

Dnia 16 maja 1988 roku  
zmarła

prof. dr Zofia Krygowska  
wybitny dydaktyk matematyki,  
animatorka rozwoju tej dyscypliny  
w Polsce i na świecie,  
autorka podręczników,  
autorka Delt.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 8(176)

O pewnym problemie typu Burnside'a <i>prof. dr Wiesław Żelazko</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 3
Interferometr atomowy <i>dr hab. Jan Kalinowski</i>	str. 4
Domino	str. 6
Mała Delta	str. 8
Kącik prac uczniowskich	str. 9
Ekstynkcja międzygalaktyczna <i>mgr Jan Koroński</i>	str.10
Zadania	str.11
Trudne zadanie <sup>o</sup> w Klubie 44...	str.12
Klub 44	str.14
Drobizgi	str.16
Sztynność figur	str.17

W następnym numerze:  
Gwiazdy zaćmieniowe

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc.dr Jan A. Gaj  
doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
doc.dr Tomasz Hofmokl – v-przewodniczący  
doc.dr Tadeusz Jarzembowski  
doc.dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki  
dr Jan Rempala  
prof.dr Konrad Rudnicki  
prof.dr Grzegorz Sitarski  
prof.dr Józef I. Smak  
prof.dr Kazimierz Stępień  
prof.dr Mieczysław Subotowicz  
doc.dr Andrzej Szymacha  
doc.dr Aniela Wolska  
prof.dr Andrzej Woszczyk  
prof.dr Wojciech Żakowski –  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
dr Tomasz Kwast  
mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
dr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe

RSW „Prasa-Książka-Ruch”

Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa

tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń

ul. Poznańska 38

00-689 Warszawa

tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w Prasowych

Zakładach Graficznych

RSW „Prasa-Książka-Ruch”

w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28

Nr. zam. 1939/88 U-54.

Skład systemem TeX

wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

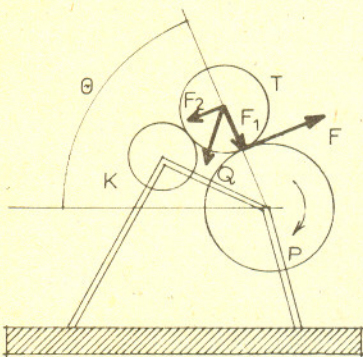
Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,- półrocznej zł 420,- rocznej zł 840,-

- dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy  
– instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.
  - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych – indywidualnych prenumeratorów:  
– osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli  
– osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
– do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
– do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-



**Rozwiązanie zadania F 250.** Siłę ciężkości walka  $T$  rozłożymy na dwie składowe: siłę prostopadłą do nacisku na walec  $P$ , równą  $F_1 = Mg \sin \Theta$  i siłę prostopadłą do niej  $F_2 = Mg \cos \Theta$ .



Kontakt między walcem  $T$  i bębnem  $K$  będzie utrzymany, jeśli zaznaczona na rysunku siła  $F$  („ciągnąca” papier), z jaką walec  $P$  działa na walec  $T$  (i która powoduje jego ruch obrotowy) będzie mniejsza lub równa sile  $F_2$ , tj.

$$F \leq Mg \cos \Theta$$

(znak równości odpowiada zerowej wartości nacisku  $T$  na  $K$ ). Równanie ruchu obrotowego walcu  $T$  w przypadku, gdy nie wywiera on nacisku na bęben  $K$ , ma postać  $I\epsilon_1 = Fr$ , tj.  $(Mr^2/2)\epsilon_1 = Mgr \cos \Theta$  ( $\epsilon_1$  oznacza przyspieszenie kątowe walcu  $T$ ). Stąd

$$\epsilon_1 = \frac{2g}{r} \cos \Theta.$$

Liniowe przyspieszenia punktów na obwodzie  $T$  i  $P$  są jednakowe, co oznacza, że  $\epsilon_1 r = \epsilon R$ . Otrzymujemy stąd

$$\epsilon = \epsilon_1 \frac{r}{R} = \frac{2g}{R} \cos \Theta,$$

gdzie  $R$  oznacza promień walca  $P$ .

Generatorami grupy izometrii ośmiokąta foremego są np. obrót o kąt  $\pi/4$  i symetria względem prostej przechodzącej przez wierzchołek wielokąta i jego środek symetrii. Rząd obrotu o kąt  $\pi/4$  równy jest 8, rząd obrotu o  $5\pi/4$  też 8, a rząd obrotu o  $\pi/2$  jest równy 4.

Generatorami grupy izometrii płaszczyzny są np. wszystkie symetrie osiowe albo też symetrie względem wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt i jeszcze jednej prostej nie przechodzącej przez ten punkt. Rząd symetrii osiowej jest równy 2. Rząd przesunięcia o wektor niezerowy jest nieskończony. Rząd obrotu o kąt  $\frac{2k}{n}\pi$ , gdzie  $k$  i  $n$  są względnie pierwsze, jest równy  $n$ . Rząd obrotu o kąt niewspółmierny z  $\pi$  jest nieskończony.

*Prof. dr Wiesław Żelazko*

W artykule tym chciałbym zapoznać Czytelnika z pewnym otwartym do tej pory problemem z teorii grup oraz przedstawić związek tego problemu ze słynnym problemem Burnside'a. Z pojęciem grupy Czytelnicy *Delta* mieli okazję spotkać się niejednokrotnie, samo pojęcie wchodzi zresztą w zakres programów szkolnych (np. grupy izometrii). Nie będę więc omawiał szczegółów, przypomnę jedynie definicję i przejdę od razu do rzeczy. Niepusty zbiór  $G$  z operacją  $(x, y) \mapsto xy$  prowadzącą od par elementów do elementów  $G$  nazywamy grupą, jeśli spełnione są następujące aksjomaty:

(i) Działanie grupowe jest łączne, tj. dla dowolnych  $x, y, z \in G$  mamy

$$x(yz) = (xy)z.$$

(ii) Istnieje element  $e$  (jedność grupy) taki, że

$$xe = ex = x$$

dla każdego elementu  $x$  grupy  $G$  (element taki jest jedyny).

(iii) Każdy element  $x$  grupy  $G$  ma odwrotność  $x^{-1}$ , tj. taki element, że

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

(odwrotność taka jest wyznaczona przez  $x$  jednoznacznie).

Podgrupą grupy  $G$  nazywamy podzbiór, który sam jest grupą ze względu na działanie grupowe. Wynika stąd, że każda podgrupa zawiera jedność  $e$  oraz wraz z parą elementów zawiera ich iloczyn  $xy$  i ich odwrotności. Ogólnie mówiąc, jeśli  $G_0$  jest podgrupą  $G$  i zawiera elementy  $x$  i  $y$ , to zawiera również wszystkie elementy postaci

$$(1) \quad z = x^{a_1} y^{b_1} x^{a_2} y^{b_2} \dots x^{a_n} y^{b_n},$$

gdzie wykładniki  $a_i$  i  $b_i$  są liczbami całkowitymi (przyjmujemy przy tym  $x^0 = e$  dla dowolnego  $x$ ). Łatwo zauważyć, że dla dowolnych  $x$  i  $y$  w grupie  $G$  zbiór elementów postaci (1) jest podgrupą  $G$ , przy czym jest to najmniejsza podgrupa zawierająca  $x$  i  $y$ . Mówimy o tej podgrupie, że jest generowana przez  $x$  i  $y$ . Podobnie można mówić o podgrupie  $G_0 \subset G$  generowanej przez elementy  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Składa się ona z iloczynów potęg (dodatnich lub ujemnych) tych elementów. Jeżeli  $G_0 = G$ , to mówimy, że grupa  $G$  ma  $k$  generatorów i elementy  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) są jej generatorami. Oczywiście jakieś inne elementy w innej ilości również mogą generować grupę  $G$ . Istnieją grupy nie mające skończonej liczby generatorów, tj. większe od każdej swojej podgrupy generowanej przez skończoną liczbę elementów (tak jest dla grupy wszystkich przesunięć prostej). Jeśli idzie o grupę generowaną przez pojedynczy element  $x$ , to mamy dwie możliwości. Albo istnieje liczba naturalna  $k$  taka, że  $x^k = e$ ; wtedy istnieje też taka najmniejsza liczba naturalna  $k_0$ , zwana rzędem elementu  $x$ , że  $x^{k_0} = e$ . W tym przypadku grupa generowana przez  $x$  ma dokładnie  $k_0$  elementów  $x^0 = e, x, x^2, \dots, x^{k_0-1}$  i branie większych wykładników prowadzi do poprzednich elementów, bo  $x^{k_0} = x^0, x^{k_0+1} = x$  itd. Grupa taka jest z punktu widzenia teorii grup nieodróżnialna od grupy obrotów  $k_0$ -kąta foremego (mówimy, że obie grupy są izomorficzne). W drugim przypadku wszystkie potęgi  $x^k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , są różne i grupa generowana przez  $x$  jest izomorficzna z grupą wszystkich liczb całkowitych z dodawaniem jako działaniem grupowym. Mówimy w tym przypadku, że rząd elementu  $x$  jest nieskończony. Oczywiście grupa generowana przez jeden element musi być przemienna, tj.  $xy = yx$  dla dowolnych jej elementów.

W roku 1902 W. Burnside postawił pytanie, czy grupa o skończonej liczbie generatorów, której wszystkie elementy mają rzędy wspólnie ograniczone (tj. istnieje stała  $M$  taka, że rzędy wszystkich elementów grupy są skończone i nie większe od  $M$ ), musi być grupą skończoną. Problem ten przez ponad pół wieku pozostawał nie rozstrzygnięty, nie znana była też odpowiedź na jego słabszą wersję, w której warunek wspólnej ograniczoności rzędów elementów grupy jest zastąpiony przez skończoność tych rzędów (warunek oczywisty, bo element rzędu nieskończonego generuje grupę nieskończoną). Problem ten rozstrzygnęli matematycy radzieccy. W roku 1959 P. S. Nowikow zaanonsował (bez podania dowodu) istnienie nieskończonej grupy o dwóch lub więcej generatorach, dla której rzędy wszystkich elementów są dzielnikami pewnej liczby  $n \geq 72$ .



## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

### HOLOGRAFIA PRZY UŻYCIU PROMIENI RENTGENA

Czy można zajrzeć do wnętrza żywej komórki nie niszcząc jej przy okazji? Odpowiedź na to pytanie była dotychczas negatywna. Mikroskopy optyczne wykorzystują zbyt długie fale świetlne by mogły być użyte do badań najmniejszych bakterii czy wirusów. Z kolei mikroskopy elektronowe, których zdolność rozdzielcza dochodzi do pojedynczych angstromów ( $10^{-10}$  m) nie mogą być łatwo użyte do badania struktur biologicznych, gdyż można badać za ich pomocą tylko cienkie warstwy i to w próżni. Jednakże rezultaty otrzymane w 1987 roku w Laboratorium imienia Lawrence'a Berkeley należącym do Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley pozwalają na więcej optymizmu. Do badań komórek użyto bowiem "miękkich" promieni rentgena o długościach fal między 25 a 32 Å. W zasadzie promienie X o długościach fal pomiędzy 10 Å a 50 Å powinny umożliwić badania obiektów o rozmiarach mniejszych niż 100 Å. W praktyce problemem poważnie utrudniającym dotychczasowe eksperymenty była słaba spójność źródeł promieni rentgena jak i słaba zdolność rozdzielcza filmów rejestrujących to promieniowanie. Dzięki wykorzystaniu nowych źródeł promieni X zbudowanych w Narodowym Laboratorium w Brookhaven oraz specjalnych warstwowych detektorów przekroczono po raz pierwszy w holografii rentgenowskiej granicę zdolności rozdzielczej  $1 \mu\text{m} = 1000 \text{ Å}$ . Obiektem badań były grupy enzymów, tworzące kulki o wymiarach  $0,85 \mu\text{m} \pm 0,12 \mu\text{m}$  znajdujące się w komórkach trzustki szczura. Badano warstwy o grubości 2000 Å. W ciągu 80 minut ekspozycji przez próbkę przechodziło  $8 \times 10^{11}$  fotonów, co odpowiada dawce około 200 megaradów. Rozproszone promieniowanie przechodzące interferowało na detektorze warstwowym (zbudowanym z odpowiedniego polimeru) z wiązką nierozproszoną tworząc hologram. Wytrawienie owego polimeru wytwarzało wypukłą rzeźbę, która następnie była pokrywana warstwą złota i palladu, oglądana pod mikroskopem elektronowym i ostatecznie analizowana za pomocą komputera. Kulki enzymów znajdujące się wewnątrz żywych komórek były doskonale widoczne na ekranie. Uzyskana w ten sposób rekordowa zdolność rozdzielcza wyniosła około 400 Å, co jest wynikiem 20 razy lepszym niż poprzednie rezultaty. Autorzy pracy twierdzą, że wynik ten może ulec dalszej poprawie. Wydaje się więc, że opanowana została nowa, nieniszcząca metoda badania wnętrza mikroskopijnych obiektów biologicznych.

Słabszą wersję rozstrzygnął negatywnie E. S. Gołod w roku 1964, a pełny dowód wersji silniejszej podali w roku 1968 S. I. Adjan i P. S. Nowikow; rezultat był nieco słabszy niż anonsowany uprzednio przez Nowikowa. Udowodnili oni, że jeżeli  $n$  jest liczbą nieparzystą, nie mniejszą niż 4381 i  $m \geq 2$ , to istnieje grupa nieskończona o  $m$  generatorach, której każdy element spełnia warunek  $x^n = e$ . Jest to jeden z najtrudniejszych wyników teorii grup, trzyczęściowa praca Adjana i Nowikowa liczy ponad 300 stron druku i używa ponad 500 lematów.

