



SPIS TREŚCI

NUMERU 9(177)

Początki fizyki komputerowej <i>dr hab. Ryszard Kutner</i>	str. 1
Przyspieszenie (sumowania)	str. 4
Zadania	str. 5
Gwiazdy zmienne zaćmieniowe <i>mgr Joanna Udalska</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Kilka spojrzeń na sferę trójwymiarową <i>dr Krzysztof Ciesielski</i> <i>dr Zdzisław Pogoda</i>	str. 10
Klub 44	str. 13
Kącik prac uczniowskich	str. 15
Drobiazgi	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astrofizyczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc.dr Jan A. Gaj
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht
 doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski
 doc.dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Małowski
 dr Zbigniew Plochocki
 dr Jan Rempala
 prof.dr Konrad Rudnicki
 prof.dr Grzegorz Sitarski
 prof.dr Józef I. Smak
 prof.dr Kazimierz Stępień
 prof.dr Mieczysław Subotowicz
 doc.dr Andrzej Szymacha
 doc.dr Aniela Wolska
 prof.dr Andrzej Woszczyk
 prof.dr Wojciech Żakowski –
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos – red. nac.
 dr Tomasz Kwast
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz – ilustr.
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa
 tel. centr. 28-52-31

Biurowisko Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
 ul. Poznańska 38
 00-689 Warszawa
 tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.;
 2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Prasowych
 Zakładach Graficznych
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
 Nr zam. 2239/88, U-58
 Skład systemem TeX
 wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,- półrocznej zł 420,- rocznej zł 840,-

- dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych – indywidualnych prenumeratorów:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnym,
 — do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

W następnym numerze:
Katedry gotyckie



Rozwiązanie zadania M 517.

Zauważmy, że jeśli $z \leq 1/2$, to

$$f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) \geq f(x, y, z).$$

Istotnie, nierówność

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)z + \left(\frac{x+y}{2}\right)z - 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 z \geq xy + xz + yz - 2xyz$$

jest równoważna z

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) \geq xy(1-2z),$$

a przy założeniu, że $1-2z \geq 0$, wystarczy, by

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy,$$

co jest już oczywiste.

Ustalmy teraz liczby x, y, z . Jedną z nich (ze względu na symetrię można przyjąć, że jest to z) nie przekracza $1/2$. Mamy więc

$$f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) \geq f(x, y, z).$$

Teraz również $\frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2}$. Możemy więc powtórzyć powyższą operację, biorąc tym razem najmniejszy i największy argument funkcji f . W rezultacie otrzymamy trzy ciągi: $(a_n), (b_n), (c_n)$, takie, że $f(a_n, b_n, c_n) \geq f(x, y, z)$, ponadto

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}$,
 bo (oznaczając $m_n = \min(a_n, b_n, c_n)$, $M_n = \max(a_n, b_n, c_n)$) mamy z jednej strony stałą $a_n + b_n + c_n = 1$, z drugiej $M_{n+1} - m_{n+1} \leq \frac{1}{2}(M_n - m_n)$, czyli $M_n - m_n \rightarrow 0$.

Ostatecznie, ze względu na ciągłość funkcji f ,

$$\frac{7}{27} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \geq f(x, y, z),$$

czego należało dowieść.



Rozwiązanie zadania M 518.

Niech T_n oznacza średnią liczbę rzutów, potrzebną do zakończenia eksperymentu z n monetami. Oczywiście

$$T_0 = 0, T_1 - 1 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_0,$$

bowiem pierwszy rzut daje z prawdopodobieństwem $1/2$ reszkę - wtedy eksperyment jest zakończony, i z prawdopodobieństwem $1/2$ orla - wtedy jesteśmy w sytuacji wyjściowej. Zatem $T_1 = 2$. Dalej,

$$T_2 - 1 = \frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{4}T_0,$$

skąd $T_2 = \frac{5}{2}$, wreszcie

$$T_3 - 1 = \frac{1}{8}T_3 + \frac{3}{8}T_2 + \frac{3}{8}T_1 + \frac{1}{8}T_0,$$

wtedy $T_3 = \frac{22}{7}$.

Początki fizyki komputerowej

Problem Fermiego - Pasty - Ulama

Dr hab. Ryszard KUTNER

W latach czterdziestych i na początku lat pięćdziesiątych naszego stulecia pojawiły się pierwsze elektroniczne maszyny cyfrowe, czyli komputery - najpierw ENIAC, a potem UNIVAC I i MANIAC I. Dzięki dużej, jak na owe czasy, szybkości wykonywania obliczeń stworzyły one niebywałą okazję numerycznego badania układów o wielkiej liczbie stopni swobody. Okazja ta została wykorzystana, a wagę prac powstałych w latach pięćdziesiątych, mierzoną ich wpływem na współczesne badania w fizyce czy nawet ogólniej - w naukach przyrodniczych - wprost trudno przecenić. Narodziła się wówczas „fizyka komputerowa”, a dokładniej mówiąc jej najstarsza gałąź, tzw. fizyka symulacyjna.

Podstawowe metody fizyki komputerowej zostały sformułowane w serii publikacji z lat 1953 - 1959. Pierwsza z nich, klasyczna dziś praca N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, W.N. Rosenblutha, A.H. Teller i E. Tellera *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines* („Obliczanie równania stanu z użyciem szybkich maszyn liczących”) zapoczątkowała używanie komputerów do symulowania procesów losowych i wyznaczania metodami Monte Carlo własności termodynamicznych układów wieloatomowych. Do omówienia tej pracy i płynących z niej konsekwencji powrócimy, być może, niebawem - prosty przykład zastosowania elementów metody Monte Carlo zawierała opisana w *Delcie* 9/1986 symulacja ruchów Browna. Tutaj zajmiemy się innym kierunkiem symulacji komputerowych polegającym na numerycznym rozwiązywaniu równań ruchu układów wielocząstkowych - tzw. metodami „dynamiki molekularnej”. Metodę tego typu jako pierwsi zastosowali w 1955 roku E. Fermi, J. Pasta i S. Ulam badając numerycznie nieharmoniczne drgania kilkudziesięciu mas połączonych w łańcuchach nieliniowymi sprężynkami (nie spełniającymi prawa Hooke’a). B. Alder i T. Wainwright sformułowali następnie metody pozwalające efektywnie analizować zagadnienia związane z zachowaniem się setek, a nawet tysięcy oddziałujących ze sobą molekuł w gazie, cieczy lub ciele stałym. W pierwszej ich pracy wyniki komputerowej symulacji ruchu atomów sieci krystalicznej przedstawione były w postaci „filmu komputerowego” - serii migawkowych ujęć w kilku następujących po sobie momentach. Wymieniając współtwórców metody dynamiki molekularnej należy wspomnieć G. Vineyarda (badał on własności defektów powstałych w metalach pod wpływem promieniowania) oraz A. Rahmana, który symulował zachowanie się ciekłego azotu, a wyniki ilościowe otrzymane przez niego mogły już być bezpośrednio porównywane z danymi doświadczalnymi. Prześledźmy pokrótce rozumowanie Fermiego, Pasty i Ulama.

Sformułowanie problemu Fermiego - Pasty - Ulama (FPU)

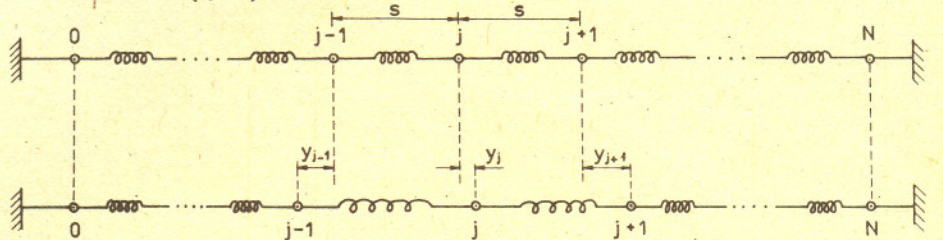
Dobrze znany był fakt, że drgania układu liniowego - tzn. układu, w którym siły są proporcjonalne do wychyleń z położenia równowagi - można przedstawić jako złożenie drgań harmoniczných o częstościach charakterystycznych dla danego układu, przy czym drgania o różnych częstościach są niezależne, a tym samym nie ma między nimi przepływu energii. Jeżeli początkowo zostanie wzbudzone drganie o ustalonej częstości, to już żadne inne drganie nie powstanie. Najprostszym przykładem jest tu układ mas połączonych w łańcuchach sprężynkami, których naprężenia są proporcjonalne do zmian ich długości. E. Fermi, J. Pasta i S. Ulam chcieli sprawdzić na drodze numerycznej (inaczej nie było to możliwe), jak wpływa na zachowanie się takiego układu wprowadzenie dodatkowego, nieliniowego oddziaływania. Do owego czasu przyjmowano bowiem na wiarę, że energia powinna się podzielić równomiernie między drgania o różnych częstościach, czyli stopnie swobody (zasada ekwipartycji energii). Pojawienie się pierwszych komputerów stworzyło od razu szansę zweryfikowania tego założenia.


```

10 PAPER 0: INK 7
20 REM *****
30 REM ***** PASTY-ULAMA *****
40 REM ***** Ryszard Kutner, Styczeń 88 *****
50 DIM w(9): REM Prędkość
70 DIM u(9): REM Położenie
80 DIM v(9): REM Położenie
90 DIM x(9): REM Położenie
100 LET t:=101: REM t
110 LET dt:=1/2: REM dt
120 REM r - Numer
130 LET M:=1: REM Masa
140 LET K:=0: REM Liczba
150 LET K:=1: REM Stała
160 LET s:=1: REM Stała
170 LET s:=1/4: REM Stała
180 REM tau=2*N*SQR(M*s/K): REM Liczba
190 LET sj:=20: REM Liczba
200 LET su:=10*N: REM Liczba
210 LET su:=10*N: REM Liczba
220 LET su:=10*N: REM Liczba
230 REM Urunek
240 LET u(1)=0: REM
250 LET u(2)=0: REM
260 REM
270 REM
280 REM
290 REM
300 REM
310 REM
320 REM
330 REM
340 REM
350 REM
360 REM
370 REM
380 REM
390 REM
400 REM
410 REM
420 REM
430 REM
440 REM
450 REM
460 REM
470 REM
480 REM
490 REM
500 REM
510 REM
520 REM
530 REM
540 REM
550 REM
560 REM
570 REM
580 REM
590 REM
600 REM
610 REM
620 REM
630 REM
640 REM
650 REM
660 REM
670 REM
680 REM
690 REM
700 REM
710 REM
720 REM
730 REM
740 REM
750 REM
760 REM
770 REM
780 REM
790 REM
800 REM
810 REM
820 REM
830 REM
840 REM
850 REM
860 REM
870 REM
880 REM
890 REM
900 REM
910 REM
920 REM
930 REM
940 REM
950 REM
960 REM
970 REM
980 REM
990 REM

```

Rozważmy zatem prostoliniowy łańcuch złożony z punktów o identycznych masach m , połączonych jednakowymi, nieważkimi sprężynkami, przy czym pierwsza z mas, o numerze 0, i ostatnia, o numerze N (w naszych obliczeniach $N = 8$), są unieruchomione (rys.1).



Rys.1

Równanie ruchu dla masy j ma więc postać

$$m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F(y_{j+1} - y_j) - F(y_j - y_{j-1}),$$

przy czym $j = 1, \dots, N - 1$, a $F(y_i - y_l)$ jest siłą, z jaką masa i działa na masę l . W oryginalnym sformułowaniu problemu FPU siła ta wyrażona jest wzorem

$$F(y_i - y_l) = \frac{k}{s} (y_i - y_l) + \frac{k}{s} \alpha (y_i - y_l)^2,$$

gdzie k jest stałą sprężystości, a α parametrem nieliniowości. Rozwiązanie układu (*) Fermi, Pasta i Ulam znaleźli numerycznie.

Autorzy nie wspomnieli słowem o użytej metodzie numerycznej, a tym bardziej o algorytmie komputerowym, zakładając widocznie, że czytelnicy sami sobie z tym poradzą.

Algorytm

Chcemy rozwiązać numerycznie układ (*). Będziemy poszukiwali wartości y_j w kolejnych chwilach odległych o $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Musimy teraz znaleźć przybliżone wyrażenie drugiej pochodnej przez różnice wartości funkcji, a to jest już przecież proste. Mianowicie

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} \Big|_{t=t_n} = \frac{y_j(t_{n+1}) - 2y_j(t_n) + y_j(t_{n-1}))}{(\Delta t)^2}$$

Możemy już teraz napisać przybliżone równanie ruchu w postaci następującego algorytmu:

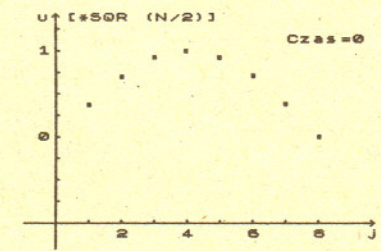
$$y_j(t_{n+1}) = 2y_j(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} \{F(y_{j+1}(t_n) - y_j(t_n)) - F(y_j(t_n) - y_{j-1}(t_n))\} - y_j(t_{n-1})$$

pozwalającego wyznaczyć wychylenie masy j w chwili t_{n+1} na podstawie znajomości jej wychylenia w chwilach t_n i t_{n-1} oraz wychyleń mas sąsiednich w chwili t_n . Rzecz jasna, aby algorytm mógł wystartować, należy do układu równań różnicowych dołączyć warunki początkowe. Jakie warunki zostały przyjęte, można odczytać w zamieszczonych obok wydrukach dwóch programów między liniami 230 i 250 oraz 270 i 340 (proszę zauważyć, że y oznacza aktualne położenie danej masy, z położenie o Δt późniejsze, a u - wcześniejsze). Główne cykle obu programów, realizujące powyższy algorytm, zawarte są w obu przypadkach między liniami 560 i 730.

