

Nasza okładka:

Silny wiatr może zerwać dach.

Czy narysowany rozkład ciśnienia (czerwone strzałki) odpowiada kierunkowi wiatru ?

Warto zajrzeć do artykułu na stronie 12.

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(175)

Więcej wymiarów ! <i>dr Leszek M. Sokółowski</i>	str. 1
Kącik prac uczniowskich	str. 3
Zadania	str. 3
Gwiazdy Władysławowskie <i>prof. dr Jerzy Dobrzycki</i>	str. 4
Co to są zbiory rozmyte <i>doc. dr Tadeusz Gerstenkorn</i> <i>mgr Jacek Mańko</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
O grze w 20 pytań inaczej <i>doc. dr Wojciech Guzicki</i>	str. 10
Obalamy prawa fizyki <i>doc. dr Jan Gaj</i>	str. 12
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmök - v-przewodniczący
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski -
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr hab. Jan Kalinowski - z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos - sekr. red.
dr hab. Marek Kordos - red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr inż. arch. Mariola Lotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127
02-017 Warszawa
tel. centr. 28-52-31

Biurowisko Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.
2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
Nr Zam. 1444/88, U-58
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,- półrocznej zł 420,- rocznej zł 840,-

- dla osób prawnych - instytucji i zakładów pracy
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych - indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach - siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy. Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 - do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 - do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.
- Cena 1 egzemplarza zł 70,-

W następnym numerze:
Interferometr atomowy

Począwszy od tego numeru skład *Delty* wykonujemy na sprzęcie zakupionym w ramach RR I.14: „Informatyzacja procesów dydaktycznych i naukowo-badawczych w szkołach wyższych”.

Więcej wymiarów!

Dr Leszek M. SOKOŁOWSKI

Spośród wielu stałych fizycznych tylko trzy uważane są za fundamentalne: prędkość światła c , stała grawitacyjna Newtona G i stała Plancka \hbar . Prędkość światła jest prędkością rozchodzenia się oddziaływań fizycznych, stała grawitacji określa natężenie najbardziej uniwersalnego z oddziaływań, a stała Plancka pojawia się w opisie każdego zjawiska w mikroświecie. Natomiast elektryczny ładunek elementarny e nie jest wielkością fundamentalną. Jest powszechnie przyjęte, że stałymi fundamentalnymi mogą być tylko wielkości mianowane, a skoro można z nich zbudować wielkość o wymiarze ładunku, mianowicie $\sqrt{\hbar c}$, to ładunek elektronu musi być jej funkcją, czyli że w kompletnej, dotąd nie istniejącej teorii cząstek elementarnych, stosunek $\hbar c/e^2 = 137,036$ powinien być wyliczony z zasad pierwszych, a nie wzięty z doświadczenia. Podobnie stosunki mas cząstek elementarnych – leptonów i kwarków – nie mają charakteru fundamentalnego, lecz powinny wynikać z opisu ich oddziaływań. Wyliczenie mas tych cząstek z zasad pierwszych fizyki jest celem wciąż odległym, lecz każda teoria pretendująca do miana dobrej teorii cząstek elementarnych musi dawać konkretne przewidywania wartości tych mas i mas cząstek złożonych – hadronów.

O tym, że są tylko trzy stałe fundamentalne, przekonuje prosty fakt. Każdą wymiarową wielkość fizyczną można wyrazić w jednostkach masy, długości i czasu. Wybór tych właśnie wielkości za podstawowe, jak również wybór jednostek dla nich – układ SI – jest uzasadniony tylko historycznie i z punktu widzenia fizyki jest czysto przypadkowy. Ani metr, ani kilogram nie są w przyrodzie w żaden sposób wyróżnione. Tymczasem \hbar , c i G tworzą kompletny naturalny układ jednostek: można z nich zbudować każdą wielkość wymiarową. Na cześć Maxa Plancka jednostki te nazywamy planckowskimi. Mamy więc np:

$$\text{jednostkę długości} \quad l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1,62 \cdot 10^{-33} \text{ cm},$$

$$\text{jednostkę czasu} \quad t_P = \frac{l_P}{c} \approx 5,39 \cdot 10^{-44} \text{ s},$$

$$\text{jednostkę masy} \quad m_P = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \approx 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ g}.$$

W porównaniu z wielkościami występującymi w fizyce mikroświata jednostki planckowskie są bądź bardzo małe, bądź bardzo wielkie. Co to oznacza?