Problem, o którym chcę tu opowiedzieć, również formuluje się bardzo prosto. Nie jest on do tej pory rozwiązany. Mianowicie jest to pytanie następujące: czy jeżeli dla grupy  $G$  istnieje stała  $C$  taka, że dla dowolnych skończonych podzbiorów  $A$  i  $B$  grupy  $G$  mamy

$$(2) \quad C|AB| \geq |A||B|,$$

to grupa  $G$  musi być skończona? W powyższym wzorze symbol  $|Z|$  oznacza moc (liczbę elementów) zbioru  $Z$ , a iloczyn  $AB$  jest zbiorem wszystkich iloczynów  $xy$ , gdzie  $x \in A$  i  $y \in B$ . Problem ten postawiony przez autora tego artykułu w roku 1974 powstał w związku z pewnymi rozważaniami z zakresu tzw. analizy harmonicznej na grupach. Jest on również związany z klasycznym problemem Burnside'a. Aby się o tym przekonać, zauważmy, że jeżeli grupa  $G$  spełnia (2) i  $G_0$  jest podgrupą skończoną grupy  $G$ , to  $|G_0| \leq C$ . Istotnie: mamy  $G_0 G_0 = G_0$ , bo iloczyny elementów podgrupy  $G_0$  są w tej podgrupie, a każdy element  $x$  podgrupy  $G_0$  można zapisać jako iloczyn  $x = ze$ . Kładąc w (2)  $A = B = G_0$  otrzymujemy  $C|G_0| \geq |G_0|^2$ , czyli  $|G_0| \leq C$ . Zauważmy dalej, że każda podgrupa przemienna grupy  $G$  spełniającej warunek (2) musi być skończona. Niech bowiem  $G_0$  będzie podgrupą przemienną grupy  $G$ . Gdyby grupa  $G_0$  zawierała element  $x_0$  rzędu nieskończonego, to wszystkie potęgi  $x_0^n$  byłyby różne i wtedy ustalając dowolnie  $n$  położylibyśmy  $A = B = \{x_0^0 = e, x_0, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}\}$ . Wtedy  $|A| = |B| = n$ , oraz  $AB = \{e, x_0, x_0^2, \dots, x_0^{2n-2}\}$ , a więc  $|AB| = 2n - 1$ . Ze wzoru (2) wynika wtedy  $C(2n - 1) \geq n^2$ , co, oczywiście, nie może być prawdą dla dużych  $n$ , a  $n$  wybieraliśmy dowolnie. Wynika stąd, że rzędy wszystkich elementów są skończone. Ponieważ elementy generują podgrupy mocy równej swojemu rzędowi i moce podgrup skończonych  $G$  są nie większe niż  $C$ , więc i rzędy wszystkich elementów grupy  $G$  mają rzędy wspólnie ograniczone przez  $C$ , a więc sytuacja jest taka jak w problemie Burnside'a. Ponieważ nie jest dla nas istotne, czy podgrupy przemiennie grupy spełniającej warunek (2) są skończone, dowód ten opuścimy, ale Czytelnik korzystając z dotychczas udowodnionych faktów może ten dowód otrzymać. Jeżeli istnieje grupa nieskończona spełniająca warunek (2), to wybierając w niej dowolne elementy  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , gdzie  $n \geq C$  i generując przez te elementy podgrupę  $G_0$  grupy  $G$  otrzymamy podgrupę, która ma więcej niż  $C$  elementów, a zatem jest nieskończona, ma skończenie wiele generatorów oraz rzędy wszystkich jej elementów są wspólnie ograniczone przez liczbę  $C$ . Rozstrzyga więc ona wspomniany wyżej problem Burnside'a. Wynika stąd, że jeżeli postawiony przez nas problem ma rozwiązanie negatywne, tj. istnieje grupa nieskończona spełniająca warunek (2), to konstrukcja takiej grupy jest bardzo trudna, bo zawiera w sobie rozwiązanie bardzo trudnego problemu Burnside'a. Być może nie ma takiej grupy i rozwiązanie problemu jest pozytywne. Miałyby to interesujące konsekwencje dla analizy harmonicznej, w szczególności rozstrzygałoby to tzw. hipotezę  $L_p$  dla grup dyskretnych. Przy tym dowód takiego twierdzenia nie musi być beznadziejnie trudny. Oczywiście nie można gwarantować, że problem w ogóle da się rozstrzygnąć (zdarzają się w matematyce przypadki, że zarówno sformułowana hipoteza, jak i jej zaprzeczenie nie mają dowodów w ramach rozważanej teorii – są od niej niezależne; tak było np. ze słynną hipotezą continuum lub z pewnikiem wyboru), ale miejmy nadzieję, że w tym przypadku tak nie jest.

Jeżeliby jeszcze coś założyć o grupie  $G$  spełniającej warunek (2), to wtedy łatwiej można by rozwiązać nasz problem. Na przykład zakładając przemienną grupę  $G$  i spełnianie warunku (2) można udowodnić jej skończoność (niemal to uczyniliśmy w tym artykule), podobnie można by to zrobić zakładając tzw. rozwiązalność grupy  $G$  lub czyniąc jeszcze inne założenia. Nas interesuje jednak ten problem w całej jego ogólności. Czytelnika pragnącego pogłębić tę tematykę możemy skierować do książki A. G. Kurosza *Teoria Grup* (po rosyjsku), Moskwa 1967 (wydanie III), w szczególności str. 497-500 – oczywiście nie może tam być mowy o dowodzie Adjana i Nowikowa, a nawet wynik Gołoda cytowany jest bez dowodu. Problem, o którym mowa w artykule, został postawiony (w ogólniejszej postaci dla tzw. grup lokalnie zwartych) w pracy autora *On the Burnside problem for locally compact groups*, Symposia Math. 16(1975), 409-416.



Wiosna jest porą „królowania” na niebie gwiazdozbiorów o największych powierzchniach (pisaliśmy o tym w *Delcie* 3/1988). Teraz, z nadejściem jesieni, warto przyrzeć się konstelacjom z drugiego końca listy osiemdziesięciu ośmiu gwiazdozbiorów obu półkul – tym najmniejszym.

Gwiazdozbiór	Powierzchnia w stopniach kwadratowych
<i>Cruz</i>	69
<i>Equuleus</i>	72
<i>Sagitta</i>	80
<i>Circinus</i>	93
<i>Scutum</i>	109
<i>Triangulum Australe</i>	110
<i>Reticulum</i>	114
<i>Caelum</i>	125
<i>Corona Australis</i>	128
<i>Chamaeleon</i>	132
<i>Triangulum</i>	132
<i>Musca</i>	138
<i>Volans</i>	141
<i>Mensa</i>	154
<i>Norma</i>	165
<i>Corona Borealis</i>	179
<i>Dorado</i>	179
<i>Canis Minor</i>	183
<i>Corvus</i>	184
<i>Delphinus</i>	189

Najmniejszy spośród wszystkich gwiazdozbiorów – Krzyż Południa (*Cruz*) – nie jest nigdy widoczny w naszych szerokościach geograficznych. Choć więc słabo nam znany, uważany jest za tak charakterystyczną cechę nieba południowego, jaką jest Wielka Niedźwiedzica (*Ursa Major*) dla nieba północnego. O ileż jednak jest mniejszy! Na obszarze, zajmującym zaledwie 5% powierzchni Wielkiej Niedźwiedzicy, świecą cztery jasne gwiazdy w końcach ramion Krzyża.

W naszych szerokościach geograficznych widać mniej niż połowę spośród dwudziestu gwiazdozbiorów o najmniejszych powierzchniach. Są nimi: Żrebię (*Equuleus*), Strzałę (*Sagitta*), Tarcza (*Scutum*), Trójkąt (*Triangulum*), Korona Północna (*Corona Borealis*), Mały Pies (*Canis Minor*), Kruk (*Corvus*) i Delfin (*Delphinus*). Większość z nich (z wyjątkiem Małego Psa – najlepiej widocznego zimą i Kruka – wiosną) może być zaobserwowana właśnie teraz – wczesną jesienią.

We wnętrzu wciąż jeszcze dobrze widocznego trójkąta letniego (tworzą go Deneb ( $\alpha$  *Cygni*), Wega ( $\alpha$  *Lyrae*) i Altair ( $\alpha$  *Aquillae*), na tle Drogi Mlecznej pięć niewielkich gwiazdek czwartej i piątej wielkości tworzy Strzałę. Od wschodu ze Strzałą graniczy, sporo od niej większy, choć również mały, Delfin, a z kolei jego południowo-wschodnim sąsiadem jest Żrebię. Razem te trzy gwiazdozbiory zajmują obszar mniejszy niż 1/3 powierzchni największej konstelacji obu półkul niebieskich – Węża Wodnego (*Hydrus*). Pewnych trudności może przysporzyć odnalezienie Tarczy, która podobnie jak wymienione wyżej trzy małe gwiazdozbiory nie zawiera jasnych gwiazd.

Choć właśnie teraz góruje wieczorem, dodatkowe utrudnienie w określeniu jej położenia stanowi fakt, że znajduje się dość nisko nad południowym horyzontem, na jasnym tle Drogi Mlecznej. Za to odnalezienie wspaniałej Korony Północnej, o charakterystycznym kształcie niedomkniętego kółka, nie powinno nikomu sprawić kłopotów. Trudno co prawda zaliczyć ją do jesiennych gwiazdozbiorów, jednak wciąż jeszcze pozostaje widoczna wieczorem nad zachodnim horyzontem. Po przeciwnej stronie nieba wschodzi Trójkąt, którego okres najlepszej widoczności przypadnie na przełomie jesieni i zimy.

Spoglądając na niebo nie sposób stwierdzić, że Delfin jest ponad dwa razy większy od Strzały czy Żrebięcia. A jednak wskazują na to dane zamieszczone w tabelce obok. Konieczne jest tu pewne wyjaśnienie dotyczące ustaleń granic gwiazdozbiorów.

W potocznym rozumieniu zwykliśmy za gwiazdozbiór uważać układ gwiazd o określonym kształcie, tak jak czynili to starożytni i średniowieczni astronomowie. Jednak na potrzeby nowożytnej astronomii takie, niezbyt ściśle, określenie okazało się niewystarczające. Każdy obszar na sferze niebieskiej musi być przypisany jakiemuś gwiazdozbiorowi, bo choć gołym okiem nie widać na nim żadnych gwiazd, w zasięgu teleskopów są ich tysiące i wygodnie jest mówić, że każda z nich znajduje się w określonym gwiazdozbiorze. Nic więc dziwnego, że obszary przypisywane gwiazdozbiorom bywają często znacznie większe, niż wskazują na to charakterystyczne układy gwiazd.

A jak wyznaczyć pole powierzchni tego obszaru? Nie da się wyrazić go w zwykłe używanych jednostkach powierzchni, choćby były to nie wiadomo jak duże „jednostki astronomiczne”. Nie jest wszak możliwy do określenia promień nie istniejącego realnie obiektu, jakim jest sfera niebieska. W takiej sytuacji jedyną możliwą do zastosowania jednostką powierzchni są stopnie kwadratowe – pole całej sfery (oczywiście niekoniecznie niebieskiej) jest równe 41 252,961 stopni kwadratowych. Łatwo sprawdzić, że dwadzieścia wymienionych na marginesie najmniejszych gwiazdozbiorów zajmuje obszar nie przekraczający 6% powierzchni całego nieba.

Obrady Międzynarodowej Unii Astronomicznej w 1928 roku zakończono przyjęciem uchwały o podziale nieba na 88 gwiazdozbiorów, o ściśle określonych powierzchniach w granicach pokrywających się z łukami kół godzinnych i równoleżników niebieskich (odpowiedniki ziemskich równoleżników i południków). Od tego czasu na niebie zapanował porządek. Nie jest on jednak trwały. Z biegiem czasu, wskutek precesji, siatka współrzędnych stopniowo przesuwana się i w końcu granice gwiazdozbiorów przestaną pokrywać się z kierunkami kół rektascensji i deklinacji. Również kształty samych gwiazdozbiorów ulegają, na skutek tzw. ruchów własnych gwiazd, systematycznym, choć bardzo powolnym zmianom. Za kilkadziesiąt tysięcy lat zmienią się nie do poznania. Być może wtedy Unia Astronomiczna wyda odpowiednie postanowienia odnośnie nowych granic gwiazdozbiorów.



**Rozwiązanie zadania F 251.**

Równanie ruchu środka masy kulki  $Ma = -\mu gM$  pozwala obliczyć opóźnienie  $a = -\mu g$  i prędkość środka masy ślizgającej się kulki  $v_{sm} = v - \mu g t$  ( $v$  jest prędkością początkową kulki, z jaką puszczone ją na płaszczyznę stołu). Z równania ruchu obrotowego

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mu gMR,$$

gdzie  $I = \frac{2}{5}MR^2$  jest momentem bezwładności kulki, otrzymujemy

$$\omega = -\frac{5}{2} \frac{\mu g t}{R}.$$

Prędkość punktu kulki, który styka się ze stołem, jest równa  $v_{sm} - \omega R$ . Gdy prędkość ta staje się równa zeru, to kulka zaczyna poruszać się ruchem obrotowym bez poślizgu ( $v_{sm} = \omega R$ ). Nastąpi to po upływie czasu

$$t = \frac{2}{7} \frac{v}{\mu g}$$

od momentu rozpoczęcia ruchu. Odległość, jaką pokona kulka w ciągu tego czasu, wynosi

$$S = vt - \frac{at^2}{2} = \frac{12}{49} \frac{v^2}{\mu g}.$$

a jej prędkość w tym momencie jest równa

$$v_t = v - \mu g t = \frac{5}{7} v.$$



# Interferometr atomowy

w sto lat po doświadczeniu Michelsona i Morleya

Dr hab. Jan KALINOWSKI

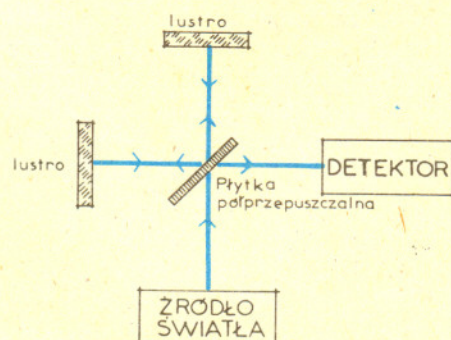
Każdemu słowo interferometr kojarzy się zapewne z nazwiskami Michelsona i Morleya. Warto może przypomnieć, że w ubiegłym roku minęła setna rocznica słynnego doświadczenia Michelsona i Morleya. Próbowali oni zmierzyć prędkość Ziemi względem eteru – hipotetycznego ośrodka, w którym miałyby rozchodzić się fale elektromagnetyczne. W 1887 r., w 34 tomie *American Journal of Science*, ukazały się dwie publikacje Michelsona i Morleya: w numerze listopadowym praca pt. *O ruchu względnym Ziemi i świetlistym eterze* i w numerze grudniowym – *Sposób wykorzystania długości fali świetlnej sodu jako praktycznego wzorca długości*. Przy pomiarze ruchu Ziemi względem eteru niezwykle istotne były precyzyjne pomiary odległości. Publikacja grudniowa była więc jakby produktem ubocznym prac nad doświadczeniem opisanym w artykule listopadowym. A jednak to ona przyniosła Michelsonowi natychmiastową sławę i w 1907 r. nagrodę Nobla. Artykuł listopadowy został naprawdę doceniony dopiero po sformułowaniu przez Einsteina teorii względności i przyniósł autorom trwałe miejsce w podręcznikach fizyki.