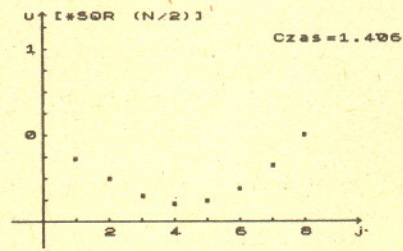
Oba programy zostały napisane w BASIC-u na mikrokomputer ZX Spectrum 48K i jemu pokrewne, jak ZX Spectrum 80K, 128K, czy też Spectrum +, +2, +3, Timex 2048, 2068, czy wreszcie Elwro 800 Junior, który jest polskim komputerem szkolnym. Jestem przekonany, że zaadaptowanie ich na inne, popularne na polskim rynku, mikrokomputery nie powinno narażać trudności.

Nareszcie wyniki

Rysunek 2 przedstawia po prostu ciąg „zdjęć migawkowych” uzyskanych za pomocą pierwszego programu.

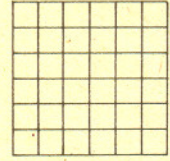


Rys.2a



Rys.2b

Rozwiązanie zadania M 519. Jeśli odpowiedź byłaby pozytywna, to każdy z pięciu wewnętrznych pionowych odcinków na rysunku dzieliłby na pół pewien kamień.

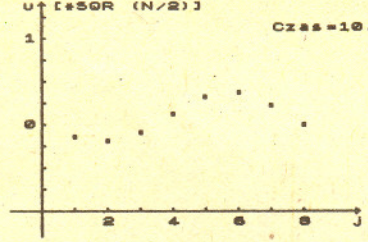


Na lewo od każdego takiego odcinka mieści się parzysta liczba połówek (podzielonych przez ten odcinek) kamieni. A więc każdy odcinek przecina co najmniej dwa kamienie. Podobnie każdy z pięciu poziomych odcinków przecina dwa kamienie. Ale jeden kamień może być przecięty tylko jednym odcinkiem, czyli dla 10 narysowanych odcinków potrzeba 20 kamieni. A mamy ich tylko 18.

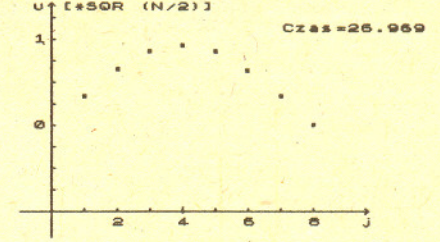

```

20 REM *****PROGRAM FERMIEGO*****
30 REM ** PASTY-ULAMA
40 REM *****
50 DIM u (32): REM Prędkość
60 DIM v (32): REM Potężność
70 DIM w (32): REM Potężność
80 DIM x (32): REM Potężność
100 LET t=54: REM t - Czas
110 LET dt=1/2: REM t - Czas
120 REM r - Numer kolejnego czasu
130 LET M=1: REM Masa
140 LET N=8: REM Liczba atomów
150 LET K=1: REM Stała
160 LET s=1: REM Sprężystość Hooke'a
170 LET alfa=1/4: REM Współczynnik
180 LET tau=2*N*SOR (M*s*K): REM Liczba
190 LET st=4: REM Jednostka czasu
200 LET skalu=1: REM Skala
210 LET czynniki=1: REM Skala
220 REM *****
230 REM *****
240 REM *****
250 REM *****
260 REM *****
270 REM *****
280 REM *****
290 REM *****
300 REM *****
310 REM *****
320 REM *****
330 REM *****
340 REM *****
350 REM *****
360 REM *****
370 REM *****
380 REM *****
390 REM *****
400 REM *****
410 REM *****
420 REM *****
430 REM *****
440 REM *****
450 REM *****
460 REM *****
470 REM *****
480 REM *****
490 REM *****
500 REM *****
510 REM *****
520 REM *****
530 REM *****
540 REM *****
550 REM *****
560 REM *****
570 REM *****
580 REM *****
590 REM *****
600 REM *****
610 REM *****
620 REM *****
630 REM *****
640 REM *****
650 REM *****
660 REM *****
670 REM *****
680 REM *****
690 REM *****
700 REM *****
710 REM *****
720 REM *****
730 REM *****
740 REM *****
750 REM *****
760 REM *****
770 REM *****
780 REM *****
790 REM *****
800 REM *****
810 REM *****
820 REM *****
830 REM *****
840 REM *****
850 REM *****
860 REM *****
870 REM *****
880 REM *****
890 REM *****
900 REM *****
910 REM *****
920 REM *****
930 REM *****
940 REM *****
950 REM *****
960 REM *****
970 REM *****
980 REM *****
990 REM *****
1000 REM *****

```

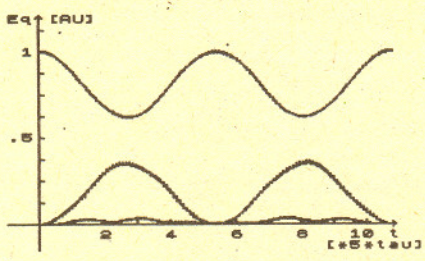


Rys.2c



Rys.2d

Są to przykładowe stany osiągnięte przez nasz drgający łańcuch. Na osi poziomej odłożone zostały położenia równowagi mas, a na pionowej ich wychylenia – w ten sposób, dla zwiększenia czytelności, drgania podłużne przedstawiamy jako fale poprzeczne. Jak widać (rys.2a), początkowo została wzbudzona fala (mod) o największej możliwej długości $\lambda_1 = 2sN$ i okresie $T_1 = 2N\sqrt{ms/k}$ (właśnie T_1 przyjęliśmy w naszych obliczeniach za jednostkę czasu). W miarę upływu czasu wzbudzają się także dalsze mody – oczywiście kosztem energii pierwszego: drugi (rys.2c) o długości fali $\lambda_2 = sN$ i okresie $T_2 = N\sqrt{ms/k}$ oraz trzeci o $\lambda_3 = \frac{2}{3}sN$ i $T_3 = \frac{2}{3}N\sqrt{ms/k}$. Po uruchomieniu pierwszego programu można zaobserwować, jak płynnie przechodzą w siebie poszczególne mody. Najważniejsze jest jednak spostrzeżenie, że po upływie zaledwie 27 jednostek czasu układ powraca do stanu wyjściowego (rys.2d). Innymi słowy, energia zgromadzona początkowo w modzie pierwszym nie rozkłada się równomiernie na inne mody (stopnie swobody), jakby to wynikało z zasady ekwipartycji energii, lecz „przelewa” się rytmicznie między nimi, aby po upływie stosunkowo krótkiego czasu powrócić całkowicie do modu początkowego. Obserwację tę potwierdzają wyniki obliczeń programu drugiego (rys.3).



Rys.3

Tym razem na osi poziomej odłożono czas, a na pionowej całkowitą energię danego modu (uwzględniono tylko trzy pierwsze).

Początkowo, jak to przewiduje zasada ekwipartycji, całkowita energia pierwszego modu – E_1 maleje, natomiast drugiego – E_2 i trzeciego – E_3 rośnie. Jednakże już po upływie kilkunastu jednostek czasu rozpoczyna się proces odwrotny, który właśnie po blisko dwudziestu siedmiu jednostkach czasu z bardzo dobrym przybliżeniem prowadzi do powrotu układu do stanu wyjściowego, po czym wszystko zaczyna się od początku. To właśnie ten nieoczekiwany powrót został odkryty przez Fermiego, Pastę i Ulama dając początek fizyce symulacyjnej.

Od tamtej pory problem FPU był szczegółowo badany. N. Saito ze współpracownikami odkrył, na przykład, progowy charakter zjawiska powrotu. Innymi słowy, nie jest aż tak źle z zasadą ekwipartycji, bowiem dostarczenie układowi dużej ilości energii (powyżej pewnego progu) powoduje, że zachowuje się on już „jak należy”. Ogólnie mówiąc, problem FPU zwrócił uwagę na zagadnienia nieliniowe w fizyce. Badania ruszyły pełną parą i zostały uwieńczone sukcesem w postaci numerycznego odkrycia solitonu, ale to już historia, którą opowiem w następnym artykule.

Na zakończenie pragnę zauważyć, że zamieszczone programy dobrze nadają się do samodzielnego eksperymentowania. Szczególnie interesujące byłoby ćwiczenie polegające na wykreśleniu przez nasz mikrokomputer trajektorii zakreślonej przez wybraną masę w przestrzeni fazowej – na poziomej osi odkładamy położenie, a na pionowej pęd w tej samej chwili. Jak będzie wyglądała taka trajektoria w zależności od wartości energii całkowitej, dostarczonej układowi na początku? Szczególnie program drugi nadaje się dobrze do takiej modyfikacji, gdyż już w obecnej postaci oblicza zarówno położenia, jak i prędkości wszystkich mas tworzących nasz łańcuch.

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

ILE ATOMÓW TWORZY KRYSTAŁ ?

Ile właściwie atomów trzeba zgrupować razem, aby powstały twór miał już własności ciała stałego, czyli był kryształem? Milion? Miliard? Bilion? A może jeszcze więcej? Na przykład w jednym centymetrze sześciennym kryształu dobrze znanego wszystkim soli kuchennej znajduje się około $4,5 \times 10^{22}$ atomów sodu i chloru. Wiadomo jednak od dawna, że małeńkie "okruszki" o wymiarach mikrometrów badane za pomocą promieni X, wykazują doskonale własności krystaliczne. Przy jakim więc rozmiarze "okruszka" przestaje on być kryształem? Odpowiedź na tak sformułowane pytanie może zależeć, oczywiście, od wyboru badanych własności kryształu. Ostatnio przeprowadzono szereg badań gazowych "okruszków" (zwanych klastrami*) zawierających od 10 do 1000 atomów różnych pierwiastków. W jednym z eksperymentów prowadzono pomiary energii jonizacji elektronów z klastrów rtęci. Atomy rtęci mają zamkniętą powłokę elektronową $6s^2$ i pustą $6p^0$. Obydwie te powłoki tworzą w kryształach rtęci pasmo przewodnictwa. Energia jonizacji elektronu z powłoki $6s^2$ atomu rtęci do próżni wynosi 10,4 eV; natomiast energia jonizacji elektronu z poziomu Fermiego pasma przewodnictwa do próżni dla metalicznej rtęci wynosi 4.5 eV. W przeprowadzonych eksperymentach okazało się, że już przy około 70 atomach rtęci tworzących klastr energia jonizacji elektronów dwukrotnie maleje w porównaniu z pojedynczym atomem, czyli powstaje pasmo przewodnictwa. Z kolei w innych eksperymentach badano odległość pomiędzy atomami w klastrach miedzi. W cząsteczce Cu_2 wynosi ona około 2,2 Å, natomiast w kryształach miedzi około 2,55 Å. Stwierdzono, że w klastrach o średnicy około 10 Å, zawierających 50-100 atomów, osiągnięta już jest "krystaliczna" odległość między atomami. O ile miedź buduje "od początku" sieć kubiczną, to nieco inaczej zachowują się atomy argonu. Zarówno rachunki teoretyczne, jak i pomiary dyfrakcji elektronów wykazują, że niewielkie klastry argonu, zawierające 20-50 atomów, mają symetrię dwudziestościanu (odpowiadającą "zakazanej" w kryształach osi pięciokrotnej). Dopiero przy około 100 atomach klastr ulega reorganizacji i tworzy się sieć kubiczna. Powyższe rezultaty dość jednoznacznie przekonują, że po przekroczeniu liczby około 100 atomów w "okruszku" zaczynamy mieć już do czynienia z ciałem stałym. Istnieją, oczywiście, w ciałach stałych zjawiska, takie jak na przykład drgania sieci krystalicznej, które wymagają udziału wielu tysięcy atomów. Jednakże zarówno pojawienie się pasm energetycznych, jak i struktury krystalicznej w klastrach stuatomowych jest faktem godnym uwagi.

*od ang. cluster - grono, gromadka, zlepek, grudka.

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć z dużą dokładnością sumę S szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Można, oczywiście, dodawać kolejne wyrazy, ale sumy częściowe są zbieżne do S bardzo wolno. Mamy bowiem dla każdego $N > m$

$$S - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum_{k=m+1}^N \frac{1}{k^2} > \sum_{k=m+1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=m+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{N+1}$$

Z dowolności N wynika, że $S - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{m+1}$.

