica płamki w ognisku jest rzędu

$$\frac{\lambda}{D} F = \lambda.$$

Przyspieszenie elektronu spowodowane jest składową elektryczną (polem elektrycznym E) promieniowania lasera. Końcowa prędkość, jaką powinien osiągnąć elektron, aby jego energia kinetyczna wynosiła $\approx m_0 c^2$, otrzymamy z:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2 m_0 c^2,$$

skąd

$$\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

gdzie c jest prędkością światła. Tak więc średnia prędkość elektronu powinna być bliska $v = c/2$. Ponieważ przyspieszenie zachodzi w czasie około $T/4$ (T jest okresem drgań pola elektrycznego), więc przebyta przez elektron droga jest równa około $\frac{c}{2} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\lambda}{8}$, co jest mniejsze od rozmiaru ogniska. Oszacujemy teraz wielkość przyspieszającego pola E :

$$\frac{4c}{T} = \frac{4c^2}{\lambda} \approx \frac{eE}{m_0},$$

$$E \approx \frac{4m_0 c^2}{\lambda e}.$$

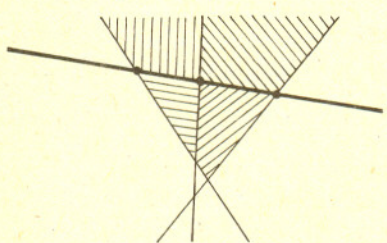
Stąd potrzebna moc lasera wyniesie

$$P \approx (\epsilon_0 E^2) c \lambda^2 \approx \frac{16 \epsilon_0 m_0^2 c^5}{e^2} \approx 10^{10} \text{ W}.$$



Rozwiązanie zadania M 534.

Dla $n = 1$ nie ma obszarów ograniczonych.
Załóżmy teraz, że dla k prostych jest nie więcej niż $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ obszarów ograniczonych. Następną, $(k+1)$ -sza prosta daje co najwyżej $k-1$ nowych obszarów ograniczonych: jest nie więcej niż k punktów przecięcia z pozostałymi prostymi, czyli nie więcej niż $k-1$ odcinków, które mogą być brzegami obszarów ograniczonych.



W sumie dostajemy nie więcej niż $\frac{1}{2}(k-1)(k-2) + (k-1) = (k-1) \left(\frac{1}{2}(k-2) + 1\right) = \frac{1}{2}k(k-1)$ obszarów ograniczonych dla $k+1$ prostych. To kończy dowód.
Uwaga. Można wykazać, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje n prostych, które dają $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ obszarów ograniczonych.

Proporcje, o których mówi jego teoria, nie są relacjami między liczbami – w początku czwartego stulecia p.n.e., z podanych wyżej powodów wolano o nich nie mówić (radykaliści głosili nawet, że liczby należy zostawić kupczykom, że są one niegodne zainteresowania filozofów). Eudoksos określa proporcję dowolnych wielkości. Podaje mianowicie ścisłą definicję sytuacji, gdy dwie wielkości jakiegoś rodzaju tworzą, reprezentują tę samą proporcję co dwie wielkości innego rodzaju. Definicja ta jest następująca:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta},$$

gdy dla dowolnych liczb naturalnych m i n prawdą jest, że

- jeśli $mA < nB$, to $m\alpha < n\beta$,
- jeśli $mA = nB$, to $m\alpha = n\beta$,
- jeśli $mA > nB$, to $m\alpha > n\beta$.

Jak widać, do stwierdzenia, czy wielkości A i B tworzą tę samą proporcję co wielkości α i β , wystarcza porównywanie wielokrotności wielkości tego samego rodzaju. Można np. wziąć jako A i B jakieś bryły, jako zaś α i β jakieś kąty i do stwierdzenia, czy tworzą one jednakowe proporcje, nie będzie trzeba porównywać brył z kątami.

Równe proporcje tworzą, według Eudoksosa, liczbę. Jeżeli jako wielkość znajdującą się (mówiąc dzisiejszym językiem) w mianowniku weźmiemy uznaną przez nas za jednostkową wielkość danego rodzaju (w powyższych przykładach np. sześciąt o krawędzi 1 i kąt prosty), to tym samym przyporządkujemy wielkości znajdującej się w liczniku liczbę – właśnie proporcję. Tym sposobem obok formalnej, podanej wyżej definicji liczby (będę już pisał *rzeczywistej*, bo tak liczby Eudoksosa później nazwano), mamy jej nieformalne, ale bardzo przejrzyste określenie – liczba rzeczywista to każdy możliwy wynik mierzenia. Okazało się, że wszystkie wielkości, które można mierzyć, mierzy się tymi samymi liczbami. Fakt dla nas tak oczywisty, że aż niedostrzegalny. Ale proszę sobie wyobrazić przyrodoznawstwo bez tego udogodnienia.

Jeszcze jedna interesująca własność definicji Eudoksosa. Jak łatwo zauważyć, dwie proporcje, dwie liczby rzeczywiste są równe, gdy mają dokładnie takie same przybliżenia wymierne (faktycznie łatwo zauważyć, które $\frac{n}{m}$ przybliżają proporcję z dołu, a które z góry i że obie proporcje są przybliżane tak samo). Utożsamienie liczby rzeczywistej ze zbiorami jej dolnych i górnych przybliżeń jest rozwiązaniem, które nie tylko rozwiązuje kłopoty pitagorejczyków z niewspółmiernością (czyli niewymiernością), lecz także odpowiada praktyce mierzenia (każdy bowiem wynik pomiaru jest z konieczności liczbą wymierną).