Do swoich doświadczeń Michelson i Morley użyli interferometru optycznego. Michelson udoskonalił interferometr, aby powtórzyć pomiar prędkości Ziemi względem eteru po raz pierwszy przeprowadzony przez niego w 1881 r. Doświadczenie dało wynik negatywny, to znaczy nie można było stwierdzić istnienia eteru. Doświadczenie wykonane w 1887 r., przeprowadzone z dziesięciokrotnie lepszą dokładnością dało znowu, tym razem bez wątpliwości, wynik negatywny. W 1899 r. Michelson w jednym z wykładów przyznał, że sam fakt skonstruowania interferometru wynagrodził mu negatywny wynik doświadczenia. Dopiero po wielu latach wynik ten nabrał znaczenia jako jeden z koronnych testów teorii względności Einsteina.

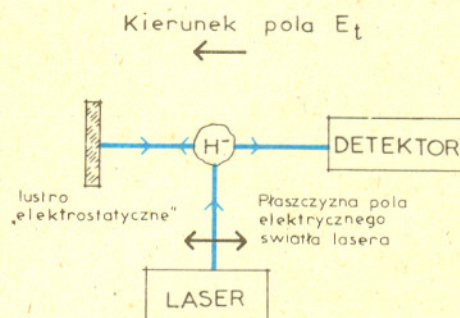
Interferometr był oczywiście znany wcześniej i używany w wielu dziedzinach nauki i techniki. Michelson wymienia w 1902 r. dziedziny, w których interferometr znalazł zastosowania: do pomiarów współczynnika załamania światła, grubości błonek mydlanych, współczynnika rozszerzalności, stałej grawitacji, skoku śrub, długości fali linii spektralnych, efektu Zeemana i pomiarów astronomicznych. Dzięki Michelsonowi interferometr optyczny stał się jednym z podstawowych precyzyjnych przyrządów w laboratoriach naukowych i przemysłowych, do czasów I Wojny Światowej.

W artykule tym zajmiemy się zupełnie nowym pomysłem wykorzystania zjawiska interferencji. Mowa tutaj będzie jednak nie o interferometrze optycznym, lecz o interferometrze atomowym, w którym elektron będzie interferował sam ze sobą. Pomysł ten został zrealizowany przez grupę doświadczalną pod kierunkiem Howarda Bryanta w laboratorium w Los Alamos, New Mexico, a wyniki badań zostały opublikowane w *Physical Review Letters* 58, 2412 (1987). Michelson próbował zmierzyć zmianę prędkości światła – w doświadczeniu Bryanta sam interferometr porusza się z prędkością bliską prędkości światła i może służyć do pomiaru charakterystycznego czasu oddziaływania fotonu z układem atomowym.

Układ doświadczalny, który autorzy nazwali interferometrem atomowym, działa podobnie jak interferometr Michelsona. Rysunek przedstawia schematycznie interferometry: optyczny i atomowy.



Interferometr Michelsona



Interferometr atomowy



**Rozwiązanie zadania M 514.**  
Przypuśćmy, że trójkąt o wierzchołkach  $z_1, z_2$  i  $z_3$  nie zawiera punktu  $O$ . Można wtedy znaleźć obrót płaszczyzny, przeprowadzający liczby  $z_1, z_2, z_3$  na liczby  $w_1, w_2, w_3$ ,  $\text{Re } w_i > 0$ . Obrót płaszczyzny zespolonej to po prostu mnożenie przez liczbę  $u$ , gdzie  $|u| = 1$ . Mamy  $w_i = u \cdot z_i$ , zatem  $\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} = \frac{1}{u \cdot z_1} + \frac{1}{u \cdot z_2} + \frac{1}{u \cdot z_3} = 0$ .

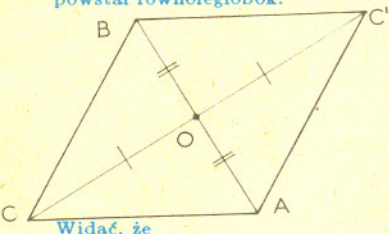
Jednak  $\text{Re } \frac{1}{w_i} > 0$ , skąd sprzeczność.



**Rozwiązanie zadania M 515.**  
Jeśli  $n = 1$ , to liczby  $n^2 + 1 = 3$ ,  $(n + 1)^2 + 1 = 5$  są pierwsze. Gdy  $n > 1$ , mamy: jeśli  $n$  jest nieparzyste, to  $n^2 + 1$  jest parzyste; jeśli  $n$  jest parzyste, to  $(n + 1)^2 + 1$  jest parzyste. Zatem jedynym rozwiązaniem zadania jest  $n = 1$ .



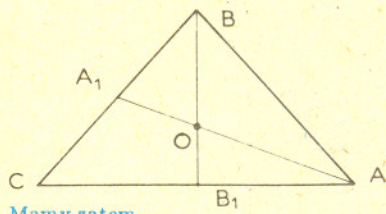
**Rozwiązanie zadania M 516.**  
Dorysujmy trójkąt  $ABC'$  tak, by powstał równoległobok.



Widać, że

$$2 \cdot CQ < AC + BC,$$

gdzie  $CQ$  jest środkową opuszczoną na bok  $AB$ . Dodając stronami trzy takie nierówności otrzymujemy pierwszą część tezy. Podobnie dowodzimy drugiej. Zauważmy, że punkt przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 2 : 1.



Mamy zatem

$$AB < AO + OB = \frac{2}{3}(AA_1 + BB_1).$$

Następnie dodajemy trzy takie nierówności.

W interferometrze optycznym Michelsona światło rozdzielone na słabo posrebrzonej płytce szklanej po przebyciu różnych dróg do luster i z powrotem interferuje w detektorze. Charakter interferencji zależy od przesunięcia fazowego fal świetlnych, co z kolei zależy od różnicy dróg optycznych.

Bryant i współpracownicy badali proces fotoodłączenia elektronów od jonów wodoru  $H^-$  w obecności słabego zewnętrznego pola magnetycznego. Światło laserowe zderzało się z relatywistyczną wiązką ujemnie naładowanych jonów  $H^-$  o energii 800 MeV powodując przejście jonu w neutralny atom wodoru z emisją elektronu. Wiązki zderzały się pod kątem  $\alpha$  (zdefiniowanym tak, że  $\alpha = 0^\circ$  dla zderzenia „czołowego”). Przez zmianę kąta  $\alpha$  można było płynnie zmieniać energię fotonu „widzianą” przez jon. Energia ta w układzie, w którym jon spoczywa, wynosi

$$E_\gamma = \gamma E_\gamma^L (1 + \beta \cos \alpha), \quad \beta = v/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

gdzie  $E_\gamma^L$  jest energią fotonów w układzie laboratoryjnym. Zdolność rozdzielcza pomiaru energii wynosiła około  $10^{-3}$  eV. W miejscu przecięcia się wiązek przyłożone było słabe pole magnetyczne  $B$  o kierunku równoległym do wiązki laserowej. W układzie spoczynkowym jonu, zgodnie z relatywistycznym prawem transformacji pól, jon „widzi” nie tylko pole magnetyczne, ale i elektryczne  $E_t$ . To pole elektryczne  $E_t$  ma kierunek prostopadły do pola  $B$  i prędkości jonu, a więc jest prostopadłe do płaszczyzny reakcji. Natężenie pola  $E_t$  zależy od wartości  $B$  i prędkości jonów. Relatywistyczne jony poruszają się z prędkością  $v = 0,842 c$ , a więc „widzą” silne pole  $E_t = vB \sin \alpha$  nawet dla słabych pól  $B$ . W doświadczeniu natężenie pola  $B$  wynosiło 0,03 T i 0,047 T, co odpowiada  $E_t$  rzędu  $10^7$  V/m.

Stałe pole  $E_t$  „widziane” w układzie spoczynkowym jonów działa na wyemitowane elektrony podobnie jak zwierciadło w interferometrze optycznym. Jeśli początkowo elektron porusza się w kierunku linii sił pola  $E_t$ , to będzie hamowany i następnie zawrócony w kierunku przeciwnym. Jego prędkość przy ponownym przejściu przez położenie początkowe będzie przeciwna do prędkości początkowej. Wygląda więc tak, jakby elektron został wyemitowany w przeciwnym kierunku, ale z pewnym opóźnieniem.

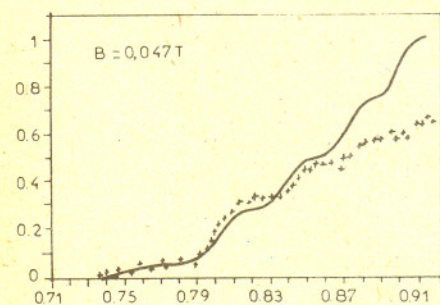
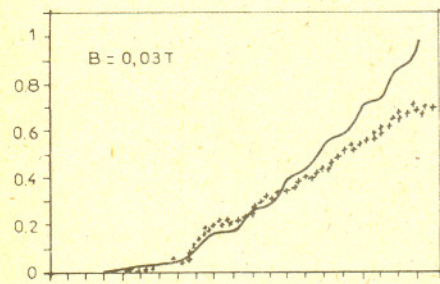
Zjawisko fotoodłączenia było badane dla dwóch polaryzacji wiązki laserowej, w których płaszczyzna pola elektrycznego światła lasera

- a) była prostopadła do płaszczyzny reakcji, tzn. równoległa do kierunku  $E_t$  – tzw. polaryzacja  $\pi$ ;
  - b) leżała w płaszczyźnie reakcji, tzn. była prostopadła do  $E_t$  – tzw. polaryzacja  $\sigma$ .
- Względna liczba fotoodłączonych elektronów przy polaryzacji  $\pi$  światła lasera dla dwóch wartości pola  $B$  jest przedstawiona na wykresach. Wyraźnie widać regularne „falowanie” danych doświadczalnych. Przy polaryzacji  $\sigma$  nie zauważono żadnej regularnej struktury i wyniki niewiele różniły się od rezultatów uzyskanych z  $B = 0$ .

Zgodnie z teorią kwantową stan elektronu wybitego przez foton jest opisany funkcją falową. Występowanie w danych doświadczalnych regularnej struktury możemy teraz wytłumaczyć jakościowo stosunkowo prosto. Przy polaryzacji  $\pi$  światła laserowego elektrony emitowane są w kierunku pola  $E_t$ . Funkcja falowa elektronu lecącego w kierunku zgodnym z  $E_t$ , „odbita” od bariery potencjalnej pola  $E_t$ , może interferować z funkcją falową elektronu wyrzuconego w przeciwnym kierunku. Jeżeli interferencja ma charakter konstruktywny (funkcje dodają się), to elektron może opuścić jon, jeśli destruktywny, to nie ma emisji. Charakter interferencji zależy od różnicy faz czy też opóźnienia funkcji falowej, tzn. od tego, jak daleko następuje „odbicie” elektronu. To z kolei zależy od energii kinetycznej elektronu, a więc od energii fotonów powodujących jego odłączenie. Elektrony o wyższej energii odlecają dalej, zanim zostaną zawrócone przez pole  $E_t$ . Dla nich „zwierciadło” znajduje się dalej. Ze wzrostem energii fotonów wzrasta liczba odłączonych elektronów. Na tle stałego wzrostu widać regularne falowanie, które odpowiada efektowi interferencji na przemian konstruktywnej i destruktywnej w miarę oddalania się „zwierciadła”.

Zanikanie interferencji przy energii fotonu  $\geq 0,88$  eV można wytłumaczyć w podobny sposób. Interferencja może zająć pod warunkiem, że odległość do elektrostatycznego „zwierciadła” nie jest zbyt duża. Jeśli czas  $\tau$  powrotu elektronu przekroczy charakterystyczny czas  $\tau_0$  oddziaływania fotonu z układem atomowym, to interferencja nie będzie mogła nastąpić, gdyż elektron musiał się już „zdecydować”: opuścić jon czy nie. W układzie spoczynkowym jonu czas przelotu elektronu o początkowej energii kinetycznej  $\epsilon$  do bariery i z powrotem można oszacować korzystając z klasycznego wzoru dla ruchu jednostajnie przyspieszonego

$$\tau = 2v_0/a = (8m\epsilon)^{1/2}/eE_t.$$



ENERGIA FOTONU

Względna liczba odłączonych elektronów jako funkcja energii fotonu. Linia ciągłą przedstawiono wyniki obliczeń teoretycznych.



Dla energii kinetycznej elektronu  $\varepsilon = 0,13 \text{ eV}$  ( $\varepsilon = \text{energia fotonu} - \text{energia progowa} = 0,88 \text{ eV} - 0,75 \text{ eV}$ ) i  $E_t = 10^7 \text{ V/m}$  otrzymujemy  $\tau_0 \approx 2,4 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ . Korzystając z zasady nieoznaczoności Heisenberga  $\tau_0 \Delta E \approx \hbar$ , możemy oszacować nieoznaczoność energii układu atomowego  $\Delta E \approx 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ , co zgadza się bardzo dobrze z oszacowaną zdolnością rozdzielczą aparatury pomiarowej. Innymi słowy, wartość energii fotonu, przy której interferencja zanika, pozwala zmierzyć czas oddziaływania fotonu z jonem wodoru.

Autorzy pokusili się o przeprowadzenie bardziej szczegółowej analizy. Wyniki ich obliczeń przedstawione są na wykresach za pomocą linii ciągłej i jakościowo zgadzają się z danymi doświadczalnymi. Pełniejsza analiza powinna uwzględniać oddziaływanie elektronu z atomem wodoru w stanie końcowym.

Dla polaryzacji  $\sigma$  światła laserowego elektrony są emitowane przeważnie w kierunku poprzecznym do pola  $E_t$ . Nie ma więc odbicia elektronu od elektrostatycznej bariery potencjału, a więc nie ma również zjawiska interferencji.

Opisany układ zachowuje się więc rzeczywiście analogicznie do interferometru optycznego. Sam interferometr – jon i elektron – porusza się z prędkością bliską prędkości światła. W tym doświadczeniu badano szereg istotnych pojęć współczesnej fizyki. Czy interferometr ten może dostarczyć nowych, precyzyjnych testów teorii względności lub mechaniki kwantowej? Być może, że podobnie jak w doświadczeniu Michelsona i Morleya, przyjdzie poczekać na odpowiedź parę lat.



