

ISSN 03-1075 Nr 3 14593...

delta



SPIS TREŚCI

NUMERU 1(181)

Delta i komputer	str. 1
Patrz w niebo	str. 3
Zadania	str. 3
Czerwona planeta dr Tomasz Kwast	str. 4
Siedemnastokąt foremny dr Maciej Bryński	str. 6
Mała Delta	str. 8
Obalamy prawa fizyki doc. dr Jan Gaj	str.10
Klub 44	str.12
Drobiazgi	str.16
Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki	str.17

W następnym numerze:

Supernowa



„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmankl – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Małowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz SitarSKI
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39
Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127
02-017 Warszawa
tel. centr. 28-52-31
Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
Nr zam. 3746/88, U-58
Skład systemem T_EX
wykonała redakcja.

WARUNKI I CENY PRENUMERATY NA 1989 ROK

Zgłoszenia na prenumeratę:
w terminie
— do dnia 10 listopada br. na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok 1989,
— do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

przyjmują:
— Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów
pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
— urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania
prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby
fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW
„Prasa-Książka-Ruch”,
— urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW
„Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od
indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów
pracy zamieszkałych i mieszczących się na tych terenach.

Ceny prenumeraty:
kwartalnej 210 zł
półrocznej 420 zł
rocznej 840 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę – przyjmuje Centrala
Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28,
00-958 Warszawa, PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11.
Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa
od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100%
dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

A JA, PANIE
MECENASIE,
SWÓJ KOMPUTER,
TO TYLKO
RAZ DZIENNIE
NA SPACER
WYPROWADZAM



Od numeru 6/1988 Czytelnicy *Delty* mogą zauważyć na wewnętrznej stronie okładki, pod adresem drukarni, mały napis:

Skład systemem T_EX wykonała redakcja.

To ważny napis.

Jego finansową konsekwencją jest fakt, że koszt wyprodukowania *Delty* 6/1988 był niższy o 16 złotych od kosztu produkcji poprzedzającej ją *Delty* 5/1988. Pozwoliło to utrzymać odpowiednio niską cenę naszego pisma. Przecież czternastokrotny wzrost ceny *Delty* w ciągu 15 lat jej istnienia jest jednak rekordowo niski w porównaniu ze wzrostem cen większości pism.

T_EX jest to system umożliwiający autorowi planowanie sposobu wydrukowania własnego tekstu tak, aby wyglądał on dokładnie według jego życzeń. Na T_EX składają się:

1. Zestaw poleceń i reguł ich stosowania, pozwalający w terminologii łatwo przyswajalnej „niedrukarzom” tak opisać tekst, by na podstawie tego opisu wiadomo było dokładnie, jak go wydrukować.
2. Opis „pewnego urządzenia drukującego”; zgodnie z poleceniami T_EXa tekst tłumaczony jest na sekwencję rozkazów dla tego urządzenia – gdyby je zbudowano, mógłby być on na nim wydrukowany.

Delta drukowana jest za pomocą jednej z wersji T_EXa o nazwie MICRO TEX. Do pracy używamy komputera IBM PC/XT TURBO z pamięcią 640 kB, twardym dyskiem 20 MB, dwiema stacjami dyskietek i „czarno-białym” monitorem z kartą Hercules. Praca nad składem artykułu przebiega następująco:

1. Tekst artykułu wraz z poleceniami T_EXa opisującymi rodzaj i wielkość czcionki, szerokość tekstu, sposób drukowania wzorów (np. centralnie w oddzielnym wierszu) itp. zapisujemy używając edytorów NORTON EDITOR i PC WRITE.
2. Za pomocą programu tex zapisany tekst tłumaczony jest na rozkazy „pewnego urządzenia drukującego”. Ponieważ jednak urządzenie to nie istnieje, używamy teraz programu, który zastępuje je monitorem ekranowym. Możemy dzięki temu widzieć efekt i wykonywać pierwsze korekty.
3. Do tworzenia papierowych kopii artykułów rozdawanych do korekty w redakcji używamy programu zastępującego „pewne urządzenie drukujące” zwykłą drukarką mozaikową – w naszym przypadku jest to LC-10.
4. Do drukarni wysyłamy wykonane na drukarce laserowej kopie tekstów mieszczących się na całych stronach pisma. Drukarze otrzymują od nas także ilustracje i makietę, która zawiera informacje, jak to razem połączyć. Rola drukarni sprowadza się więc jedynie do wykonania fotograficznych kopii tekstu i rysunków, zmontowania ich razem i powielenia w tysiącach egzemplarzy.

Bo trzeba od razu powiedzieć, że nowy sposób wydawania naszego pisma nie jest tym, co znane jest jako skład komputerowy. My robimy więcej, choć ściślej byłoby powiedzieć – robimy co innego niż redakcje korzystające ze składu komputerowego. Polega on na wgraniu na dyskietkę tekstów, które mają zostać umieszczone w piśmie (czy książce). Dyskietka ta (jeśli nawet wykonana jest w redakcji, co nie jest częste) przekazywana jest do obróbki na znajdującym się w drukarni sprzęcie w rodzaju *Monotype 2000* – wyspecjalizowanym urządzeniu elektronicznym, czasem nazywanym komputerem ze względu na obecność w nim mikroprocesorów. Obsługujący to urządzenie drukarze formują z przetworzonych w ten sposób tekstów strony pisma. Te następnie, po zreprodukowaniu na kliszach przypominających fotograficzne, uzupełniają ręcznie rysunkami i fotografiami. Tak uformowany jeden egzemplarz pisma jest potem (pomijamy techniczne szczegóły) rozmnażany offsetowo (rotograwiurkowo bądź – co już rzadkie – typograficznie) do stosownej liczby egzemplarzy.

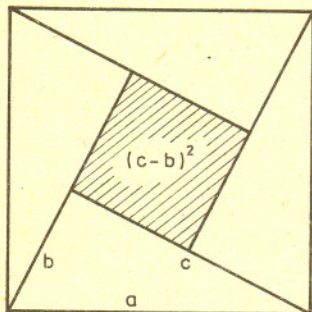
My natomiast sami formujemy tekst w ostatecznej jego postaci (to znaczy dokładnie takiej, jaką widzą nasi Czytelnicy mając w ręku *Delte*) i w postaci odbitki laserowej oddajemy drukarni, by uzupełniła go ilustracjami i rozmnożyła.

Do wyboru takiego sposobu postępowania zmusiła nas twarda rzeczywistość. Tekst *Delty* jest bardzo trudny technicznie ze względu na obecność skomplikowanych wzorów. Jest tylko kilka drukarni, których pracownicy umieją sobie poradzić ze składem takim, jak „deltowy”. A z dużych drukarni – bodajże dwie. Skład komputerowy takich tekstów, jak nasze, ogranicza i tę liczbę. Drukarnia poprzednio drukująca *Delte* spróbowała składu komputerowego (ma taki sprzęt, jak trzeba) i po jednej takiej próbie (*Delta* 2/1983) postanowiła wrócić do składu tradycyjnego, a przy wzorach – wręcz ręcznego.

Możemy się dziś drukować w zwyczajnej drukarni prasowej płacąc za to tak, jak pisma o łatwym składzie. W naszym przypadku koszty są dodatkowo obniżone dlatego, że przychodzimy już z gotowym składem.

GEOMETRYCZNY DOWÓD NIERÓWNOŚCI

Czytelnikom znany jest dowód twierdzenia Pitagorasa podany przez hinduskiego matematyka Bhāskara II (w XII w.n.e.), który obok rysunku 1 dopisał jeden wyraz: PATRZ!

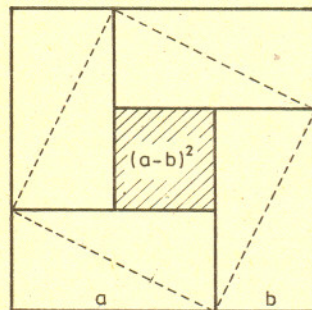


Rys. 1

Dla dowodu nierówności

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

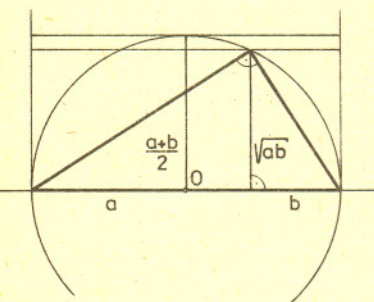
gdzie a i b są różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, można wykorzystać rysunek 2.



Rys. 2

Wystarczy w tym celu zauważyć, że

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$



Rys. 3

W przypadku rysunku 3 wszelkie objaśnienia są zbędne!

mgr Jarosław GÓRNICKI

Widać tu wyraźnie, o co chodzi. Albo drukarze muszą nauczyć się po pierwsze – składania wzorów, po drugie – pełnego wykorzystania możliwości posiadanego sprzętu tak, by jego użycie było dla nich mniej pracochłonne od pracy sposobem tradycyjnym, albo należy wykorzystać fakt, że redaktorzy doskonale wiedzą, jak powinny te wzory wyglądać i nie zaprzętać tą sprawą drukarzy.

Relację o naszym sposobie wydawania *Delty* zaczęliśmy od pieniędzy – cóż – znak czasu. Ale można, i trzeba, spojrzeć na rzecz szerzej. W tym celu należy rozważyć, czy nasz sposób pracy to dziwoląg (o ile nam wiadomo, jesteśmy jedyną redakcją pisma kioskowego pracującą w ten sposób), czy też jest to początek czegoś nowego.

Dość rozpowszechniony jest sąd (przesąd?) o liniowym rozwoju dziejów, a w szczególności sił wytwórczych. I choć każdy wie, że chłop pańszczyźniany to nie jest pewien nowy typ niewolnika, a przemysłowy robotnik nie jest kolejnym ulepszeniem chłopu pańszczyźnianego, to wielu socjo- i politologom jawi się wizja przerodzenia się wielkoprzemysłowej klasy robotniczej w wysokoprzemysłową klasę robotniczą. Polegać to ma na dostarczeniu (żeby trzymać się szczególnego przypadku) zecerowi maszyny typu *Monotype 2000*, co spowoduje, że (w skończonym czasie) stanie się on wykwalifikowanym użytkownikiem sprzętu elektronicznego. Tradycyjny podział autor-redaktor-przemysłowa drukarnia zostanie zachowany, tylko będzie to na wyższym poziomie. W ogóle tendencja, że to co jest teraz będzie zawsze zdaje się być obowiązująca, choć w przeszłości były zdecydowane zmiany i przełomy. Nawet dokonująca się na naszych oczach rezygnacja z produkcji na taśmie nikogo nie przekonuje. A przecież gdy Ford wdrożył system taśmowy, „na łądzie i na wodzie, na wschodzie, na zachodzie” wszyscy widzieli w tym sposobie produkcji jedyny kierunek rozwoju przemysłu (może tylko Chaplin robił sobie kpiny).

Zgodnie z tą bezwładnością myślenia i dziś wyobrażamy sobie, że wejście do powszechnego użytku sprzętu elektronicznego, a w szczególności komputerów, zmieni sposób pracy przemysłu (w tym poligrafii), ale nie zmieni struktury tegoż przemysłu, nie podważy roli podstawowego dziś jego elementu, jakim jest fabryka.

Mało znaczący w skali społecznej przykład zmiany sposobu produkcji *Delty* wskazuje na inną możliwość. Organizacja wytwarzania może zmienić się w ten sposób, że wiele etapów tego procesu będzie wyniesione poza obręb fabryki (tu drukarni). Że fabryka (w szczególności drukarnia) będzie tylko urządzeniem powielającym produkty zrealizowane poza jej obrębem.

Głęboka troska, jaka towarzyszy problemowi dostępności książki i prasy, rozbija się wciąż o barierę możliwości poligrafii. Liczne zakupy nowego sprzętu sytuacji nie poprawiają, więc woła się o nowy sprzęt i spirala kosztów rośnie. A może to nie tak? Może niech autorzy sami robią gotowe książki, zostawiając drukarniom tylko sprawę ich rozmnożenia – to przecież i tak wielka robota.

Nasz sprzęt, opisany wyżej, kosztuje niewielki ułamek tego, co wyspecjalizowany sprzęt do składu komputerowego, używany w drukarni. Mikrokomputer klasy IBM jest dziś powszechnie dostępny, przynajmniej w skali instytucji i przedsiębiorstw. Nauka posługiwania się nim nie zajęła nam wiele czasu. Czemu więc i inni nie mieliby pójść naszą drogą?

Skoro zaczęliśmy od pieniędzy, skończmy też na nich. Skąd mamy sprzęt? Został on zakupiony w ramach rządowego programu badawczego RR.I.14. Za uzasadnienie celowości tego zakupu uważamy nie tyle zaoszczędzone na każdym z numerów *Delty* złotówki, co przede wszystkim praktyczne sprawdzenie, za jego pomocą, realności zaproponowanych wyżej zmian w sposobie rozwiązania problemu dostępności literatury, a może i w ogóle podejścia do roli, jaką komputery mogą odegrać w produkcji.