Wyniki Eudoksosa umożliwiły znaczny postęp w badaniach matematycznych. Tego zdania są np. Euklides i Archimedes, którzy w swoich pracach chwalią te rezultaty i nieustannie z nich korzystają (dla chronologii – Euklides był młodszym kolegą Eudoksosa z Akademii Platońskiej, Archimedes był kilkadziesiąt lat młodszy i, oczywiście, ich nie znał). Wydaje się, że takim autorytetom można wierzyć.

Czy rzeczywiście Eudoksos zrobił wszystko, a Dedekind resztę? Jest to już sprawa, w której każdy może mieć własną opinię. Warto może jeszcze dodać, że wykazanie, iż proporcje spełniają (mówiąc dzisiejszym językiem) aksjomaty ciała, można znaleźć w *Elementach* Euklidesa, księga piąta.

Jeśli przyjmuje się liczby rzeczywiste za możliwe wyniki mierzenia, to powstaje pytanie – jak mierzyć. Eudoksos i tu zaproponował sposób – nazwano go metodą wyczerpywania. Tę z kolei pracę Eudoksosa „dokończył” Lebesgue, ale o tym innym razem.



Różniczkowanie ciągów

Jednym z podstawowych pojęć analizy matematycznej jest pojęcie pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej. Można też różniczkować funkcje zmiennej naturalnej, czyli po prostu ciągi liczbowe. Przyjmujemy wtedy następującą definicję:

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym. Pochodną ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazwiemy ciąg $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $a'_n = a_{n+1} - a_n$.

Od razu rzuca się w oczy prostota tego pojęcia. Po pierwsze: prosty wzór algebraiczny złożony tylko z jednego odejmowania. Nie ma żadnego dzielenia, nie mówiąc już o przechodzeniu do granicy. Po drugie: możliwość łatwego operowania przykładami. Nie można „zobaczyć” kawałka funkcji nie mając danego wzoru, nie sposób bowiem wypisać tabeli wszystkich wartości funkcji, np. w przedziale $(0,1)$. Tym samym określenie pochodnej funkcji chociażby w jednym punkcie wymaga użycia wzoru określającego tę funkcję. Kawałek ciągu to kilka liczb, które można wypisać, a obliczenie pochodnej ciągu w punkcie wymaga tylko znajomości dwóch kolejnych wyrazów. Jeśli więc mamy wypisany początek jakiegoś ciągu, to od razu możemy wypisać początek jego pochodnej. Przy tym troska o różniczkowalność jest zupełnie zbyteczna. Jakkolwiek z formalnego punktu widzenia początek ciągu nie mówi nic o jego dalszej części, to jednak wszyscy wiemy, że jeśli wzór na wyraz ogólny ciągu nie jest zbyt skomplikowany, to znając kilka początkowych wyrazów możemy zgadnąć, o jaki ciąg chodzi. A to wystarczy do empirycznego wysuwania hipotez, które, rzecz jasna, trzeba potem udowodnić.

Proste wzory i łatwość operowania przykładami dają nam możliwość budowania teorii podobnej do rachunku różniczkowego i całkowego. Całkowanie też jest bardzo proste: dodajemy kilka kolejnych wyrazów ciągu. A oto przykładowe zagadnienia, od których można zacząć tę teorię:

- 1) wzory rachunkowe na obliczanie pochodnej i całki prostych ciągów,
- 2) rozwiązywanie prostych równań „różniczkowych”,
- 3) różniczkowanie cząstkowe ciągów indeksowanych kilkoma liczbami.

Warto zbadać, jakie wzory i twierdzenia przenoszą się z tradycyjnego rachunku różniczkowego bez zmian, a jakie wymagają modyfikacji.

I na zakończenie przykład:

Obliczyć sumę $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}$.

A oto rozwiązanie: Niech dana suma będzie równa $\frac{a_n}{2^n}$. Trzeba znaleźć wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorami: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)$. Nie chodzi nam o dowód poprawności wzoru, ale przede wszystkim o jego zgadnięcie (dowód nie powinien być trudny). Wypisujemy ciąg (a_n) :

1, 4, 11, 26, 57, 120, 247, ...

Nie widzimy szukanego wzoru, więc próbujemy różniczkować:

3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

Nie jeden dostrzeże tu pewną regularność, pozostali różniczkują jeszcze raz

4, 8, 16, 32, 64, ...

Kto w tym momencie nie dostrzeża postępu geometrycznego, niech się nawet do tego nie przyznaje.

Gdybyśmy dysponowali wzorami na całkowanie ciągów, wiedzielibyśmy, że $\int 2 \cdot 2^n = 2 \cdot 2^n + C$, więc $C = -1$, a zatem drugi ciąg dany jest wzorem $2 \cdot 2^n - 1$, co można było dostrzec przy odrobinie spostrzegawczości. I wreszcie wzór na wyjściowy ciąg $\int 2 \cdot 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - n + C$, skąd $C = -2$. Zatem $a_n = 2 \cdot 2^n - n - 2$, co, jak na razie, nie zostało udowodnione, ale tylko zgadnięte. Lecz zgadnięcie wzoru stanowi najtrudniejszą część tego zadania.