Rozpatrzmy ruch wahadła matematycznego o masie m i długości l pod działaniem siły ciężenia o przyspieszeniu g . Z tych wielkości można zbudować tylko jedną wielkość o wymiarze czasu: $\sqrt{l/g}$; należy sądzić, że określa ona skalę czasową ruchu wahadła. I rzeczywiście, równania mechaniki klasycznej dają okres drgań równy $2\pi\sqrt{l/g}$.

Z kolei atom wodoru jest układem elektronu i protonu związanych przyciąganiem elektrycznym. Ładunek

elektronu, jego masa m_e oraz stała Plancka tworzą kombinację o wymiarze długości

$$\frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Jest to promień orbity stanu podstawowego w modelu Bohra, a więc wielkość dobrze określająca rozmiar atomu.

Powyższe przykłady ilustrują ogólną regułę: w opisie każdego zjawiska fizycznego występują pewne stałe: masy i ładunki cząstek, natężenia zewnętrznych pól fizycznych itp. Z nich i ze stałych fundamentalnych można zbudować różne wielkości wymiarowe. Wartości tych wielkości określają charakterystyczną skalę, za pomocą której opisujemy zjawisko.

Nie mamy dobrej interpretacji fundamentalnych skal danych jednostkami planckowskimi. Długość l_P jest 10^{20} razy mniejsza od średnicy jądra atomowego. Czas planckowski t_P ma ważną interpretację w kosmologii – przez czas rzędu t_P od Wielkiego Wybuchu powinna obowiązywać, do dziś nie sformułowana, kwantowa teoria grawitacji, a dopiero później znane prawa fizyki. Dużo gorzej jest z masą Plancka $m_P \approx 10^{23} m_e$ i jest niemożliwe, by masa elektronu i innych znanych cząstek elementarnych mogła być wyjaśniona za jej pomocą – jest to skala stanowczo za duża. Masa 10^{-5} g to masa ziarenka piasku i nie jest to wartość czymkolwiek wyróżniona. Nie chodzi tu o to, by wskazać klasę zjawisk, w których opisie pojawia się masa Plancka, lecz by były to zjawiska najbardziej fundamentalne. W obrębie znanej fizyki zjawisk takich nie ma.

Niepowodzenie prób zinterpretowania jednostek planckowskich sugeruje, by szukać nowych zjawisk, dla których jednostki te byłyby dobrymi skalami.

Skale takie w naturalny sposób pojawiają się w modelach Wszechświata zakładających, iż fizyczna przestrzeń ma więcej niż trzy wymiary. Dla ilustracji założmy, że realizowany jest przypadek najprostszy: świat ma pięć wymiarów (cztery przestrzenne i czas), przy czym w czwartym wymiarze przestrzeni jest zamknięta – „związa się w okrąg”. Świat ma wtedy geometrię rurki: czas i trzy pierwsze wymiary przestrzenne biegną wzdłuż jej osi, a czwarty wymiar przestrzeni tworzy okrąg poprzeczny do osi. Dlaczego tego wymiaru nie widzimy? Ponieważ jest mały; rurka jest cienka i wygląda jak „druć”.