Redakcja

Patrz w niebo

Astronomowie przyzwyczajeni są do astronomicznych liczb. Nie tylko, gdy chodzi o odległości, również w odniesieniu do prawie wszystkich innych wielkości: dziesiątki rzędów wielkości pojawiają się, gdy porównujemy masy, rozmiary, gęstości, czas, pola magnetyczne i prawie wszystkie inne astronomiczne parametry. Wyjątkiem zdaje się tu być prędkość (gdy zapomnimy o prędkościach kosmologicznych oraz prędkościach strug materii w egzotycznych obszarach w pobliżu hipotetycznych czarnych dziur). Wszystkie znane nam dobrze ciała niebieskie zdają się poruszać z majestatycznymi prędkościami w zakresie kilka – kilkaset kilometrów na sekundę. Pluton porusza się wokół Słońca ze średnią prędkością 5 km/s, podobnie wiele dalszych księżyców planet; Merkury obiega naszą gwiazdę z prędkością około 50 km/s, największe prędkości wśród planet, księżyców i meteorów to około 60 km/s. Ciało swobodnie spadające z nieskończoności na Słońce osiągnie prędkość 617 km/s, czyli – jak na „stosunki astronomiczne” – też nic imponującego. Takie maksymalne prędkości osiągają niektóre komety o wyjątkowo małych periheliach w momentach maksymalnego zbliżenia do Słońca.

Nasze Słońce porusza się na orbicie wokół centrum Galaktyki z prędkością około 200 km/s, a jego uśredniona szybkość względem okolicznych gwiazd to kilkanaście km/s. Podobną prędkość orbitalną wykazują gwiazdy na zupełnie innych orbitach wokół galaktycznych. Gwiazdy będące składnikami układów podwójnych obiegają się wzajemnie też z podobnymi prędkościami.

Względne prędkości galaktyk w Grupie Lokalnej są rzędu 200 km/s (umiemy zmierzyć tylko ich radialne składowe), m.in. galaktyka Andromedy zbliża się do nas z prędkością 275 km/s. Nawet ruch Grupy Lokalnej względem promieniowania tła jest najprawdopodobniej rzędu kilkuset km/s.

Oczywiście, siląc się na znalezienie większych prędkości – znajdziemy je, jednak w znacznej większości towarzyszą one procesom wybuchowym, krótkotrwałym lub wyraźnie niestacjonarnym; ponadto nie dotyczą one dużych mas, lecz przeważnie jedynie strug gazu lub niektórych szybko wirujących gwiazd neutronowych.

Muszę przyznać, że dziwi mnie to, iż tak dużo różnych klas obiektów astronomicznych porusza się z podobnymi, niewielkimi prędkościami. Niewielkimi, bo stanowią one przeważnie zaledwie 0,001c. Czy istnieje jakiś fizyczny powód tych podobieństw? Np. może fakt, że prędkość zależy przeważnie od „napędzającej” ją masy w kwadracie – to wydaje mi się nie przekonujące, bo przecież mamy do czynienia z masami o zakresie 30 rzędów wielkości! Również fakt, że rozpędzenie do prędkości relatywistycznych wymaga większego wkładu energii niż wynikałoby to ze wzorów klasycznych, nie może tłumaczyć wspomnianych analogii. A może nasz świat po prostu nie chce być relatywistyczny? A może to wszystko przypadek?

dr Tomasz CHLEBOWSKI



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 529. Rzucamy symetryczną monetą. Znaleźć średni czas oczekiwania na pojawienie się po kolei orła, orła i reszki, wiedząc, że jest on skończony. Rozwiązanie na str. 5

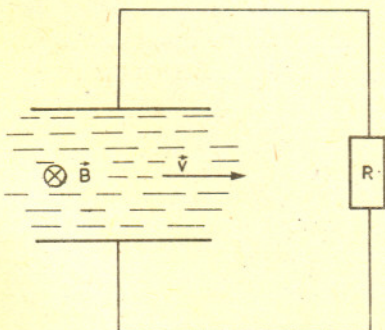
M 530. Dane są: stożek ścięty i walec o tej samej wysokości i średnicy równej średnicy przekroju stożka ściętego w połowie wysokości. Która bryła ma większą objętość? Rozwiązanie na str. 10

M 531. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \cos(b \ln n)$ nie jest zbieżny dla $a \leq 1$, niezależnie od b . Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 260. Rozważmy najprostszy schemat generatora magnetohydrodynamicznego. Płaski kondensator (rysunek) o powierzchni płytek S i odległości między nimi d znajduje się w strumieniu przewodzącej cieczy o przewodnictwie właściwym λ . Ciecz porusza się ze stałą prędkością v równoległe do płytek. Kondensator znajduje się w polu magnetycznym o indukcji B skierowanym prostopadle do kierunku ruchu cieczy, a równoległe do płytek. Jaka jest moc prądu w przyłączonym do kondensatora obwodzie o oporze R ? Rozwiązanie na str. 7

F 261. Supersilne pola magnetyczne można otrzymywać za pomocą wybuchowego ściśnięcia odcinka przewodzącej rury o promieniu R_0 , wewnątrz której wytworzono pole magnetyczne o indukcji B_0 równoległe do osi rury. Określić końcowe natężenie indukcji B i promień rury R , jeżeli ciśnienie zewnętrzne p powstające w czasie wybuchu wynosi 10^6 Atm. Założyć, że praca sił ściskających zamienia się całkowicie na energię pola magnetycznego, a opory elektryczne i mechaniczne można zaniedbać. Przyjąć $R_0 = 5$ cm, $B_0 = 5$ T. Rozwiązanie na str. 4



Mars

masa	$6,4191 \times 10^{23}$ kg
promień równikowy	3393,4 km
spłaszczenie	0,005186
średnia gęstość	$3,94 \text{ g/cm}^3$
okres obrotu	1,025957 dni
albedo	0,15
półś orbita	1,5237 j.a.
mimośród orbity	0,09327
nachylenie orbity do płaszc. ekliptyki	$1^{\circ}35'07''$
okres obiegu	1,88 lat

Satelity

	Fobos	Deimos
promień orbity	9377	23463 km
okres obiegu	$7^h 39^m$	$30^h 17^m$
rozmiary	$19 \times 22 \times 27$	$11 \times 12 \times 15$ km
masa	$1,27 \times 10^{16}$	$1,8 \times 10^{15}$ kg
gęstość	2,2	$1,7 \text{ g/cm}^3$

Czerwona Planeta

Dr Tomasz KWAST



Mars – planeta będąca przyczyną przedziwnej, a dość wstydlivej afery w dziejach astronomii, obserwowany był, oczywiście, już przez Galileusza, który jednak za pomocą swoich małych lunet nie był w stanie zobaczyć na jego tarczy żadnych szczegółów. Trwałe plamy na powierzchni planety zaobserwował jako pierwszy Huygens, zaś J.D. Cassini w 1666 r. wyznaczył okres obrotu Marsa. Z upływem lat poznawano coraz lepiej topografię Marsa, sporządzano jego mapy, wreszcie w 1877 r. G.B. Schiaparelli zauważył wąskie, niemal proste linie przecinające niektóre jego obszary. Ma się rozumieć, odkrycie to wzbudziło ogromne zainteresowanie, narzucało bowiem niezwykle frapującą interpretację: kanały te są dziełem istot rozumnych! Sieć tych kanałów była drobiazgowo badana niemal do naszych czasów, kiedy to dzięki sondom kosmicznym okazało się, że kanałów po prostu nie ma. Właściwie nie istnieje sensowne wytłumaczenie, dlaczego solidni skądinąd uczeni przez wiele lat zgodnie zajmowali się fikcją. Co prawda, fikcja ta przyniosła też niebagatelny pożytek, mianowicie pragnąc zbadać tę sprawę, amerykański astronom P. Lowell założył we Flagstaff (Arizona) obserwatorium działające do dziś.

Zanim jeszcze definitywnie odrzucono istnienie kanałów, obserwowano na Marsie zjawiska zdające się niezależnie świadczyć przynajmniej o obecności tam roślinności. Mianowicie od dawna wiadomo, że płaszczyna równika Marsa tworzy z płaszczyną jego orbity kąt 25° , a więc można spodziewać się tam przebiegu pór roku bardzo podobnego jak na Ziemi. Przejawy następstwa pór roku obserwuje się również od dawna, a są nimi sezonowe powiększanie i kurczenie się białych czap polarnych oraz zmiany zabarwienia rozmaitych obszarów planety. To właśnie ostatnie zjawisko przez jakiś czas uchodziło za efekt ożywiania i zamierania szaty roślinnej w rytmie pór roku. Tymczasem są to skutki przemieszczania się ogromnych mas pyłu pędzonego wiatrem, którego siła i kierunek zależy właśnie od aktualnej pory roku. W 1976 r. wylądowały na Marsie dwie sondy serii Viking specjalnie przeznaczone do poszukiwania śladów życia na Marsie. Próbkę gruntu były w tym eksperymencie analizowane zarówno bezpośrednio, jak i po próbach wywołania w nich reakcji typowych dla przemian biochemicznych. W obu przypadkach skutek był żaden: nie wykryto ani obecności żadnych organizmów, ani żadnych produktów ewentualnej przemiany materii. Możliwość istnienia życia na Marsie należy więc chyba definitywnie odrzucić.

Atmosfera Marsa, jak widzieliśmy, „pracuje” niekiedy bardzo wydajnie, chociaż w gruncie rzeczy jest dość skromna. Przy powierzchni planety panuje ciśnienie zaledwie około 70 mm Hg, ale prędkości wiatru nieraz przekraczają 200 km/h. Atmosfera składa się głównie z dwutlenku węgla i argonu (w proporcjach około 3:1), ze śladami tlenu węgla, tlenu, pary wodnej, ozonu.



Rozwiązanie zadania F 261. Rura będzie się zachowywać podobnie jak solenoid. Zwiększenie się indukcji wewnątrz rury jest spowodowane pojawieniem się w momencie wybuchu prądu w jej ściankach. Z prawa Kirchhoffa wynika, że w czasie ściskania strumień pola magnetycznego nie zmienia się, bo chociaż zmienia się prąd, to również zmienia się samoindukcyjność solenoidu. Mamy więc

$$\pi R_0^2 B_0 = \pi R^2 B.$$

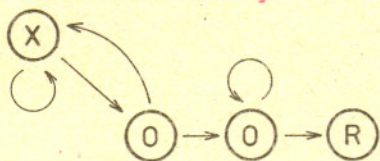
Stąd oraz z warunku bilansu energii otrzymujemy:

$$B = 2\mu_0 p / B_0 = 5 \times 10^4 \text{ T},$$

$$R = 5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$



Rozwiązanie zadania M 529.
Rozpatrzmy układ, którego możliwe stany oznaczymy przez X, O, OO, OOR . Na rysunku pokazano możliwe przejścia między stanami; każde przejście zachodzi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.



Niech $t(A, B)$ oznacza średni czas przejścia ze stanu A do B . Rozważmy przejście z X do O . Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ czas przejścia wynosi 1 i również z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ wracamy do X , gdzie oczekiwanie rozpoczyna się od nowa. Wynika stąd, że $t(X, O) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(t(X, O) + 1)$, skąd $t(X, O) = 2$.
Dalej, $t(X, OO) = t(X, O) + (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + t(X, OO))) = 3 + \frac{1}{2}t(X, OO)$. Zatem $t(X, OO) = 6$.
W końcu $t(X, OOR) = t(X, OO) + (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + t(OO, OOR))) = 7 + \frac{1}{2}t(OO, OOR)$, a ponieważ $t(OO, OOR) = 2$, więc $t(X, OOR) = 8$.



Woda marsyjska skupiona jest głównie w czapach polarnych wraz z częścią atmosferycznego dwutlenku węgla, a ponadto rozłożona jest na całej powierzchni planety wchodząc w skład niektórych skał i prawdopodobnie tworząc warstwę wiecznej zmarzliny. Nie ma w każdym razie wody w stanie ciekłym.

Grunt Marsa, jak wykazały bezpośrednie analizy na miejscu, zawiera (oczywiście, poza tlenem wchodzącym w skład niemal wszystkich minerałów) około 21% krzemu, 13% żelaza i mniejsze ilości takich pierwiastków, jak wapń, glin, tytan. Duża zawartość związków żelaza (głównie tzw. getyt i limonit) daje Marsowi charakterystyczne rdzawe zabarwienie widoczne nawet gołym okiem z Ziemi. Równinne obszary planety wyglądają jak czerwone pustynie usłane różnej wielkości głazami przemieszanych z wydmami (patrz „Pocztówka z Marsa” na tylnej okładce *Delty* 7/1988). Ale cały glob jest znacznie bardziej urozmaicony, niż się to komukolwiek wydawało, co zresztą okazało się dopiero po „obejrzeniu” Marsa z bliska przez kamery sond. Na zdjęciach przesłanych na Ziemié widzimy przede wszystkim kratery meteorytowe z reguły silnie zerodowane przez energiczną atmosferę, wulkany (obecnie nieczynne, a najwyższy z nich – Olympus Mons – ma wysokość około 25 km i jest prawdopodobnie najwyższą górą w całym Układzie Słonecznym), różne ślady działalności wulkanicznej w przeszłości, góry i wąwozy, w których niechybnie musiały kiedyś płynąć rzeki. Jak powiedzieliśmy – woda jest na Marsie tylko w postaci lodu; planeta przeżywa więc coś w rodzaju epoki lodowcowej, ale nie wiemy na razie, jakie były przyczyny tak znacznego, jak się wydaje, ochłodzenia klimatu.