Mamy więc przykład, jak można wykorzystać różniczkowanie ciągów. Oczywiście, mając więcej wprawy w różniczkowaniu i całkowaniu można atakować odpowiednio bardziej skomplikowane przykłady.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje mgr Anna LIPNIAČKA

TAJEMNICZE NEUTRINO

19 października 1988 r. nagrodę Nobla z fizyki przyznano Leonowi Ledermanowi, Melwinowi Schwartzowi i Jackowi Steinbergerowi za odkrycie neutrino mionowego i rozwój techniki wiązek neutrinowych. Technika ta, rozwijająca się od 1962 r., umożliwiła m.in. pomiar rozkładu przestrzennego kwarków w protonie. Antyneutrino ($\bar{\nu}_e$) emitowane wraz z elektronem (e^-) w rozpadzie beta było znane od 1931 r. Reaguje ono bardzo „niechętnie” z materią, mimo to w 1956 r. udało się zaobserwować absorpcję antyneutrino przez atom Cl z jednoczesną emisją pozytonu (e^+). W 1936 r. odkryto mion (μ), powstający w towarzystwie neutrino, w rozpadzie kosmicznych pionów (π). Wszystkie własności tej tajemniczej cząstki są identyczne z własnościami elektronu, z tym że mion jest około 200 razy cięższy. Gdyby mion był wzbudzonym elektronem, emitowałby nadmiar swojej energii w postaci fotonów, zamieniając się w zwyczajny elektron. Reakcji takiej nigdy nie zaobserwowano. Eksperyment wykonany w 1962 r. w Brookhaven National Laboratory wykazał, że neutrino powstające wraz z mionem w rozpadzie π jest różne od neutrino z rozpadu beta. Wytworzono 10^{14} neutrin, 50 zareagowało w 10-tonowym detektorze, we wszystkich przypadkach produkując miony. Do dziś nie wiadomo, dlaczego neutrino mionowe różni się od elektronowych, a miony od elektronów. Tymczasem odkryto taon, około 3600 razy cięższy od elektronu, o identycznych własnościach. Taon ma także swoje neutrino.

Nowy rok trwa już wprawdzie około dwóch miesięcy, ale może nie jest za późno przypomnieć sobie, co to w ogóle jest rok. Chyba każdy w pierwszym odruchu stwierdzi, że sprawa jest niepoważna, bowiem każdy wie, że jest to okres powtarzania się pór roku, albo okres obiegu Ziemi wokół Słońca, albo wręcz okres upływający między dwiema kolejnymi północami sylwestrowymi.

Wszystko to jest w zasadzie prawda, ale nie cała prawda. Przede wszystkim zauważamy od razu, że odstęp czasu między kolejnymi północami sylwestrowymi wynosi czasem 365 dni, a czasem 366 dni, tak więc rok kalendarzowy nie ma ustalonej długości i przez to nie jest dobrą jednostką czasu. Oczywiście, można wprowadzić pojęcie średniego roku kalendarzowego. W czterechsetletnim cyklu kalendarza gregoriańskiego są 303 lata zwykle i 97 przestępnych, wskutek czego średni rok kalendarzowy liczy 365,2425 dni. Można by go ostatecznie uznać za dobrą jednostkę, aczkolwiek dość sztuczną, gdyż sam kalendarz jest konstrukcją umowną.

A właściwie po co stosuje się tak skomplikowaną rachubę czasu? Otóż po to, by długość średniego roku kalendarzowego możliwie najbardziej zbliżona była do długości okresu mającego największe znaczenie dla życia na Ziemi, mianowicie do okresu powtarzania się pór roku. Inaczej mówiąc, chodzi o to, aby pory roku zawsze (a w każdym razie przez możliwie długi czas) zaczynały się w tym samym momencie roku kalendarzowego. A cały cykl pór roku powtarza się w okresie zwanym rokiem zwrotnikowym, którego formalna definicja mówi, że jest to odstęp czasu między kolejnymi przejściami Słońca przez punkt równonocy wiosennej. Wynosi on 365,2422 dni.

Jest to jednostka podstawowa we wszelkiej rachubie czasu i jeżeli mówimy po prostu „rok” bez żadnego przymiotnika, to mamy na myśli z reguły ten właśnie rok zwrotnikowy. A czy to nie jest to samo co okres obiegu Ziemi wokół Słońca? Formalnie można by go określić jako odstęp czasu między kolejnymi przejściami Słońca przez ten sam punkt na niebie (punkt usytuowany niezmiennie na całym tle gwiazd). Otóż nie jest to to samo, ponieważ punkt równonocy wiosennej wskutek precesji osi ziemskiej porusza się na tle gwiazd na spotkanie Słońca w tempie $50''256$ na rok. Wypada stąd, że okres obiegu Ziemi, czyli tzw. rok gwiazdowy jest dłuższy od roku zwrotnikowego i wynosi 365,2564 dni. Jest on z kolei jednostką wzorcową w zagadnieniach mechaniki Układu Słonecznego, np. on właśnie wchodzi do praw Keplera.