Aby obliczyć S z dokładnością do 10^{-10} , trzeba zsumować co najmniej 10 miliardów wyrazów. Taką samą dokładność można uzyskać znacznie zmniejszając liczbę sumowanych wyrazów. Podobnie jak powyżej mamy

$$S - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m}$$

Tak więc $S - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m^2}$.

Wystarczy więc do sumy pierwszych 100 tysięcy wyrazów dodać $\frac{1}{100\,001}$.

Spróbujmy jeszcze inaczej. Zapiszemy w tym celu wyrazy naszego szeregu w bardziej skomplikowany sposób. Zastępując $\frac{1}{k^2}$ przez $\frac{1}{k(k+1)}$ popełniamy błąd

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k^2(k+1)}$$

Ten błąd zastępujemy liczbą $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ i otrzymujemy nowy błąd

$$\frac{1}{k^2(k+1)} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$$

Kontynuując to postępowanie dostajemy wzory

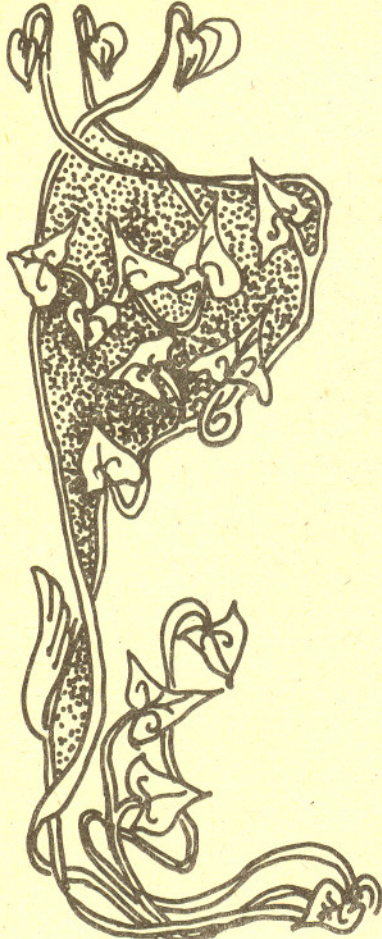
$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ \frac{1}{2^2} &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3}, \\ \frac{1}{3^2} &= \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3^2 \cdot 4 \cdot 5}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{(k-2)!}{k(k+1) \dots (2k-1)} + \frac{(k-1)!}{k^2(k+1) \dots (2k-1)}, \end{aligned}$$

Zamiast obliczać sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ obliczmy sumę wyrazów w każdej kolumnie i następnie dodajmy te sumy. Takie postępowanie jest dozwolone, gdyż wszystkie liczby występujące po prawej stronie są dodatnie. Suma n -tej kolumny S_n jest równa

$$\frac{(n-1)!}{n^2(n+1) \dots (2n-1)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{i(i+1) \dots (i+n)}$$

Ale $\frac{1}{i(i+1) \dots (i+n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{i(i+1) \dots (i+n-1)} - \frac{1}{(i+1) \dots (i+n)} \right)$,

więc $\sum_{i=n+1}^N \frac{1}{i(i+1) \dots (i+n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(n+1) \dots (2n)} - \frac{1}{(N+1) \dots (N+n)} \right)$



i

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\dots(i+n)} = \frac{1}{n(n+1)\dots(2n)}.$$

A zatem

$$S_n = (n-1)! \left(\frac{1}{n^2(n+1)\dots(2n)} + \frac{1}{n(n+1)\dots(2n)} \right) = \frac{3(n-1)!}{n(n+1)\dots(2n)} = \frac{3((n-1)!)^2}{(2n)!}.$$

Mamy więc wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}.$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny bardzo szybko. Zachodzi bowiem nierówność

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} \leq \frac{1}{n4^n}, \text{ dla } n \geq 4,$$

którą można udowodnić przez indukcję. Wystarczy w tym celu zauważyć, że jest ona prawdziwa dla $n = 4$, gdyż $\frac{1}{1120} \leq \frac{1}{1024}$, i pokazać, że dla każdego n mamy

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{n^2} \geq 4 \frac{n+1}{n},$$

co jest oczywiste.

Sumując pierwsze $m-1$ wyrazów szeregu, gdzie $m \geq 4$, popełniamy błąd mniejszy niż

$$3 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n4^n} \leq \frac{3}{m4^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{m4^{m-1}}.$$

Aby obliczyć S z dokładnością do 10^{-10} , wystarczy więc zsumować pierwsze 16 wyrazów.

Oto zadanie dla dociekliwych Czytelników.

Czy suma szeregu $\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln n \ln n (\ln \ln \ln n)^2}$ jest większa, czy mniejsza niż 1?

Liczba a , od której zaczynamy sumowanie, jest najmniejszą liczbą k , dla której $\ln \ln \ln k > 1$ (tzn. $a = \lceil e^{e^e} \rceil + 1$). Tym razem szereg jest jeszcze wolniej zbieżny niż poprzednio: suma wyrazów o numerach większych od e^{e^k} jest rzędu $\frac{1}{k}$, w dodatku suma całego szeregu różni się od 1 o mniej niż 10^{-8} .

Opracował dr Jerzy RYLL



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 517. Niech $f(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz$. Udowodnić, że jeśli $x, y, z \geq 0$, $x + y + z = 1$, to $f(x, y, z) \leq 7/27$. (MOM 1984)

Rozwiązanie na str. 1

M 518. Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Te, na których wypadł orzeł, rzucamy jeszcze raz, itd. aż do chwili, gdy będą same reszki. Ile średnio rzutów potrzeba do zakończenia doświadczenia?

Rozwiązanie na str. 1

M 519. Czy można z 18 kamieni domina 2×1 złożyć taki kwadrat, że każdy odcinek (różny od boku) łączący przeciwległe brzegi kwadratu przechodzi przez wnętrze któregoś kamienia?

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 252. Do jakiej wysokości można napełnić szklany zbiornik mający mały otworek w dnie tak, aby ciecz nie zwilżająca szkła nie wylała się?

Rozwiązanie na str. 15

F 253. W cieczy zwilżającej szkło zanurzono szklaną kapilarę tak, że jej wystający ponad powierzchnię odcinek jest krótszy niż wysokość, na jaką podniósłby się słupek cieczy w dłuższej kapilarze. Jak będzie skierowana wypukłość menisku i jaki będzie jej promień?

Rozwiązanie na str. 16



Gwiazdy zmienne zaćmieniowe

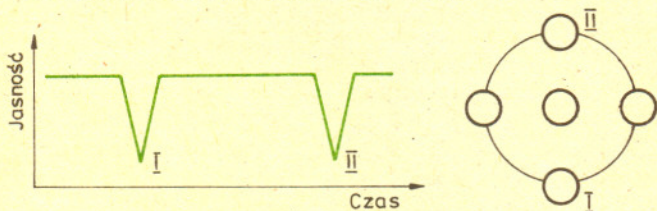
Mgr Joanna UDALSKA

Wszystkie gwiazdy na niebie wyglądają bardzo podobnie i przez to wielu ludzi wydają się po prostu nieciekawe. Jakie informacje może nieść światło tak bardzo odległych obiektów, skoro nawet w najpotężniejszych teleskopach widać je zaledwie w postaci świecących punktów o mniejszych lub większych jasnościach? A jednak właśnie dzięki rejestracji i badaniom natężenia docierającego do Ziemi promieniowania gwiazd uzyskujemy najwięcej danych pozwalających wnioskować o ich cechach fizycznych i ewolucji. Wnioski z pobieżnych obserwacji i tradycyjne przekonanie o stałości gwiazd są mylące – w rzeczywistości ich „życie” składa się z szeregu faz ciągłych przemian, co dla nas – ziemskich obserwatorów – przejawia się przede wszystkim w postaci bardziej lub mniej gwałtownych zmian ich blasku.

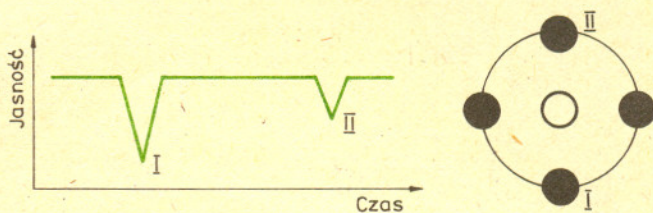
Prawdziwą „kopalnię” informacji stanowią tzw. układy zaćmieniowe, tj. gwiazdy podwójne, których płaszczyzna ruchu jest tak zorientowana w przestrzeni, że możemy obserwować z Ziemi okresowe wzajemne zakrycia składników. Zwykle – wskutek dużej odległości tych układów – w porównaniu z ich rozmiarami – nie można dostrzec każdej z gwiazd osobno, stwierdzamy jedynie spadek całkowitej jasności układu podczas kolejnych zaćmień.

Prześledźmy, ile ciekawych informacji dotyczących własności geometrycznych układu podwójnego można „wydobyć” z jego krzywej blasku (zależności jasności od czasu). Od stosunkowo mało skomplikowanych, wyidealizowanych sytuacji będziemy przechodzić do coraz bardziej złożonych – bliższych rzeczywistości.

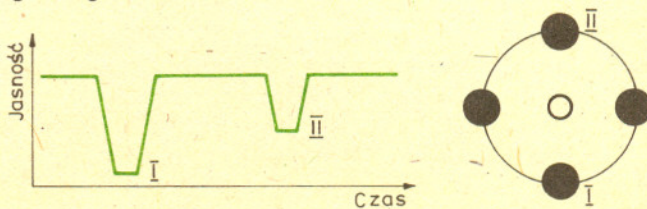
Na początek wyobraźmy sobie, że układ podwójny składa się z dwóch kulistych gwiazd o jednakowych rozmiarach i jasnościach powierzchniowych, oraz że nachylenie jego kołowej orbity względem płaszczyzny stycznej do sfery niebieskiej wynosi dokładnie 90° . Podczas każdego pełnego obiegu gwiazd wokół ich wspólnego środka masy zaobserwujemy dwukrotnie jednakowe zaćmienia, przy czym w minimum łączna jasność układu zmniejszy się do połowy, czyli o 0,75 mag. Poza zaćmieniami jasność będzie utrzymywać się na stałym poziomie, a kolejne minima wystąpią w jednakowych odstępach czasu.



Dopuszczmy teraz sytuację, w której składniki są wciąż jednakowych rozmiarów, ale znacznie różnią się jasnością powierzchniową. Teraz łączny blask układu jest najbardziej osłabiany, gdy zasłaniana jest gwiazda jaśniejsza, podczas zaś zasłaniania ciemniejszej gwiazdy osłabienie całkowitej jasności jest słabsze. Na krzywej blasku widać głębsze tzw. minimum główne i płytsze – tzw. wtórne.

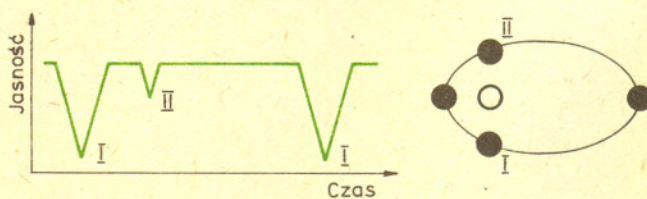


A jak na krzywej blasku odbije się fakt, że np. ciemniejsza gwiazda ma rozmiary znacznie większe niż gwiazda jaśniejsza? Podobnie jak poprzednio, gdy mniejsza z nich (jaśniejsza) zostanie całkowicie zakryta przez większą (ciemniejszą), nastąpi znaczny spadek jasności całkowitej układu – zaćmienie całkowite, a gdy przed wielką – ciemniejszą gwiazdą znajdzie się mała – jaśniejsza, łączny blask układu ulegnie znacznie mniejszemu osłabieniu. Czyżbyśmy mieli otrzymać krzywą blasku taką samą jak w poprzednim przypadku? Otóż nie – teraz, podczas minimum wtórnego występuje tzw. zaćmienie obrączkowe (analogiczne do obrączkowego zaćmienia Słońca) – nie cała zaćmiewana gwiazda skryła się za swym towarzyszem. Przez cały czas trwania tej fazy – gdy mniejsza gwiazda przesuwana się na tle większej – obserwujemy stały blask układu, tzw. płaskie dno. Podobnie jest w fazie minimum głównego.



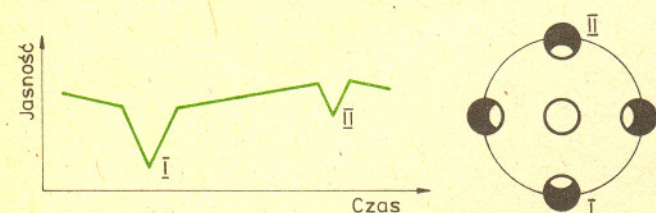
Gdy składniki będą różnych rozmiarów, ale nachylenie płaszczyzny orbity układu nie będzie równe dokładnie 90° , płaskiego dna nie zaobserwujemy – wystąpią tzw. zaćmienia częściowe.