Tylko dla cząstki punktowej żaden okrąg nie byłby mały. Jednak z każdą cząstką o pędzie p stowarzyszona jest fala de Broglie’a o długości $\lambda = h/p$, co oznacza, że cząstka wypełnia obszar o średnicy rzędu λ . Jeżeli promień okręgu jest np. dużo mniejszy od rozmiarów protonu, to piąty wymiar jest niedostępny nie tylko dla ciał makroskopowych, ale i dla promieniowania rentgenowskiego. Chcąc mieć niemal punktowy foton czy

inną cząstkę, musimy nadać im ogromny pęd (i energię $E \approx cp$). Foton czy też elektron „zmieści się” na okręgu w piątym wymiarze, gdy λ jest mniejsza od promienia tego okręgu. Przy promieniu 10^{-20} cm wymaga to energii co najmniej 10^6 GeV, daleko poza zasięgiem współczesnych akceleratorów. Rozmiar okręgu 10^{-20} cm został wybrany zupełnie arbitralnie; uważa się, że jeśli obwód Wszechświata w piątym wymiarze nie zależy od miejsca i chwili (czyli że rurka ma wszędzie jednakową średnicę), to jego wartość powinna być jedną z głównych stałych przyrody. Jednak rozsądnie jest nie wprowadzać dowolnie nowych stałych fundamentalnych, lecz opierać się na znanych jednostkach planckowskich. W takim razie promień hipotetycznego okręgu powinien być bliski długości Plancka l_P . I rzeczywiście, obliczenia wskazują, iż Wszechświat mógłby być rurką o promieniu $80 l_P \approx 10^{-31}$ cm. Tak cienka rurka jest dla większości cząstek elementarnych „efektywnie” czterowymiarowa, jedynie ultrarelatywistyczne cząstki o energiach powyżej $E_P/80 \approx 10^{17}$ GeV mogą poruszać się poprzecznie do osi rurki – tylko one odczuwają istnienie piątego wymiaru. Ta graniczna energia jest tak wielka, że to, co tradycyjnie nazywa się fizyką wysokich energii (oddziaływania cząstek wytwarzanych w najpotężniejszych akceleratorach oraz promieniowanie kosmiczne o najwyższych energiach), jest faktycznie fizyką energii bardzo niskich. W obrębie tej fizyki nie ma żadnych zjawisk pozwalających stwierdzić bezpośrednio istnienie piątego wymiaru. Jest to hipoteza bezpieczna, bo nieweryfikowalna.

Skoro tak, to po co ten niewykrywalny wymiar w ogóle wprowadzać? Otóż według pomysłu Theodora Kaluzy i Oskara Kleina za pomocą pięciowymiarowego świata możemy opisać grawitację i elektromagnetyzm jako jedno pole fizyczne. Idea jest prosta: rozpatrujemy pusty pięciowymiarowy świat – nie ma w nim materii, jest tylko pole grawitacyjne. Pole to opisane jest zespołem 14 funkcji. Dla obserwatora makroskopowego; nieświadomego istnienia piątego wymiaru (którego nie potrafi wykryć), ten zespół w naturalny sposób rozpada się na dwa: zespół 10 funkcji opisujących pole ciężenia w obserwowanym przezeń czterowymiarowym świecie oraz układ 4 funkcji będących potencjałami pola elektromagnetycznego. Pole grawitacyjne świata pięciowymiarowego przejawia się w czasoprzestrzeni czterowymiarowej jako jej pole grawitacyjne i pole elektromagnetyczne. Gdyby świat miał dokładnie cztery wymiary, to istniałaby tylko grawitacja i nic więcej. Piąty wymiar ujawnia się bardzo pośrednio, za to wyraziście – istnieniem światła. Idea doprawdy fascynująca.