Ale wiemy też, że orbita Ziemi jest eliptyczna i można by za jednostkę przyjąć okres czasu między kolejnymi przejściami Ziemi przez punkt orbity najbliższy Słońca – perihelium. Czy nie będzie to to samo co rok gwiazdowy? Znowu nie, ponieważ perihelium również się porusza, mianowicie objęga Słońce w tym samym kierunku co Ziemia w tempie $11''633$ na rok. Zatem czas od perihelium do perihelium, czyli tzw. rok anomalistyczny jest dłuższy od gwiazdowego i wynosi 365,2596 dni.

Mamy więc „roki” kilku rodzajów. Wprowadzenie tych definicji, choć może wydawać się akademicką zabawą, jest jednak pożyteczne, gdyż używając tych terminów można jasno i zwięźle opisywać różne zjawiska, a ich popularność jest tym większa, im łatwiej dane zjawisko zaobserwować.

dr Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 532. Udowodnić, że każdy wielokąt (o ile nie jest trójkątem) ma przekątną leżącą całkowicie we wnętrzu.

Rozwiązanie na str. 10

M 533. Udowodnić, że każdy wielokąt da się podzielić na trójkąty.

Rozwiązanie na str. 10

M 534. Udowodnić, że wśród obszarów, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ograniczonych.

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 262. Soczewka o otworze względnym (tj. stosunku jej średnicy D do ogniskowej F) 1:3,5 skupia światło słoneczne na powierzchni czarnej kulki umieszczonej w próżni.

Do jakiej temperatury może nagrzać się kulka, jeśli jej średnica równa jest średnicy obrazu Słońca. Rozmiar katowy tarczy Słońca, widoczny z Ziemi, jest równy $\alpha = 0,01$ radiana, a stała słoneczna wynosi $\beta = 0,14 \text{ W/cm}^2$.

Rozwiązanie na str. 10

F 263. Promień lasera ogniskowany jest za pomocą idealnego układu optycznego, dla którego stosunek długości ogniskowej do średnicy F/D wynosi 1. Ocenić moc P lasera, przy której w polu elektrycznym jego promieniowania elektrony osiągną w ognisku układu relatywistyczną energię kinetyczną E równą ich energii spoczynkowej m_0c^2 .

Rozwiązanie na str. 11

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1989

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z fizyki nr 83, 84

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

83. Cylindryczna, pionowo ustawiona beczka napelnia się z kranu w ciągu 10 minut, a opróżnia przez otwór w dnie w ciągu 15 minut. Co się stanie, jeśli będziemy napełniać z kranu beczkę z otwartym otworem?

84. Piłkarz potrafi kopnąć piłkę na maksymalną odległość Z . Jaki obszar położony za cienką, pionową ścianą o wysokości H i odległą o D od piłkarza jest objęty jej „cieniem”, tzn. jest nieosiągalny przez piłkę? Zaniedbać opór powietrza, rozmiary piłki oraz założyć, że $Z > D > 2H$. Przedyskutować rozwiązanie w zależności od początkowej szybkości piłki.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1988

Przypominamy treść zadań:

75. Na szczycie równi pochyłej o długości $l = 1,5$ m, nachylonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ względem poziomu, umieszczono nieruchomo i puszczono mały klocek. Współczynnik tarcia między klockiem a równią rośnie liniowo wzdłuż równi od wartości 0 na jej szczycie do wartości 1 na jej dolnym krańcu. Obliczyć prędkość klocka na dolnym krańcu równi.

76. W generatorze van de Graafa ładunki przenoszone przez taśmę z dielektryka o szerokości $d = 1$ m, poruszającą się z prędkością $v = 20$ m/s, ładują metalową, sferyczną elektrodę o promieniu $r = 1,5$ m. Oszacować maksymalne wartości uzyskiwanego w tym generatorze napięcia oraz natężenia prądu stałego, który można z niego czerpać. Graniczna wartość natężenia pola elektrycznego, powyżej której powstaje przebiecie w powietrzu, wynosi $E_p = 3 \cdot 10^6$ V/m.

75. Siła tarcia, działająca na klocek w odległości x od górnego krańca równi ma wartość

$$(1) \quad T = \frac{x}{l} mg \cos \alpha,$$

gdzie m - masa klocka, g - przyspieszenie ziemskie. Energia kinetyczna klocka na dolnym krańcu równi (przy założeniu, że klocek tam dotrze) wyniesie

$$(2) \quad mv^2/2 = mgh - W_t,$$

gdzie v oznacza prędkość klocka na dolnym krańcu równi, h - jej wysokość, W_t - pracę wykonaną przez klocek na pokonanie sił tarcia. Pracę tę obliczamy (stosując całkowanie lub metodę graficzną) na podstawie wzoru (1)):