## Domino

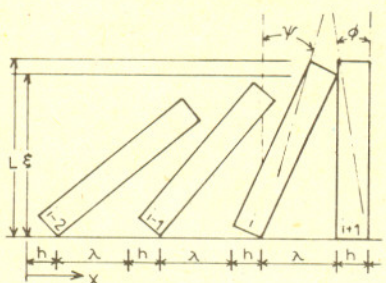
Potrącenie jednej z ustawionych w szereg kostek domina powoduje kolejne przewracanie się następnych. Zjawisko jest bardzo efektowne – znaleźli się nawet entuzjaści ustawiający setki tysięcy różnokolorowych kostek tylko po to, żeby obserwować, jak w ciągu kilkunastu sekund przewracają się „przez indukcję”, jedna po drugiej. Nakręcone podczas takich doświadczeń filmy były już wielokrotnie pokazywane w telewizji. Widać na nich wyraźnie przesuwanie się zaburzenia ze stałą prędkością. Wbrew pozorom obliczenie tej prędkości jest dosyć skomplikowane, jeżeli chcemy, by wynik był bliski wartości rzeczywistej.

Zjawisko jest bardzo proste. Przewracająca się kostka zwiększa prędkość kątową swego obrotu wokół nieruchomej krawędzi (zakładamy, że kostki nie ślizgają się po poziomym podłożu) kosztem energii potencjalnej. Uderzając w sąsiednią kostkę przekazuje jej część swojej energii kinetycznej. Uderzona kostka odskakuje „do przodu” i jeżeli uzyskuje energię kinetyczną wystarczającą do obrócenia jej o kąt  $\varphi$  zaznaczony na rysunku i odpowiadający tej fazie ruchu, w której jej środek ciężkości podnosi się, to będzie się przewracała dalej, uderzy następną itd. Początkowe prędkości po kolejnych zderzeniach mogą maleć lub rosnąć, zależy to głównie od rodzaju zderzenia i wzajemnych odległości elementów. Dla uproszczenia rozważań pominiemy przypadek wystąpienia wielokrotnego zderzenia między kolejnymi kostkami. Podobne założenie przyjął W. J. Stronge w pracy opublikowanej w 1987 roku w *Proceedings of the Royal Society of London*, A409 str. 199. Poniżej przedstawiamy w skrócie jego wyniki.

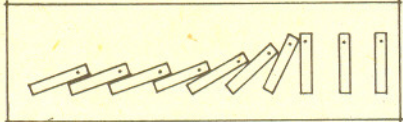
Na rysunku przedstawiony jest szereg kostek o grubości  $h$  i wysokości  $L$  rozstawionych w odległości  $\lambda$ . Zakładamy oczywiście, że kostki są jednorodne, a więc ich środki ciężkości leżą na przekątnej, na wysokości  $L/2$ . W położeniu początkowym przekątna krawędzi bocznej tworzy z pionem kąt  $\varphi = \arctg(h/L)$ , a w momencie uderzenia w sąsiada kąt  $\psi$ , przy czym  $\psi + \varphi = \arcsin(\lambda/L)$ . Krawędź kostki uderza w następną na wysokości  $\xi = L \cos(\psi + \varphi)$ . Początkową i końcową (w momencie zderzenia) prędkość kątową  $i$ -tej kostki oznaczmy odpowiednio przez  $\dot{\varphi}_i$  i  $\dot{\psi}_i$ . Jak łatwo pokazać, ich stosunek wynosi

$$\frac{\dot{\psi}_i}{\dot{\varphi}_i} = \left(1 - \frac{\Delta P_i}{K_{0,i}}\right)^{1/2},$$

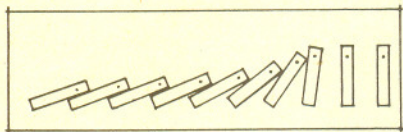
gdzie  $\Delta P_i$  oznacza zmianę energii potencjalnej, a  $K_{0,i}$  początkową energię kinetyczną.



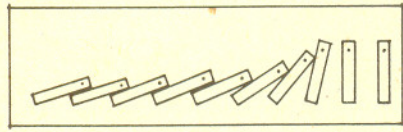




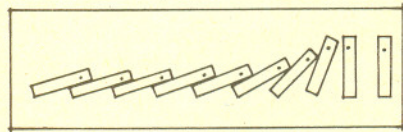
t = 0.0 ms



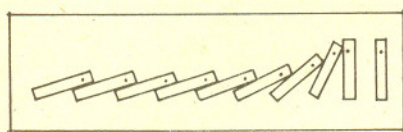
t = 6.75 ms



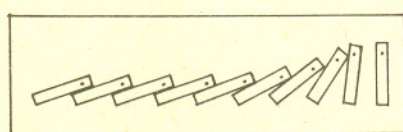
t = 13.50 ms



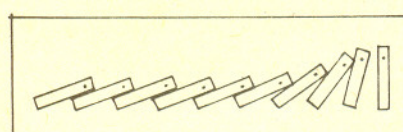
t = 20.25 ms



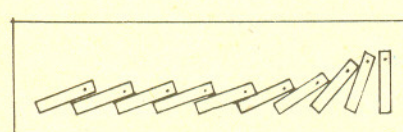
t = 27.00 ms



t = 33.75 ms



t = 40.50



t = 47.25 ms

Mamy więc również

$$\frac{\Delta P_i}{K_{0,i}} = \frac{6g \cos \varphi}{2L\dot{\varphi}_i^2} (\cos \psi - \cos \varphi).$$

Skorzystalismy tu z faktu, że moment bezwładności kostki względem nieruchomej krawędzi wynosi  $ML^2/(3 \cos^2 \varphi)$ . Pozostało nam wyznaczenie uzyskiwanej w zderzeniu prędkości kątowej  $\dot{\varphi}_{i+1}$  w zależności od wartości  $\dot{\varphi}_i$ . Należy teraz przyjąć prosty, ale realistyczny model przebiegu zderzenia. „Prawdziwe” zderzenia nie są ani doskonale sprężyste, ani doskonale niesprężyste – można ten fakt uwzględnić zakładając, że stosunek różnicy względnych prędkości powierzchni ciał przed zderzeniem i po zderzeniu wynosi  $e$  ( $e = 1$  w zderzeniu doskonale sprężystym i  $e = 0$  w zderzeniu doskonale niesprężystym). Zderzające się powierzchnie nie są też nigdy doskonale gładkie, co uwzględniamy dodając do  $p_i$  – przekazu pędu prostopadłego do płaszczyzny zderzenia – przekaz  $\mu p_i$  do niej równoległy, gdzie  $\mu$  oznacza współczynnik tarcia. Po uczynieniu takich założeń otrzymujemy, że

$$\frac{\dot{\varphi}_{i+1}}{\dot{\varphi}_i} = \frac{(1+e)}{1 + (\xi + \mu\lambda)/(\xi - \mu\lambda)} \left(1 - \frac{\Delta P_i}{K_{0,i}}\right)^{1/2}.$$

Prędkość rozprzestrzeniania się zaburzenia jest stała, gdy  $\dot{\varphi}_{i+1} = \dot{\varphi}_i$  dla każdego  $i$ . Wartość odpowiedniej prędkości kątowej wynosi

$$\dot{\varphi}_* = \omega(1+e) \left(\frac{2(\cos \varphi - \cos \psi)}{R^2 - (1+e)^2}\right)^{1/2},$$

gdzie  $\omega = (3g \cos \varphi / 2L)^{1/2}$ ,  $R = 1 + (\xi + \mu\lambda)/(\xi - \mu\lambda)$ . Zachodzi zawsze  $R > 2$  i  $e < 1$ , a więc  $R > (1+e)$ . Stała prędkość osiągana jest, gdy  $\lambda > h(1 + \cos 2\varphi)$ .

Dla sprawdzenia swojego modelu W. J. Stronge wykonał staranne doświadczenia używając kostek opisanych parametrami:  $L = 41,78$  mm,  $h = 7,58$  mm,  $\omega = 18,95$  s<sup>-1</sup>,  $e = 0,846 \pm 0,03$ ,  $\mu = 0,176 \pm 0,04$ . Odpowiedni kąt  $\varphi$  wyniósł około 10,3°. Dla  $\psi < \varphi$  nie ustala się stała prędkość rozprzestrzeniania się zaburzenia. Poniższa tabela przedstawia otrzymane wyniki wraz z wartościami teoretycznymi:

$\lambda/h$	$\varphi$	$\psi$	$\xi/L$	Zmierzona stała prędkość (m/s)	Obliczona stała prędkość (m/s)
2,89	10,3°	21,3°	0,851	1,04	0,65
3,89	10,3°	34,6°	0,708	0,97	0,80
4,51	10,3°	44,6°	0,573	0,87	0,86

Jak widać teoria zgadza się z doświadczeniem dla dużych wartości  $\lambda/h$ . Przy gęstszym ustawieniu kostek istotną rolę odgrywają wielokrotne zderzenia zwiększające obserwowaną prędkość. Pojawiały się one już po przewróceniu 3 – 4 pierwszych kostek. Rysunek przedstawia kolejne fazy ruchu w doświadczeniu z  $\lambda/h = 2,89$ . Widać na niej, jak kostka  $i - 2$  uderza w  $i - 1$  przed oderwaniem się od niej kostki  $i$ . Dodatkowe zderzenia zwiększają prędkość „podróżowania” fali zaburzenia.

Jak widać, mimo prostoty zjawiska jego opis jest dość skomplikowany, a dokładna teoria wymagałaby uwzględnienia bardzo wielu różnych możliwości jego przebiegu i znajomości własności materiałów, z których wykonane są biorące w nim udział elementy. Jest to typowe dla wszelkich problemów „życiowych”.

Poprawny opis najprostszych zjawisk „rzeczywistych” jest na ogół bardzo trudny. W tym sensie zadania matematyki są najprostsze, gdyż mogą nie mieć żadnego związku z rzeczywistością. Fizyk teoretyk musi już brać pod uwagę zjawiska zachodzące „naprawdę”, ciągle jednak może rozważać je jako izolowane od innych, zwykle im towarzyszących. Naprawdę trudne zadania rozwiązują inżynierowie – oni nie mogą pomijać czynników trudnych do opisanego, stąd używają wielu formuł empirycznych i półempirycznych, gdyż często ich zadania są zbyt trudne do rozwiązania ścisłego.

Czytelników zachęcamy do przeprowadzenia własnych badań nad układem kostek domina. Można na przykład zastanawiać się, co będzie, gdy kolejne kostki będą coraz większe. Na ile można wówczas zwiększać energię kinetyczną ich ruchu? Czy mógłby działać „wzmocniacz” mechaniczny, w którym przewracając małą kostkę po kilku zderzeniach przewracamy wielką płytę?

Opracował A. M.



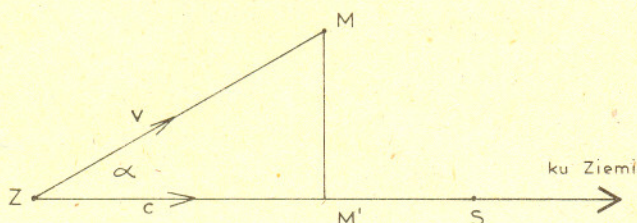


# Mała delta

## Prędkości ponadświetlne

Prędkości ponadświetlne są zakazane przez całą współczesną fizykę. Nie przeszkadza to jednak, że są obserwowane.

Wyobraźmy sobie mianowicie (rysunek), że ze źródła  $Z$  (np. z centrum kwazara) wystrzelony zostaje z dużą prędkością  $v$  obłok świecącej materii w kierunku tworzącym kąt  $\alpha$  z promieniem widzenia.

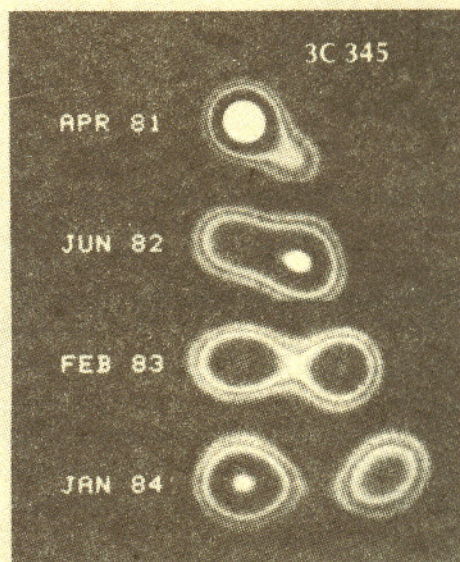


Sygnal świetlny albo radiowy, towarzyszący temu wystrzeleniu, porusza się ku Ziemi, oczywiście, z prędkością  $c = 300\ 000$  km/s. Po czasie  $t$  czoło sygnału osiąga punkt  $S$ , obłok zaś punkt  $M$ . Teraz jakkolwiek sygnał wysłany z  $M$  ku Ziemi znajdzie się w tyle za pierwszym sygnałem o  $M'S$ , czyli będzie spóźniony o  $M'S/c$ . Obserwator na odległej Ziemi odniesie więc wrażenie, że obłok przebył drogę  $M'M$  w czasie  $M'S/c$ . Ta obserwowana prędkość obłoku wyniesie zatem

$$V = \frac{vt \sin \alpha}{(ct - vt \cos \alpha)/c} = c \frac{\sin \alpha}{\frac{c}{v} - \cos \alpha}$$

Łatwo zauważyć, że na wiele sposobów można tak dobrać  $\alpha$  i  $v$  (oczywiście  $v < c$ ), że ostatni ułamek będzie dowolnie większy od 1. Np. dla  $v = 0,9c$  i  $\alpha = 20^\circ$  dostajemy  $V = 2c$ . Widzimy więc, że – krótko mówiąc – prędkości ponadświetlne są zjawiskiem tylko pozornym. Całe szczęście! Mamy liczne dowody na to, że w kwazarach zachodzą niezwykle burzliwe procesy, w wyniku których wyrzucanie materii z prędkościami przyświatelnymi jest na porządku dziennym.

Niemniej jednak zaobserwowanie bezpośrednio tego zjawiska nie jest proste. Przemieszczanie się obłoków w kwazarach nawet z prędkościami „nadświetlnymi”, oglądane z bardzo daleka, zostanie zauważone dopiero po odpowiednio długim czasie albo trzeba dysponować techniką umożliwiającą uzyskanie obrazu kwazara z ogromną rozdzielczością. W praktyce idzie się na kompromis: maksymalną rozdzielczość zapewnia radioastronomia (wykorzystanie radiointerferometrów), by dostrzec zaś zmiany obrazu kwazara, trzeba i tak odczekać lata. Na zdjęciu mamy przykład takiego zjawiska.