W przestrzeni trójwymiarowej grawitacja i elektromagnetyzm są niezależnymi, nie związanymi ze sobą oddziaływaniami. Wprowadzając czwarty wymiar przestrzenny łączymy je w jedno oddziaływanie – pole ciężenia w świecie pięciowymiarowym. Jest to unifikacja geometryczna, o jakiej marzył Einstein. A co z pozostałymi oddziaływaniami elementarnymi: silnymi i słabymi? Tak jak świat czterowymiarowy jest „za ciasny” dla elektromagnetyzmu, tak z kolei pięciowymiarowy świat nie może „pomieścić” sił jądrowych i słabych. Trzeba uogólnić pomysł Kaluzy i założyć, że przestrzeń ma dużo więcej niż trzy znane wymiary.

W 1981 r. Edward Witten wykazał, że siły jądrowe i słabe „zmieszczą się” dopiero w przestrzeni dziesięciowymiarowej. Bierzymy więc pustą jedenastowymiarową czasoprzestrzeń – jest w niej tylko pole grawitacyjne opisane teorią Einsteina. Następnie za pomocą procedury zwanej redukcją wymiarową opisujemy to pole z punktu widzenia fizyka żyjącego w świecie, który efektywnie ma cztery wymiary. W wyniku redukcji wymiarowej jedenastowymiarowe pole grawitacyjne rozpada się na zwykłe pole ciężenia, pole oddziaływań elektroslabych oraz pole sił jądrowych. A zatem znane oddziaływania wywodzą się z grawitacji w jedenastu wymiarach.

W dodatkowych siedmiu wymiarach przestrzeni jest zamknięta, aby była nieobserwowalna i ma maleńkie rozmiary, niewiele różne od długości Plancka. W najprostszej wersji teorii Kaluzy – Kleina tych siedem wymiarów tworzy sferę, a dokładniej – z każdym punktem zwykłej czasoprzestrzeni należy związać 7-wymiarową sferę. Trudno to sobie wyobrazić, więc weźmy przykład dwuwymiarowy: walec otrzymamy umieszczając okrąg w każdym punkcie prostej, a torus – przypisując okrąg każdemu punktowi drugiego okręgu.

Liczba 11, skądinąd nieciekawa liczba pierwsza, symbolizuje zatem unifikację fundamentalnych oddziaływań. A gdzie są cząstki materii – kwarki i leptony? Kłopoty z materią są jednym z powodów, dla których teoria Kaluzy – Kleina ustąpiła miejsca obecnie szybko rozwijającej się tzw. teorii superstrun.

W zakresie obecnie dostępnych nam energii cząstek elementarnych teoria Kaluzy – Kleina nie przewiduje żadnych nowych zjawisk, które pozwalałyby ją zweryfikować, co nie oznacza jednak, że w ogóle nie przewiduje nowych efektów – byłaby wówczas jedynie doktryną filozoficzną.

Masy cząstek elementarnych, podobnie jak długości jakichkolwiek fal są związane z geometrią. W czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności, która jest otwarta w każdym wymiarze, mogą się rozchodzić fale o dowolnej długości i mogą istnieć cząstki bez masy spoczynkowej (fotony, neutrino, gluony) oraz cząstki o dowolnej masie. W zamkniętej przestrzeni, np. na strunie skrzypiec, mogą pojawić się tylko fale stojące o długości λ_0/n , gdzie λ_0 jest długością fali podstawowej. W czasoprzestrzeni, która w pewnych wymiarach jest zamknięta, jak w 11-wymiarowym świecie Wittena, masy cząstek elementarnych nie mogą być dowolne. Są tam cząstki bezmasowe oraz cząstki, których masa spoczynkowa jest równa $m_n = nm_0$, gdzie m_0 jest charakterystyczną skalą masy. Jeżeli promień 7-wymiarowej sfery, jaką tworzy przestrzeń w wyższych wymiarach, jest równy L , to $m_0 = c^2 L/G$. Przyjmując $L \approx l_P$ dostajemy $m_0 \approx m_P$. Teoria przewiduje zatem istnienie nowej generacji superciężkich cząstek elementarnych, zupełnie niezależnych od znanych nam leptonów i hadronów. Ich masy są całkowitą wielokrotnością masy Plancka, która uzyskuje wreszcie naturalną i fundamentalną interpretację jako charakterystyczna skala mas.