Rok 1877 przyniósł jeszcze jedno odkrycie, mianowicie A. Hall po raz pierwszy zaobserwował dwa satelity Marsa, którym nadano nazwy Fobos i Deimos. Są to bardzo małe obiekty o nieregularnym kształcie, pokryte kraterami, co również wiemy dzięki sondom. Fobos obiega Marsa po tak niskiej orbicie, że wykonuje jeden obieg w czasie krótszym niż planeta jeden obrót. W rezultacie widziany z powierzchni Marsa wschodzi na zachodzie i zachodzi na wschodzie – jest to jedyny w Układzie Słonecznym przypadek tego rodzaju, w każdym razie w odniesieniu do satelity naturalnego. Te właśnie małe satelity z racji braku wewnętrznego grzania, wulkanizmu i ruchów tektonicznych zachowały się w niemal nie zmienionym stanie przez miliardy lat. Dlatego spodziewamy się, że dwie sondy serii Fobos, osiągające teraz układ Marsa, mogą dostarczyć bardzo cennych informacji o najbardziej pierwotnej materii, z której powstał Układ Słoneczny.

Sondy Marsa

	start	u celu	zadania
Mars 1	1 XI 1962	—	— awaria w drodze
Mariner 3	5 XI 1964	—	— awaria w drodze
Mariner 4	28 XI 1964	14 VII 1965	pierwsze obrazy z bliska, badanie przestrzeni okołomarsyjskiej
Zond 2	30 XI 1964	—	— awaria w drodze
Mariner 6	25 II 1969	31 VII 1969	przelot koło Marsa, obrazy, badanie przestrzeni
Mariner 7	27 III 1969	5 VIII 1969	jak wyżej
Mars 2	19 V 1971	27 XI 1971	sztuczny satelita Marsa, badanie przestrzeni, obrazy
Mars 3	28 V 1971	2 XII 1971	pierwsze lądowanie na Marsie, ale wkrótce awaria
Mariner 9	30 V 1971	14 XI 1971	pierwszy sztuczny satelita Marsa, obrazy, badanie przestrzeni
Mars 4	21 VII 1973	10 II 1974	przelot koło Marsa
Mars 5	25 VII 1973	12 II 1974	sztuczny satelita Marsa
Mars 6	5 VIII 1973	12 III 1974	lądowanie, badanie powierzchni
Mars 7	9 VIII 1973	9 III 1974	przelot koło Marsa, nieudane lądowanie
Viking 1	20 VIII 1975	20 VII 1976	lądowanie, wszechstronne badanie gruntu
Viking 2	9 IX 1975	3 IX 1976	jak wyżej
Fobos 1	7 VII 1988	?	wszechstronne badanie Fobosa
Fobos 2	12 VII 1988	?	jak wyżej

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

PÓLPRZEWODNIKI NISKOWYMIAROWE

W sierpniu 1988 roku odbyło się w Pałacu Kultury i Nauki spotkanie fizyków z całego świata zajmujących się problematyką półprzewodników. Konferencja ta, już dziewiętnasta z kolei, została zorganizowana w Warszawie po raz wtóry (poprzednio w 1972 roku). Udział w obradach brało około 800 uczestników z ponad trzydziestu krajów, a wśród nich dwóch laureatów nagrody Nobla: Leo Esaki pracujący w laboratoriach firmy IBM w Yorktown Heights w stanie Nowy Jork (USA) oraz Klaus von Klitzing z Instytutu imienia Maxa Plancka w Stuttgarcie (RFN). Bardzo duża część obrad konferencji była poświęcona własnościom fizycznym półprzewodnikowych struktur dwuwymiarowych. Obu noblistom program i przebieg konferencji musiał przynieść wiele satysfakcji. Wszakże to Esaki w 1970 roku zaproponował wytwarzanie supersieci — niezwykłych "kanapek" zbudowanych z warstw różnych półprzewodników. Natomiast w 1972 roku w Warszawie Esaki prezentował już pierwsze własności supersieci GaAs — GaAlAs otrzymanych w IBM. Z kolei von Klitzing odkrył w 1980 roku najciekawszą własność dwuwymiarowych struktur półprzewodnikowych — kwantowy efekt Halla. Zmniejszanie się liczby wymiarów w świecie półprzewodników wcale się na tym nie skończyło. Począwszy od 1982 roku zaczęto wytwarzać jednowymiarowe struktury półprzewodnikowe w postaci wąskich ścieżek o szerokości rzędu 100 nm. Z kolei w czasie konferencji 1988 roku grupa Esakiego przedstawiła bardzo interesujące własności nie tylko struktur jednowymiarowych, ale i zerowymiarowych (punktowych) otrzymanych poprzez selektywne trawienie warstw dwuwymiarowych. Inny rodzaj obiektów zerowymiarowych zaprezentowali w Warszawie fizycy radzieccy z Leningradu. Badali oni własności optyczne mikrokryształów półprzewodników umieszczonych w przezroczystej matrycy szklanej. Owe "okruszki" półprzewodnikowe dochodziły do rozmiarów rzędu pojedynczych nanometrów. Wszystkie rodzaje tworów dwu-, jedno- i zerowymiarowych stanowią "studnie kwantowe" ograniczające możliwość poruszania się elektronów, które normalnie swobodnie wędrują po kryształach. Co więcej, elektron w kryształach może mieć bardzo małą masę efektywną m^* , rzędu ułamka masy swobodnego elektronu w próżni. W połączeniu z dużą stałą dielektryczną półprzewodników daje to istotne rozmycie funkcji falowej takiego elektronu, nawet do wartości rzędu 10 nm. Taki "nadmuchany" elektron musi się jednak zmieścić w warstwie, wąskiej ścieżce czy nawet tworze zerowymiarowym. Jak łatwo się domyślić, powoduje to istotne zaburzenia widma energii stanów elektronowych. Zarówno rachunki teoretyczne, jak i badania eksperymentalne tych stanów nie są jeszcze zakończone i świat fizyki "niskowymiarowej" może kryć jeszcze wiele niespodzianek.

Dr Maciej BRYŃSKI

Wykonywanie konstrukcji cyrklem i linijką należy już od czasów starożytnych do zadań ulubionych przez matematyków. Bez trudu potrafimy skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat albo sześciokąt foremny. A jak to jest z innymi wielokątami foremnymi? Okazuje się, że nie każdy taki wielokąt można skonstruować; dokładniej wyjaśnimy to w dalszym ciągu. Problem ten rozstrzygnął nie byle kto, lecz największy matematyk wszechczasów — Carl Friedrich Gauss. W roku 1796 dziewiętnastoletni Gauss podał konstrukcję siedemnastokąta foremnego, a raczej przytoczył dowód tego, że konstrukcję taką można wykonać. Prześledźmy to rozumowanie.

Przyjmijmy, że siedemnastokąt, który chcemy skonstruować, będzie wpisany w koło o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych oraz jeden z jego wierzchołków będzie punktem $A = (1, 0)$. Pozostałe wierzchołki leżą na okręgu, dzieląc go na 17 równych łuków. Utożsamiając punkt (x, y) z liczbą zespoloną $x + iy$ utożsamiamy wierzchołki tego 17-kąta z liczbami

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 16,$$

tj. pierwiastkami stopnia 17 z jedynki. Wynika to stąd, że pierwiastki stopnia 17 z jedynki mają moduł równy 1, ich argumentami zaś są kolejne wielokrotności kąta $\frac{2\pi}{17}$, a zatem punkty płaskiezyzny reprezentujące te liczby zespolone leżą na okręgu o promieniu 1 i środku $(0, 0)$ dzieląc ten okrąg na 17 równych łuków.

Siedemnaście liczb $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{16}$ stanowi grupę względem mnożenia; istotnie — iloczyn dwóch spośród tych liczb jest znów jedną z nich

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \cdot \varepsilon_m &= \left(\cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17} \right) \cdot \left(\cos \frac{2m\pi}{17} + i \sin \frac{2m\pi}{17} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{2(k+m)\pi}{17} + i \sin \frac{2(k+m)\pi}{17} \right) = \varepsilon_{k+m} \end{aligned}$$

(gdy $k + m \geq 17$, to zastępujemy tę liczbę resztą z podzielenia przez 17), — odwrotności liczby ε_k jest liczbą ε_{17-k} (odwrotnością liczby ε_0 jest ε_0).

Aby udowodnić wykonalność konstrukcji siedemnastokąta foremnego, Gauss przeprowadził następujące rozumowanie.

W grupie pierwiastków stopnia siedemnastego z 1 uporządkujmy elementy $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{16}$ w następujący sposób: liczbom ε_k przyporządkujemy nowy numer l , jeżeli liczba 3^l daje przy dzieleniu przez 17 resztę k . W poniższej tabelce w górnym wierszu zestawiono nowe, a w dolnym wierszu stare numery pierwiastków.

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Będziemy pisać $\varepsilon_{[l]}$ na oznaczenie pierwiastka, którego nowy numer jest l . Oznaczmy przez $\sigma_{m,r}$ sumę tych $\varepsilon_{[l]}$, których numery l przy dzieleniu przez m dają resztę r .

Rozważmy najpierw

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[4]} + \dots + \varepsilon_{[14]};$$

$$\sigma_{2,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[5]} + \dots + \varepsilon_{[15]}.$$

Udowodnimy, że liczby $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$ są pierwiastkami pewnego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych; wyniknie stąd, że liczby te potrafimy skonstruować.

Weźmy pod uwagę sumy liczb $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$. Jest to suma wszystkich pierwiastków stopnia 17 z 1, z wyjątkiem liczby $\varepsilon_0 = 1$. Ale przecież

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{16} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \dots + \varepsilon_1^{16} = \frac{1 - \varepsilon_1^{17}}{1 - \varepsilon_1} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon_1} = 0.$$

Zatem

$$(*) \quad \sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{16} = -1.$$

Rozważmy teraz iloczyn $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$. Jest on równy sumie 64 składników $\varepsilon_{[k]} \cdot \varepsilon_{[m]}$, gdzie k jest liczbą parzystą, m — nieparzystą.

Rozwiązanie zadania F 360.
 W czasie ruchu przewodzącej cieczy w polu magnetycznym w obwodzie powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\epsilon_{ind} = vBd$ (co można łatwo otrzymać rozpatrując działanie siły Lorentza na swobodny nośnik ładunku). Wobec tego w obwodzie płynie prąd

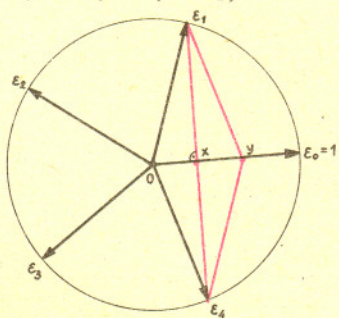
$$I = \frac{\epsilon_{ind}}{r + R}, \quad \text{gdzie} \quad r = \frac{d}{\lambda S}.$$

Stąd moc będzie równa

$$P = I^2 R = \frac{\epsilon_{ind}^2 R}{(r + R)^2} = \frac{v^2 B^2 d^2 R}{(d/(\lambda S) + R)^2}.$$

To samo dla pięciokąta:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = \\ &= 1 + \epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \epsilon_1^3 + \epsilon_1^4 = \\ &= 1 + \epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \frac{1}{\epsilon_1^2} + \frac{1}{\epsilon_1} = \\ &= 1 + \left(\epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right) + \left(\epsilon_1^2 + 2 + \frac{1}{\epsilon_1^2}\right) - 2 = \\ &= \left(\epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right)^2 + \left(\epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$



Rozwiązujemy równanie

$$y^2 + y - 1 = 0$$

i biorąc $x = \frac{1}{2}y$ konstruujemy pięciokąt.

Pokażemy niżej, że wśród tych 64 składników każdy z pierwiastków $\epsilon_{[0]}, \epsilon_{[1]}, \dots, \epsilon_{[15]}$ występuje dokładnie 4 razy. Otrzymamy stąd

$$(**) \quad \sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = 4(\epsilon_{[0]} + \epsilon_{[1]} + \dots + \epsilon_{[15]}) = 4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{16}) = 4 \cdot (-1) = -4.$$

Czytelnik zechce uzasadnić, że każdy składnik $\epsilon_{[k]} \cdot \epsilon_{[m]}$ można przedstawić w postaci $\epsilon_{[p]} \cdot \epsilon_{[p+r]}$, gdzie $0 \leq p \leq 15$, $r = 1, 3, 5, 7$.