W przedstawionych wyżej przypadkach minima wtórne położone są dokładnie w środku pomiędzy minimami głównymi. Jednak nie zawsze musi tak być – przypominamy, że nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły orbit kołowych. Gdy gwiazdy obiegają wspólny środek masy po orbicie eliptycznej, występuje asymetria w położeniu minimum wtórnego – jest ono przesunięte względem położenia środkowego między minimami głównymi.



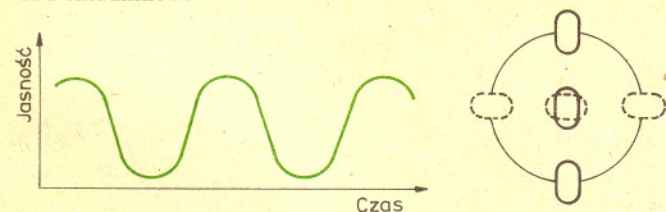
W układach fizycznie związanych gwiazd nie sposób pominąć wzajemnego oddziaływania składników, które przede wszystkim mogą się nawzajem oświetlać. Rzecz jasna, ważny do uwzględnienia jest jedynie efekt oświetlenia składnika ciemniejszego przez jaśniejszy. Dla obserwatora na Ziemi, wskutek ruchu obiegowego gwiazd po orbicie, zmienia się widoczne oświetlone (gorętsze) pole powierzchni ciemniejszej gwiazdy. Największa oświetlona

powierzchnia jest widoczna podczas minimum wtórnego, a więc obserwujemy powolny wzrost jasności układu między minimum głównym i wtórnym oraz jej spadek między minimum wtórnym i głównym. Zjawisko to, zwane efektem refleksu (odbicia), występuje zatem w okresie, w którym w poprzednich przypadkach mieliśmy do czynienia z fazą tzw. stałego blasku gwiazdy zaćmieniowej.



Wzajemne oświetlanie się prowadzi również do powstania dodatkowego fizycznego świecenia, którego natężenie zależy od odległości między składnikami, jest więc zauważalne w układach o orbitach eliptycznych. Natężenie tego dodatkowego promieniowania staje się największe przy najmniejszej odległości między składnikami, tj. w momencie, gdy mniej masywny z nich przybliży się maksymalnie do towarzysza – znajdzie się w peryastronie. Dlatego zjawisko to nazywa się efektem peryastronu.

Składniki wielu obserwowanych układów podwójnych nie mają kształtu dokładnie kulistego. Dotyczy to przede wszystkim układów o niewielkich rozmiarach, w których na skutek działania sił przyptywowych gwiazdy przyjmują kształt elipsoid o największych osiach skierowanych wzdłuż prostej łączącej ich środki. Wtedy oprócz efektów wywołanych przez obieg wspólnego środka masy trzeba również wziąć pod uwagę obrót samych składników, gdyż z różnych stron wyglądają one inaczej. Na krzywej blasku nie występuje w ogóle faza stałej jasności, ponieważ ciągle obserwujemy różne pola powierzchni gwiazd. Zmiany jasności stają się ciągłe – krzywa zmian blasku ulega „wygładzeniu”, nie można określić dokładnego momentu początku i końca poszczególnych faz. Łączny blask układu jest największy, gdy prosta łącząca środki obu gwiazd ustawia się prostopadle do kierunku widzenia, w minimum do obserwatora zwrócona jest najmniejsza powierzchnia obu składników.



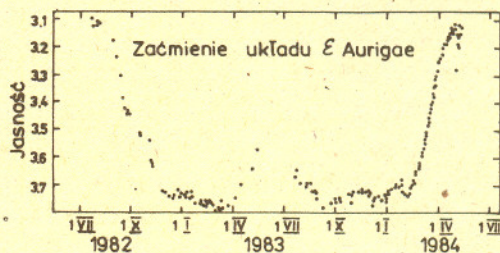
Podobnie, jak w przypadku układów zawierających składniki kuliste, gdy gwiazdy eliptyczne różnią się rozmiarami lub jasnością powierzchniową, na krzywej blasku można wyróżnić głębsze minimum główne i płytsze – wtórne.

„Wygładzanie” krzywej blasku następuje również wskutek występowania tzw. pociemnienia brzegowego. Jasności powierzchniowe gwiazd są największe w środku ich tarcz i maleją na zewnątrz. Efekt ten wyraźnie widzimy w przypadku Słońca, a jego przyczyną jest to, że patrząc na środek tarczy sięgamy do głębszych, gorętszych, a więc i jaśniejszych warstw, natomiast przy brzegu widzimy jedynie chłodne warstwy powierzchniowe.

Przy obserwacjach gwiazd zmiennych zaćmieniowych efekt ten ma mniejsze znaczenie dla zaćmień całkowitych i częściowych, najbardziej widoczny jest podczas zaćmień obrączkowych.

W rzeczywistości obserwowane krzywe blasku są znacznie bardziej skomplikowane niż te, które zostały przedstawione na naszych schematycznych rysunkach – choć opisane przypadki wyczerpują w zasadzie wszystko, co uwzględnia się w tradycyjnej klasyfikacji gwiazd zmiennych zaćmieniowych. Podstawę tej klasyfikacji stanowią trzy rodzaje krzywych blasku, dla których wzorcami są β Persei (Algol), β Lyrae i W Ursae Majoris. Algole, najliczniej reprezentowane wśród zmiennych zaćmieniowych, są układami złożonymi z niemal kulistych gwiazd znacznie oddalonych. Na ich krzywych blasku dobrze widać fazy stałej jasności i wyraźne minima. Układy podwójne typu β Lyrae składają się z dwóch eliptycznych gwiazd o różnych rozmiarach, a więc na ich krzywych blasku nie można wyróżnić fazy stałej jasności, gdyż wciąż zmienia się ona zarówno na skutek wzajemnego zasłaniania składników, jak też na skutek ich eliptycznego kształtu. Zmienne typu W Ursae Majoris tym różnią się od gwiazd typu β Lyrae, że ich eliptyczne składniki mają rozmiary na tyle duże w porównaniu ze wzajemnymi odległościami, iż stykają się powierzchniami.

Tradycyjna klasyfikacja nie obejmuje całego bogactwa gwiazd zmiennych zaćmieniowych. Trudno byłoby zaliczyć do któregoś ze wspomnianych wyżej typów tak osobliwą zmienną jak np. ϵ Aurigae (pisaaliśmy o niej w *Delcie* 2/1988), gdzie postuluje się istnienie trzech gwiazd, dwóch dysków akrecyjnych, rozległej gazowej otoczki, a na geometryczne zmiany jasności nakładają się zmiany związane z procesami fizycznymi.



Wiele uwagi poświęca się obserwacjom osobliwych układów, w których dodatkowe efekty na krzywych blasku wywołane są przede wszystkim przepływem materii między składnikami. Wiąże się to z powstawaniem dysków akrecyjnych, tzw. gorących plam – jasnych, świecących obszarów w miejscu, gdzie strumień materii trafia w dysk i występowaniem ciągłych zmian okresów układów zaćmieniowych. Szczególnie efektywnym zjawiskiem związanym z przepływem masy są wszelkiego rodzaju wybuchy – okresowe, gwałtowne zmiany jasności spowodowane nagłym (wybuchowym) zapaleniem materii opadającej z jednej z gwiazd i gromadzonej na drugiej. Do opisu tego typu efektów nie wystarczają rozważania geometryczne. Konieczne jest również zwiększenie zakresu obserwacji – oprócz fotometrycznych (rejestracja natężenia dochodzącego od gwiazd promieniowania) niezbędne są również spektroskopowe (badania widma). Dopiero na podstawie możliwie bogatego materiału obserwacyjnego konstruuje się szereg modeli rachunkowych opisujących przewidywane efekty zgodnie ze znanymi nam prawami fizyki.

delta

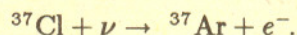
Co astronom może obserwować pod ziemią ?



Nie od dziś wiemy, że obserwacje astronomiczne należy prowadzić z miejsc, gdzie nie ma miejskich świateł i jest czyste powietrze (np. w górach), a najlepiej spoza atmosfery. Tymczasem istnieją obserwatoria astronomiczne na głębokości kilku kilometrów pod ziemią. Co stamtąd można zobaczyć ?

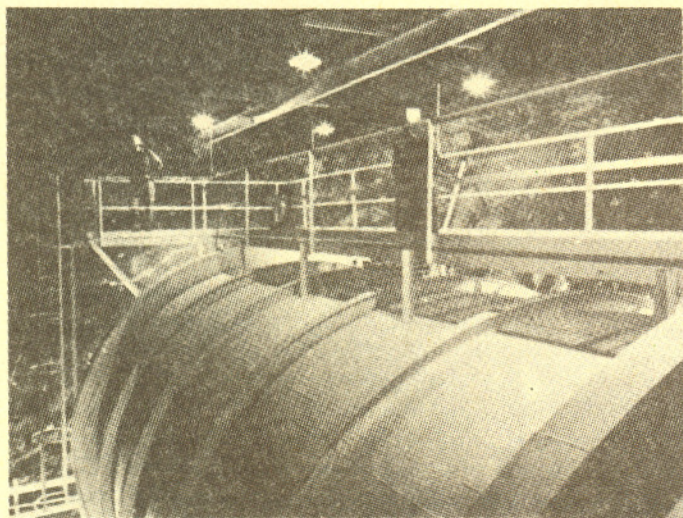
Przypomnijmy sobie, że Słońce produkuje energię w wyniku termojądrowej przemiany wodoru w hel. Powstaniu każdego atomu helu towarzyszy wydzielenie się 26,72 MeV – głównie w postaci promieniowania elektromagnetycznego – ale nie tylko. Około 2% tej energii jest mianowicie unoszone ze Słońca przez neutrino – cząstki elementarne, które niezwykle słabo są pochłaniane przez jakąkolwiek materię. Zresztą właśnie dlatego wydostają się praktycznie swobodnie z wnętrza Słońca.

Wobec tego jak je zaobserwować ? Przecież skoro całe Słońce jest dla nich przezroczyste, to tym bardziej przezroczysty będzie dla nich każdy przyrząd pomiarowy. Na szczęście nie jest tak dosłownie – neutrino wprawdzie bardzo słabo, ale jednak oddziałują z materią. Kilkadziesiąt lat temu fizycy obliczyli, że neutrino o dostatecznie dużej energii powinny stosunkowo często wchodzić w reakcje z atomami chloru



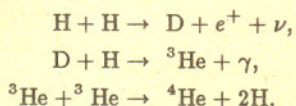
Powstający w tych reakcjach argon jest radioaktywny z okresem półrozpadu 35 dni. Mierząc zatem jego radioaktywność można ocenić jego ilość, stąd częstość zachodzenia reakcji, a wreszcie natężenie samego strumienia neutrin.

Strumień słonecznych neutrin na Ziemi można oszacować dzieląc 2% mocy Słońca ($L_{\odot} = 3,82 \cdot 10^{26}$ W) przez pole powierzchni sfery o promieniu 150 000 000 km i dzieląc jeszcze przez średnią energię neutrina (0,26 MeV). Wychodzi około $6,5 \cdot 10^{14}$ sztuk/m²s. Są to głównie neutrina nie dające się zaobserwować w doświadczeniu Davisa; obserwowane stanowią mniej niż 8% ogólnej liczby.

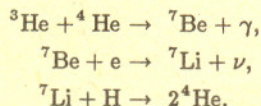


Pierwszy detektor neutrin – zbiornik C₂Cl₄ zainstalowany przez Davisa w Homestake Gold Mine w Południowej Dakocie.

Produkcja energii termojądrowej w tzw. cyklu wodorowym zachodzi głównie w reakcjach



Wytworzone tu neutrina unoszą średnio po 0,26 MeV i są nieobserwowalne, gdyż nie wchodzi w reakcje z chlorem; by zaszła reakcja, neutrina musi mieć energię większą od 0,81 MeV. Bardziej energetyczne neutrina powstają w pobocznych reakcjach cyklu wodorowego, głównie w cyklu



O to w końcu astronomowi chodzi, bowiem w ten sposób zyskuje informację pochodzącą z samego niemal środka Słońca, dokąd żadnymi sposobami zajrzeć się nie da.

Pierwsza próba pomiaru strumienia neutrin (słonecznych) tą metodą została przeprowadzona w 1967 r. pod kierunkiem Raymonda Davisa (USA). Wszystkie doświadczenia tego typu polegają na tym, że wielki zbiornik (setki metrów sześciennych) z czterochlorkiem węgla (C₂Cl₄), ustawiony w głębokiej kopalni (zaraz zobaczymy, dlaczego), przez kilka tygodni po prostu stoi. W tym czasie pod wpływem neutrin powstają w nim atomy argonu, które co prawda wkrótce się rozpadają, ale po kilku tygodniach w zbiorniku ustala się stan stacjonarny: atomów argonu już nie przybywa, bo rozpadają się w tym samym tempie, co powstają. Pozostaje wtedy już tylko zmierzyć (policzyć) liczbę atomów ³⁷Ar. Łatwo się to opowiada, natomiast rzeczywistość jest dużo bardziej skomplikowana, bowiem atomów argonu jest w tej cysternie około 100 sztuk! Te właśnie atomy argonu trzeba ze zbiornika wyodrębnić i policzyć – i to się daje zrobić!