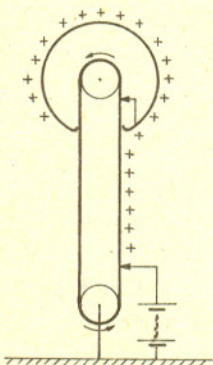
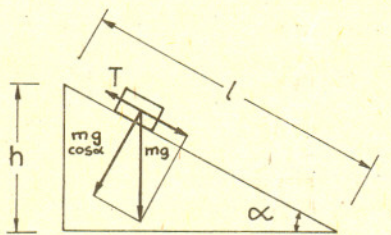
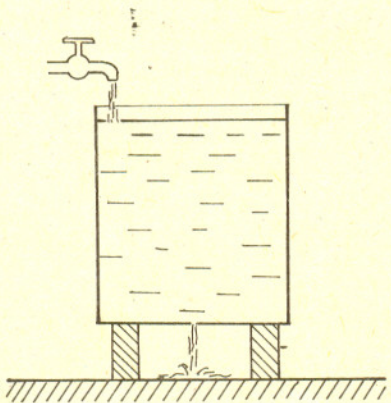
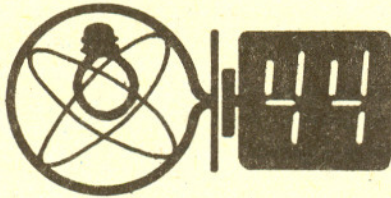
$$W_t = (mgl \cos \alpha)/2.$$

Podstawiając to wyrażenie oraz $h = l \sin \alpha$ do wzoru (2) otrzymujemy wyrażenie na poszukiwaną prędkość

$$v = \sqrt{gl(2 \sin \alpha - \cos \alpha)}.$$

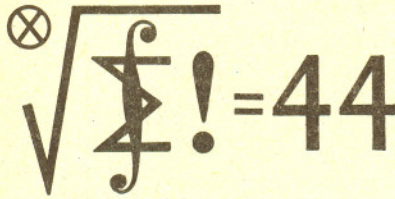
Dla podanych w zadaniu wartości l oraz α otrzymujemy $v = 1,4$ m/s.

76. Napięcie, jakie można uzyskiwać w generatorze, jest ograniczone przez zjawisko przebiecia powietrza w pobliżu naładowanej kuli. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli naładowanej do potencjału (napięcia względem Ziemi) V wynosi $E_k = V/r$. Stąd maksymalna wartość napięcia jest równa $V_{max} = E_p r = 4,5$ MV. Maksymalne natężenie czerpanego z generatora prądu stałego odpowiada natężeniu strumienia ładunku przenoszonego przez taśmę dielektryczną $I = \sigma dv$, gdzie σ jest powierzchniową gęstością ładunku. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni taśmy (z dala od jej krawędzi) wynosi $E_t = \sigma/(2\epsilon_0)$ (patrz rozwiązanie zadania 31 w numerze 12/1986). I znowu z warunku ograniczenia przez przebiecie wynika maksymalna wartość tego natężenia $I_{max} = 2\epsilon_0 E_p dv \approx 1$ mA. Natężenie realnie osiąganego prądu będzie niższe ze względu na mniejszą gęstość powierzchniową ładunku przy krawędziach taśmy.



Zadania z matematyki nr 185, 186

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA



185. Wyznaczyć największą liczbę λ o tej własności, że każdy przedział domknięty $I \subset (0; 1)$ można przekształcić przez jednokładność o środku 0 i skali będącej liczbą naturalną na przedział J o długości $\geq \lambda$, nie zawierający żadnej liczby całkowitej.

186. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać liczby dodatnie S_1, S_2, S_3, S_4 , aby istniał czworościan mający ściany o polach S_1, S_2, S_3, S_4 .

Zadanie 186 zaproponował pan Arkadiusz Goetz z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1988

Przypominamy treść zadań:

177. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

178. Znaleźć kres górny sumy długości wszystkich cięciw wyznaczonych przez n punktów okręgu o promieniu 1 (dla ustalonego $n \geq 2$).

177. Załóżmy, że różnowartościowa funkcja f spełnia podane równanie. Przyjmując $y = -x$ otrzymujemy związek $f(f(x) - x) = f(0) + 1$. Z różnowartościowości f wynika, że wyrażenie w nawiasie po lewej stronie musi być wielkością stałą, a więc $f(x) = x + c$. Przez podstawienie sprawdzamy, że funkcja tej postaci spełnia dane równanie wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 1$. Zatem funkcja $f(x) = x + 1$ jest jedynym rozwiązaniem równania.

178. Ustalmy okrąg C o promieniu 1, punkt P_0 leżący na nim oraz kierunek obiegu okręgu. Możemy przyjąć, że rozpatrywane w zadaniu punkty leżą na okręgu C i że P_0 jest jednym z nich. Dla dowolnego zbioru $X = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\} \subset C$ (numeracja punktów zgodna z przyjętym kierunkiem obiegu) i dla dowolnej liczby naturalnej $k < n$ przyjmijmy

$$s_k(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |P_i P_{i+k}| \quad (i + k \text{ brane modulo } n)$$

(Liczba $s_1(X) = s_{n-1}(X)$ jest długością obwodu wielokąta $P_0 P_1 \dots P_{n-1} P_0$; liczba $s_2(X) = s_{n-2}(X)$ jest sumą długości cięciw „przeskakujących” co drugi wierzchołek itd.). Rozważana w zadaniu wielkość jest równa sumie

$$s(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} s_k(X).$$

Przyjmując naturalną parametryzację okręgu możemy utożsamiać każdy taki zbiór X z układem liczb $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq 2\pi$ (dopuszczamy więc układy zdegenerowane, w których niektóre punkty pokrywają się). Każda z wielkości $s_k(X)$ jest funkcją ciągłą układu zmiennych (t_1, \dots, t_{n-1}) – osiąga więc dla pewnego układu X swą wartość maksymalną.