Zastosujemy teraz przekształcenia T_k ($k = 1, 2, \dots, 16$) przyporządkowujące pierwiastkowi ϵ_j jego k -tą potęgę ϵ_j^k . Każde z tych przekształceń odwzorowuje zbiór pierwiastków $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{16}\}$ na ten sam zbiór. Jest przy tym $T_k \cdot T_l = T_{kl}$ i przekształcenia T_k ($k = 1, 2, \dots, 16$) stanowią grupę względem składania. Podobnie, jak przy numerowaniu pierwiastków, przyjmiemy i tu nowe numery: $T_k = T_{[k]}$, jeśli 3^l daje resztę k przy podzieleniu przez 17. Przy tej numeracji mamy

$$\begin{aligned} T_{[k]} \epsilon_{[l]} &= \epsilon_{[k+l]}, \\ T_{[m]}(T_{[k]} \epsilon_{[l]}) &= T_{[m+k]} \epsilon_{[l]}. \end{aligned}$$

Wracając do sumy $\sum \epsilon_{[k]} \cdot \epsilon_{[m]} = \sum_{p=0}^{15} \sum_{r=1,3,5,7} \epsilon_{[p]} \cdot \epsilon_{[p+r]}$ pogrupujemy w niej składniki z ustalonym r :

$$\begin{aligned} S_r &= \epsilon_{[0]} \epsilon_{[r]} + \epsilon_{[1]} \epsilon_{[1+r]} + \epsilon_{[2]} \epsilon_{[2+r]} + \dots + \epsilon_{[15]} \epsilon_{[15+r]} = \\ &= T_{[0]}(\epsilon_{[0]} \epsilon_{[r]}) + T_{[1]}(\epsilon_{[0]} \epsilon_{[r]}) + \dots + T_{[15]}(\epsilon_{[0]} \epsilon_{[r]}) = \\ &= T_{[0]} \epsilon_{[r]} + T_{[1]} \epsilon_{[r]} + \dots + T_{[15]} \epsilon_{[r]} = \epsilon_{[0]} + \epsilon_{[1]} + \dots + \epsilon_{[15]} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ r przyjmuje cztery wartości, więc

$$\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = -4.$$

Wobec (*) i (**) liczby $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$ są pierwiastkami równania $x^2 + x - 4 = 0$. Punkty osi liczbowej odpowiadające tym pierwiastkom potrafimy, oczywiście, skonstruować. Rozważamy teraz

$$\begin{aligned} \sigma_{4,0} &= \epsilon_{[0]} + \epsilon_{[4]} + \epsilon_{[8]} + \epsilon_{[12]}, \\ \sigma_{4,1} &= \epsilon_{[1]} + \epsilon_{[5]} + \epsilon_{[9]} + \epsilon_{[13]}, \\ \sigma_{4,2} &= \epsilon_{[2]} + \epsilon_{[6]} + \epsilon_{[10]} + \epsilon_{[14]}, \\ \sigma_{4,3} &= \epsilon_{[3]} + \epsilon_{[7]} + \epsilon_{[11]} + \epsilon_{[15]}, \end{aligned}$$

i analogicznie jak wyżej stwierdzamy, że

$$\sigma_{4,0} + \sigma_{4,2} = \sigma_{2,0}, \quad \sigma_{4,0} \cdot \sigma_{4,2} = -1.$$

Stąd wynika, że $\sigma_{4,0}, \sigma_{4,2}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{2,0}x - 1 = 0$ i podobnie $\sigma_{4,1}, \sigma_{4,3}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{2,1}x - 1 = 0$. Punkty odpowiadające liczbom $\sigma_{4,0}, \sigma_{4,1}, \sigma_{4,2}, \sigma_{4,3}$ można skonstruować.

Rozważamy wreszcie

$$\sigma_{8,0} = \epsilon_{[0]} + \epsilon_{[8]}, \quad \sigma_{8,4} = \epsilon_{[4]} + \epsilon_{[12]}$$

i otrzymujemy

$$\sigma_{8,0} + \sigma_{8,4} = \sigma_{4,0}, \quad \sigma_{8,0} \cdot \sigma_{8,4} = \sigma_{4,1},$$

skąd wynika, że $\sigma_{8,0}$ i $\sigma_{8,4}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{4,0}x + \sigma_{4,1} = 0$, można więc te liczby skonstruować. Zauważmy, że $\sigma_{8,0} = \epsilon_{[0]} + \epsilon_{[8]} = \epsilon_1 + \epsilon_{16} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$, a mając tę liczbę skonstruujemy 17-kąt foremny. Wystarczy bowiem odłożyć na osi OX liczbę $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ i wystawić w otrzymanym punkcie prostopadłą do osi. Przecina ona okrąg jednostkowy w punktach odpowiadających liczbom ϵ_1 i ϵ_{16} . Odkładając odpowiednie łuk na okręgu otrzymamy kolejne wierzchołki siedemnastokąta. Przeprowadzając wskazane wyżej rachunki można stwierdzić, że

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right) + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$$

Pomysł Gaussa przedstawiony w powyższej konstrukcji daje się zastosować do konstrukcji p -kąta foremnego dla każdej liczby pierwszej Fermata p , tj. liczby pierwszej postaci $p_n = 2^{2^n} + 1$. Dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ wzór ten daje istotnie liczby pierwsze 3, 5, 17, 257, 65537. Podstawiając w miejsce n kilkanaście kolejnych liczb naturalnych otrzymujemy liczby złożone; nie wiadomo, czy w ciągu (p_n) występuje choć jeszcze jedna liczba pierwsza oprócz wymienionych wyżej. Przynotowany tu dowód konstruowalności siedemnastokąta sam Gauss uważał za jedno z ważniejszych swych odkryć.

A co z innymi wielokątami foremnymi? Okazuje się, że n -kąta foremny można skonstruować wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze występuje pewna potęga dwójki (może być z wykładnikiem zero) oraz ewentualnie różne liczby pierwsze Fermata.

mała delta

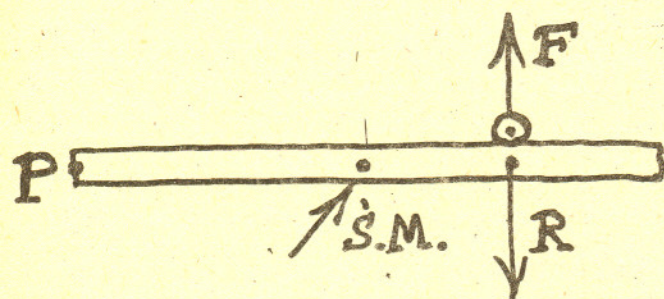
Czy wykonanie młotka wymaga znajomości fizyki?

Jako oczywiste przyjmujemy stwierdzenie, że znajomość fizyki jest niezbędna przy projektowaniu np. mostu przez Cieśninę Messyńską lub reaktora atomowego. Ale przy wykonaniu młotka? Zaczniemy więc od postawienia prostego (i dodatkowo uproszczonego) problemu: którą częścią maczety należy ścinać trzcinę, aby ręka najmniej odczuwała uderzenie? A oto zapowiedziane uproszczenie – maczetę potraktujemy jako wąską, cienką i jednorodną listwę o długości l i masie m , którą trzymamy za jeden z końców w punkcie P .

W chwili uderzenia na maczetę działa siła reakcji R – rysunek 1. Napiszmy równania ruchu maczety pod działaniem tej siły

$$m \cdot a = R, \quad I \cdot \alpha = R \cdot r,$$

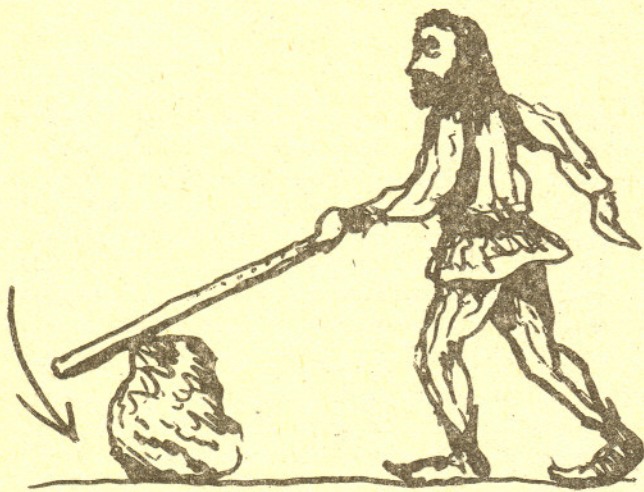
gdzie I oznacza moment bezwładności, a – przyspieszenie liniowe, α – przyspieszenie kątowe maczety oraz r – odległość punktu uderzenia od środka masy.



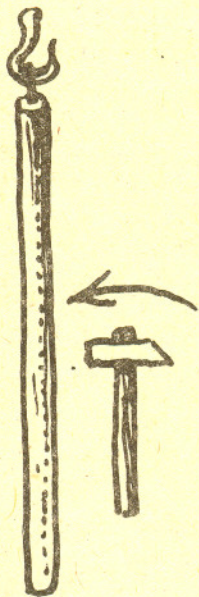
Rys. 1

Liniowe przyspieszenie punktu P , wynikające z obrotu maczety wokół środka masy, jest, oczywiście, $A = \alpha \cdot \frac{l}{2}$. Łatwo zauważymy, że przyspieszenia A i a punktu P mają przeciwne zwroty. A więc ręka nie odczuwa uderzenia, jeśli przyspieszenia A i a będą miały jednakowe wartości. Wykorzystując ten warunek i pamiętając, że $I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$ łatwo otrzymamy $r = \frac{l}{6}$. Czyli należy ciąć w miejscu klingi oddalonym o $\frac{2}{3}$ jej długości od rękojeści. To szczególne miejsce (ściślej – punkt) nazywane jest środkiem uderzeń.

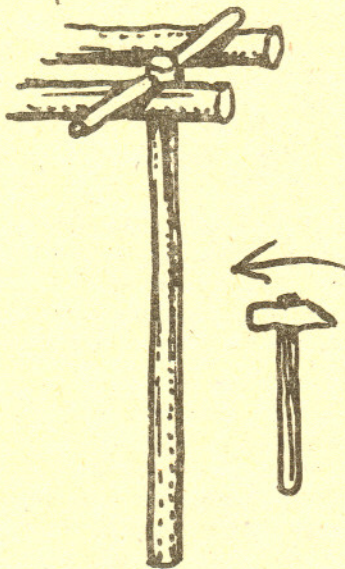




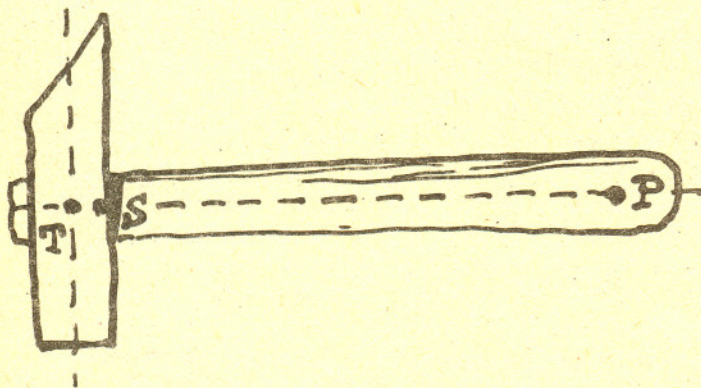
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Czy można nasz wynik sprawdzić doświadczalnie? Oczywiście tak i to na kilka sposobów. Najprostszy to trzymanym w rękę kijem uderzać o jakąkolwiek przeszkodę, np. suchy pień (rys.2). Jeśli punkt uderzeń będzie zbyt blisko ręki, odczujemy reakcję skierowaną w górę, jeśli zbyt daleko – reakcję skierowaną w dół. Gdy uderzenie trafi w środek uderzeń – żadnej reakcji nie odczujemy.

Jeśli chcemy własności środka uderzeń zademonstrować większej liczbie osób, postąpimy nieco inaczej. Pręt od statywu przewiercamy tuż przy końcu, np. wiertłem o średnicy 4 mm. Pręt zawieszamy na cienkiej nitce (rys.3) lub na przetkniętym przez otwór cienkim pręciku (o średnicy 3 mm) wspartym o dwa równoległe pręty statywowe (rys.4). Uderzając np. młotkiem poniżej środka uderzeń uzyskamy poślizg pręcika (osi obrotu) w prawo lub szarpnięcie w tym samym kierunku i zerwanie nici. Przy uderzeniu powyżej środka uderzeń efekty będą odwrotne. Jeśli trafimy dokładnie w środek uderzeń – nitka pozostanie cała (lub ośka nie zmieni położenia), a pręt zacznie spokojnie się wahać.

A co z tym młotkiem? Czyżby miał służyć tylko do uderzenia pręta? Sądzę, że uważny Czytelnik zorientował się dawno, że przytoczone tu obliczenia dla rzeczywistego młotka (a nawet trochę uproszczonego) byłyby bardziej złożone i że prawidłowo wykonany młotek powinien mieć „środek uchwytu” P , środek masy S i środek uderzeń T rozmieszczone tak, jak pokazuje to rysunek 5.

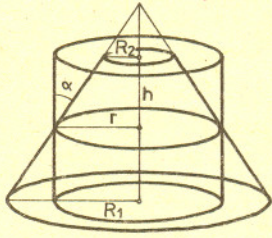
Kołyszający się po uderzeniu pręt to, oczywiście, dobrze nam znane wahadło fizyczne. Nietrudno będzie zauważyć, że znaleziona przez nas odległość środka uderzeń od osi wahadła jest tzw. długością zredukowaną wahadła fizycznego. A więc znaleziony przez nas środek uderzeń pokrywa się ze środkiem wahań! Czy jest to prawda tylko dla jednorodnego pręta, czy również dla dowolnej bryły? Sądzę, że Czytelnik potrafi sam to sprawdzić.

I na koniec jeszcze jedno. W wielu naszych szkolnych zbiorach zadań można spotkać zadanie, w którym należy obliczyć prędkość pocisku grzęznącego w wahadle balistycznym. Czy w przypadku, gdy pocisk nie trafia w środek uderzeń, wolno bez zastrzeżeń stosować prawo zachowania pędu?

Małą Deltę przygotował Juliusz DOMAŃSKI



Rozwiązanie zadania M 580.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość walca $V_w = \pi r^2 h$, a stożka ściętego

$$V_s = \frac{\pi}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) h.$$

Ponieważ $R_1 = r + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha$
i $R_2 = r - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha$, mamy

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{\pi}{3} \left(3r^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) h = \\ &= \pi r^2 h + \frac{\pi}{12} h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Zatem walec ma objętość mniejszą niż stożek.

Powtarzam je za książką: Jan Blinowski i Jarosław Trylski, *Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie*, WSiP, Warszawa 1986.