Są też sposoby, by zmierzyć impuls neutrin towarzyszący np. wybuchowi gwiazdy supernowej. W pobliżu zbiornika z C₂Cl₄ ustawia się inny zbiornik, np. z wodą. Szybkie cząstki powstające w reakcji neutrin z chlorem będą przenikać m.in. również przez zbiornik z wodą. Jeśli jednak przez wodę leci cząstka z prędkością większą niż prędkość światła w wodzie, to wysła ona charakterystyczne promieniowanie, tzw. promieniowanie Czerenkowa, które można już zwyczajnie rejestrować za pomocą fotopowielaczy. Tak można śledzić na bieżąco strumień neutrin i jego zmiany.

Oczywiście trzeba przy tym wszystkim mieć pewność, że obserwuje się rzeczywiście efekty wywołane przez kosmiczne neutrina. Tymczasem te same skutki mogą dać inne cząstki produkowane w ziemskiej atmosferze przy zderzeniach cząstek promieniowania kosmicznego (czyli głównie protonów) z atomami gazów atmosferycznych. Trzeba się od tych cząstek możliwie najlepiej odizolować, dlatego właśnie całą aparaturę instaluje się w bardzo głębokich kopalniach. Kilkukilometrowa warstwa ziemi chroni urządzenie przed zakłóceniami, a dla kosmicznych neutrin jest, oczywiście, doskonale przezroczysta.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Kilka spojrzeń na sferę trójwymiarową

Dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Wiele figur w matematyce jest nam świetnie znanych; przyzwyczailiśmy się do nich. Wydawałoby się, że nie można o nich powiedzieć nic więcej – nic nowego ani ciekawego. Tymczasem przy bliższej analizie ukazują się niezwykle i zaskakujące własności badanych tworów.

„Weźmy pod lupę” jeden z takich zbiorów. Jest nim sfera – dokładniej sfera trójwymiarowa. Wszyscy wiemy, co to jest sfera dwuwymiarowa: powierzchnia kuli, zbiór punktów przestrzeni jednakowo oddalonych od pewnego punktu ustalonego, nazwanego środkiem. Ta definicja bez problemu przenosi się na wyższe wymiary. Czyli: sferą n -wymiarową o środku P i promieniu r jest zbiór punktów przestrzeni $(n+1)$ -wymiarowej, których odległość od P wynosi r . Gdy mówimy o odległości, to mamy na myśli tę naturalną, euklidesową.

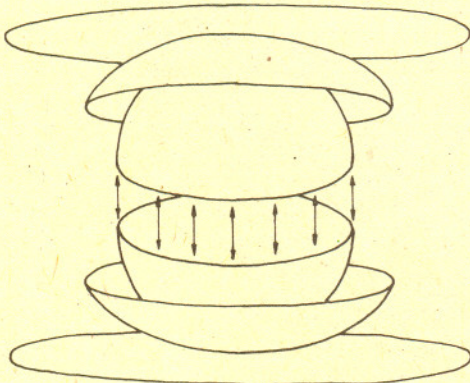
Z punktu widzenia topologii nie ma znaczenia, jaki jest promień sfery ani w którym miejscu przestrzeni znajduje się środek. Ważne jest jedynie, by zbiór był homeomorficzny (topologicznie równoważny) ze sferą. Dla uproszczenia więc badamy sferę o środku w $(0, \dots, 0)$ i promieniu 1. Możemy zatem zapisać:

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Nas interesuje „sfera trójwymiarowa”, tj. S^3 . Słowo „trójwymiarowa” mogłoby sugerować, że można ją sobie łatwo wyobrazić lub narysować – przecież nasza intuicja pracuje w trzech wymiarach! Niestety tak nie jest. Zgodnie z definicją S^3 jest podzbiorem przestrzeni czterowymiarowej, a więc postać naszego tworu wcale nie jest taka prosta.

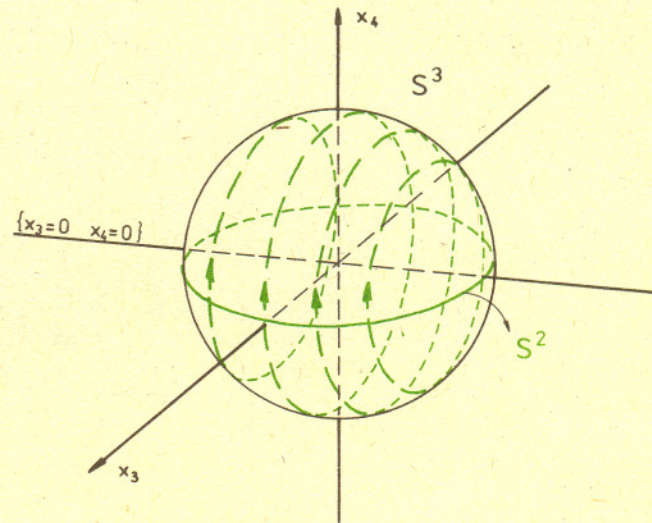
Podamy kilka opisów i przepisów na konstrukcję sfery trójwymiarowej. Ze względu na to, że w naszej przestrzeni nie można jej zobaczyć w całości, posłużymy się analogią, porównując S^3 z jej kuzynką – sferą dwuwymiarową, czyli „pocziwą” zwykłą sferą S^2 .

Jak przykładowo powstaje sfera S^2 ? Bierzemy dwa koła (nieco rozdmuchujemy) i skleamy brzegami (którymi są okręgi). Otrzymany twór jest topologicznie równoważny sferze. Zauważmy, że podobnie możemy skonstruować okrąg – powstaje on jako sklejenie końcami dwóch odcinków – kul jednowymiarowych.

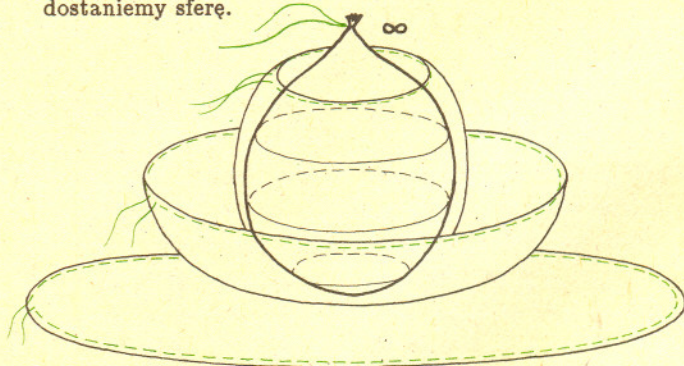


A w przypadku S^3 ? Jeśli dwie kule skleimy brzegami (czyli dwuwymiarowymi sferami), to otrzymamy sferę trójwymiarową. Trudno sobie jednak to wyobrazić.

Może więc tak: S^2 dostajemy w wyniku obracania okręgu S^1 dookoła jednej z jego osi symetrii. Wobec tego S^3 powinno powstać, gdy sferę S^2 obrócimy wokół jednej z jej płaszczyzn symetrii (ta płaszczyzna jest zbiorem punktów stałych w tym obrocie!). Przypuśćmy, że obracamy naszą sferę „dookoła” płaszczyzny $\{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Wtedy obrazem punktu $(x_1, x_2, x_3, 0)$ należącego do S^2 będzie punkt $(x_1, x_2, x_3 \cos \alpha, x_3 \sin \alpha)$, dla pewnego $\alpha \in [0, 2\pi)$, który, oczywiście, jest elementem S^3 . Czy przemawia to do intuicji?



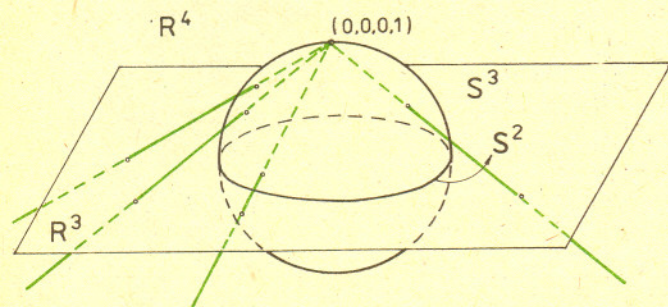
Żeby otrzymać okrąg, nie musimy wcale sklejać dwóch odcinków; wystarczy, że w jednym odcinku skleimy końce. W celu skonstruowania S^2 rozważmy koło (dwuwymiarową kulę). Jeśli brzeg – czyli okrąg – ściągniemy do punktu (tak, jak zawiązuje się np. koniec balonu z gumy), to dostaniemy sferę.



Teraz już wiemy, co będzie dalej: należy w kuli jej brzeg – sferę ściągnąć do punktu, a powstanie S^3 . Tu także są problemy z praktyczną realizacją, ale z pomocą może przyjść pewne dobrze znane matematykom odwzorowanie. Jest nim rzut stereograficzny, wprowadzony przez Ptolemeusza około 160 roku. Można go określić paroma, bardzo podobnymi sposobami; opiszemy jeden z nich.

Przypomnijmy, że S^2 jest sferą o środku w zerze i promieniu 1. Wybierzmy płaszczyznę przechodzącą przez 0. W prostokątnym układzie współrzędnych może to być płaszczyzna o równaniu $z = 0$. Z punktu $(0,0,1)$ – bieguna S^2 prowadzimy proste. Jeśli nie są one równoległe do płaszczyzny, to przecinają zarówno sferę, jak i płaszczyznę – w obu przypadkach w dokładnie jednym punkcie! Punktom sfery (bez bieguna północnego) odpowiadają wzajemnie jednoznacznie punkty płaszczyzny. Gdyby nie ten biegun, to przekształcenie byłoby bardzo porządne. Gdyby tak do płaszczyzny dołączyć jeszcze jeden punkt... Właśnie, dodanie do płaszczyzny punktu, nazwanego „punktem w nieskończoności”, uczyni ją topologicznie identyczną ze sferą. Odwzorowaniem określającym tę identyfikację jest rzut stereograficzny. Jest to dokładnie taka sama sytuacja jak w przypadku, gdy ściągaliśmy brzeg koła. Teraz „zwijamy” płaszczyznę i „w nieskończoności zlepiamy w jeden punkt”.

Podobne przekształcenie możemy zdefiniować dla sfer dowolnego wymiaru.



Przytoczmy wzory dla S^3

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right).$$

Przekształcenie odwrotne określone jest następująco

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow \left(\frac{2\xi_1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{2\xi_2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{2\xi_3}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2} \right).$$

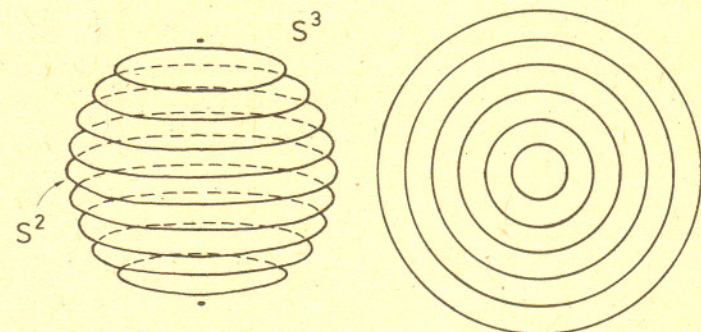
Zatem sfera trójwymiarowa jest to przestrzeń R^3 uzupełniona punktem w nieskończoności. Wystarczy do naszej przestrzeni dołączyć (w odpowiedni sposób) jeden punkt, aby otrzymać S^3 .

Na zwykłej sferze: jeśli wokół ustalonego punktu zaczniemy kreślić okręgi, to, oczywiście, promienie ich będą rosły, ale tylko do pewnego momentu – gdy osiągną promień sfery. Potem znów będą maleć. Podobnego efektu należy oczekiwać w S^3 . Gdy wokół dowolnego punktu zaczniemy konstruować sfery (typu S^2), to będziemy – oczywiście – przy każdej następnej sferze zużywać coraz więcej materiału. W pewnym momencie ze zdziwieniem stwierdzimy, że mimo iż sfery przez nas budowane obejmują poprzednie, to zużywamy coraz mniej materiału – maleje ich promień. W R^3 jest to niemożliwe! Rozsądnie jest promień tej największej sfery nazwać promieniem S^3 .

Jest tak, jak w przypadku S^2 ; porównując współśrodkowe okręgi leżące blisko siebie nie zauważymy nieznacznego zakrzywienia sfery. Analogicznie: zakrzywienie S^3 powoduje, że odpowiednie sfery dwuwymiarowe nie zamykają w sobie sfer poprzednich, ale są nieznacznie „obok”. Oczywiście dzieje się to w R^4 , zatem trudno jest to sobie wyobrazić. Ale – podsumowując – S^3 to tak, jakby wykrzywiona, zagięta przestrzeń z dolepionym punktem.

Spróbujmy to opisać jeszcze inaczej. Wędrowiec udający się przed siebie, w dowolnym kierunku na S^2 , po pewnym czasie wróci do punktu wymarszu. Na sferze trójwymiarowej będzie tak samo! Gdyby wędrowiec w S^3 ruszył w jednym kierunku i szedł nie zmieniając go, to w końcu doszedłby do miejsca, z którego wyszedł – pod warunkiem, że żyłby wystarczająco długo.