Widzimy tu cztery obrazy radiowe kwazara 3C345 na fali 14 cm, pochodzące z kwietnia 1981, czerwca 1982, lutego 1983 i stycznia 1984. Obłok prawy oddalił się od lewego (centrum kwazara) w ciągu trzech lat o  $0,00086$ , co w rzucie na sferę niebieską, przy znanej odległości kwazara od Ziemi, stanowi 23 lata świetlne! Wynik jest imponujący; szkoda, że nie da się stąd wyznaczyć osobno  $\alpha$  i osobno  $v$ .

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST



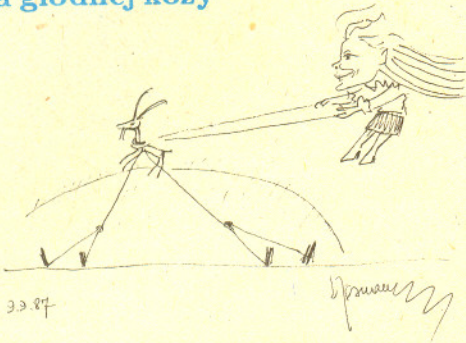
Zazwyczaj nasz kontakt z matematyką polega na rozwiązaniu sformułowanego przez kogoś zadania, sprawdzeniu czyjejs hipotezy albo na skonstruowaniu matematycznego modelu jakiegoś zjawiska czy procesu. We wszystkich tych sytuacjach mamy do dyspozycji gotowy zestaw obiektów matematycznych (figur, działań, zbiorów, relacji, funkcji), które służą nam do zrealizowania zamierzeń. I rozwiązując nasz problem poszerzamy często ten zasób matematycznych obiektów.

Można jednak zajmować się matematyką i w inny sposób. Można nie odpowiadać na żadne pytania, a tylko demonstrować jakieś nowe matematyczne obiekty tak, jak pokazuje się egzotyczne zwierzęta w menażeriach. Ostatnio wielką karierę robią fraktale w ten właśnie sposób wprowadzone do matematyki przez Mandelbrota. Robią karierę, to znaczy stają się (bo takie są ciekawe) obiektem badań matematycznych i usilnych poszukiwań, czy nie ma przypadkiem jakiegoś problemu, do którego można by je zastosować (porównaj np. *Delta* 2/1985, 3/1986, broszura *Co to jest turbulencja?*).

Takie właśnie podejście zostało zaproponowane przez Lucynę Dziedzic z Działdowa w jej ubiegłorocznej pracy na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Praca ta została nagrodzona brązowym medalem i wywołała duże zainteresowanie wśród uczestników Zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego (gdzie była prezentowana), choć nie ma w niej ani jednego udowodnionego twierdzenia czy rozwiązane zadania.

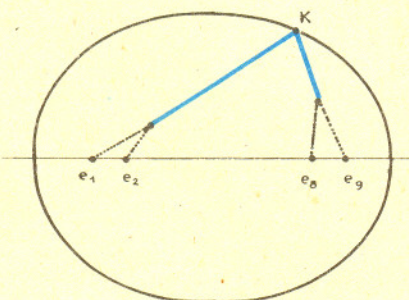
# KĄCIK PRAC uczniowskich

## Teoria głodnej kozy

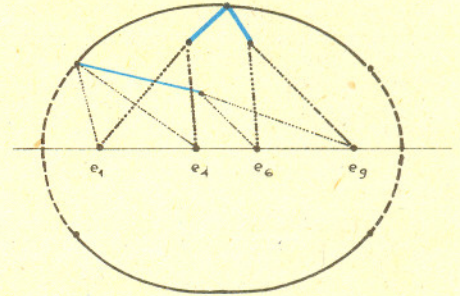


Od wieków ludzie pasą kozy na uwiezi. Tradycyjny sposób palikowania to łańcuch z jednej strony przymocowany do palika, z drugiej do kozy. Wtedy krzywa, po której może poruszać się koza, utrzymując cały czas napięty łańcuch, jest okręgiem. Jeśli przymocować oba końce łańcucha do palików (ognisk) i umożliwić kozie swobodne poruszanie się wzdłuż łańcucha, to będzie się ona (przy napiętym łańcuchu) poruszać po elipsie.

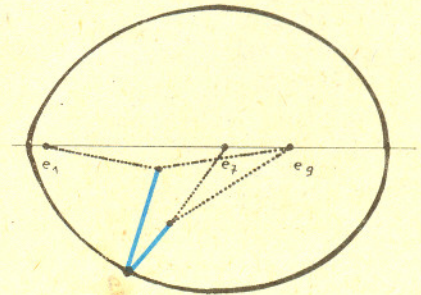
Zaczęłam się zastanawiać, co będzie, gdy użyję większej liczby łańcuchów, a mianowicie: dwóch łańcuchów ograniczających o końcach zamocowanych w ogniskach leżących na jednej prostej i łańcucha wodzącego, którego końce mogą poruszać się wzdłuż łańcuchów ograniczających. Koza przesuwa się wzdłuż łańcucha wodzącego. Krzywą, po której może poruszać się tak zamocowana koza (przy napiętych łańcuchach), nazywam eluidą (e – od elipsy, lu – z mego imienia, ida – końcówka nazw wielu krzywych).



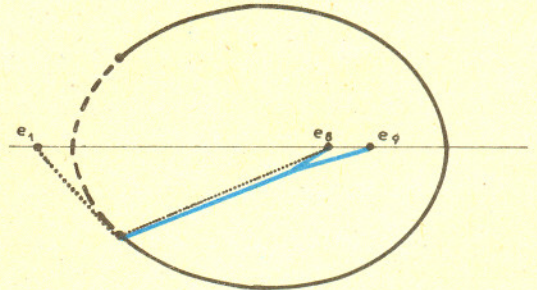
Przy pewnych długościach łańcuchów eluida może być krzywą otwartą.



Czasem otrzymujemy krzywą jajowatą.



Kolejny wariant daje krzywą jajowatą otwartą z jednej strony.



Zastanawiałam się nad różnymi pytaniami związanymi z eluidami:

- Jakie są ich równania analityczne ?
- Jaki jest obszar trawy, którą może zjeść koza ?
- Jakie krzywe powstaną, gdy ogniska umieszczę na prostych prostopadłych ?
- Jakie krzywe powstaną, gdy będę zwiększać liczbę łańcuchów ?

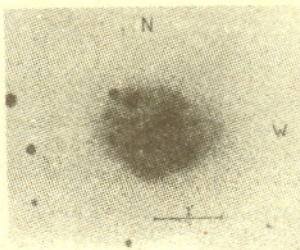
Lucyna DZIEDZIC



Mgr Jan KORŃSKI



Rys.1. Rozkład galaktyk w gwiazdozbiorze Mikroskopu wykazujący wyraźny deficyt galaktyk w obszarze zaznaczonym ciągłą linią. Ten brak galaktyk został zinterpretowany przez C. Hoffmeistera jako skutek przesłaniania przez obłok leżący bliżej nas. Tak, w 1962 r., został odkryty pierwszy obłok materii międzygalaktycznej.



Rys.2. Zaburzenie struktury galaktyki (z prawej) zostało przez Ch. Kowala (1964) zinterpretowane jako efekt przesłonięcia przez mały obłok materii międzygalaktycznej. Większa liczba losowo rozrzuconych takich obłoków spowodowałaby spadek jasności powierzchniowej galaktyki. Efekt taki byłby jednak bardzo trudny do zmierzenia. Łatwiej mierzalne są różnice barw galaktyk w obszarze „czystym” i przesłanianym, bowiem materia międzygalaktyczna – jak i międzygwiazdowa – powoduje poczerwienienie obiektów oglądanych przez nią. O obecności materii międzygalaktycznej może też świadczyć systematyczne poczerwienienie galaktyk odległych w porównaniu z bliskimi, aczkolwiek trzeba je umieć odróżnić od poczerwienienia wywołanego ekspansją Wszechświata.

Ekstynkcja jest zjawiskiem polegającym na osłabieniu natężenia promieniowania wskutek rozpraszania i pochłaniania (absorpcji) w ośrodku, przez który promieniowanie to przechodzi. Miara tego osłabienia jest określana tym samym słowem, a jest nią liczba mówiąca, o ile wielkości gwiazdowych maleje jasność obiektu przesłanianego warstwą rozproszonej materii. Tak rozumiana ekstynkcja jest zatem parametrem określającym przezroczystość ośrodka.

W zależności od natury ośrodka, w którym promieniowanie jest rozpraszane lub absorbowane, wyróżniamy trzy zasadnicze rodzaje ekstynkcji: atmosferyczną, międzygwiazdową i międzygalaktyczną. Ostatnia z nich jest do tej pory najslabiej zbadanym rodzajem ekstynkcji. Jej istnienie jest uwarunkowane obecnością materii międzygalaktycznej, co jeszcze czasem bywa przedmiotem dyskusji i sporów. Jednak znakomita większość astronomów już od kilku dziesiątek lat nie wątpi w istnienie materii międzygalaktycznej.

Przez materię międzygalaktyczną rozumiemy w ogólności wszystkie obiekty kosmiczne, które znajdują się między galaktykami, a same galaktykami nie są. Zaliczamy więc do niej pył i gaz rozproszony w przestrzeni międzygalaktycznej, większe i mniejsze ciała meteorowe, a nawet pojedyncze gwiazdy i ciała planetarne znajdujące się z dala od galaktyk. Oczywiście, istnienie niektórych z wymienionych wyżej obiektów w przestrzeni międzygalaktycznej jest do dziś wątpliwe, gdyż nie dysponujemy wystarczającymi na to dowodami natury obserwacyjnej. Liczenie się z tą możliwością jest jednak uzasadnione teoretycznie, ponieważ obiekty obecne w galaktykach mogą być z nich wyrzucane wskutek działania tzw. sił nieregularnych, tj. występujących podczas bliskich spotkań z innymi obiektami.

Z punktu widzenia obserwatora materię międzygalaktyczną można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej będą wchodzić te obiekty, które same emitują promieniowanie, a więc gwiazdy międzygalaktyczne, świecący gaz, oświetlony pył międzygalaktyczny. Drugą grupę stanowią te obiekty, które same nie emitują dostrzegalnego dla obserwatora promieniowania, ale są obserwowane wskutek wywołanej przez nie absorpcji oraz rozpraszania i ekranowania (przesłaniania) – czyli w sumie wskutek ekstynkcji. Ta właśnie ekstynkcja międzygalaktyczna przejawia się w osłabieniu blasku i zmianie barw odległych galaktyk i kwazarów.

Trzeba jednak zdawać sobie sprawę z tego, że ten sam obiekt kosmiczny może być widoczny jako emitujący promieniowanie w jednym zakresie fal elektromagnetycznych (np. na falach długich, radiowych, a więc za pomocą radioteleskopu), a ekstyngujący w innym (np. na falach krótkich, optycznych, przy obserwacji za pomocą teleskopu).

Badanie ekstynkcji międzygalaktycznej rozpoczęli jako pierwsi w 1917 r. Bertil Lindblad i Knut Lundmark. Poszukiwali oni zależności między wskaźnikami barwy a pewnymi wskaźnikami względnych odległości mgławic. Dzisiaj jest nam trudno uwierzyć w to, że wtedy pozagalaktyczność samych mgławic, które potem w większości okazały się galaktykami, była bardzo ryzykowną i kontrowersyjną hipotezą. W większości astronomowie jej nie uznawali, a więc konsekwentnie nie uznawali hipotezy istnienia materii międzygalaktycznej, a co za tym idzie, nie brali pod uwagę możliwości zjawiska ekstynkcji międzygalaktycznej.

W ogóle astronomia pozagalaktyczna zaczęła nabierać charakteru teorii naukowej dopiero od chwili pierwszego wyznaczenia odległości galaktyk dokonanego przez Hubble'a w 1926 r. W miarę rozwoju astronomii pozagalaktycznej zaczęto tworzyć metody badań materii międzygalaktycznej i ekstynkcji przez nią wywołanej. Powstało wiele publikacji na ten temat, jednak nie rozstrzygały one problemu ekstynkcji międzygalaktycznej. Nie dawały one pozytywnych wyników albo oparte były na błędnych założeniach. Niektóre wręcz przeczyły istnieniu zjawiska ekstynkcji międzygalaktycznej; doszło nawet do rozpowszechnienia tego poglądu. Jednak w 1949 r. ukazała się publikacja Morisa Ejgensaona wykazująca na kilka sposobów istnienie ekstynkcji międzygalaktycznej, np. tak właśnie autor zinterpretował obserwowany gdzieś spadek jasności powierzchniowej galaktyk ze wzrostem ich odległości. Pomimo kontrowersyjności praca ta stała się impulsem do dalszych badań ekstynkcji.





Wcześniejszy pogląd, jakoby ekstynkcji międzygalaktycznej nie było, był przyczyną tego, że problemem tym zajmowali się tylko nieliczni astronomowie. Na szczęście problem ten odżył, gdy w latach siedemdziesiątych zauważono w rozkładzie widma promieniowania szczałkowego odchylenia od praw promieniowania ciała doskonale czarnego i wytłumaczono je obecnością materii międzygalaktycznej. Wprawdzie wynikało to ze źle przeprowadzonej przez kilku autorów dyskusji błędów (nie znając teorii wyznaczyli zbyt małe błędy obserwacji); efekty wówczas odkryte okazały się już w rok po opublikowaniu zupełnie nieistotne, niemniej przeświadczenie, że są istotne, wywołało zainteresowanie materią międzygalaktyczną, które nie ustało po wyjaśnieniu błędu. Dzięki temu powstało i nadal powstaje wiele ciekawych prac i metod badawczych potwierdzających realność ekstynkcji, a więc istnienie materii międzygalaktycznej.

Jeszcze dokładnie nie wiadomo, jaka forma materii powoduje ekstynkcję międzygalaktyczną. Tymczasem zakłada się, że wywołują ją takie same cząstki pyłu kosmicznego, jak w przypadku ekstynkcji międzygwiazdowej – jest to w każdym razie hipoteza coraz lepiej ugruntowana.