Obalamy prawa fizyki

Doc. dr Jan GAJ

Kilkakrotnie już spotykaliśmy się na łamach *Delty* próbując z większym lub mniejszym powodzeniem obalać różne prawa fizyki. Dotychczasowe próby miały nam pokazać, że ludzie mają skłonność do uogólniania prawidłowości, które sformułowali badając jakieś zjawiska czy właściwości pewnych obiektów, na zjawiska czy obiekty zbyt odległe od tych, które były podstawą sformułowania prawa. Oczywiście, sprzeciwiać się uogólnieniom w nauce znaczyłyby kwestionować jedną z jej podstawowych metod. Musimy jednak zważać, aby proces uogólniania był stale pod kontrolą, a ostatecznych rozstrzygnięć będziemy zawsze szukać w doświadczeniu. To jest, powiedziałbym, poważny aspekt sprawy.

„Obalanie” praw fizyki, tym razem w wyraźnym cudzysłowie, może nas także uczyć codziennej ostrożności w rozumowaniu: nie dajmy się nabrać. Do tej kategorii należy niniejszy artykuł. Będzie w nim obalane jedno z podstawowych praw fizyki, a mianowicie

Druga Zasada Termodynamiki

Zacznijmy od sformułowania. Istnieje kilka równoważnych sposobów wyrażenia tej zasady. Oto dwa podstawowe warianty, pochodzące od Clausiusa (1) i Kelvina (2):

1. Niemożliwy jest taki proces termodynamiczny, którego jedynym rezultatem byłoby przekazanie ciepła przez ciało chłodniejsze ciału bardziej nagrzanemu.
2. Niemożliwy jest taki proces termodynamiczny, którego jedynym rezultatem byłoby pobranie pewnej ilości ciepła przez układ i wykonanie przez układ pracy.

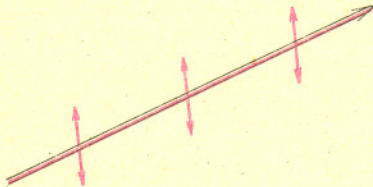
Druga zasada termodynamiki wprowadza rozróżnienie między energią, która może być wykorzystana do wykonania makroskopowej pracy, a pozostałą energią – rozproszoną – makroskopowo nie do wykorzystania.

Przystąpmy teraz do obalania tej zasady. Żeby zrozumieć przytoczony poniżej wywód, przypomnijmy sobie najpierw trochę wiadomości na temat polaryzacji światła. Nie będę ukrywał – do obalenia drugiej zasady termodynamiki posłużę się filtrem optycznym, który zakłóci wymianę energii przez promieniowanie: będzie przepuszczał światło tylko od ciała pierwszego do drugiego, a z powrotem nie. Przed wytłumaczeniem zasady działania filtra rozważmy więc

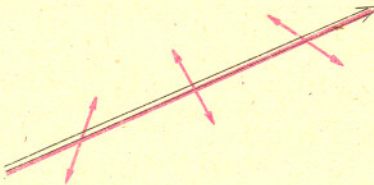
pewne właściwości światła

Światło jest, jak wiemy, falą poprzeczną, to znaczy drgania zachodzą w nim prostopadle do kierunku rozchodzenia się (rys.1). Co drga w świetle? Oczywiście, pola: elektryczne i magnetyczne. Skupimy naszą uwagę na polu elektrycznym światła, ponieważ to ono decyduje w większości doświadczeń o oddziaływaniu światła z materią. Jeżeli spośród wielu możliwych kierunków drgań w wiązce światła obecny jest tylko jeden – mówimy, że światło jest spolaryzowane. W świetle niespolaryzowanym drgania zachodzą we wszystkich możliwych kierunkach (rys.2).

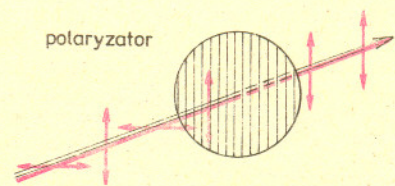
Fotoamatorzy znają *filtry polaryzacyjne* lub *polaryzatory*, które ze wszystkich możliwych drgań wybierają tylko ich składową wzdłuż pewnego kierunku (rys.3).



Rys.1. Światło jest falą poprzeczną.



Rys.2. Różne kierunki drgań w świetle niespolaryzowanym.



Rys.3. Polaryzator wybiera jeden kierunek drgań.

Niektóre substancje mają naturalną właściwość skręcania kierunku polaryzacji przechodzącego przez nie światła – *aktywność optyczną*. Należy do nich roztwór cukru. Jeżeli światło przechodzi przez taką substancję z powrotem, skręcenie się odwraca i kierunek drgań światła staje się taki, jak był przed wejściem do substancji.



Rozwiązanie zadania M 531.

Przypadek $b = 0$ jest oczywisty.

Ponieważ \cos jest funkcją parzystą, możemy dalej zakładać, że $b > 0$.

Ciąg $b \ln n$ zmierza do nieskończoności, ponadto

(*)

$$b \ln(n+1) - b \ln n = b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{b}{n}$$

Dalej, dla każdego naturalnego p można znaleźć takie (naturalne) q i M , że

(**)

$$b \ln(q-1) \leq \left(p - \frac{1}{3}\right) \pi < b \ln q <$$

$$< b \ln(q+M) < \left(p + \frac{1}{3}\right) \pi \leq$$

$$\leq b \ln(q+M+1).$$

Wtedy dla p parzystego i n takiego, że $q \leq n \leq q+M$ mamy $\cos(b \ln n) > \frac{1}{2}$, zatem suma odpowiednich wyrazów szeregu jest większa niż

$$(***) \quad \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{q+M} n^{-a} \geq \sum_{n=q}^{q+M} \frac{1}{n}$$

Ponieważ $\left(p - \frac{1}{3}\right) \pi < b \ln q$, mamy $q \rightarrow \infty$ dla $p \rightarrow \infty$. Z (*) i (**) wynika, że

$$(M+2) \frac{b}{q-1} > \frac{2}{3} \pi,$$

tj. $M+2 > \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{3} \pi (q-1)$, czyli dla dostatecznie dużych q mamy

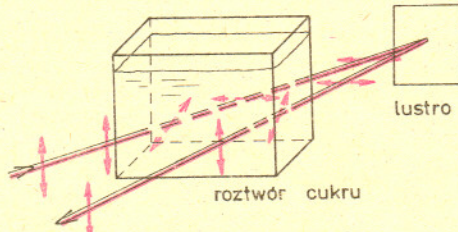
$$M > \frac{1}{2b} q.$$

Ostatecznie, suma we wzorze (***) jest większa niż

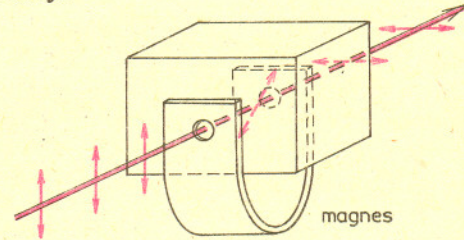
$$\sum_{n=q}^{q+\frac{1}{2b}q} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2b} q \cdot \frac{1}{q + \frac{1}{2b}q} = \frac{1}{2b+1}$$

a to oznacza, że szereg nie może być zbieżny.

Istnieje też inny mechanizm tego zjawiska: substancje, które w zwykłych warunkach nie skręcają płaszczyzny polaryzacji przechodzącego przez nie światła (na przykład woda), robią to pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego (rys.5). Takie skręcenie w polu magnetycznym nosi nazwę efektu Faradaya.



Rys.4. Aktywność optyczna w roztworze cukru.



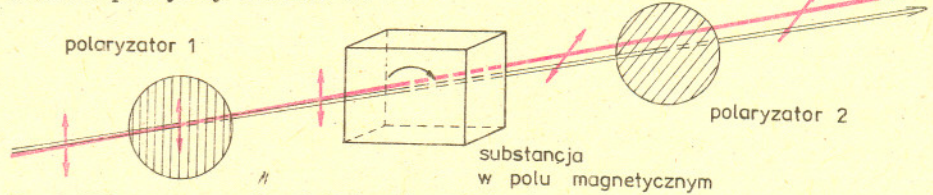
Rys.5. Efekt Faradaya.

Zasadnicza różnica między aktywnością optyczną a efektem Faradaya polega na tym, że w tym ostatnim polaryzacja światła obraca się zawsze w tę samą stronę, niezależnie od kierunku biegu światła. a więc jeśli światło przebiegnie tam i z powrotem przez substancję umieszczoną w polu magnetycznym, skręcenia nie redukują się, lecz się dodają!

Po tym przydługim wstępie mogę Ci już, Czytelniku, zdradzić, jak będzie zbudowany nasz

filtr polaryzacyjny

Składa się on z dwóch polaryzatorów o kierunkach polaryzacji obróconych względem siebie o 45° . Między nimi znajduje się substancja w polu magnetycznym, obracająca kierunek polaryzacji właśnie o 45° .



Rys.6. Filtr przepuszczający światło tylko w jedną stronę.

W ten sposób polaryzacja światła, które przeszło przez pierwszy polaryzator, zostanie tak obrócona, żeby światło przeszło bez przeszkód przez drugi polaryzator. Jeżeli spojrzysz na rysunek 6 i wyobrazisz sobie, że chcesz przepuścić przez filtr światło w przeciwnym kierunku, zauważysz, że nie przejdzie! Rzeczywiście, po przejściu przez drugi polaryzator będzie miało ukośny kierunek drgań, który zostanie obrócony w lewo o 45° , a więc do kierunku poziomego. Takiego światła pierwszy polaryzator nie przepuści!

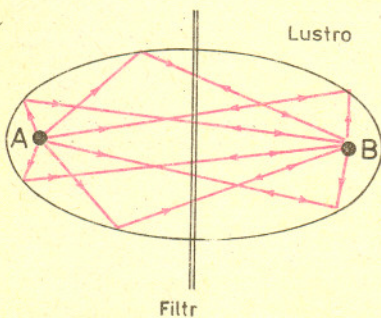
Teraz już z dziecinną łatwością obalimy drugą zasadę termodynamiki konstruując przy okazji

perpetuum mobile drugiego rodzaju

Bierzemy dwa identyczne ciała o równych temperaturach i umieszczamy je w próżni zapewniając kontakt cieplny przez promieniowanie. Aby nie tracić energii, otaczamy je stosownymi lustrami (rys.7).

Między ciałami A i B zostaje wstawiony filtr F. Ponieważ filtr przepuszcza promieniowanie tylko z lewa na prawo, po pewnym czasie wytworzy się różnica temperatur i będzie narastać – a więc, w sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki, ciepło przepłynie od ciała o temperaturze niższej do ciała o temperaturze wyższej. Co więcej, skoro mamy już różnicę temperatur, możemy teraz użyć silnika cieplnego i otrzymać pracę. Otrzymujemy ją z układu, w którym (w chwili początkowej) nie było różnicy temperatur, a więc skonstruowaliśmy perpetuum mobile drugiego rodzaju.

Niemożliwe! – zawołał w tym miejscu. Zasady termodynamiki są zbyt dobrze ugruntowanymi prawami fizycznymi, żeby się dały ot, tak sobie, obalić. W tym rozumowaniu musi być błąd! Zgoda, ale gdzie? Spróbuj znaleźć go sam. Dla autorów najlepszych wypowiedzi mamy książki.



Rys.7. Energia przepływa od ciała A do B, a z powrotem nie!

Regulamin

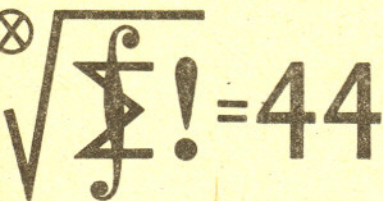
1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniami pod nazwą **Klub 44**.
2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1988 upływa 31 stycznia 1989). W numerze $n + 4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
8. Prace powinny być samodzielne. Jednoznaczne rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym

- lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopiśmie. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysłał zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).
12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.
 13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.
 14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
 15. Trzykrotnie uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
 16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.
 17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.
 18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerne czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).
 19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na coroczne spotkania **Klubu 44**.
 20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

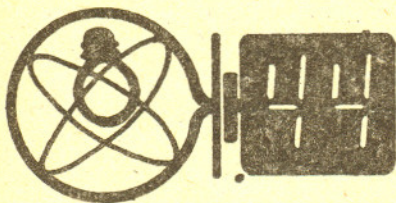
W tegorocznym omówieniu konkursu ligowego pragniemy zająć się określeniem współczynnika trudności (WT). Od dawna nasi Czytelnicy zwracają uwagę na zawarte w tym określeniu nielogiczności. Kilka miesięcy temu poruszył znów tę sprawę w liście pan mgr Henryk Kornacki z Augustowa, sygnalizując dwa zjawiska. Po pierwsze, funkcja $x \mapsto x(4 - 3x)$ nie jest monotoniczna w $(0; 1)$; tak więc niższa suma ocen za jakieś zadanie może – paradoksalnie – dać w efekcie większą sumę punktów. Po drugie, nasz WT rozróżnia trudność jedynie „relatywnie”, w obrębie jednej dwuzadaniowej serii, nie odzwierciedla natomiast adekwatnie relacji między trudnością zadań z różnych serii, skoro zmienia się mianownik N . Nawiasem, gdy liga rozpoczynała swój żywot, w numerze były trzy zadania z matematyki, a nie dwa, różnicowanie było nieco bardziej treściwe. Dodajmy od siebie, że liniowa funkcja $x \mapsto 4 - 3x$ ma jeszcze jedną wadę: skala zagęszcza się w górnej części. Doświadczenie wykazuje, że liczbowo niezbyt znaczna różnica np. między 3,3 a 3,7 odpowiada dużej faktycznej różnicy w trudności, podczas gdy dla zadań łatwych wartości z przedziału $(1; 2)$ przybierane są w sposób dość przypadkowy. Może więc lepsza byłaby jakaś funkcja ściśle wypukła? Odwieczny problem wszystkich konkursów zadanio-owych: jak wyważyć i wycenić trudność, nie ma szans na obiektywne rozwiązanie, skoro samo pojęcie trudności jest subiektywne. Nasz WT także nie dąży do uporania się z tym problemem; raczej chodzi nam o wprowadzenie pewnego elementu ubarwiającego konkurs, który w końcu jest tylko zabawa. Wzór na WT przez siedem lat jakoś funkcjonował, zżyliśmy się z nim i my, i uczestnicy ligi. Jednak ma te wady, o których wspominaliśmy (zaletą zaś jest prostota). Rezygnować z WT nie chcemy; ale może zmienić formułę? Pan Kornacki proponuje wzór $WT = \max(1/2, 4 - 3x^{1/3})$, gdzie $x = S/N$, S ma znaczenie jak dotychczas, a N oznacza średnią wartość dotychczasowego N z ostatnich pięciu miesięcy.