Gdy $NWD(n, k) = 1$, wówczas odcinki, których długości składają się na sumę $s_k(X)$, tworzą łamaną zamkniętą $P_0 P_k P_{2k} \dots P_0$ (zwykłą dla $k = 1$ oraz $k = n - 1$, gwiazdzystą dla innych k). W tym przypadku $s_k(X)$ osiąga maksimum tylko wtedy, gdy wszystkie odcinki są równe; gdyby bowiem dla pewnych trzech kolejnych wierzchołków K, L, M łamanej $P_0 P_k P_{2k} \dots P_0$ zachodziła nierówność $|KL| \neq |LM|$, to przesuwał punkt L w stronę środka łuku KM (i nie zmieniając położenia pozostałych punktów) zwiększyłbyśmy wartość sumy $s_k(X)$.

Gdy $NWD(n, k) = d > 1$, wówczas odcinki występujące w określeniu $s_k(x)$ dzielą się na d klas tak, że odcinki każdej z tych klas tworzą łamaną zamkniętą o n/d bokach ($P_0 P_k P_{2k} \dots P_0; P_1 P_{1+k} P_{1+2k} \dots P_1$; itd.; w szczególności, gdy n jest parzyste, a $k = n/2$, każda z nich redukuje się do przebieganego „tam i z powrotem” odcinka). Na mocy poprzedniego przypadku, aby wielkość $s_k(X)$ osiągnęła maksimum, każda z tych d łamanych musi mieć równe boki.

Wynika stąd, że wszystkie składniki sumy $2s = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}$ jednocześnie przyjmują swą wartość maksymalną, gdy X jest zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego; przy tym składniki s_k z $NWD(n, k) = 1$ w każdym innym przypadku przyjmują wartość mniejszą. Zatem wartość $s(X)$ jest największa wtedy i tylko wtedy, gdy punkty zbioru X rozpinają wielokąt foremny. A wówczas $s_k(X) = 2n \sin(k\pi/n)$; tak więc

$$s(X) = n \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} - \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{2 \sin \frac{\pi}{2n}} = n \cotg \frac{\pi}{2n}.$$

Jest to szukane maksimum.



DROBIAZGI

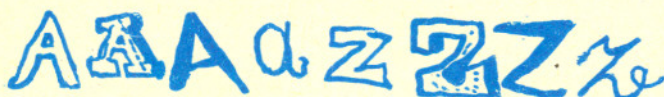
Najbliżej Jowisza przeszła kometa 1889V Brooks 2. Obliczono, że 20 lipca 1886 r. kometa zbliżyła się do Jowisza na odległość 0,00098 j.a., czyli 147 tys. km, była więc bliżej Jowisza niż jego księżyc Amaltea (182 tys. km). Orbita komety zmieniała się znacznie, np. okres obiegu (31 lat) zmniejszył się do 7 lat, natomiast w ruchu księżyców Jowisza nie nastąpiła żadna zmiana. Był to pierwszy dowód na to, że masa jądra komety jest bardzo mała.



Obłoki neutralnego wodoru obserwowane w kierunku antycentrum Galaktyki z reguły poruszają się ku Słońcu, obserwowane zaś w kierunku centrum zachowują się rozmaicie: większe kątowno (a więc średnio bliższe) oddalają się, małe natomiast (czyli odległe) zbliżają się ku nam. Tę statystyczną prawidłowość najlepiej tłumaczy przyjęcie hipotezy, że obłoki wodoru średnio poruszają się ku centrum Galaktyki. Ocenia się, że wskutek tego jądro Galaktyki zyskuje na masie 0,2 masy Słońca na rok.



Często po wrzuceniu kostki lodu do napoju słychać trzask i następnie lekki szum podobny do dźwięku powstającego przy smażeniu. Łatwo jest wytłumaczyć przyczynę trzasku – to lód pęka na skutek naprężeń powstałych przy ogrzewaniu kostki lodu. Trudniej jest zrozumieć przyczynę szumu. Spowodowany jest on uwalnianiem się, na skutek topienia lodu, drobnych bąbelków powietrza zamrożonych w lodzie.



Leonard Euler twierdził, że oś liczbowa ma charakter okręgu – liczba ∞ zamyka ją, tak samo jak zero, oddzielając liczby dodatnie i ujemne. Uzasadnił to w obrębie stworzonej przez siebie teorii szeregów. Stwierdził, że

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

oraz

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

z czego wysnuł wniosek, że

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

(podstawiając $x = -1$ w pierwszym szeregu) oraz, że

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

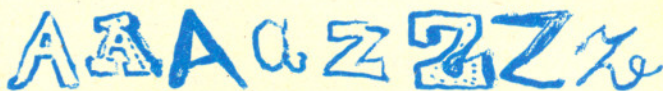
(podstawiając $x = 2$ w drugim).

Ponieważ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots < 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ (wyrazy drugiego szeregu są większe), więc $\infty < -1$, czyli relacja $<$ biegnie „w kółko”.