Z obserwacji wynika, że tak jak w przypadku materii międzygwiazdowej, materia międzygalaktyczna też jest rozmieszczona w przestrzeni nierównomiernie – grupuje się w poszczególnych obłokach. Struktura ta jest hierarchiczna, tzn. obłoki duże, o rozmiarach do dziesiątków megaparseków, składają się z obłoków mniejszych, przypominających swym wyglądem rozsiane w przestrzeni kłaczkę. Niektóre obłoki bywają obserwowane w zakresie rentgenowskim, inne w podczerwieni. Istnieje też pogląd (aczkolwiek dość odosobniony), że pasma pyłu widoczne w niektórych galaktykach eliptycznych są schwytanymi obłokami międzygalaktycznymi.

Zważywszy różnorodność form występowania materii międzygalaktycznej i nowość samego zagadnienia nie dziwny się, że nie mamy pełnego obrazu ewolucji i warunków panujących w tym ośrodku. Według oszacowań akceptowanych przez większość specjalistów dolna granica ekstynkcji międzygalaktycznej nie powinna być mniejsza od 0,01 mag/Mpc, a więc w grubym przybliżeniu o cztery rzędy wielkości mniej niż ekstynkcja międzygwiazdowa.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 514.** Dane są liczby zespolone  $z_1, z_2, z_3$ , których suma odwrotności wynosi 0. Wykazać, że  $O = (0, 0)$  leży w trójkącie o wierzchołkach  $z_1, z_2, z_3$ .

Rozwiązanie na str. 4

**M 515.** Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których  $n^2 + 1$  i  $(n + 1)^2 + 1$  są pierwsze.

Rozwiązanie na str. 4

**M 516.** Udowodnić, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od jego obwodu, a większa od  $3/4$  obwodu.

Rozwiązanie na str. 5

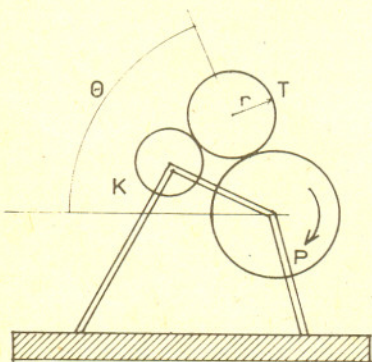
Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 250.** Rysunek przedstawia uproszczony schemat urządzenia do podawania farby w maszynie drukarskiej. Farba podawana jest z bębna  $K$ , który swobodnie obraca się na sztywno umocowanej osi. Walec  $P$  prowadzi papier. Jego oś obrotu też jest nieruchoma. Po powierzchni walców  $K$  i  $P$  bez poślizgu toczy się swobodnie wałek o promieniu  $r$  i masie  $M$  wykonany z materiału sprężystego. Linia łącząca osie  $T$  i  $P$  tworzy z poziomem kąt  $\theta$ . Jakie maksymalne przyspieszenie kątowe  $\epsilon$  można nadać walcowi  $P$  tak, by wałek  $T$  nie oderwał się od bębna  $K$ ? Moment bezwładności bębna  $K$  można zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 1

**F 251.** W chwili początkowej kulka o promieniu  $R$  i masie  $M$  ślizga się z prędkością  $v$  po powierzchni poziomej (nie obraca się). Jaką odległość przebędzie kulka do chwili, gdy zacznie toczyć się bez poślizgu? Współczynnik tarcia kulki o powierzchnię wynosi  $\mu$ .

Rozwiązanie na str. 3





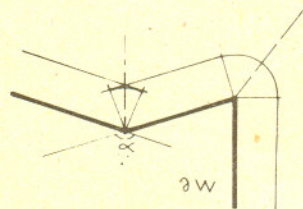
... było już niejedno. Ale tym razem trudność okazała się większa niż zwykle, a przy tym stało się to w sposób niezamierzony. Przypomnijmy pokrótce, o co chodzi.

Zadanie nr 157 ligi zadaniowej zostało zaczerpnięte z pewnego zbioru zadań. Podane w tym zbiorze rozwiązanie było nieprecyzyjne, ale wyglądało przekonująco; dopiero przy próbie ścisłego zredagowania okazało się niepoprawne. A próby usunięcia luki ujawniły faktyczną trudność zadania. Numer *Delty* był już wydrukowany, na zmianę zadania było za późno. W gronie redakcyjnym, przy współpracy innych matematyków z UW (Rafał Sztencel, Witold Szczechła) udało się dopracować dowód (dość zawily, ale mamy nadzieję, że poprawny), który poniżej zaprezentujemy (zgodnie z obietnicą daną w numerze 2/1988). Dlaczego nie wcześniej? Czekaliśmy: a nuż ktoś z uczestników ligi znajdzie dowód prostszy. Niestety; wśród niewielu rozwiązań, które wpłynęły, nie było ani jednego w pełni poprawnego...

Zadanie było takie: Wielokąt  $W$  ma pole  $S$  i obwód  $d$ . Dowieść, że  $W$  zawiera koło o promieniu  $> S/d$ .

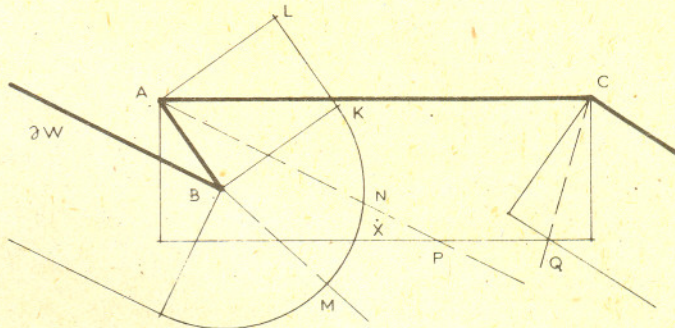
A rozwiązanie w zbiorze zadań – takie: przypuśćmy, że nie istnieje koło o promieniu  $r$  zawarte w  $W$ . Wówczas każdy punkt wielokąta  $W$  jest odległy nie więcej niż  $o$  od brzegu. To znaczy, że jeśli weźmiemy paski szerokości  $r$  wzdłuż każdego boku, to one (w zasadzie) pokryją  $W$ . Problem pojawia się przy wierzchołkach, gdzie trzeba dokonać starannejszej kalkulacji. Mianowicie, jeśli mamy bok od  $A$  do  $B$ , budujemy nie pasek, ale zbiór punktów odległych o nie więcej niż  $r$  od  $AB$  i leżących pomiędzy dwusiecznymi kątów  $A$  i  $B$ . Pole tego zbioru równa się  $r \cdot (\text{długość } AB) + (\text{dwa przyczynki przy końcach})$ . Jeśli kąt przy wierzchołku (np.  $A$ ) jest  $< \pi$ , musimy odjąć trójkąt prostokątny o wysokości  $r$  i kącie  $A/2$ ; ma on pole większe niż zawarty w nim wycinek koła o polu  $(r^2/4)(\pi - A)$ . Jeśli kąt przy wierzchołku (np.  $B$ ) jest  $\geq \pi$ , musimy dodać wycinek koła o rozwartości kątowej  $(B - \pi)/2$ , o polu  $(r^2/4)(B - \pi)$ . Łącznie więc, pełna powierzchnia tych zbiorów jest ograniczona przez  $r \cdot (\text{obwód}) - (r^2/2)(\text{suma kątów zewnętrznych}) = r \cdot (\text{obwód}) - \pi r^2$ , a ponieważ z założenia suma tych zbiorów zawiera cały wielokąt, widzimy, że  $(\text{pole}) \leq r \cdot (\text{obwód}) - \pi r^2$ . Skoro to jest prawda dla wszystkich  $r$  przekraczających maksymalny promień koła wpisanego, więc  $S/d$  jest dolnym ograniczeniem długości tego promienia.

Gdzie błąd? W cichym założeniu, że  $r$  jest małe w porównaniu z długością najkrótszego boku wielokąta; wtedy rzeczywiście jest dobrze (rys.1): paski są długie a wąskie, zachodzą na siebie małymi kawałkami przy końcach i nie ma kłopotów.



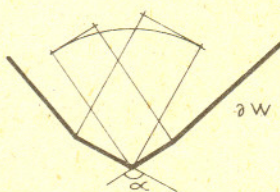
Rys.1

Ale na przykład w sytuacji z rysunku 2 „pasek” zbudowany na krótkim boku  $AB$  (czyli prostokąt  $ABKL$ ), „zmodyfikowany” przy wierzchołkach  $A$  i  $B$  przez układ dwusiecznych kątów wielokąta, przybiera dość dziwny kształt  $ABMN$ . Ponieważ „pasek” przyporzadkowany bokowi  $CA$  redukuje się do trapezu  $CAPQ$ , istnieją w wielokącie punkty (np. punkt  $X$  na rysunku) odległe o mniej niż  $r$  od brzegu, a nie należące do sumy otrzymanych figur.



Rys.2

Pewną odmianę tego rozumowania stanowiło stwierdzenie pojawiające się w pracach uczestników ligi: część wspólna prostokątów opartych na bokach będących ramionami kąta wewnętrznego o mierze  $\alpha < \pi$  zawiera wycinek koła o promieniu równym szerokości prostokąta i o rozwartości kątowej  $\pi - \alpha$  (rys.1). Ale: czy zawsze musi tak być? W sytuacji przedstawionej na rysunku 3 zachodzi wręcz inkluzja przeciwna!



Rys.3

Cały problem bardzo się upraszcza, gdy wielokąt jest wypukły; wtedy wystarczy po prostu rozważać prostokąty wzdłuż boków, nie modyfikując ich przy wierzchołkach (i nie wprowadzając żadnych wycinków kół).

Jeśli natomiast wielokąt nie jest wypukły, to wówczas, jak zauważyliśmy, wszystko jest w powyższych rozważaniach dobrze pod warunkiem, że szerokość pasków jest mała. To spostrzeżenie podpowiada metodę dowodu: brać wąskie paski i zmniejszać wielokąt „po trochu”, stosując argumenty podobne do przedstawionych wyżej. Jest to rozumowanie typu nieskończonego (bardzo wąskie paski dadzą bardzo drobne przyczynki, które potem trzeba zsumować...). Właściwy język do takich rozważań – to język pochodnych i całek. Okazuje się, że zadanie należy do analizy raczej, niż do geometrii.

Przejdźmy więc do dowodu.

Dla dowolnej liczby  $r \geq 0$  określamy zbiór otwarty

$$W_r = \{P \in W : \text{dist}(P, \partial W) > r\},$$

gdzie  $\partial W$  oznacza brzeg  $W$ ,

a  $\text{dist}(P, \partial W) = \min\{|PQ| : Q \in \partial W\}$ .

(Tak więc  $W_0$  – to wnętrze wielokąta  $W$ .) Każdy punkt zbioru  $W_r$  jest środkiem koła o promieniu  $r$  zawartego w  $W_0$ .

Niech  $R = \sup\{r : W_r \neq \emptyset\}$ . Zadanie sprowadza się do wykazania, że  $R > S/d$ .

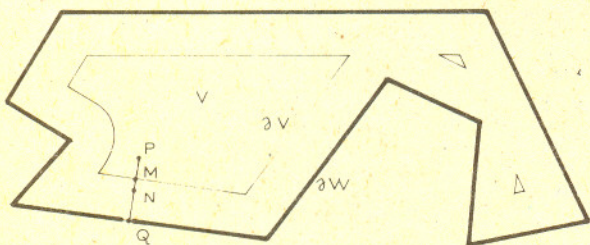
Dla dowolnego zbioru  $C$  na płaszczyźnie zbiór punktów odległych od  $C$  nie mniej niż  $o$   $r$  będziemy nazywać domkniętą  $r$ -otoczką  $C$ . Domknięta  $r$ -otoczka każdego boku wielokąta  $W$  jest sumą prostokąta o szerokości  $2r$  i dwóch połówek kół o promieniu  $r$  przyklejonych do przeciwległych boków tego prostokąta (obwód takiej otoczki przypomina bieżnię lekkoatletyczną). Zbiór  $W_r$  powstaje przez usunięcie ze zbioru  $W_0$  domkniętych  $r$ -otoczek wszystkich boków. Jest więc albo wielokątem krzywoliniowym o brzegu złożonym z odcinków oraz łuków okręgów o promieniu  $r$  (wypukłościami zwróconych ku wnętrzu  $W_r$ ), albo sumą skończonego wielu składowych, z których każda jest takim wielokątem krzywoliniowym.



**Lemat 1.** Niech  $r$  i  $h$  będą liczbami dodatnimi. Niech  $V$  będzie jedną ze składowych zbioru  $W_r$  i niech  $P \in V$ . Wówczas:

$$\text{dist}(P, \partial W) > r + h \Leftrightarrow \text{dist}(P, \partial V) > h.$$

**Dowód.** Implikacja  $\Rightarrow$  jest oczywista. Dla dowodu implikacji przeciwnej przypuśćmy, że  $\text{dist}(P, \partial V) > h$ , ale  $\text{dist}(P, \partial W) \leq r + h$ . Istnieje więc punkt  $Q \in \partial W$  taki, że  $|PQ| \leq r + h$  (rys.4). Odcinek  $PQ$  przecina brzeg  $V$ ; oznaczmy punkt przecięcia przez  $M$ ; jeśli jest ich więcej niż jeden, bierzemy punkt leżący najbliżej  $P$ . Oczywiście  $|PM| > h$ . Zatem  $|MQ| = |PQ| - |PM| < r$ . Przesuwając nieznacznie punkt  $M$  wzdłuż odcinka  $MP$  w stronę  $P$  dostajemy punkt  $N$ , dla którego nierówność  $|NQ| < r$  też jest spełniona. Znaczący to, że  $N \notin W_r$  - sprzeczność, bo  $N \in V \subset W_r$ .



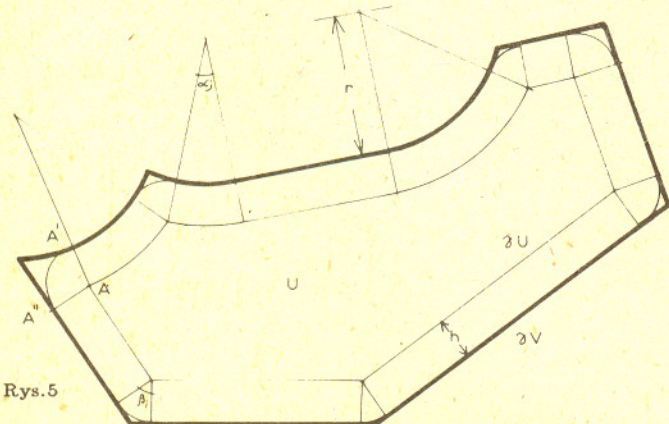
Rys.4

Udowodniony lemat mówi, że zawarta w  $V$  część zbioru  $W_{r+h}$  powstaje przez usunięcie z  $V$  domkniętej  $h$ -otoczki brzegu  $V$ . Jeśli  $h$  jest małe, to ta otoczka składa się z pasków prostoliniowych lub krzywoliniowych biegnących wzdłuż „boków”  $V$  (cudzysłów, bo to kawałki prostych lub okręgów), przy czym każdy z tych pasków ma punkty wspólne tylko z dwoma paskami sąsiednimi. Usuając z zbioru  $V$  sumę tych pasków dostajemy zbiór  $U$  będący składową zbioru  $W_{r+h}$ ; tak więc  $W_{r+h}$  ma (dla małych  $h$ ) tyle samo składowych, co  $W_r$ , zawartych po jednej w różnych składowych  $W_r$ .