Jeśli przetniemy sferę S^2 płaszczyzną, to otrzymamy okręgi lub w granicznych przypadkach – punkty. Natomiast przecinając sferę S^3 przestrzenią R^3 , dostaniemy normalną dwuwymiarową sferę. Gdy S^3 będzie zmieniać położenie, to jej ślady będą się zmniejszać lub zwiększać. Nigdy jednak promienie sfer dwuwymiarowych nie przekroczą promienia S^3 . Przekonać się o tym można, ustalając jedną ze zmiennych we wzorze opisującym sferę trójwymiarową. Dostaniemy wzór na sferę dwuwymiarową. Przy zmianie parametru (czwartej współrzędnej) zmieniać się będzie promień sfery dwuwymiarowej. Mając ślady S^3 na R^3 (jakby poziomicę) można sobie wyrobić pewien pogląd na całą sferę. Błędem byłoby jednak porównywanie sfery trójwymiarowej z cebulą, gdyż S^3 nie jest zbudowana z koncentrycznych warstw – sfer. Ich środki przesuwają się w kierunku czwartego wymiaru. Przyczyną tego jest owo wykrzywienie, o którym już wspominaliśmy. Podobnie okręgi koncentryczne nie utworzą sfery dwuwymiarowej; trzeba środki tych okręgów poprzesuwać w trzecim wymiarze.



Jeszcze jeden opis – tym razem nie mający dwuwymiarowego odpowiednika. Podnosząc wymiar, okrąg zastępowaliśmy sferą. Czy jest to jedyna możliwość? Nie! Innym dwuwymiarowym odpowiednikiem okręgu jest torus – czyli dętka (bo torus można przedstawić jako iloczyn kartezjański okręgów: $T = S^1 \times S^1$). Czyżby sferę trójwymiarową można było utworzyć z torusów?

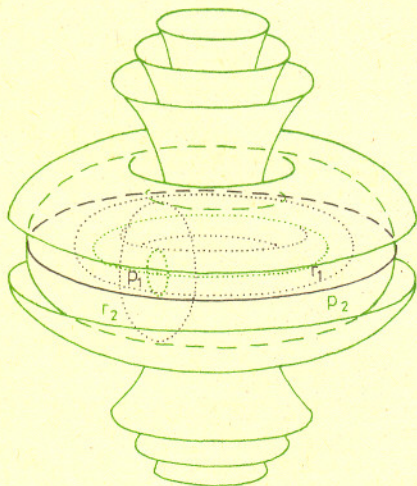
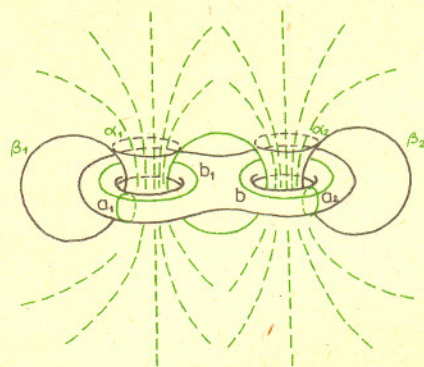
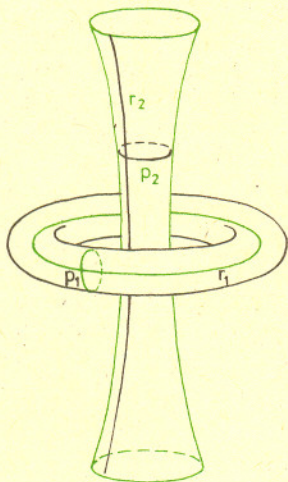
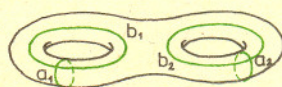
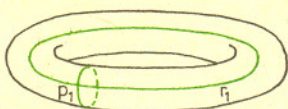
Przepis jest następujący: „Weź dwa pełne torusy. Sklej je brzegiem, ale w taki sposób, by równoleżniki jednego torusa przyklejać do południków drugiego, a południki do równoleżników. Jeśli to zrobisz, otrzymasz sferę trójwymiarową.”

Czy coś takiego można sobie wyobrazić? Spróbujmy. Weźmy dwa pełne torusy T_1 i T_2 . Narysujmy na każdym z nich równoleżnik i południk. Oznaczmy je odpowiednio: r_1, p_1 i r_2, p_2 . Rozetnijmy T_2 wzdłuż jednego z południków (różnego od p_2) i przewlecmy przez (naturalną) dziurę w T_1 . Możemy przyjąć, że pełny torus T_2 jest zbudowany z warstw – zwykłych torusów dwuwymiarowych. W samym „centrum” jest okrąg (po którym porusza się środek koła generującego pełny torus). Po rozcięciu mamy pełny cylinder – rodzinę powierzchni cylindrycznych. Zaczniemy teraz sklejać brzegi każdej z tych powierzchni, wywijając je na zewnątrz wokół torusa T_1 .

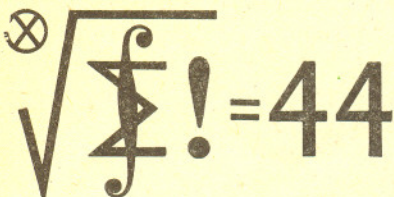
Otrzymamy rodzinę torusów obejmujących T_1 . Zauważmy, że po takiej operacji na brzegu T_2 równoleżnik r_2 stał się południkiem, a południk p_2 równoleżnikiem. Więcej, wszystkie południki stały się równoleżnikami i odwrotnie. Można już bez przeszkód sklejać odpowiednie równoleżniki i południki. Pozostał jeden problem – odcinek centralny powstały po rozcięciu okręgu. Jeśli do \mathbb{R}^3 dołożymy punkt w nieskończoności, to końce tego odcinka możemy połączyć właśnie w tym punkcie. Ale to jest przecież S^3 ! Rozcięty torus odzyskał swoją postać, tylko jest teraz przenicowany.

Parafrazując nasz przepis możemy powiedzieć: gdy wytniemy pełny torus z S^3 , wówczas to, co pozostanie, jest homeomorficzne także z pełnym torusem.

Sferę trójwymiarową można opisać na wiele innych i to znacznie bardziej skomplikowanych sposobów. Na przykład: S^3 jest wynikiem sklejenia dwóch podwójnych, pełnych torusów – precelków; równoleżniki na brzegu jednego precla sklejaemy z południkami drugiego i odwrotnie.



Można też sklejać jeszcze bardziej zawiłe figury, takie jak precle z wieloma dziurkami. Ponadto sklejenia mogą być przeprowadzone nie wzdłuż południków i równoleżników, ale wzdłuż bardziej zawiłych krzywych. Musimy jednak przy tym bardzo uważać, gdyż wynik sklejenia może być skrajnie różny od oczekiwanego (nawet zlepianie torusów na ogół nie daje sfery). Więcej, nie jest znana ogólna recepta, dzięki której moglibyśmy przed klejeniem dowiedzieć się, co otrzymamy. Przydałoby się wiele twierzeń typu: „jeśli figura ma takie to a takie własności, to jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową”. Dzięki nim dużo łatwiej moglibyśmy przewidzieć wyniki skomplikowanych operacji. Można to porównać do pieczenia ciasta: metoda, według której kleimy, to nic innego, jak konkretny przepis. Niestety – przepisów, za pomocą których dostajemy konkretne ciasto (u nas: sferę trójwymiarową), w książce kucharskiej matematyków jest stanowczo za mało.



Zadania z matematyki nr 175, 176

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1988

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

175. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40^\circ$. Na półprostej AB znajdujemy taki punkt D , że $|AD| = |BC|$. Wyznaczyć kąty trójkąta ADC .

176. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$\left(x^2 + x + \frac{n}{2}\right)^n > \frac{1}{2} (x^{2n} + (x+1)^{2n}).$$

Zadanie 176 zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z numeru 5/1988

Przypominamy treść zadań:

171. Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC prowadzimy proste AP , BP , CP , przecinające przeciwległe boki odpowiednio w punktach A' , B' , C' . Dowieść, że długość pewnego boku trójkąta ABC przekracza sumę odległości punktu P od punktów A' , B' , C' .

172. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (x_n) :

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{ne}.$$

171. Niech AB będzie najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Jest on dłuższy od każdego z odcinków AA' , BB' , CC' . Niech D i E będą takimi punktami boku AB , że $DP \parallel AC$, $EP \parallel BC$. Niech wreszcie D' i E' będą punktami leżącymi odpowiednio na bokach AC i BC , dla których $DD' \parallel BB'$, $EE' \parallel AA'$ (rysunek). Z podobieństwa trójkątów ABB' i ADD' i z nierówności $|AB| > |BB'|$ wnosimy, że $|AD| > |DD'| = |PB'|$. Analogicznie $|BE| > |PA'|$. Z podobieństwa trójkątów ABC i DEP (w skali $|CC'| : |PC'|$) i z nierówności $|AB| > |CC'|$ wnosimy, że $|DE| > |PC'|$. Dodając otrzymane nierówności otrzymujemy

$$|AB| = |AD| + |DE| + |EB| > |PB'| + |PC'| + |PA'|.$$

przy czym $x_{n+1} < z < x_n$. Stąd

$$\begin{aligned} nz > nx_{n+1} &= nx_n^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{e} > nz^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{e} = \\ &= f\left(z, \frac{1}{n}\right) + nz - \frac{1}{e} = nz. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność kończy krok indukcyjny i dowodzi nierówności (1) dla $n = 1, 2, 3, \dots$ (czyli monotoniczności ciągu (x_n)).

Istnieje zatem granica $s = \lim x_n \geq 1/e$.

Oznaczmy: $x_n^n = y_n$.

Zachodzi równość

$$(4) \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n, \quad \text{gdzie } t_n = nex_n^{1-\frac{1}{n}}.$$

Ponieważ $t_n \rightarrow \infty$, $t_n/n \rightarrow es$, to

$$\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right)^{n/t_n} \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{es}}.$$

Wobec tego, zgodnie z (4),

$$s = \lim x_n = \lim \sqrt[n]{y_n} = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{es}},$$

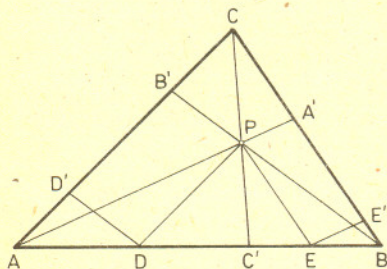
czyli

$$(5) \quad s^* = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}.$$

Funkcja $\varphi(x) = x^x$ osiąga w punkcie $1/e$ (i tylko w tym punkcie) swoją wartość minimalną. Zatem jedynym rozwiązaniem równania (5) jest liczba $s = 1/e$. Jest to szukana granica.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 165 /WT=2,88/ i 166 /WT=1,79/
z numeru 2/1988

Krzysztof Hryniewiecki - Białystok 44,87pkt
Krzysztof Jedziniak - Katowice 41,77pkt
Adam Ruszel - Krosno 40,58pkt
Andrzej Pawłowski - Zabrze 38,92pkt
Adam Przeździecki - Warszawa 38,50pkt
Pan Hryniewiecki - pięćdziesiąty piąty
w Klubie 44 M.



172. Zauważmy najpierw, że jeśli $x_n > 1/e$, to także

$$x_{n+1} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{ne} = \frac{1}{e} \left(e^{1/n} - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{e}.$$

Zatem podany wzór rekurencyjny nie traci sensu (podstawy potęg są dodatnie) i określa ciąg o wyrazach $x_n > 1/e$.

Wykażemy, że ciąg (x_n) jest malejący. Niech

$$f(x, y) = \frac{1}{y} (x^{1-y} - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Nierówność $x_{n+1} < x_n$ jest (jak nietrudno sprawdzić) równoważna temu, że

$$(1) \quad f\left(x_n, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{e}.$$

Relację (1) udowodnimy przez indukcję. Dla $n = 1$ jest $f(1, 1) = 0$. Załóżmy, że (1) zachodzi dla pewnego n (a więc $x_{n+1} < x_n$) i przypuśćmy, że dla $n + 1$ analogiczna nierówność nie zachodzi:

$$(2) \quad f\left(x_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{e}.$$

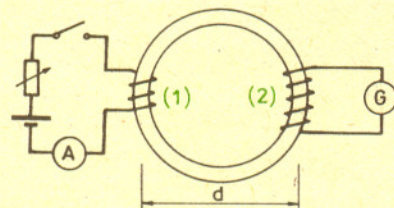
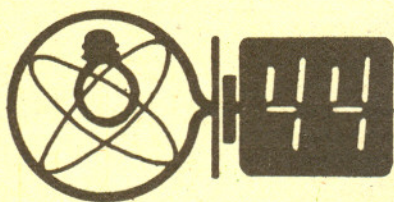
Różniczkując funkcję f względem obu zmiennych stwierdzamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \text{dla } \begin{cases} 1/e < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

Z (2) otrzymujemy więc

$$(3) \quad f\left(x_{n+1}, \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{e}.$$

Wobec (1) i (3) istnieje liczba z , dla której $f\left(z, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$,



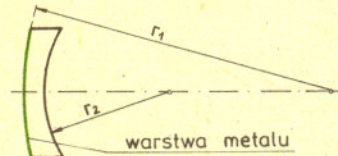
Rys.1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1988

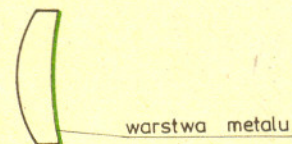
Przypominamy treść zadań:

69. W okularach krótkowidza przednia - wypukła powierzchnia wypukło-wklęsłych soczewek o zdolności skupiającej $-4 D$ została pokryta cienką warstwą metaliczną, umożliwiającą widzenie do tyłu równie ostre jak przez okulary. Jakie są promienie krzywizny obu powierzchni soczewek? Czy istnieje możliwość podobnego udoskonalenia okularów dalekowidza?