Rozmawialiśmy na ten temat w gronie 18 osób przybyłych na kolejne spotkanie Klubu 44 we wrześniu 1988 w Warszawie (po raz pierwszy z udziałem laureatów ligi fizycznej!). Padła propozycja, by przyjąć stałą wartość N , np. 100 (gwoździ informacji: nigdy dotąd N nie przekroczyło wartości 120). Może nasi Czytelnicy mają jeszcze inne pomysły? Zmieniać, nie zmieniać? A jeśli, to jak? Czekamy na listy.

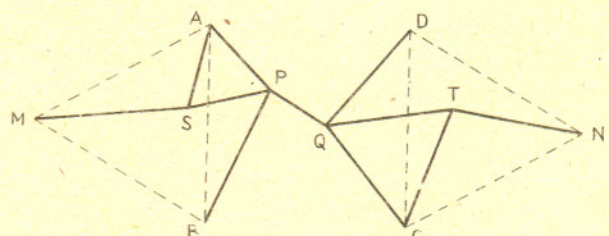
Tymczasem przejdźmy do corocznego omówienia wybranych zadań.



Klub 44



Zadanie 151 [Minimalna sieć łącząca wierzchołki kwadratu] (współczynnik trudności $WT = 2,66$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$). Po redukcji zagadnienia do sieci złożonych z pięciu odcinków, z dwoma węzłami wewnątrz kwadratu, większość autorów (tak jak i my) stosowała metody analityczne. Jedyne A. Szymczak znalazł proste geometryczne dokończenie rozwiązania: $ABCD$ – dany kwadrat, $|AB| = 1$; P, Q – węzły siatki; ABM, CDN, APS, CQT – trójkąty foremne; ABP i AMS – trójkąty przystające $\Rightarrow |BP| = |MS|$; podobnie $|DQ| = |NT|$; stąd $|AP| + |BP| + |PQ| + |CQ| + |DQ| = |MS| + |SP| + |PQ| + |QT| + |TN| \geq |MN| = 1 + \sqrt{3}$.



Zadanie 154 [n prostych równoległych w równych odstępach, przechodzących przez wierzchołki n-kąta foremnego] (WT = 2,52; LPR = 16). Uogólnienie: A. Bonk i M. Mazur pokazali, że tylko dla n = 3, 4, 6 istnieje n takich prostych w odległościach współmiernych.

Zadanie 155 [f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}; sup f = ?] (WT = 2,45; (0;∞))

LPR = 10). Oryginalność wyróżnia się rozwiązanie H. Kasprzaka (który bada funkcję g(t) = f(e^t)), prostotą zaś rozwiązanie G. Zakrzewskiego

dla x ≥ 1 mamy z nierówności Bernoulli'ego

$$2^{-1/x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/x} \leq 1 - \frac{1}{2x}; \text{ stąd,}$$

$$\text{dla } x \geq 2: 2^x = 2(1+1)^{x-1} \geq 2(1+x-1) = 2x \Rightarrow$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2x} + \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = 1;$$

$$\text{dla } 1 \leq x < 2: f'(x) = (\ln 2)x^{-2} 2^{-x} \varphi(x), \text{ gdzie}$$

$$\varphi(x) = 2^{2x-1/x} - x^2 \leq 2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right) - x^2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(1) = 1,$$

$$\text{tak, że } \sup_{(0;\infty)} f = \sup_{(1;\infty)} f = 1.$$

Zadanie 157 [Wielokąt W zawiera koło o promieniu (pole W)/(obwód W)] (WT = 3,83; LPR = 0) było o wiele za trudne. Obszerniejszy komentarz wraz z rozwiązaniem zamieściliśmy w numerze 8/1988.

Zadanie 160 [x_1, x_2 > 0 dane; x_{n+2} = 2(x_n + x_{n+1})^{-1} ⇒ ciąg (x_n) jest zbieżny] (WT = 3,55; LPR = 3). Oto najładniejsze rozwiązanie (H. Kasprzak): Niech a = lim inf x_n, g = lim sup x_n (d, g są dodatnie i skończone, bo leżą między najmniejszą a największą z liczb x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}). Istnieją ciągi liczb naturalnych (k_n), (l_n) takie, że następujące podciągi ciągu (x_n) są zbieżne do granic: x_{k_n-1} → a, x_{k_n} → b, x_{l_n+1} → c, x_{l_n+2} → d, x_{l_n} → e, x_{l_n+1} → f, x_{l_n+2} → g; przy tym a, b, c, e, f ∈ (d;g). Na mocy określenia ciągu (x_n):

$$(b+c)d = 2, \quad (e+f)g = 2, \quad (a+b)c = 2.$$

Pierwsza z tych równości daje 2gd ≥ 2, a druga daje 2dg ≤ 2; stąd dg = 1. Zatem b+c = 2/d = 2g, czyli b = c = g. Wobec tego a+b = 2/c = 2/g = 2d, czyli a = b = d i ostatecznie g = b = d. Poza tym bezbłędne rozwiązania podali: P. Jędrzejewicz, R. Latała, a z dużymi zastrzeżeniami: K. Pióro, G. Zakrzewski.

Zadanie 161 [Za pomocą jednego dwuargumentowego działania wyrazić cztery działania arytmetyczne w R] (WT = 2,89; LPR = 12). Autorzy rozwiązań wykazali dużą inwencję i różnorodność pomysłów. Najbardziej efektywna była chyba konstrukcja, którą zaproponował A. Przeździecki; podajemy ją nieznacznie zmodyfikowaną. Niech f będzie dowolną bijekcją R na przedział (0;1); przyjmijmy

$$a * b = \begin{cases} 2, & \text{gdy } a = b = 0 \\ 3, & a = 0, b = 1 \\ 4, & a = 1, b = 0 \\ 5, & a = b = 1 \\ f^{-1}(a-2) + b, & a \in (2;3), b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-3) - b, & a \in (3;4), b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-4) \cdot b, & a \in (4;5), b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-5) : b, & a \in (5;6), b \neq 0 \\ a + f(b), & a \in \{2,3,4,5\}, b \text{ dowolne} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} ((0 * 0) * a) * b &= a + b & ((1 * 0) * a) * b &= ab \\ ((0 * 1) * a) * b &= a - b & ((1 * 1) * a) * b &= a : b \end{aligned}$$

Zadanie 164 [α_1 = 44, a_{n+1} = 44^{a_n} ⇒ wszystkie a_n z n > 44 mają jednakową końcówkę 44-cyfrową] (WT = 3,25; LPR = 8). Eleganckie rozwiązanie oparte na twierdzeniu Eulera podali A. Przeździecki, P. Kumor, R. Latała: teza zadania łatwo wynika z relacji u_n ≡ a_{n+1} (mod 5^{n-1}), której dowodzi się indukcyjnie:

$$z \text{ założenia indukcyjnego } a_{n+1} - a_n = 5^{n-1} b_n = 4 \cdot 5^{n-1} c_n,$$

$$a \text{ z twierdzenia Eulera } 44^{\varphi(5^n)} = 44^{4 \cdot 5^{n-1}} \equiv 1 \pmod{5^n}, \text{ skąd}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} \cdot 44^{a_{n+1}-a_n} = a_{n+1} \cdot 44^{4 \cdot 5^{n-1} c_n} \equiv a_{n+1} \pmod{5^n}.$$

Inne dobre rozwiązania: A. Bonk, Z. Surduka, A. Szymczak, G. Zakrzewski, A. Pawłowski.

Zadanie 165 [lim_{x→∞} (f + f') = 0 ⇒ lim_{x→∞} f = 0] (WT = 2,88; LPR = 6).

Dobre rozwiązania (nie różniące się istotnie od naszych): A. Bonk, H. Kasprzak, R. Latała, A. Przeździecki, K. Serbin oraz (z zastrzeżeniami) K. Zawisławski. H. Kasprzak dowodzi wzmocnionej wersji twierdzenia: Niech P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, a_k ∈ C (zespolone); dalej niech

$$F = \{f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{C}, n\text{-krotnie różniczkowalna}\};$$

dla f ∈ F przyjmijmy P D f = a_0 f + a_1 f' + ... + a_n f^{(n)}. Teza:

$$\bigwedge_{f \in F} (\lim_{x \rightarrow \infty} P D f = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f = 0) \Leftrightarrow \bigwedge_{z \in \mathbb{C}} (P(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < 0)$$

Zadania 168, 170, 171. H. Kasprzak wskazuje naturalne uogólnienia wielowymiarowe.

Zadanie 172 [Zbieżność i granica ciągu (x_n): x_1, x_{n+1} = x_n^{1-1/n} - (ne)^{-1}] (WT = 3,26; LPR = 2). Piękne rozwiązanie znalazł H. Kasprzak: Niech a = lim inf x_n, b = lim sup x_n. Wszystkie x_n ∈ (1/e; 1) (prosta indukcja), zatem 1/e ≤ a ≤ b ≤ 1. Rozpatrujemy ciąg t_n = x_n^{n-1} x_{n+1}^{-n}. Zachodzi nierówność lim inf t_n ≤ lim inf (t_1 ... t_n)^{1/n} = lim inf x_{n+1}^{-1} = 1/b. Na mocy określenia ciągu (x_n),

$$t_n = (x_n^{1-1/n} x_{n+1}^{-1})^n = ((x_{n+1} + (ne)^{-1}) x_{n+1}^{-1})^n = (1 + u_n)^n = v_n^{1/e x_{n+1}},$$

gdzie u_n = (ne x_{n+1})^{-1} → 0, v_n = (1 + u_n)^{1/u_n} → e. Stąd lim inf t_n = e^{1/e b}. Otrzymujemy nierówność 1/b ≥ e^{1/e b}, której jedynym rozwiązaniem jest liczba b = 1/e. Zatem 1/e = a = b = lim x_n.

Drugie bezbłędne rozwiązanie, którego autorem jest G. Zakrzewski, wygląda po niewielkiej adaptacji następująco: Jak wyżej. x_n > 1/e. Dowodzimy indukcyjnie monotoniczności ciągu (x_n): x_1 > x_2; założmy, że x_{n-1} > x_n. W znanej nierówności

$$\left(1 + \frac{a}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad (a > 0),$$

przyjmijmy a = (e x_n)^{-1} i pomnóżmy stronami przez x_n^n; otrzymamy

$$L = x_n (x_n + ((n-1)e)^{-1})^{n-1} < (x_n + (ne)^{-1})^n = P.$$

Przypuśćmy, że x_n ≤ x_{n+1}. Wówczas, zgodnie z określeniem ciągu (x_n), P ≤ (x_{n+1} + (ne)^{-1})^n = x_{n+1}^n, natomiast L = x_n x_{n-1}^{-2} > x_n x_{n-1}^{-2} = x_n^{n-1} - sprzeczność. Zatem x_n > x_{n+1}. Dowodzi to, że ciąg (x_n) jest malejący, więc zbieżny. Obliczenie granicy przebiega jak w naszym rozwiązaniu. Zasadniczo poprawny dowód monotoniczności (⇒ zbieżności) ciągu (x_n) podał także K. Zawisławski.

Zadanie 47 [Temperatura włókna żarówki przy podwyższonym napięciu] omawiałem przed rokiem i wtedy przyznałem się do błędów nie popelnionych, albowiem rozwiązanie w *Delcie* 8/1987 jest całkowicie poprawne.

Zadanie 51 [Odbicie kuli od tarczy] (WT = 2,08; LPR = 11). Rozwiązanie podane w *Delcie* zakładało (milsząco), że masa kulki jest zaniedbywalna w porównaniu z masą tarczy. Skończony stosunek mas kulki i tarczy m/M przyjęli w swoich rozwiązaniach J. Lipkowski, P. Bała, A. Bonk, Ds. Lipniacki, P. Mocny, R. Musiał, W. Kacprzak. Wśród nich jedynie P. Mocny dokonał przejścia granicznego z m/M → 0.

Zadanie 52 [Kondensator o nierównoważonym ładunku] (WT = 3,44; LPR = 3). Zadanie to - wbrew przewidywaniom - okazało się bardzo trudne. Dobrze rozwiązali tylko P. Bała, W. Klimala i P. Wach.