Bezpieczne podawanie ręki

Punktem wyjścia są dwie zasłyszane przeze mnie zagadki, które podaję w zmienionej interpretacji (oryginalna wersja nie nadaje się do publikacji). Zmiana ta nie zmienia jednak ich sensu matematycznego. Oto one.

Zagadka 1: W mieście, w którym panuje choroba zakaźna, trzech znajomych spotyka znajomą. W jaki sposób mogą się z nią przywitać przez podanie ręki w bezpieczny dla wszystkich sposób, jeśli wiadomo, że:

- 1) znajomi dysponują dwiema gumowymi rękawicami, które można przewrócić w razie potrzeby na drugą stronę oraz nakładać jedną na drugą,
- 2) zarazki przenoszą się przez dotyk, ale nie przenikają przez rękawice,
- 3) nikt nie wie, kto jest zarażony, a kto nie ?

A oto rozwiązanie. Pierwszy mężczyzna zakłada obie (!) rękawice i wita się ze znajomą. Następnie drugi mężczyzna zakłada zewnętrzną z tych rękawic, jej środkowa strona jest czysta, a strony zewnętrznej dotykała tylko kobieta, może się więc z nią przywitać. Wreszcie trzeci nakłada po wywróceniu na drugą stronę rękawicę, która została na rękę pierwszego mężczyzny, a na nią rękawicę z ręki drugiego mężczyzny (bez wywracania).

Zagadka 2: Jak trzech mężczyzn może przywitać dwie kobiety za pomocą trzech rękawic ?

Zagadkę pozostawiamy Czytelnikom do samodzielnego rozwiązania.

A oto problemy do zbadania. Spotykają się dwie grupy ludzi. Ile rękawic muszą mieć, aby każda osoba z jednej grupy mogła w bezpieczny sposób podać rękę wszystkim osobom z grupy drugiej? Ile rękawic potrzebuje grupa n osób, aby każdy z każdym mógł wymienić bezpieczny uścisk dłoni?

Czytelnikom i sobie życzę, aby tego typu problemy pozostały w sferze czystej abstrakcji.

J. W.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 511. Kubeł w kształcie stożka ściętego został napełniony wodą i przechylony tak, że woda sięga do najwyższego punktu dna. Czy ilość wody w kubku stanowi mniej czy więcej niż połowę jego pojemności?

Rozwiązanie na str. 12

M 512. Dziesięciu myśliwych strzela do dziesięciu kaczek. Każdy myśliwy wybiera cel niezależnie od pozostałych i trafia weń na pewno. Ile średnio kaczek ujdzie cało?

Rozwiązanie na str. 17

M 513. Dla jakich liczb całkowitych a, b suma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ jest liczbą całkowitą ?

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 248. Wyznacz przybliżoną wartość momentu pędu i energii kinetycznej ruchu obrotowego Ziemi. Średni promień Ziemi wynosi 6370 km, a zależność gęstości od odległości od środka Ziemi przedstawia tabela (podwójnym wartościom w tabeli odpowiadają miejsca skoku gęstości).

R[km]	6370	6340	6270	6170	5970	5370	4370	3470	2870	1370	370
$\rho[\text{g}/\text{cm}^3]$	2,6	3,0	3,4	3,5	3,6	4,7	5,2	5,7	10,2	11,5	17,1
		3,3						9,4		16,9	

Rozwiązanie na str. 17

F 249. O ile zwiększyłaby się długość doby, gdyby cały lód na powierzchni Ziemi uległ stopieniu? Można przyjąć, że po stopieniu lodu poziom oceanów podniósłby się o około 61 m, a praktycznie cały lód znajduje się na szerokości większej niż 80° , promień Ziemi $R \approx 6370$ km, a jej moment bezwładności $I \approx 8,1 \cdot 10^{37}$ kg m².