Będziemy teraz zmniejszać  $h$ . Pole  $h$ -otoczki brzegu  $V$  (a raczej jej części zawartej w  $V$ ) jest sumą pól pasków prostoliniowych o szerokości  $r$  zmniejszoną o sumę pól prostokątnego biegnącego wzdłuż prostego boku  $V$  równa się  $h \cdot$  (długość tego boku); dla pasków będących fragmentami pierścieni kołowych taka równość też zachodzi, z dokładnością do składników rzędu  $h^2$ . Uwzględniając wszystkie składowe, otrzymujemy:

$$(1) \quad \text{pole } W_r - \text{pole } W_{r+h} = h \cdot (\text{długość } \partial W_r) + (\text{składniki rzędu } h^2).$$

Punkty, w których stykają się „boki” wielokąta krzywoliniowego, nazwijmy jego wierzchołkami. Gdy  $r > 0$ , wszystkie kąty wewnętrzne przy wierzchołkach  $V$  są  $< \pi$  (w przeciwnym razie niektóre położone w  $V$  fragmenty  $h$ -otoczki brzegu  $V$  byłyby sektorami kół o promieniu  $h$ , a przecież brzeg  $W_{r+h}$  może zawierać tylko odcinki oraz łuki okręgów o promieniu  $r + h$ ). Gdy  $h$  jest małe, „boki”  $U$  biegną wzdłuż „boków”  $V$  w małej odległości; wierzchołkom  $V$  odpowiadają wierzchołki  $U$  (rys.5).



Rys.5

Niech  $A$  będzie dowolnym wierzchołkiem  $U$  i niech  $A', A''$  będą prostopadłymi rzutami punktu  $A$  na dwa bliskie mu boki  $V$ . Zastąpmy fragment obwodu  $V$  zawarty między  $A'$  i  $A''$  przez łuk okręgu o środku  $A$  i promieniu  $h$ . Otrzymamy kontur gładki  $K$ , o długości mniejszej niż obwód  $V$ , składający się z łuków okręgów o promieniu  $r$ , o rozwartościach kątowych  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , z łuków okręgów o promieniu  $h$ , o rozwartościach kątowych  $\beta_1, \dots, \beta_l$ , i z odcinków prostych. Łuki tych pierwszych okręgów są zwrócone wypukłością do wnętrza  $V$ , a tych drugich - na zewnątrz  $V$ . Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \text{długość } \partial V - \text{długość } \partial U &> \text{długość } K - \text{długość } \partial U = \\ &= \sum_i h\beta_i - \sum_j h\alpha_j = h \left( \sum_i \beta_i - \sum_j \alpha_j \right) = 2\pi h; \end{aligned}$$

ostatnia równość wynika z tego, że suma w nawiasie jest miarą kąta pełnego zatoczonego przez wektor prędkości punktu obiegającego jednokrotnie kontur  $K$ . Uwzględniając wszystkie składowe otrzymujemy:

$$(2) \quad \text{długość } \partial W_r - \text{długość } \partial W_{r+h} > 2\pi h \cdot (\text{liczba składowych } W_r) \geq 2\pi h.$$

Przyjmijmy oznaczenia:  $F(r)$  = pole  $W_r$ ;  $f(r)$  = długość  $\partial W_r$ . Są to funkcje ciągłe na przedziale  $(0; R)$ , jeśli przyjmiemy  $F(R) = 0, f(R) = 0$ . Z relacji (1) i (2), słusznych dla  $r \in (0; R)$  i dla małych  $h > 0$  dostaniemy po podzieleniu przez  $h$  i przejściu do granicy ( $h \rightarrow 0^+$ ):

$$(3) \quad F'_+(r) = -f(r); \quad \overline{f'_+}(r) \leq -2\pi \quad \text{dla } r \in (0; R)$$

(użyty w ostatniej nierówności symbol oznacza górną pochodną prawostronną funkcji  $f$ , czyli górną granicę prawostronną ilorazu różnicowego).

**Lemat 2.** Jeżeli  $G$  i  $g$  są funkcjami ciągłymi w przedziale  $(0; r)$  i jeżeli  $\overline{G'_+}(t) \leq g(t)$  dla  $t \in (0; r)$ , to

$$G(r) \leq G(0) + \int_0^r g(t) dt.$$

**Dowód.** Niech  $c = r^{-1}(G(0) - G(r) + \int_0^r g(t) dt)$ . Mamy

wyказать, że  $c \geq 0$ . Przypuśćmy więc, że  $c < 0$ . Weźmy pod

uwagę funkcję  $H(t) = G(t) + ct - \int_0^t g(s) ds$ . Jest ona ciągła na

$\langle 0; r \rangle$ , a ponadto  $H(0) = H(r)$ . Zatem  $H$  przyjmuje swą wartość maksymalną na  $\langle 0; r \rangle$  w pewnym punkcie  $b \in (0; r)$ . Zgodnie z założeniem lematu i z uczynionym przypuszczeniem,

$$(4) \quad \overline{H'_+}(t) = \overline{G'_+}(t) + c - g(t) \leq c < 0 \quad \text{dla } t \in (0; r).$$

Ponieważ  $H(b) = \max H$ , a  $b > 0$ , znajdzie się punkt  $a \in (0; b)$  taki, że  $H(a) < H(b)$  (inaczej  $H$  byłaby stała na  $\langle 0; b \rangle$ , co wobec

(4) nie jest możliwe). Niech  $t_0$  będzie punktem, w którym  $H$  osiąga minimum na  $\langle a; b \rangle$ . Wtedy

$t_0 \in \langle a; b \rangle \subset (0; r)$  oraz  $H(t_0 + h) - H(t_0) \geq 0$  dla małych  $h > 0$ .

Zatem  $\overline{H'_+}(t_0) \geq 0$ , wbrew (4). Ta sprzeczność kończy dowód lematu.

Ustalmy teraz  $r \in (0; R)$  i zastosujmy Lemat 2 do funkcji  $G(t) = f(t), g(t) = -2\pi$  na przedziale  $\langle 0; r \rangle$ ; założenia są spełnione, w myśl oszacowania (3) (z  $r$  zastąpionym przez  $t$ ). Zatem  $f(r) \leq f(0) - 2\pi r$ .

Zastosujmy ponownie Lemat 2, traktując tym razem  $r$  jako zmienną,  $R$  - jako prawy koniec przedziału i przyjmując  $G(r) = -F(r), g(r) = f(0) - 2\pi r$  dla  $r \in (0; R)$ ; zgodnie z (3),  $G'_+(r) = -F'_+(r) = f(r) \leq g(r)$  dla  $r \in (0; R)$ , więc założenia lematu są spełnione. Dostajemy:

$$-F(R) \leq -F(0) + \int_0^R (f(0) - 2\pi r) dr = -F(0) + f(0)R - \pi R^2,$$

czyli  $0 \leq -S + Rd - \pi R^2$  i ostatecznie  $S < Rd$ , o co chodziło.

Dowód twierdzenia danego w zadaniu jest tym samym zakończony.

dr Marcin E. KUCZMA



**Skrót regulaminu**

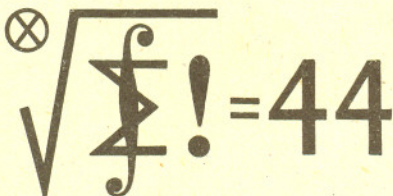
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 X 1988

**Zadania z matematyki nr 173, 174**

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA



**173.** W szeregu harmonicznym  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  zmieniamy znaki niektórych wyrazów (nie zmieniając ich kolejności) tak, że zarówno składniki dodatnie, jak i ujemne, występują ze średnią częstością  $1/2$ . (To znaczy, rozważamy szereg postaci  $\sum \epsilon_n n^{-1}$ , gdzie  $\epsilon_n \in \{+1, -1\}$ ,  $\lim(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)n^{-1} = 0$ .) Czy możemy w ten sposób otrzymać szereg rozbieżny?

**174.** Dowieść, że dla dowolnych trzech różnych liczb wymiernych  $x, y, z$  liczba

$$\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

Zadanie 174 zaproponował pan Krzysztof Hryniewiecki z Białegostoku.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1988**

**Przypominamy treść zadań:**

**169.** W każdym wierzchołku wielościanu wypukłego schodzą się co najmniej 4 krawędzie. Dowieść, że co najmniej 8 ścian to trójkąty.

**170. a)**  $Z$  jest podzbiorem płaszczyzny nie zawartym w prostej; wszystkie odległości między punktami zbioru  $Z$  są liczbami naturalnymi. Udowodnić, że  $Z$  jest zbiorem skończonym.

**b)** Dla dowolnie zadanej liczby naturalnej  $n \geq 3$  dać przykład  $n$ -punktowego zbioru  $Z$  o własnościach wymienionych w a).

**169.** Skorzystamy ze wzoru Eulera:  $V - E + F = 2$  (gdzie  $V, E, F$  oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian danego wielościanu). Niech  $T$  będzie liczbą ścian trójkątnych. Mamy więc nierówności:  $2E \geq 4V$  (z warunku zadania) oraz  $2E \geq 3T + 4(F - T) = 4F - T$ . Wobec tego  $4E = 2E + 2E \geq 4V + 4F - T = 4(E + 2) - T$ , a stąd  $T \geq 8$ .

**170. a)** Niech  $O, A, B$  będą trzema niewspółliniowymi punktami zbioru  $Z$ . Przyjmijmy  $|OA| = k, |OB| = l$ . Jeśli  $P$  jest dowolnym punktem zbioru  $Z$ , to  $||AP| - |OP|| \leq k, ||BP| - |OP|| \leq l$ . Dla dowolnych liczb całkowitych  $i, j$  takich, że  $|i| \leq k, |j| \leq l$  rozważamy zbiory  $U_i = \{P : |AP| - |OP| = i\}, V_j = \{P : |BP| - |OP| = j\}$ . Jeśli  $0 < |i| < k$ , to  $U_i$  jest gałęzią hiperboli o osi symetrii  $OA$ ; dla  $i = 0$  zbiór  $U_i$  jest prostą (symetryczną odcinką  $OA$ ); dla  $i = \pm k$  jest to półprosta (o początku  $O$  lub  $A$ , zawarta w prostej  $OA$ ). Analogiczną postać mają zbiory  $V_j$ . Każdy z zbiorów  $U_i \cap V_j$  jest skończony (dwie gałęzie różnych hiperbol przecinają się w  $\leq 4$  punktach; prosta przecina gałąź hiperboli w  $\leq 2$  punktach; a gdy zarówno  $U_i$  jak i  $V_j$  jest (pół)prostą, nie są to proste identyczne - tu się korzysta z niewspółliniowości punktów  $O, A, B$ ). Zbiór  $Z$  jest zawarty w sumie  $\bigcup_{|i| \leq k, |j| \leq l} U_i \cap V_j$

- jest więc skończony.

**b)** W kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie określamy nieskończony ciąg punktów  $P_k = (k - k^{-1}, 2)$  dla  $k = 1, 2, \dots$ . Niech  $O = (0, 0)$ . W zbiorze  $\{O\} \cup \{P_k : k = 1, 2, \dots\}$  wszystkie odległości są liczbami wymiernymi (bo  $|OP_k| = k + k^{-1}$ ). Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  obraz zbioru  $\{O, P_1, \dots, P_{n-1}\}$  w jednokładności o skali  $n!$  jest  $n$ -punktowym zbiorem o wszystkich odległościach całkowitych.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 163 /WT=1,29/ i 164 /WT=3,25/ z numeru 1/1988

Krzysztof Hryniewiecki	- Białystok	42,47pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	41,77pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	35,98pkt

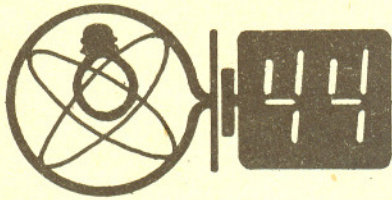
Lista nazwisk tym razem króciutka /zgodnie z przyjętymi ustaleniami nie wymieniamy uczestników, którzy przez trzy kolejki nie powiększyli swego dorobku punktowego/. Jest jednak ruch w strefie 25 - 30-punktowej i rozszerzenie aktywnej czołówki powinno nastąpić już wkrótce.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 59 /WT=1,48/, 60 /WT=3,41/, 61 /WT=1,22/ i 62 /WT=2,97/ z numerów 12/1987 i 1/1988

Dzierżysław	Lipniacki - Lublin	48,77pkt
Bogusław Mikielewicz	- Brodnica	41,37pkt
Piotr Baża	- Toruń	30,15pkt
Roman Musiał	- Katowice	25,86pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	25,44pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	24,08pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	22,55pkt

Pan Lipniacki, jako drugi członek Klubu 44 F, uzyskał ponownie 44 punkty /po zadaniach 59 i 60/.





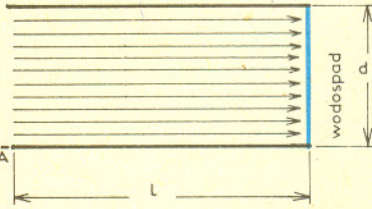
## Zadania z fizyki nr 71, 72

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

**71.** Rzeka o jednorodnym, wartkim nurcie i szerokości  $d$  opada w pewnym miejscu gwałtownym wodospadem (rys.1). W odległości  $l$  od wodospadu, w górę rzeki (w punkcie A) skacze do wody pływak, pragnący przepłynąć na drugi brzeg. W jakim kierunku powinien on płynąć, aby mieć największe szanse osiągnięcia drugiego brzegu powyżej wodospadu? Przyjmujemy, że pływak płynie cały czas ze stałą (największą osiągalną) prędkością.

**72.** W wyniku parowania wody wzrosła wilgotność powietrza nad jeziorem z 60% do 90%, nie uległa natomiast zmianie ani temperatura powietrza  $T = 300$  K, ani ciśnienie atmosferyczne  $p = 100$  kPa. Czy zmieniła się przy tym gęstość samego powietrza (bez pary wodnej)? Jeśli tak, to w jakim stosunku?

Ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze 300 K wynosi 3,4 kPa.  
Zadanie 72 nadesłała pani Rozalina Staszak z Kalisza.



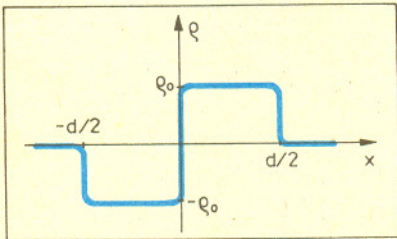
Rys.1

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1988

Przypominamy treść zadań:

**67.** W półprzewodnikowym złączu p-n istnieje przestrzenny rozkład ładunku, jak na rysunku 2 ( $x$  – odległość od „środkowej płaszczyzny” złącza,  $\rho$  – gęstość ładunku). Przyjmując, że stała dielektryczna półprzewodnika wynosi  $\epsilon$ , przedstawić zależność natężenia pola elektrycznego od współrzędnej  $x$ .

**68.** Wyznaczyć stosunek średnich gęstości Słońca i Ziemi, korzystając wyłącznie z poniższych danych: promień Ziemi –  $6,4 \cdot 10^6$  m, przyspieszenie ziemskie –  $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , średnica kątowa Słońca oglądanego z Ziemi –  $9,3 \cdot 10^{-3}$  rad, 1 rok  $\approx 3,2 \cdot 10^7$  s.



Rys.2

**67.** Dzielimy obszar ładunku przestrzennego na cienkie warstwy prostopadłe do osi  $x$  (rys.3). Powierzchniowa gęstość ładunku warstwy o grubości  $\Delta x$  wynosi  $\sigma = \rho \Delta x$ , czyli  $-\rho_0 \Delta x$  dla  $-d/2 < x < 0$  oraz  $\rho_0 \Delta x$  dla  $0 < x < d/2$ . Parę takich warstw o współrzędnych  $x = -x'$  oraz  $x = x'$  można traktować jako okładki naładowanego kondensatora. Wektor natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  między okładkami takiego kondensatora jest równoległy do osi  $x$ , ma przeciwny do niej zwrot i wartość bezwzględna

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\rho \Delta x}{\epsilon_0 \epsilon}$$

( $\epsilon_0$  – przenikalność elektryczna próżni). Wartość bezwzględna wypadkowego pola elektrycznego w punktach o współrzędnej  $x$  otrzymujemy sumując (całkując) wartość natężenia pola kondensatorów, dla których  $x'$  spełnia warunek  $|x| < x' < d/2$ :

$$|\mathbf{E}(x)| = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \left( \frac{d}{2} - |x| \right).$$

Wykres tej funkcji przedstawia rysunek 4.

**68.** Wprowadzamy następujące oznaczenia:  $m_s$  – masa Słońca,  $m_z$  – masa Ziemi,  $r_s$  – promień Słońca,  $r_z$  – promień Ziemi,  $\rho_s$  – gęstość Słońca,  $\rho_z$  – gęstość Ziemi,  $R$  – promień orbity Ziemi,  $T$  – okres obiegu Słońca przez Ziemię (rok),  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $\alpha$  – średnica kątowa Słońca. Działająca na Ziemię siła grawitacji słonecznej  $F_G = G \frac{m_s m_z}{R^2}$  ( $G$  – stała grawitacji) pełni rolę siły dośrodkowej

(w ruchu Ziemi wokół Słońca). Siła odśrodkowa jest równa  $F_R = \frac{4\pi^2 R m_z}{T^2}$ .

Z przyrównania  $F_G$  i  $F_R$  mamy

$$(1) \quad m_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

Na powierzchni Ziemi ciało o masie  $m$  jest przyciągane przez Ziemię siłą

$$mg = G \frac{m_z m}{r_z^2},$$

skąd

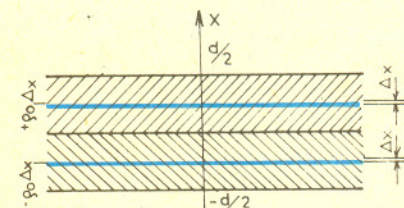
$$(2) \quad G = \frac{g r_z^2}{m_z}.$$

Poszukiwany stosunek gęstości jest równy

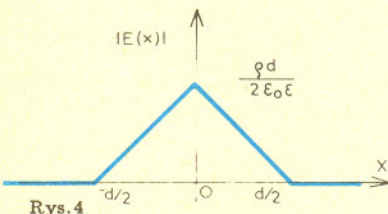
$$(3) \quad \frac{\rho_s}{\rho_z} = \frac{m_s r_z^3}{m_z r_s^3}.$$

Na podstawie (1), (2), (3) oraz związku  $r_s = R\alpha/2$  otrzymujemy

$$\frac{\rho_s}{\rho_z} = \frac{32\pi^2 r_z}{\alpha^3 g T^2} = 0,25.$$



Rys.3



Rys.4



# Iwobiazki

Dwa ciała zanurzone w cieczy i pulsacyjnie zmieniające swoją objętość przyciągają się, gdy ich pulsowania są zgodne w fazie i odpychają – w przeciwnym przypadku. Siła oddziaływania jest przy tym odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ich środków (dla ciał kulistych). Pobudzenie do drgań pęcherzyków gazu w cieczy powoduje ich przyciąganie się i zlewanie – w ten sposób stosując ultradźwięki można usunąć domieszki gazów z roztopionych metali.



Jasne smugi rozchodzące się promieniście od niektórych kraterów księżycowych są skutkiem wyrzucenia na (ogólnie) ciemniejszą powierzchnię Księżyca jaśniejszych skał położonych głębiej. Spowodował to upadek wielkiego meteoroidu. Późniejsze spadki meteoroidów powodowały powstawanie kraterów również na samych smugach. Dostatecznie głęboki taki krater ma obwódkę – odwrotnie – ciemniejszą, ponieważ tu, spod jasnych skał smugi, zostały wyrzucone ciemniejsze, leżące dawniej na powierzchni. Najmniejsze tego rodzaju kratery mają głębokość rzędu 20 m, taka więc jest w przybliżeniu grubość (głębokość) jasnych smug. Smugi te można zobaczyć już przez niewielką lunetę np. wokół kraterów Kopernik lub Tycho.



Łatwo można sprawdzić tożsamość

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Podobnie wygląda tożsamość Lagrange'a

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_4 - a_4b_2)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Nasuwa się pytanie, czy istnieje więcej tego typu tożsamości, dokładniej, dla jakich  $n$

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) = \phi_1^2 + \dots + \phi_n^2,$$

gdzie  $\phi_i$  są wyrażeniami postaci  $\sum \alpha_{ki} a_k b_i$  z danymi  $\alpha_{ki}$ ? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Hurwitza mówiące, że tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy  $n = 1, 2, 4, 8$ .



Steven Elliot, Alan Hahn i Michael Moe z University of California at Irvine zaobserwowali podwójny rozpad  $\beta$  jądra selenu  $^{82}\text{Se}$  z emisją dwóch elektronów i dwóch neutrin. Zmierzony połowkowy czas rozpadu wynosi około  $10^{20}$  lat. Jest to najdłuższy czas życia zmierzony w laboratorium.

Już Galileusz i Huygens byli zdania, że tzw. mgławice są zbiorowiskami gwiazd. Dowodów na to (lub przeciw temu) jednak długo nie dawało się znaleźć, choć liczba obserwowanych mgławic na początku XX wieku wyrażała się już milionami. Sprawę rozstrzygnął w 1926 roku Edwin Hubble, który za pomocą nowo zbudowanego, największego wówczas, 2,5-metrowego teleskopu na Mount Wilson w Kalifornii, zobaczył w niektórych mgławicach po prostu poszczególne gwiazdy. Mgławicami tymi były, oczywiście, najbliższe galaktyki, a datę tę uważa się za początek astronomii pozagalaktycznej.



Twierdzenie Stokesa ( $\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$ ) ma trzy nieodzowne cechy

wielu najważniejszych twierdzeń:

1. Jest trywialne.
2. Jest trywialne, ponieważ pojawiające się w nim wyrażenia zostały właściwie zdefiniowane.
3. Ma znaczące następstwa.

(Michael Spivak, *Analiza na różnościach*)



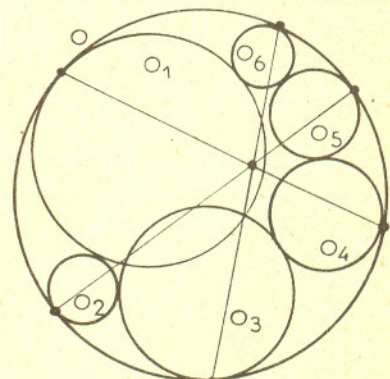
Poza matematyką i fizyką Newton zajmował się też alchemią. Jednym z jego ulubionych autorów w tej dziedzinie był Michał Sędziwój (1566 - 1646) znany też jako Sendivogius Polonus, alchemik ceniony w całej Europie, działający na dworze Zygmunta III Wazy i cesarza Rudolfa II w Pradze.



Jasność rentgenowska ( $L_X$ ) Deneba ( $\alpha$  Cyg) wynosi  $10^{32}$  erg/s, jest to tylko niewiele mniej niż całkowita jasność Słońca ( $4 \cdot 10^{33}$  erg/s), podobną jasność rentgenowską mają Rigel ( $\beta$  Ori) i Capella ( $\alpha$  Aur). Najjaśniejsza w tej grupie gwiazd jest 12 Peg -  $L_X \approx 10^{33}$  erg/s. Jasność rentgenowska  $\alpha$  Cen  $\approx 10^{27}$  erg/s jest około 10 razy większa niż jasność Słońca.



Jeśli w okrąg  $o$  wpisujemy sześć okręgów  $o_1, \dots, o_6$  kolejno zewnętrznie stycznych (czyli  $o_1$  z  $o_2$  i  $o_6$ ,  $o_3$  z  $o_2$  i  $o_4$  itd.), to odcinki łączące punkty styczności  $o_1$  i  $o_4$  z  $o$ ,  $o_2$  i  $o_5$  z  $o$  oraz  $o_3$  i  $o_6$  z  $o$  przetną się w jednym punkcie.



Jeżeli ktoś potrafi to wykazać, może zastanowić się nad tym, jak można osłabić występujące w założeniu słowo „zewnętrznie”, by teza nadal była prawdziwa. Bo osłabić można.



## Sztywność figur

Wygięcie trójkątnego kawałka blachy nie nastrecza żadnych trudności. Kłopoty są wtedy, gdy zażądamy, żeby po wygięciu nasz kawałek nadal był płaski. Wydaje się, że na płaszczyźnie jest na to za mało miejsca, jest go jednak wystarczająco dużo, aby wygiąć sam brzeg trójkąta. Tak podpowiada intuicja, a jak jest naprawdę? Zanim odpowiemy na to pytanie (i zadamy następne), musimy najpierw dokładnie wiedzieć, o czym mówimy – co to znaczy wygiąć? Jeśli wyginamy drut, to zmieniamy kształt nie zmieniając jego długości, co więcej – nie zmieniamy długości żadnego kawałka. To spostrzeżenie wystarczy do precyzyjnej definicji wyginania.

Wygięciem (albo izometrią wewnętrzną) nazywamy takie przekształcenie figury  $F$ , które nie zmienia długości żadnej z narysowanych w  $F$  linii. Zatem linie narysowane (zawarte) w  $F$  przy wyginaniu mogą zmieniać swój kształt, ale żaden ich łuk nie może zmienić swojej długości. Wynika stąd między innymi, że kres dolny długości łuków zawartych w  $F$  i łączących dane dwa punkty figury  $F$  jest przed i po wygięciu taki sam. Wartość tego kresu nazywa się wewnętrzną odległością punktów. Można udowodnić, że jeśli przekształcenie zachowuje wewnętrzną odległość dowolnych punktów, to jest izometrią wewnętrzną, czyli wygięciem. Jeśli zbiór płaski ma tę własność, że każda jego izometria wewnętrzna przekształcająca go w podzbiór płaski jest zwykłą izometrią płaszczyzny, to powiemy, że zbiór jest sztywny na płaszczyźnie. Definicję sztywności zbiorów przenosi się bez trudności na wyższe wymiary.

Niewiele wiadomo o zbiorach sztywnych. Twierdzenie Borsuka orzeka, że każdy obszar (zbiór otwarty i spójny) w  $E^n$  jest sztywny w  $E^n$ . Wynika stąd m. in., że trójkąta rzeczywiście nie da się wygiąć na płaszczyźnie. Co będzie jednak, gdy w sztywnym trójkącie zaczniemy wycinać trójkątne dziury tak, jak na rysunku obok i operację tę wykonamy nieskończenie wiele razy? Okazuje się, że otrzymany w ten sposób zbiór  $S$  (krzywą trójkątową Sierpińskiego) można już wygiąć na płaszczyźnie. Żeby się o tym przekonać, spróbujmy najpierw wygiąć sam jego szkielet, tzn. sumę brzegów wszystkich trójkątów pojawiających się w czasie konstrukcji (górny rysunek na okładce przedstawia wygięcie piątego przybliżenia). Widać od razu, że w wyniku takiego odkształcenia łuki zawarte w szkielecie nie zmieniają swojej długości. Uważne przyjrzenie się (oczywiście w wyobraźni) zbiorowi  $S$  pozwala stwierdzić, że dowolnie blisko każdego jego punktu jest punkt należący do szkieletu. Dzięki temu dla każdego łuku łączącego dowolne dwa punkty zbioru  $S$  (a są tam i punkty nie należące do szkieletu) istnieje nie dłuższy od niego łuk, który poza (być może) końcami jest zawarty w szkielecie. Zatem kres dolny długości wszystkich łuków łączących dane punkty jest równy kresowi dolnemu długości łuków łączących punkty i biegnących (poza, być może, tymi punktami) w szkielecie. Dzięki temu można przedłużyć izometrię wewnętrzną szkieletu do izometrii wewnętrznej całego zbioru  $S$ . Krzywa trójkąta Sierpińskiego nie jest więc zbiorem sztywnym na płaszczyźnie. Nie wiadomo natomiast, czy sztywny jest zbiór (dywan Sierpińskiego), którego czwarte przybliżenie pokazane jest na rysunku poniżej. Wbrew pozorom przekształcenie z dolnego rysunku okładki nie jest izometrią wewnętrzną.

mgr Krzysztof RUDNIK