Zadanie 54 [Mikrodruk odczytywany za pomocą mikroskopu elektronowego] (WT = 3,26; LPR = 4). Satisfakcjonujące

rozwiązania nadesłali P. Bała, Ds. Lipniacki, R. Musiał i L. Szalast.

Zadanie 55 [Identyfikacja nietypowego opornika spośród piętnastu] (WT = 1,94; LPR = 21). Wystąpiła duża różnorodność rozwiązań. Metodę z najmniejszą liczbą (czterech) pomiarów podali R. Musiał, A. Rawlik i P. Stanek. Dalsze dziesięć osób podało metodę wykorzystującą pięć pomiarów. Reszta poprawnych rozwiązań zawierała sześć pomiarów.

Zadanie 58 [Sprężanie powietrza w cylindrze] (WT = 3,16; LPR = 1). Jedyne dobre rozwiązanie Ds. Lipniackiego. Cztery osób potraktowało rozważaną przemianę gazową jako odwracalną, co było, oczywiście, niesłuszne. Ważniejsze jednak jest to, że nikt nie wymienił jako istotnego w omawianym procesie zjawiska dyssypacji energii związanej z lepkością gazu (w treści zadania celowo podano powietrze, a nie „gaz doskonały”). To dzięki temu właśnie zjawisku występuje zależność przyrostu temperatury powietrza w cylindrze od masy tłoka. Na marginesie apel do uczestników ligi: zwracajcie więcej uwagi na fizykę aniżeli na rachunki!

Zadanie 60 [Pole magnetyczne w solenoidzie] ($WT = 3,41$; $LPR = 6$). Poprawne rozwiązanie Ds. Lipniackiego, P. Perkowski, P. Wacha, P. Koczyńskiego, B. Mikielawicza i P. Bały. Nikt z uczestników nie przeanalizował wpływu obecności rdzenia na wartość natężenia pola magnetycznego w jego wnętrzu dla przypadku solenoidu (oraz rdzenia) o skończonej długości. Tymczasem wynik takiej analizy jest bardzo ciekawy: w solenoidzie z rdzeniem o przenikalności magnetycznej $\mu > \mu_0$ natężenie pola jest niższe niż w analogicznym solenoidzie bez rdzenia. Powód – większe w przypadku solenoidu z rdzeniem natężenie pola po jego zewnętrznej stronie.

Zadanie 61 [Betatron] ($WT = 1,22$; $LPR = 18$). Problem okazał się znany wielu uczestnikom ligi z literatury, stąd najniższa wartość WT .

Zadanie 62 [Gaz w szybie naftowym] ($WT = 2,97$; $LPR = 6$). B. Mikielawicz i A. Sikorski uwzględnili ilościowo ściśliwość ropy naftowej. Okazuje się, że – o ile ilość gazu nie jest zbyt wielka – ściśliwość w dużym stopniu zmniejsza rozpatrywany efekt wzrostu ciśnienia.

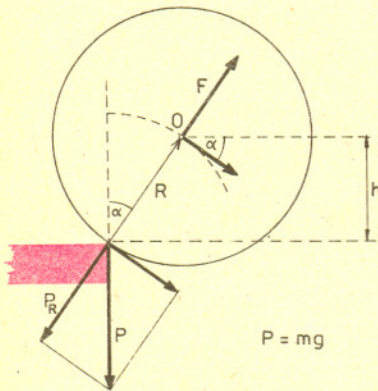
Zadanie 65 [Przetaczanie walca przez walec] ($WT =$

$= 3,16$; $LPR = 4$). Dobrze rozwiązały jedynie R. Musiał, Ds. Lipniacki, A. Sikorski i A. Kondracki.

Zadanie 66 [Szacowanie promienia planety utrzymującej atmosferę] ($WT = 1,75$; $LPR = 13$). P. Bała, Ds. Lipniacki, M. Kwiecień, i K. Lisowski zwrócili uwagę na to, że spełnienie (przyjętego w rozwiązaniu *Delty*) warunku, aby średnia kwadratowa prędkość termiczna cząstek gazu atmosfery była mniejsza od drugiej prędkości kosmicznej, nie zapewnia utrzymania się atmosfery na planecie przez dłuższy czas. Trwałość atmosfery w kosmicznej skali czasu wymaga, aby stosunek prędkości był mniejszy od 1/5.

Zadanie 67 [Pole elektryczne w złączu $p-n$] ($WT = 2,57$; $LPR = 11$). P. Bała i P. Koczyński skorzystali z równania Poissona, A. Gluza, J. Lipkowski i A. Sikorski zastosowali prawo Gaussa; powodzenie tej ostatniej metody zależało od należytego określenia warunków brzegowych – wartości natężenia pola poza obszarem złącza.

Zadanie 69 [Okulary z lusterkim] ($WT = 2,66$; $LPR = 6$). Zdumiewająco mało dobrych rozwiązań tak przecież prostego problemu. Nadesłali je Ds. Lipniacki, A. Sikorski, P. Bała, W. Klimala, B. Mikielawicz i A. Surma.



Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 69 ($WT=2,66$) i 70 ($WT=1,74$)

Piotr Bała	- Toruń	2-45,15pkt
Zbigniew Gallas	- Kraków	32,46pkt
Roman Musiał	- Katowice	31,60pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	29,70pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	29,70pkt
Adam Sikorski	- Lublin	29,36pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	28,35pkt
Aleksander Surma	- Myszków	1-24,81pkt
Janusz Osada	- Legnica	24,07pkt
Paweł Rogoż	- Legnica	23,63pkt
Dzierzysław Lipniacki	- Lublin	2-21,17pkt
Andrzej Bilmes	- Gorlice	20,82pkt
Robert Repucha	- Goidap	1-20,68pkt
Wojciech Klimala	- Bielsko-Biała	19,44pkt
Maciej Stasiak	- Cieluchów	18,73pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	18,21pkt
Tomasz Rusin	- Warszawa	17,88pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	1-16,94pkt
Mirosław Semla	- Opole	15,20pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	1-14,83pkt
Marek Karaś	- Tarnów	14,33pkt
Mariusz Bogacz	- Pińczów	14,20pkt
Anna Gluza	- Toruń	1-14,15pkt
Tomasz Więtecha	- Tarnów	13,53pkt
Przemysław Gworys	- Częstochowa	13,26pkt
Paweł Stanek	- Tarnów	13,18pkt
Piotr Wach	- Katowice	1-12,33pkt
Wojciech Peisert	- Wrocław	12,25pkt
Leszek Szalast	- Radzyń Podl.	1- 6,58 pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	1- 6,22 pkt
Bogusław Mikielawicz	- Brodnica	1- 4,10 pkt

Pan Bała został pierwszym weteranem Klubu 44F – serdecznie gratulujemy! Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 12 punktów, a także członków Klubu 44F, mających obecnie na koncie mniej niż 10 punktów, ale wykonujących już kolejną rundę. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty. Jak widać, Klub 44F liczy 11 członków.

Zadania z fizyki nr 81, 82

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

81. Mając naczynie z kwasem siarkowym nieco rozcieńczonym i drugie z wodą destylowaną, chcemy sporządzić w trzecim naczyniu roztwór kwasu o znanym stężeniu. Jedyne przyrządy pomiarowe, jakim dysponujemy, to zegarek ze stoperem. Ponadto mamy jeszcze długą, wąską probówkę obciążoną u dołu, która w obu cieczach pływa w pozycji pionowej.

W jaki sposób możemy wyznaczyć stężenie sporządzonego roztworu? Wyprowadzić odpowiednie wzory. Przyjąć znaną gęstość czystego kwasu siarkowego oraz wody.

82. Równoległa wiązka światła pada na całą płaską powierzchnię szklanego półcyindra pod kątem 45° , w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi. Z jakiej części bocznej powierzchni półcyindra wychodzi światło, jeśli współczynnik załamania światła wynosi n ?

Zadanie 81 pochodzi od pana J. Lipkowskiego

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1988

Przypominamy treść zadań:

73. Na krawędzi stołu o wysokości H spoczywa kulka o promieniu R ($R \ll H$). Kulka zaczyna się zsuwać ze stołu bez tarcia. W jakiej odległości od stołu upadnie ona na podłogę?

74. Patrząc na rząd lamp na ulicy odnosimy wrażenie, że wszystkie one są jednakowo jasne, chociaż znajdują się w różnej odległości od nas. Dlaczego tak jest i dlaczego reguła ta nie stosuje się do gwiazd o tej samej jasności powierzchniowej, położonych w różnych odległościach od Ziemi?

73. Skoro kulka zsuwa się bez tarcia, jej prędkość obrotowa pozostaje stała, czyli zerowa.

Tak długo, jak kulka nie traci styczności ze stołem, jej środek masy O (rys.) porusza się po okręgu o promieniu R . Na kulkę działa więc siła odśrodkowa $F = mv^2/r$ (m – masa kulki, v – prędkość kulki). W chwili, gdy siła ta przekroczy wartość składowej siły ciężkości kulki działającej wzdłuż promienia na krawędź stołu $P_R = mg \sin \alpha = mgh/R$

(g – przyspieszenie ziemskie, α i h oznaczone na rysunku), nastąpi oderwanie się kulki od stołu. Energia kinetyczna kulki powstaje kosztem jej energii potencjalnej. Stąd mamy $mv^2/2 = mg(R-h)$, $F = 2mg(R-h)/R$. Przyrównując F do P_R uzyskujemy wartość h , przy której nastąpi oderwanie się kulki od stołu, $h_0 = 2R/3$ oraz prędkość kulki w tym momencie $v_0 = 2gR/3$ i odpowiedni kąt $\alpha_0 = \arcsin(2/3)$. Wobec spełnienia warunku $R \ll H$ składowa pionowa prędkości początkowej nie odgrywa znaczącej roli i zasięg poziomy kulki wynosi $Z = (v_0 \cos \alpha) t = (\sqrt{5}/3)v_0 t$, gdzie t jest czasem swobodnego spadku z wysokości H :

$$t = \sqrt{2H/g}. \text{ Ostatecznie więc } Z = 2/3\sqrt{5/3}\sqrt{RH}.$$

74. Przyjmujemy, że lampy są jednakowe. Ilość światła lampy oddalonej o l od obserwatora, padająca na źrenicę oka jest proporcjonalna do l^{-2} . Powierzchnia obrazu lampy na siatkówce oka jest proporcjonalna do l^{-2} . W konsekwencji jasność obrazu lampy na siatkówce oka nie zależy od l . Rozumowanie to jest słuszne przy zaniedbaniu pochłaniania bądź rozpraszania światła przez atmosferę (np. podczas mgły sytuacja jest zupełnie inna) oraz przy założeniu, że rozmiary obrazu lampy na siatkówce spełniają znaną z optyki geometrycznej zależność między rozmiarami obrazu utworzonego przez soczewkę, odległościami obrazu i przedmiotu od soczewki a rozmiarami przedmiotu.

W przypadku gwiazd (poza – oczywiście – Słońcem) zależność ta nie jest spełniona: rozmiary obrazu gwiazdy na siatkówce są określone przez dyfrakcję światła na źrenicy oka, nie zależą natomiast od rozmiarów gwiazdy (bezdyfrakcyjny obraz gwiazdy byłby niezmiernie mały).

W związku z tym odbierana wzrokiem (ale także obserwowana w największych teleskopach) jasność gwiazdy jest miarą całkowitej ilości docierającego od tej gwiazdy światła, a nie jej jasności powierzchniowej.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

183. Czy istnieje sześciokąt wypukły, którego pole S oraz średnica d (czyli największa z odległości między wierzchołkami) spełniają zależność $3S > 2d^2$?

184. Liczby dodatnie x_1, \dots, x_n spełniają warunki $x_1 + \dots + x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 44$. Dowiedź, że $x_1^{44} + \dots + x_n^{44} \geq 44$.

Zadanie 184 zaproponował pan Jarosław Wróblewski z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1988

Przypominamy treść zadań:

175. W trójkącie ABC : $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40^\circ$. Na półprostej AB znajdujemy punkt D taki, że $|AD| = |BC|$. Wyznaczycy kąty trójkąta ADC .

176. Udowodnić nierówność

$$\left(x^2 + x + \frac{n}{2}\right)^n > \frac{1}{2}(x^{2n} + (x+1)^{2n})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) i dla $x \in \mathbb{R}$.

175. Oznaczmy liczby $\cos 10^\circ$ i $\sin 10^\circ$ odpowiednio przez c i s . Zachodzą równości:

$$\sin 20^\circ = 2cs, \quad \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = 3s - 4s^3,$$

$$\cos 20^\circ = 1 - 2s^2 = \frac{1}{2s}(3s - 4s^3 - s) = \frac{1}{2s}\left(\frac{1}{2} - s\right),$$

$$\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = c(1 - 2s)$$

$$\cos 40^\circ = 1 - 2 \sin^2 20^\circ = 1 - 8s^2(1 - s^2) = 1 - 2s(3s - 4s^3 + s) =$$

$$= 1 - 2s\left(\frac{1}{2} + s\right) = (1 - 2s)(1 + s),$$

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{c}{1 + s}.$$

Przyjmijmy dalej oznaczenia: $|\angle BCD| = \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = t$, $|AB| = |AC| = a$, $|BC| = |AD| = b$. Stosując wzór sinusów do trójkątów ABC oraz ACD otrzymujemy związki

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 - 2s \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin(40^\circ - \varphi)}{\sin(40^\circ + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} \varphi} = \frac{c - (1 + s)t}{c + (1 + s)t}.$$

Przez przyrównanie prawych stron dochodzimy do równania

$$(1 - 2s)(c + (1 + s)t) = c - (1 + s)t,$$

z którego obliczamy:

$$t = \frac{cs}{(1 - s)(1 + s)} = \frac{s}{c} = \operatorname{tg} 10^\circ.$$

To znaczy, że $\varphi = 10^\circ$. Zatem kąty trójkąta ADC mają miary $100^\circ, 30^\circ, 50^\circ$.