Czy fala akustyczna odbita od chropowatej powierzchni może być silniejsza od fali odbitej od gładkiej powierzchni? Okazuje się, że jest to możliwe w pewnych szczególnych przypadkach. Stwierdzono to dla fali akustycznej padającej pod kątem bliskim 90° na powierzchnię utworzoną z ciasno upakowanych półkul oraz dla innych powierzchni o strukturze okresowej. Zjawisko to jest spowodowane przez wielokrotne spójne rozpraszanie do przodu. Tak powstała fala odbita, zwana falą brzegową, rozchodzi się w dwóch kierunkach wzdłuż powierzchni odbijającej. Przy odpowiednio dużej odległości od źródła dźwięku fala brzegowa będzie więc miała większe natężenie niż fala padająca lub fala odbita od gładkiej powierzchni, które rozchodzą się w trzech kierunkach. Nawet zupełnie nieregularne powierzchnie, jak piasek lub żwir, mogą powodować powstawanie fal brzegowych.



W każdą krzywą (choćby najbardziej nieregularną) łączącą dwa punkty można wpisać łamaną zaczynającą się w jednym z nich, a kończącą w drugim i złożoną z danej liczby odcinków równej długości. To zaskakujące twierdzenie zostało udowodnione w latach pięćdziesiątych przez Kazimierza Urbanika.



Carl Friedrich Gauss w liście do Williama Olbersa (z 21 marca 1816 roku) stwierdził, że tzw. Wielkie Twierdzenie Fermata jest izolowaną, z niczym nie związaną hipotezą i dlatego nie ma w nim niczego interesującego. Mimo wszystko ci, którzy się tym twierdzeniem zajmowali, wniesli do matematyki wiele (np. Kummer dał początek algebrze abstrakcyjnej).



Szacuje się, że energia wyemitowanych neutrin na skutek wybuchu supernowej SN1987a wynosiła około 10^{53} ergów. Spróbujmy oszacować liczbę neutrin, które przeszły przez ciało każdego z nas, gdy neutrina dotarły na Ziemię. Założmy, że odległość supernowej od Ziemi wynosi $R = 2 \times 10^5$ lat świetlnych, średnia energia neutrin $E_\nu = 6$ MeV i że rozkład kątowy neutrin był jednorodny. Całkowita liczba wyemitowanych neutrin wynosi więc 10^{53} ergów / 6 MeV $\approx 10^{58}$. Stosunek średniej powierzchni przekroju ciała człowieka wynoszącej około 5×10^3 cm² do powierzchni sfery o promieniu R wynosi 10^{-44} . Stąd przenikająca nas liczba neutrin wynosi 10^{14} !



Astrologią zajmowano się na Uniwersytecie Krakowskim już od 1423 r., a pierwsza katedra astrologii powstała w 1459 r. z fundacji Marcina z Przemysła. Do końca XV w. Uniwersytet Krakowski był jedyną uczelnią środkowoeuropejską mającą odrębne katedry astronomii i astrologii. Najwybitniejszymi przedstawicielami tej nauki byli Jan z Głogowa (uważano, że przewidział wystąpienie Lutry) i nauczyciel Kopernika – Wojciech z Brudzewa (porównaj: Roman Bugaj, *Nauki tajemne w dawnej Polsce*).

Mgr Henryk DROZDOWSKI

Lagrange powiedział kiedyś, że Newton był najszcześliwszym człowiekiem. Istnieje bowiem tylko jeden Wszechświat i właśnie Newton odkrył prawa nim rządzące. Lagrange'owi jednak przypadło w udziale uzupełnienie teorii Newtona. To właśnie on posunął naprzód jego dzieło.

Dwieście lat temu ukazała się w Paryżu epokowa praca Lagrange'a *Mechanique analytique (Mechanika analityczna)*, która była rozwinięciem i ukoronowaniem mechaniki Newtona.

Sformułowane w niej zasady mechaniki klasycznej przetrwały w postaci nie zmienionej do czasów dzisiejszych. W przedmowie Lagrange stwierdził, że w jego książce nie ma rysunków, ponieważ metoda, którą stosował, nie wymaga rozważań natury geometrycznej bądź mechanicznej, a tylko operacji algebraicznych, które muszą następować w odpowiednim porządku. W rękach Lagrange'a mechanika stała się częścią analizy, którą nazwał „geometrią czterech wymiarów”.

Mechanika ta została zbudowana w sposób czysto matematyczny, przy użyciu metod geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego. Lagrange wyłożył i rozwinął w niej swą metodę wariacji stałych. Pełne wykorzystanie rachunku wariacyjnego umożliwiło mu ujednoczenie różnych zasad statyki i dynamiki. W statyce uzyskał tę jednolitość przez zastosowanie metody przemieszczeń wirtualnych, a w dynamice przez zastosowanie metody d'Alemberta.