Rozwiązanie na str. 12

MATERIAŁY PLASTYCZNE PRZEWODNIKAMI I

Inżynieria materiałowa jest tym działem nauki, który przeżywa niezwykły rozwój. W laboratoriach otrzymuje się coraz lepsze, coraz czystsze materiały, większe i doskonalsze kryształy, nowe nadprzewodniki, półprzewodniki, magnetyki, dielektryki, ceramiki itd. Wydaje się czasem, że już nic nowego nie można wymyślić. Tymczasem ostatnio wciąż jesteśmy zaskakiwani kolejnymi odkryciami, o trudnych do przecenienia możliwościach zastosowań. Takim właśnie bardzo ważnym krokiem jest otrzymanie materiałów plastycznych świetnie przewodzących prąd elektryczny. Wszystko zaczęło się od przypadku w laboratorium tokijskiego instytutu technologicznego. Student syntetyzujący poliacetylen dodał tysiąc razy za dużo katalizatora i otrzymał coś podobnego do folii aluminiowej.

Prowadzone w USA, późniejsze, systematyczne badania tego metalicznego plastiku doprowadziły w 1977 roku do wniosku, iż domieszkowanie jodem jest w stanie zmniejszyć jego opór elektryczny miliard razy. Natomiast firma BASF z RFN w 1987 roku otrzymała poliacetylen o przewodnictwie właściwym $\sigma = 147\ 000\ (\Omega\text{cm})^{-1}$. Rezultat ten stanowi około 25% wartości przewodnictwa miedzi uważanej dotąd za najlepszy przewodnik w temperaturze pokojowej. Biorąc jednak pod uwagę fakt, iż poliacetylen jest osiemkrotnie lżejszy od miedzi stwierdzamy, że "druć" plastikowy jest dwukrotnie lepszy od miedzianego o tym samym ciężarze. Ponadto przewodzące plastiki wykazują silną anizotropię przewodnictwa. Może ono być 1000 razy większe wzdłuż łańcuchów molekularnych niż w kierunku do nich prostopadłym. Samo domieszkowanie plastików ma inny charakter niż w przypadku półprzewodników.

Stosowane koncentracje domieszek są bardzo duże — do kilku procent. Ponadto domieszki nigdy nie zastępują atomów pierwotnego łańcucha węglowego, tylko dołączają się do niego lekko zaburzając położenie atomów węgla. W ten sposób powstają w materiale "wyspy" przewodzące, które przy wysokiej koncentracji domieszek zaczynają na siebie nachodzić i dramatycznie zwiększają wartość przewodnictwa właściwego. W zależności od rodzaju domieszek możemy otrzymywać różne rodzaje nośników. Domieszkowanie poliacetylenu jodem prowadzi do otrzymania przewodnictwa dziurowego (typu p), natomiast domieszkowanie sodem — elektronowego (typu n). Należy jednak stwierdzić, iż mechanizm przewodnictwa w polimerach jest bardziej skomplikowany niż w półprzewodnikach. W konsekwencji nie istnieje jeszcze dobry model teoretyczny opisujący to zjawisko. Mimo to w 1987 roku japońska firma Seiko rozpoczęła już sprzedaż pierwszego akumulatorka do zegarka ręcznego z jedną z elektrod wykonaną z przewodzącej polibutyliny. Akumulatorki te, o napięciu 3V, mają trzykrotnie większą pojemność od znanych akumulatorków litowych. Szereg innych firm również szykuje różnego rodzaju akumulatory plastikowe zdecydowanie lepsze od dotychczas używanych. Planowane zastosowania przewidują również wykorzystanie przewodzących plastików zarówno w obwodach scalonych i komputerach, jak i w ciele ludzkim w charakterze sztucznych włókien nerwowych. Wydaje się, że zaczyna się druga era plastików, być może równie ważna jak pierwsza...