176. Przekształcamy lewą i prawą stronę podanej nierówności (L i P), oznaczając $x + \frac{1}{2} = y$:

$$L = \left(y^2 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{2(n-k)} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)^k,$$

$$P = \frac{1}{2} \left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^{2n} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} y^{2n-2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} L - P &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)^k - \binom{2n}{2k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) y^{2(n-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^n 4^{-k} \binom{2n}{2k} (a(n, k) - 1) y^{2(n-k)} \end{aligned}$$

gdzie

$$a(n, k) = \binom{2n}{2k}^{-1} \binom{n}{k} (2n - 1)^k.$$

Nierówność $L > P$ będzie udowodniona, jeśli wykazemy, że liczby $a(n, 0), \dots, a(n, n)$ są ≥ 1 , przy czym $a(n, n) > 1$. Ponieważ

$$\frac{a(n, k+1)}{a(n, k)} = \frac{(2n - 2k - 2)! (2k + 2)! (n - k)! k! (2n - 1)}{(2n - 2k)! (2k)! (n - k - 1)! (k + 1)!} = 1 + \frac{4kn}{2n - 2k - 1},$$

zatem

$$1 = a(n, 0) = a(n, 1) < a(n, 2) < \dots < a(n, n)$$

i dowód jest zakończony.

Lista uczestników ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 171 (WT=1,05) i 172 (WT=3,26)

Krzysztof Jedziniak	- Katowice	1-43,60
Marlan Roman	- Błk	1-43,09
Andrzej Sudol	- Nowy Sącz	42,56
Adam Ruszel	- Krosno	42,55
Edward Orzechowski	- Warszawa	2-41,15
Kazimierz Serbin	- Sanok	2-40,12
Grzegorz Kuf	- Kraków	39,93
Adam Prześniński	- Warszawa	38,50
Marek Galecki	- Milanówek	5-36,70
Dzierżysław		
Lipniacki	- Lublin	36,66
Zygmunt Bartkowski	- Warszawa	36,49
Grzegorz Zakrzewski	- Trzcianka	1-36,07
Andrzej Bonk	- Chełmża	2-35,64
Zbigniew Surduka	- Czechowice Dz.	35,54
Wojciech Krzyżański	- Żywiec	34,45
Jerzy Małopolski	- Kraków	1-34,05
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	1-33,68
Jerzy Tyszkiewicz	- Warszawa	33,28
Paweł Kubit	- Krosno	33,11
Tomasz Rawlik	- Gliwice	3-33,03
Dariusz Rybacki	- Kraśnik	32,80
Mariusz Bopiusiewicz	- Legnica	32,15
Rafał Łatala	- Warszawa	31,96
Piotr Figurny	- Lubartów	1-31,39
Krzysztof Jakubczak	- Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	- Warszawa	29,81
Andrzej		
Krzysztofowicz	- Gdańsk	29,66
Władysław Wasiak	- Toruń	28,92
Józef Siwy	- Łaziska Grn.	1-28,64
Adam Czornik	- Bytom	28,38
Jarosław Kaczyński	- Starogard Gd.	28,31
Krzysztof		
Zawislowski	- Warszawa	1-28,17
Stanisław Dorosz	- Kraków	28,06
Piotr Kumor	- Olsztyn	1-28,05
Zbigniew Galias	- Kraków	1-27,90
Maciej Głuszek	- Wrocław	27,85
Janusz Prajs	- Opole	27,57
Mirosław Matłaga	- Skoczów	27,03
Tomasz Komorowski	- Świdnik	2-26,82
Jerzy Ciało	- Wrocław	26,56
Radosław Zapert	- Kielce	26,51
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	2-25,72
Andrzej Szymczak	- Gdańsk	25,58
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	6-25,09
Krzysztof Zygan	- Lublin	24,98
Adam Stadler	- Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	- Sopot	24,93
Tomasz Masłowski	- Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	- Warszawa	1-24,31
Adam Wyrwa	- Nowy Wiśnicz	1-23,43
Lech Bartłomiejczyk	- Gliwice	22,50
Jerzy Mikuta	- Zielona Góra	2-21,59
Anna Gluza	- Toruń	1-20,97
Malgorzata		
Czeraniakowska	- Gdańsk	1-20,54
Krzyszyna Witek	- Ostrów Maz.	1-20,38

Legenda (przykładowo): stan konta 6-25,09 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 25,09 p.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 20 punktów. Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów):
 Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), J. Ciach (2), M. Piszer (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), P. Jędrzejewicz (2), T. Józefczyk (2), P. Kamiński (5), H. Kasprzak (1), Z. Kosa (2), D. Kurpiel (2), M. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), M. Mazur (3), R. Mazurek (1), H. Mikolajczak (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), A. Pawłowski (4), K. Pióro (1), M. Prauza (2), S. Solecki (2), D. Sowizdrzał (3), T. Szymczyk (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), P. Wach (1), Z. Zaus (1).

DRÓZGI BIAŁE

Chemicy z Politechniki Federalnej w Lozannie odkryli katalizator, który (podobnie jak rośliny) może przetwarzać dwutlenek węgla i wodę w związki organiczne, np. metan.

Edmond Halley kojarzy się wszystkim z kometą noszącą jego nazwisko, której ponowne pojawienie się w 1986 r. spowodowało lawinę publikacji na jej temat. Warto może zwrócić przy tej okazji uwagę na inne osiągnięcia naukowe Halleya. Jego badania nad polem magnetycznym Ziemi sprawiły, że biografowie nazywają go ojcem nowoczesnej geofizyki. Przy okazji tych badań wynalazł mapy konturowe (z różnymi izoliniami). Zauważył związek między zorzami polarnymi i ziemskim polem magnetycznym. Halley nakłonił również Newtona do napisania i pokrył część kosztów opublikowania jego epokowego dzieła *Principia*.

Król Hiszpanii Filip II, za którego panowania poniosła klęskę hiszpańska „Niezwyciężona Armada”, z zapalem popierał studiowanie matematyki – sam kiepsko rachował. W 1582 r. założył Akademię Matematyczną i na jej użytek powiększył pałac madrycki. W 1588 r. za poparciem króla Korteozem Kastylii zgłoszono projekt powołania podobnej akademii w każdym dużym mieście. Przedstawiciele miast, przerażeni kosztami, odrzucili projekt – a szkoda.

W widmach licznych obiektów w Drodze Mlecznej obserwuje się m.in. linie emisyjne o długościach fal 3,3, 3,4, 6,2, 7,7, 8,6, 11,3 μm . Kilka lat temu stwierdzono, że zestaw ten jest charakterystyczny dla węglowodorów pierścieniowych. Z obserwacji wynika też, że na każde 5 mln atomów międzygwiazdowego wodoru przypada jedna cząsteczka zawierająca 20 do 50 atomów węgla połączonych w pierścienie. Ich pochodzenie przypisuje się bogatym w węgiel mgławicom planetarnym, chociaż skądinąd wiadomo, że związki te występują w spalinach samochodowych.

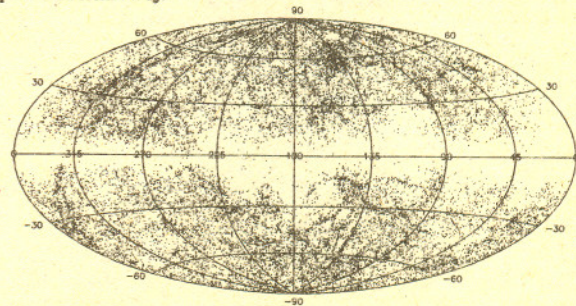
Naukowcy z Tokio stwierdzili, że wysokotemperaturowe nadprzewodniki z rodziny Y-Ba-Cu-O zachowują stan nadprzewodnictwa nawet przy bardzo silnych polach magnetycznych $B = 101$ tesli w temperaturze 6 K. Tak silne pole magnetyczne było wytworzone przez prąd 2,5 MA w pojedynczej pętli drutu, która natychmiast eksplodowała na skutek powstających sił.

Policja w Anglii opracowała metodę fotografowania odcisków palców zostawionych na tzw. trudnych powierzchniach, np. na torebkach plastikowych, skórze itp. Metoda polega na dwukrotnym, próżniowym napyłaniu powierzchni cienkimi warstwami metali. Najpierw napyła się warstwę złota, która jest absorbowana przez resztki potu pozostawionego na odcisku, a następnie warstwę cynku, która osadza się na złocie. Tak przygotowany odcisk daje się sfotografować.

Po zbudowaniu lasera rozpoczęły się intensywne badania nad wytwarzaniem możliwie krótkich impulsów światła. Najpierw opanowano wytwarzanie i pomiary impulsów o czasach trwania kilku nanosekund, potem pikosekund, a teraz celem stały się impulsy femtosekundowe. Jak wynika z pracy opublikowanej w *Optics Letters* w 1987 r., osiągnięto czas trwania impulsu $\tau = 6$ fs. Ten najkrótszy impuls wytworzono dla światła o długościach fal leżących w obszarze wokół wartości 620 nm. Długość przestrzenna impulsu na podstawie wzoru $l = c\tau$ (c – prędkość światła) wynosi $l = 1800$ nm, a więc jest prawie trzykrotnie większa niż średnia długość fali. W kilku laboratoriach trwa wyścig o pobicie ostatniego rekordu i otrzymanie impulsu o jeszcze krótszym czasie trwania.

Spośród trzech rodzajów geometrii używanych zazwyczaj przez astronomów do opisu globalnych własności Wszechświata (tj. geometrii euklidesowej, Bolyai-Lobaczewskiego i eliptycznej) tylko geometria euklidesowa dopuszcza istnienie podobieństw (czyli przekształceń niewykrzywających prostych i zachowujących kąty) nie będących izometriami. W obu pozostałych każde podobieństwo jest izometrią. Wynika stąd możliwość określenia w nich jednostki długości bez posługiwania się jakimkolwiek wzorcem fizycznym.

Rysunek przedstawia rozkład galaktyk na niebie w projekcji równopowierzchniowej.



Każda z 34 729 kropek odpowiada jednej galaktyce. Przy wykonywaniu tego rysunku zastosowano proste kryterium odróżniania galaktyk od gwiazd: galaktyki są na niebie obiektami rozciągłymi, podczas gdy gwiazdy (oprócz Słońca) świecą w przybliżeniu jak źródła punktowe. Rysunek zawiera galaktyki o rozmiarach kątowych większych niż 40 sekund łuku. W chwili obecnej jest to najliczniejszy zbiór galaktyk obejmujący całe niebo i skonstruowany w oparciu o dobrze określone kryterium.

Na około 1/3 nieba – w pasie leżącym w płaszczyźnie naszej Galaktyki – w ogóle nie widać galaktyk. Występują tam duże ilości pyłu, który po prostu zasłania znajdujące się za nim galaktyki. Pozostały obszar nieba, gdzie galaktyki już obserwujemy, wypełniony jest nimi w sposób dość nierównomierny. Widać wyraźnie, że galaktyki skupiają się na niebie w gromady o różnych rozmiarach i kształtach. Jest to dowód na ich rzeczywiste, przestrzenne grupowanie się.

Protokół



Andrzej Daniluk

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki obradując w Poznaniu dnia 15 IX 1988 r. w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz – przewodniczący oraz dr Jerzy Bednarczuk, dr Antoni Dawidowicz, doc. dr Józef Janikowski, dr hab. Marek Kordos, mgr Andrzej Mąkowski, dr Wacław Wierzbicki, dr Agnieszka Wojciechowska, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy oraz przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. Andrzejowi Danilukowi z V LO w Krakowie za pracę *O pewnych przekształceniach płaszczyzny* złoty medal i nagrodę w wysokości 15 000 zł.
2. Adamowi Czornikowi z I LO w Bytomiu za pracę *Twierdzenie Steinera i Mascheroniego* srebrny medal i nagrodę w wysokości 10 000 zł.
3. Piotrowi Malickiemu z Zespołu Szkół Mechanicznych nr 1 w Bydgoszczy, Tomaszowi Gródkowi z I LO w Nowym Sączu, Piotrowi Kicińskiemu z I LO w Nowym Sączu oraz Tomaszowi Wietesze z Zespołu Szkół Technicznych w Tarnowie dyplomy uczestnictwa w finale.
4. Opiekunom prac: Zdzisławie Dybiec, Alicji Stankiewicz, Zofii Rydzewskiej, Alicji Derkowskiej oraz Józefowi Bujakowi nagrody pieniężne w wysokości 7000 zł każda.



Andrzej Daniluk w karykaturze prof. Leona Jeśmanowicza.



Adam Czornik



Od lewej: Tomasz Gródek, Piotr Kiciński, Tomasz Wietecha, Piotr Malicki, Adam Czornik, Andrzej Daniluk.

Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. W tym roku finał odbędzie się w Krakowie. Zapraszamy do udziału.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt*y jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela – opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom – opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*y.