Mechanika sformułowana przez Lagrange'a jest przykładem różnego od Newtona spojrzenia na dynamikę. W mechanice Newtona zasadniczą rolę odgrywa pojęcie siły, która jest czynnikiem zewnętrznym działającym na ciało. W mechanice Lagrange'a pojęcie siły nie występuje, używa się tylko pojęcia energii (kinetycznej i potencjalnej) jako własności ciała. Jednakże w przypadku występowania więzów ruchu zastosowanie równań Newtona wymagało znajomości sił przez nie uwarunkowanych, gdyż w równaniach tych występuje całkowita siła zewnętrzna działająca na punkt materialny. W wielu sytuacjach podanie w postaci analitycznej sił uwarunkowanych więzami nie było możliwe. Powstała więc potrzeba sformułowania ogólnej metody, która służyłaby do rozwiązywania skomplikowanych problemów ruchu. Lagrange nie tylko wskazał, jak znaleźć siłę działającą na ciało, jeśli zna się energię potencjalną, lecz również odkrył najbardziej skuteczną metodę rozwiązywania wielu problemów w mechanice posługując się pojęciem potencjału. W swojej *Mechanice* pisał: *Podczas gdy sprecyzowanie charakteru sił, które działają na ciało, może być bardzo skomplikowane lub nawet niemożliwe, to podanie wyrażenia na energię kinetyczną i potencjalną może być o wiele łatwiejsze.*

Rozważmy teraz ruch jednego lub więcej ciał pod wpływem działania różnych sił. Dla każdego punktu przestrzeni wypiszmy energię kinetyczną $\frac{1}{2}mv^2$ wszystkich znajdujących się w nim ciał i odejmijmy od niej ich energię potencjalną. Otrzymujemy wówczas wyrażenie zwane lagranżianem (funkcja Lagrange'a); definiuje się je jako różnicę między energią kinetyczną E_k i potencjalną U : $L = E_k - U$. Wprowadźmy – za Lagrangem – „współrzędne uogólnione”, charakteryzujące całkowicie położenie układu. Współrzędne te są lepiej dopasowane do rozważanego konkretnie układu i dlatego są dogodniejsze. Wreszcie możemy napisać słynne równanie Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s,$$

gdzie: q_k – współrzędna uogólniona, \dot{q}_k – prędkość uogólniona, L – lagranżian.

Równanie to odnosi się do nieswobodnego układu o s stopniach swobody. Z matematycznego punktu widzenia równanie to przedstawia układ równań różniczkowych drugiego rzędu dla s niewiadomych funkcji $q_k(t)$; ogólne rozwiązanie takiego układu zawiera $2s$ stałych dowolnych, koniecznych do pełnego określenia ruchu tego układu (z danych warunków początkowych i brzegowych).

Jeśli dane są wszystkie współrzędne uogólnione q_1, q_2, \dots, q_s i wszystkie prędkości uogólnione: $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$, to tym samym stan mechaniczny układu jest całkowicie określony.

Całkując równania Lagrange'a otrzymujemy współrzędne uogólnione q_1, q_2, \dots, q_s jako funkcje czasu t , a więc tym samym znajdujemy rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia dynamiki.

Za pomocą równań Lagrange'a możemy rozwiązywać dwa typy zagadnień: 1) znając siły działające na układ, możemy wyznaczyć równania różniczkowe ruchu; 2) znając równania ruchu możemy wyznaczyć siły czynne działające na układ.

Zaletą sformułowania Lagrange'a w porównaniu z opisem Newtona szczególnie jasno uwidacznia się wówczas, gdy ruch cząstki podlega więzom. W tym przypadku liczba użytych współrzędnych uogólnionych nie jest większa niż liczba stopni swobody układu. Znaczy to, że wszystkie współrzędne są od siebie jawnie niezależne. Właśnie na pominięciu nieznanych i często trudnych do wyrażenia sił więzów polega doniosłość równań Lagrange'a.

Czy równania te i „zwykłe” równania Newtona są równoważne? Oczywiście, tak, konkretne rozwiązania są identyczne z tymi, które się otrzyma korzystając bezpośrednio z praw Newtona, ale w wielu zagadnieniach teoria Lagrange'a upraszcza sposób rozwiązania. Równania Lagrange'a dotyczą wszelkich przebiegów dynamicznych i ułatwiają ich analizę. Pozwoliły wyczerpująco zbadać szereg ważnych zagadnień mechaniki, na przykład zagadnienia w teorii małych drgań i w dynamice ciała sztywnego. Lagrange ponadto wyprowadził w swojej *Mechanice* zasadę zachowania energii mechanicznej (została ona później nazwana ogólnie „twierdzeniem o żywej sile”) w postaci całki równań ruchu.

Z równań Lagrange'a można wyprowadzić zasady: Maupertuisa – najmniejszego działania, Fermata – najkrótszego czasu i Gaussa – najmniejszego przymusu.

Dwieście lat temu Lagrange stworzył mechanikę teoretyczną, której zasady mają szerokie zastosowanie w teorii względności, we współczesnej mechanice kwantowej i kwantowej teorii pola. Charakterystyczną cechą mechaniki analitycznej jest to, że u jej podstaw kładzie się ogólne zasady (różniczkowe i całkowite) i z nich wyprowadza się następnie na drodze analitycznej podstawowe równania różniczkowe ruchu.

Równania Lagrange'a mają znaczenie uniwersalne – za ich pomocą można sformułować nie tylko równania mechaniki, lecz także, na przykład, równania pola elektromagnetycznego.

Na zakończenie warto wspomnieć, że *Mechanika analityczna* Lagrange'a powstała w sto lat po ukazaniu się *Principiów* Newtona i na równi z tym dziełem wytyczyła kierunki współczesnej fizyki.

Od redakcji: Po rozszerzeniu i wyjaśnieniu do materiału w powyższym artykule odsyłamy do książki *Mechanika teoretyczna* W. Rubinowicza i W. Królikowskiego.