70. Na pierścieniowym rdzeniu z miękkiego ferromagnetyka nawinięto dwie cewki (rys.1). Cewkę (1) połączono



Rys.2



Rys.3

Czołówka ligi sędziowskiej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 65 /WT=3,10/ i 64 /WT=2,27/
z numeru 2/1988

Bogusław Makielewicz	- Brodnica	42,96pkt
Piotr Baża	- Toruń	34,84pkt
Roman Nusiał	- Katowice	27,22pkt
Piotr Keczyski	- Warszawa	26,80pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	26,68pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	25,61pkt
Aleksander Surma	- Myśków	20,87pkt
Robert Repucha	- Gołdap	20,70pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Zadania z fizyki nr 73, 74

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1988

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

73. Na krawędzi stołu o wysokości H kładziemy kulkę o promieniu R ($R \ll H$). Kulka zaczyna się zsuwać ze stołu bez tarcia. W jakiej odległości od stołu upadnie ona na podłogę?

74. Dlaczego patrząc na rząd lamp na ulicy odnosimy wrażenie, że wszystkie są jednakowo jasne, chociaż znajdują się w różnej odległości od nas? Dlaczego reguła ta nie stosuje się do gwiazd o takiej samej jasności powierzchniowej, położonych w różnych odległościach od Ziemi?

z regulowanym źródłem prądu, cewkę (2) z galvanometrem balistycznym. Podczas włączania w obwód cewki (1) prądu o natężeniu I galvanometr wykazywał przepływ ładunku Q :

I (mA)	3	5	10	20	50	100	200	500
Q (μC)	10	30	130	450	700	860	920	1000

Wyznaczyć względną przenikalność magnetyczną materiału rdzenia w zależności od natężenia pola magnetycznego i przedyskutować otrzymane wyniki. Średnica pierścienia wynosi $d = 10$ cm, pole przekroju rdzenia - $S = 1$ cm², liczby zwojów: cewki (1) - $n_1 = 314$, cewki (2) - $n_2 = 2400$, całkowity opór obwodu cewki (2) - $R = 380 \Omega$.

69. Zdolność skupiająca soczewki przedstawionej na rysunku 2 wyraża się wzorem

$$(1) \quad N = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

gdzie f - ogniskowa soczewki, r_1 i r_2 - promienie krzywizny obu jej powierzchni, n - współczynnik załamania szkła. Promienie odbijające się od warstwy metalicznej (z zwierciadło wklęsłe) w kierunku oka przechodzą dwukrotnie przez soczewkę. Zdolność skupiająca tego układu, składającego się z dwóch soczewek o zdolności skupiającej N i zwierciadła wklęsłego o promieniu krzywizny r_1 , wynosi $2N + 1/f_x$, gdzie $f_x = r_1/2$ jest ogniskową zwierciadła. Zdolność skupiająca tego układu ma być równa N . Stąd wynika

$$(2) \quad r_1/r_2 = (n + 1)/(n - 1).$$

Z (1) i (2) otrzymujemy $r_1 = -2f$, $r_2 = -2f(n - 1)/(n + 1)$. Dla $N = -4 D$ ($f = -25$ cm oraz $n = 1,53$) odpowiednie wartości promieni krzywizny wynoszą $r_1 = 50$ cm, $r_2 = 10$ cm. Podobnie działające szkła dalekowidza wyglądałyby jak na rysunku 3.

70. Podczas zamykania obwodu cewki (1) w cewce (2) indukuje się siła elektromotoryczna

$$E = n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

(Φ - strumień wektora indukcji magnetycznej w rdzeniu), powodująca przepływ prądu o natężeniu $I_2 = E/R$. Całkowity ładunek, który przepływa przez obwód cewki (2) w tym procesie, jest równy

$$(1) \quad Q = n_2 \Phi / R,$$

gdzie Φ jest strumieniem wektora indukcji magnetycznej w rdzeniu dla ustalonego natężenia prądu I w cewce (1). Wartość tego strumienia wyznaczamy przy założeniu, że linie sił pola magnetycznego nie wychodzą z rdzenia. Długość tych linii wynosi πd , wobec tego z prawa Ampère'a otrzymujemy wartość natężenia pola magnetycznego

$$(2) \quad H = n_1 I / \pi d.$$

Wartość wektora indukcji magnetycznej, określona zależnością

$$(3) \quad B = \mu_0 \mu_r H$$

(μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni, μ_r - względna przenikalność magnetyczna rdzenia), jest zatem równa

$$(4) \quad B = \frac{n_1 \mu_0 \mu_r I}{\pi d}.$$

Ponieważ $\Phi = BS$, ze wzorów (1) i (4) otrzymujemy

$$Q = \frac{n_1 n_2 \mu_0 \mu_r S I}{\pi d R}$$

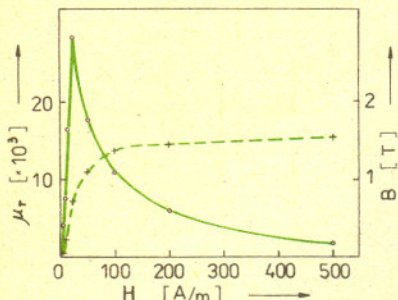
Stąd wyznaczamy

$$(5) \quad \mu_r = \frac{\pi d R Q}{n_1 n_2 \mu_0 S I}$$

Wykorzystując wzory (2), (5) i podstawiając $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ obliczamy pary wartości H , μ_r odpowiadające podanym wartościom pomiarowym I , Q :

H [A/m]	3	5	10	20	50	100	200	500
μ_r	4 200	7 600	16 400	28 400	17 600	10 800	5 800	2 500

Charakter zależności $\mu_r(H)$ widać najlepiej na wykresie (rys.4): początkowo μ_r silnie (w przybliżeniu liniowo) rośnie ze wzrostem H , a następnie maleje. Na wykresie przedstawiono dodatkowo zależność wartości wektora indukcji B w rdzeniu (obliczonej ze wzoru (3)) od natężenia pola H (linia przerywana) – ma ona kształt typowy dla ferromagnetyka, dążąc do nasycenia. Za przebieg zjawiska są odpowiedzialne mikroskopowe procesy przesuwania granic domen magnetycznych oraz obrotów wektora namagnesowania poszczególnych domen (w silnych polach H).

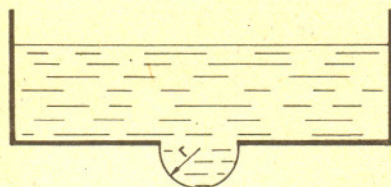


Rys.4



Rozwiązanie zadania F 252.

Ponieważ ciecz nie zwilża szkła, to w otworze zacznie się tworzyć kulisty bąbelki cieczy. Ciśnienie, jakie wywiera warstwa powierzchniowa takiego bąbelka, którego promień r przyjmujemy za (w przybliżeniu) równy promieniowi otworka (rys.), jest skierowane do wewnątrz i wynosi $p = 2\sigma/r$, gdzie σ oznacza wartość napięcia powierzchniowego cieczy.



Fakt proporcjonalności p do σ/r łatwo można wynioskować z analizy wymiarowej. Ponieważ wymiar napięcia powierzchniowego σ jest równy $[\sigma] = \text{N/m}$, to jedynym wyrażeniem mającym wymiar ciśnienia – N/m^2 , utworzonym z wielkości charakteryzujących bąbelki (tj. σ i r) jest właśnie iloraz σ/r . Ogólnie ciśnienie pod zakrzywioną powierzchnią cieczy określa tzw. prawo Laplace'a $p = p_0 + \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, gdzie p_0 jest ciśnieniem w przypadku płaskiej powierzchni, a R_1 i R_2 określają główne promienie krzywizny; w przypadku kuli $R_1 = R_2 = r$. Dopóki siła ciśnienia wywieranego przez bąbelki będzie większa od działającego w dół parcia cieczy ρgh (ρ – gęstość cieczy, h – wysokość słupa cieczy), dopóty ciecz nie będzie się wylewać z pojemnika. Warunek ten możemy zapisać w postaci

$$\frac{2\sigma}{r} \geq \rho gh, \quad \text{skąd} \quad h \leq \frac{2\sigma}{r\rho g}$$

Rozważmy następujący problem: przypuśćmy, że dysponujemy wagą szalkową bez odważników, na której możemy wykonać n ważeń. Mamy k kul ($k \geq 3$), o których wiadomo, że co najwyżej jedna spośród nich różni się wagą od pozostałych – jest lżejsza lub cięższa. Naszym zadaniem jest ustalenie: czy taka kula rzeczywiście istnieje, znalezienie jej i określenie, czy jest lżejsza czy cięższa. Pytanie brzmi następująco: jakie jest największe k , dla którego zadanie jest wykonalne?

Oszacowanie narzuca się od razu: n ważeń może dać co najwyżej 3^n wyników, a możliwych sytuacji (każda z kul może być lżejsza, cięższa, lub wszystkie mogą mieć tę samą wagę) jest $2k + 1$, stąd

$$2k + 1 \leq 3^n, \quad \text{co daje} \quad k \leq \frac{3^n - 1}{2}$$

Okazuje się jednak, że dla $k > \frac{3^n - 3}{2}$ jest to zadanie niewykonalne. Aby to pokazać, rozpatrzmy dwa przypadki:

1) W pierwszym ważeniu na szalki kładziemy po $r < \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ kul. Wówczas, w przypadku równowagi, w następnych $n - 1$ ważeniach będziemy musieli rozstrzygnąć, która z $2(k - 2r) + 1$ możliwości (każda spośród nie ważonych kul może być lżejsza, cięższa bądź wszystkie równe) zachodzi. No, ale $n - 1$ ważeń daje tylko 3^{n-1} rozstrzygnięć, a $2(k - 2r) + 1 > 2\left(\frac{3^n - 3}{2} - 2\left(\frac{3^{n-1} - 1}{2}\right)\right) + 1 \geq 3^{n-1}$.

2) W pierwszym ważeniu na szalki położymy po $r \geq \frac{3^{n-1} + 1}{2}$ kul. Wówczas w przypadku nierównowagi następne $n - 1$ ważeń musiałoby rozstrzygnąć, która z $2r$ możliwości (każda kula z jednej szalki może być cięższa, a z drugiej lżejsza) zachodzi. Ale $2r \geq 2\frac{3^{n-1} + 1}{2} > 3^{n-1}$ – źle!

Z drugiej strony dla $k = \frac{3^n - 3}{2}$ zadanie jest wykonalne: ponumerujemy kule liczbami od 1 do $\frac{3^n - 3}{2}$. W k -tym ważeniu, w zależności od tego, czy numer kulki ma w zapisie trójkowym na k -tej pozycji 0 czy 2, kładziemy ją na lewej bądź prawej szalce (jeżeli 1, to nie kładziemy na żadnej).

Niech teraz $r = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i w_{i+1}$, gdzie:

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli w } i\text{-tym ważeniu lewa szalka przeważała,} \\ 2, & \text{jeżeli w } i\text{-tym ważeniu prawa szalka przeważała,} \\ 1, & \text{jeżeli była równowaga.} \end{cases}$$

Jeżeli $r < \frac{3^n - 1}{2}$, to cięższą od pozostałych jest kula o numerze r . Jeżeli $r = \frac{3^n - 1}{2}$, to ciężary wszystkich kul są równe. Jeżeli $r > \frac{3^n - 1}{2}$, to lżejszą od pozostałych jest kula o numerze $3^n - 1 - r$.

W związku z powyższym zadaniem (jak widać – w pełni rozwiązany) nasuwa się problem: co będzie, gdy pozwolimy, by mogły być 2 kule „falszywe”. Jaka będzie wtedy największa liczba k , dla której zadanie jest wykonalne? Należy wówczas sprecyzować treść: np. zdecydować się czy dopuszczamy, aby kule „falszywe” różniły się wagą itp. A co będzie, gdy pozwolimy trzem kulom być kulami „falszywymi”? Zachęcam do zajęcia się tym tematem.

Powodzenia!

Michał WOJCIECHOWSKI

Drobiazgi

Kiedy potrząsa się puszką zawierającą dużą kulę i wiele małych, duża kula „wypływa” nawet wówczas, jeśli ma gęstość większą niż małe. Można więc rozdzielać mieszaninę cząstek różnej wielkości przez potrząsanie pojemnikiem.

Każdy się zgodzi, że $a \cdot 0 = 0$, z czego wynika, że $\frac{0}{0}$ może być równe a , gdzie a jest dowolnie obraną liczbą. Należy więc badać, czemu też może być równy stosunek zer. Najlepiej po prostu skracać ułamek $\frac{0}{0}$, aż w liczniku bądź w mianowniku, albo w obu jednocześnie zero zniknie.

Co to za żarty? To wcale nie żarty – tak uprawiał analizę Leonhard Euler. A przecież doszedł do wspaniałych rezultatów.

Źródłem energii gwiazd jest – jak wiadomo – termojądrowa synteza helu z wodoru. Reakcja ta może zachodzić na dwa sposoby: bezpośrednio w samym wodorze (cykl p-p) lub z udziałem katalizatorów (cykl CNO), którymi są jądra węgla, azotu i tlenu. Reakcje te zachodzą z bardzo różną wydajnością. W temperaturze niższej od 16 mln K cykl CNO praktycznie nie ma znaczenia, powyżej zaś 19 mln K dominuje, o ile oczywiście w gwieździe obecne są te trzy niezbędne katalizatory. Ich ilość potrzebna, by spełniły swoje zadanie, wynosi nie więcej niż 2% masy gwiazdy i od tej drobnej domieszki zależy w ogromnym stopniu przebieg jej ewolucji.

Michel Chasles w połowie ubiegłego wieku udowodnił, że izometrie płaszczyzny to przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem. Fakt ten wszedł do programu szkoły w Polsce w 1967 roku i opuścił tę szkołę wraz z przyszłorocznymi maturzystami.

Ze wszystkich komet najbliższej Ziemi przeszła kometa Lexella 1 VII 1770. Minęła ona Ziemię w odległości 2,3 mln km. Głowa komety miała wtedy średnicę kątową $2^{\circ}40'$, a więc pięć razy większą niż Księżyc. Natomiast odkryta najbliższej Ziemi była kometa z 1702 r., mianowicie 20 IV tego roku znajdowała się w odległości 6,5 mln km.

Cząstka naładowana poruszająca się w ośrodku przezroczystym z prędkością większą niż prędkość rozchodzenia się światła w tym ośrodku wysyła promieniowanie w kierunku tworzącym z jej prędkością taki kąt Θ , że

$$\cos \Theta = \frac{c}{nv},$$

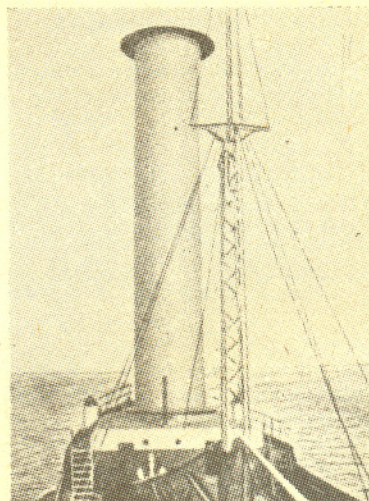
gdzie c – prędkość światła w próżni, n – współczynnik załamania ośrodka, v – prędkość cząstki. Zjawisko to, odkryte przez Pawła Aleksiejewicza Czerenkowa w 1936 roku, jest wykorzystywane w detektorach szybkich cząstek.

Supernowe w naszej Galaktyce obserwuje się średnio co około 400 lat. Jednak chińskie kroniki donoszą o dwóch rozblyskach gwiazd: w roku 386 (w Strzelcu) i 393 (w Skorpionie). Jest to przypadek rekordowo krótkiego odstępu czasu między kolejnymi wybuchami supernowych.

Jeśli przyjmiemy pierwsze cztery postulaty Euklidesa, to następujące fakty będą równoważne piątemu postulatowi:

- istnieje prostokąt,
 - punkty równo oddalone od danej prostej leżą na dwóch liniach prostych,
 - istnieją trójkąty podobne, ale nie przystające,
 - wysokości trójkąta przecinają się,
 - przez punkt wewnątrz kąta ostrego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona,
 - na trójkącie można opisać okrąg
- i, oczywiście, wiele innych.

A. Flettner zbudował w latach dwudziestych statek „Buckau” poruszający się dzięki wykorzystaniu zjawiska Magnusa. Siłę „ciągu” zapewniały wielkie rotory wyglądające na naszym rysunku jak kominy – ich obrót podczas wiania wiatru powodował powstawanie siły prostopadłej do kierunku wiatru (*Delta* 7/1988). Poziome tarcze nakrywające rotory zwiększały siłę ciągu prawie dwukrotnie.

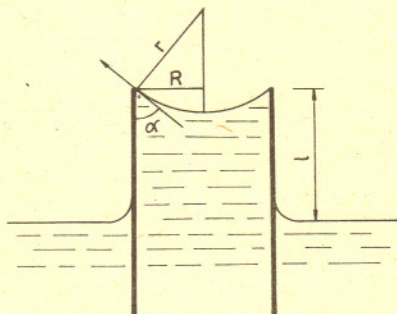


Rozwiązanie zadania F 253.

Ciecz dojdzie do końca kapilary tworząc menisk wklęsły. Siły napięcia powierzchniowego styczne do powierzchni cieczy będą tworzyć ze ścianką kapilary pewien kąt α . Dlatego siła podtrzymująca słupek cieczy w kapilarze (tzn. równoważąca jego ciężar – patrz rys.) będzie równa

$$F = 2\pi R\sigma \cos \alpha,$$

gdzie R – promień kapilary, σ – współczynnik napięcia powierzchniowego.



Z drugiej strony ciężar słupka cieczy wynosi

$$Q = \pi R^2 l \rho g.$$

Zakładamy, że jego wysokość jest równa l . Porównując oba wyrażenia otrzymujemy

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{2\sigma}{l\rho g},$$

gdzie, jak wynika z rysunku, $R/\cos \alpha$ jest równe poszukiwanemu promieniowi krzywizny r menisku. A więc $r = \frac{2\sigma}{l\rho g}$.

W sierpniu 1975 roku miłośnicy astronomii jako pierwsi (uprzedzając zawodowych astronomów) zaobserwowali pojawienie się nowej gwiazdy w konstelacji Łabędzia (*Nova Cygni*). Dwaj licealiści z Grudziądza stali się współodkrywcami tego efektownego obiektu niebieskiego. Czy trudno jest dostrzec pojawienie się nowej gwiazdy? O ile tylko jest ona dostatecznie jasna, dla osoby mającej dobrą orientację na niebie – nie. Obecnie gwiazdy nowe odkrywane są „masowo” – po kilka w ciągu roku. Jednak znacznie rzadziej trafia się obiekt na tyle jasny, by jego pojawienie się można było dostrzec bez użycia teleskopu. Samego „pojawienia się” nie należy traktować zbyt dosłownie – oznacza ono jedynie nagły wzrost jasności gwiazdy już istniejącej. W tym sensie gwiazdy nowe są jednym z typów gwiazd zmiennych – tj. gwiazd, których blask ulega bardziej lub mniej regularnym zmianom.

Trudno co prawda liczyć na szczęśliwy przypadek zaobserwowania gwiazdy nowej, warto jednak nabrać wprawę w ocenianiu jasności gwiazd zmiennych, aby w przyszłości nie przeoczyć ewentualnych ciekawych zjawisk na niebie. Miłośnikom astronomii polecamy obserwacje gwiazd zmiennych pulsujących (np. cefeid, typu RR *Lyrae* czy o *Ceti*) oraz zaćmieniowych (szerzej piszemy o nich w tym numerze *Delty*).

Przed przystąpieniem do obserwacji należy ułożyć odpowiedni program. Zawsze wybieramy gwiazdę zmienną, która w ciągu przewidywanej na obserwację nocy powinna znajdować się dość wysoko nad horyzontem (co najmniej 25°). Dobór gwiazd zależy od wprawy obserwatora i ewentualnie posiadanego instrumentu, choć pewne zmienne można obserwować również gołym okiem. Głównym czynnikiem wyboru powinna być amplituda i czas trwania zmian jasności. Początkujących obserwatorów zachęcamy do obserwacji gwiazd regularnych, o amplitudzie zmian blasku około 1 mag i szybko zmieniających swą jasność. Aby zdobyć doświadczenie w ocenianiu zmian jasności, należy na początek obserwować dobrze znane gwiazdy zmienne, takie jak np. δ *Cephei*, η *Aquilae*, β *Lyrae*, β *Persei*. Dane dotyczące tych gwiazd zamieszczamy w tabelce.

Zmienna	Jasność w min. i w max. (mag)	Okres (dni)	Przykładowe gwiazdy porównania
η <i>Aquilae</i>	4,1 – 5,4	7,17664	$\theta, \beta, \delta, \nu, \iota$ <i>Aql</i>
δ <i>Cephei</i>	3,9 – 5,1	5,36634	$\alpha, \beta, \zeta, \xi, \iota, \nu$ <i>Cep</i>
β <i>Lyrae</i>	3,3 – 4,2	12,9327	$\gamma, \zeta, \kappa, \eta, \mu$ <i>Lyr</i>
β <i>Persei</i>	2,1 – 3,4	2,86739	$\alpha, \delta, \nu, \epsilon, \gamma$ <i>Per</i>

Osoby o większej wprawie mogą wyszukać interesujące zmienne w *Roczniku Astronomicznym Obserwatorium Krakowskiego*, gdzie podawane są tzw. efemerydy – zakresy zmian blasku, okresy, współrzędne gwiazd. Na podstawie tych danych warto wyznaczyć przewidywany moment minimum jasności, gdyż dobrze jest, w miarę możliwości, ułożyć program tak, by można było zaobserwować obie gałęzie krzywej blasku – malejącą i rosnącą.

Oprócz zmiennej należy również wybrać w jej sąsiedztwie dwie gwiazdy stałe, zwane gwiazdami porównania, do których będą odnoszone obserwacje. Jedna z nich powinna być jaśniejsza, a druga słabsza od zmiennej w jej normalnym blasku. Dla zwiększenia dokładności lepiej wybrać dwie lub trzy takie pary.

Kolejny ważny etap przygotowań polega na sporządzeniu mapki okolicy danej gwiazdy z zaznaczeniem literami *a, b, c, ...* gwiazd porównania. Wyszukiwanie gwiazd w atlasie podczas obserwacji byłoby ogromnie uciążliwe.

Z gotowym programem, mapkami okolicy gwiazdy, dobrze chodzącym zegarkiem, notatnikiem i latarką można przystąpić do wizualnych obserwacji jasności. Bezpośrednio przed obserwacjami wzrok obserwatora powinien odpocząć – dobrze jest przez około 1/2 godziny przyzwyczaić go do ciemności. Wszystkie wizualne metody ocen blasku wykorzystują bardzo dużą czułość wzroku. Polecamy powszechnie stosowaną metodę wprowadzoną ponad sto lat temu przez Argelandera, udoskonaloną przez Nijlanda i Błażkę. Jasność zmiennej porównuje się z dwiema gwiazdami stałymi, a oceny różnic podaje się w stopniach. Reguły określania różnic blasku są następujące: gdy nie można zdecydować, która z gwiazd jest jaśniejsza, przypisujemy im 0 stopni różnicy, 1 stopień przypisujemy różnicy spostrzeżonej po dłuższej obserwacji i decyzji, że jedna z gwiazd jest jaśniejsza, 2 stopnie odpowiadają różnicy zauważonej po dokładnym przyjrzeniu się, ale bez trudu spostrzeganej i wreszcie 3 stopnie – różnicy jasności od razu dostrzeżonej. Jeszcze większą różnicę ocenia się na 4 stopnie, jednak są to oceny obciążone największym błędem i należy ich, w miarę możliwości, unikać. Odpowiedni dobór gwiazd porównania powinien stanowić zabezpieczenie przed koniecznością określania zbyt dużych różnic jasności. Zapis obserwacji powinien być następujący: jeśli od razu widać, że gwiazda porównania *a* jest jaśniejsza od zmiennej *v* (tak zwykle oznacza się zmienne od łac. *variatus*), piszemy *a3v*; jeśli zmienna jest jaśniejsza o 2 stopnie od *b*, piszemy *b2v*. Obie te oceny składają się na dwustronną obserwację *a3v2b*.

Przy słabym świetle latarki, aby nie psuć przystosowania wzroku do ciemności, notujemy wyniki podając również czas z dokładnością zależną od okresu zmiennej. Przy okresach krótszych od jednej doby określa się czas z dokładnością do 1/2 minuty, przy okresach kilkudniowych wymagana jest dokładność do 2 minut, dla kilkunastu dni – do 15 minut, a dla zmiennych długookresowych wystarcza dokładność kilku godzin albo nawet całej doby.

Odpowiednio duża liczba ocen jasności przeprowadzonych w czasie danego cyklu zmian stanowi materiał obserwacyjny, na podstawie którego można potem wyznaczyć krzywą blasku i moment minimum jasności. Dokładne opracowanie wyników jest etapem równie ważnym, jak przeprowadzenie samych obserwacji. Napiszemy o tym następnym razem.

mgr Joanna UDALSKA

Nasza okładka:

Giotta – sonda, która 14 III 1986 r. zbliżyła się na odległość 600 km do jądra komety Halleya. Szczegóły w *Delcie* 11/1988.