Gwiazdy Władysławowskie

(na marginesie rocznicy śmierci Heweliusza (1611 – 1687))

Prof. dr Jerzy Dobrzycki

Wiele pomysłowości, talentu i wysiłku wkładał Heweliusz w staranną konstrukcję budowanych przez siebie przyrządów pomiarowych. Służyły one do opracowania ostatniego w historii astronomii wielkiego katalogu gwiazd, wykonanego wyłącznie drogą obserwacji gołym okiem, bez pomocy lunety. Heweliusz okazał się tu konserwatystą: właśnie w okresie, gdy pracował nad swym katalogiem, uczeni podejmowali próby wykorzystania lunety w pomiarach i zwiększenia w ten sposób ich dokładności. W pełni zastosował lunetę jako celownicę około 1670 roku Jean Picard przy pomiarach triangulacyjnych we Francji, kiedy to po raz pierwszy nowożytną metodą wyznaczał wielkość promienia Ziemi. Wkrótce też stanowisko Heweliusza broniącego swych klasycznych instrumentów, spotkało się z krytyką uczonych angielskich, przede wszystkim Roberta Hooke'a. Hooke zaprzeczał możliwości wyznaczenia położenia gwiazd z dokładnością przewyższającą — a choćby nawet dorównującą — dokładności pomiarów z lunetą celowniczą. Polemika była gorąca (choć, jak na ówczesne czasy, jeszcze niezbyt gwałtowna), a Heweliuszowi wyraźnie sprawiała przykrość.

W 1679 roku Towarzystwo Królewskie w Londynie (*Royal Society*), którego członkiem był Heweliusz, delegowało do Gdańska młodego, ale znanego już astronoma, Edmunda Halleya dla zapoznania się z instrumentarium i techniką obserwacji Heweliusza. Prowadzone równolegle przez obu astronomów pomiary przekonały Halleya o zaskakującej precyzji pomiarów osiągniętej przez gdańskiego astronoma. Niemniej jednak angielscy uczeni pozostali zwolennikami instrumentów nowego typu i przynajmniej w korespondencji między sobą krytycznie wyrażali się o uporze starszego pana (w roku 1679 Heweliusz miał lat 68; Halley — 23, Hooke — 44, Flamsteed, opracowujący katalog gwiazd już nową techniką — 33).

Kto miał rację w tym sporze? Właściwie obie strony po trochu. Sekundy łuku, jakimi operował Heweliusz w zapisie i rachunkowym opracowaniu pomiarów, nie są dostępne przy pomiarach gołym okiem. Za to umiejętności Heweliusza jako konstruktora przyrządów i wyjątkowa zapewne ostrość wzroku zapewniły równowartość pomiarów gdańskich i — podejmowanych współcześnie pomiarów, już teleskopowych — astronomów angielskich. Potwierdza to też niedawna statystyczna analiza XVII-wiecznych katalogów gwiazdowych, opracowanych przez Brahego, Heweliusza i (dla nieba południowego) Halleya. Autor opracowania na ten temat, P. Rybka (*Katalog gwiazdowy Heweliusza*, Wrocław-Warszawa 1984) wnioskował, że głównym źródłem błędów pozycji gwiazd były w epoce Heweliusza nie przeziernice pozbawione optyki, ale niedokładność podziałości instrumentu.

Nie miał racji Hooke, kwestionując rzetelność pomiarów Heweliusza, ale, oczywiście, użycie lunety musiało z biegiem czasu doprowadzić do nowej skali dokładności pomiarów, zwłaszcza po wynalezieniu nowej metody kreślenia podziałek kątowych (Michel F. de Chaulnes, 1765). Granica dokładności pomiaru bez lunety wyznaczona jest przecież przez samą anatomię oka: elementy światłoczułe siatkówki (czopki) mają średnicę około 3 mikronów. Rozłączne dostrzeżenie dwóch punktowych źródeł światła przez obserwatora możliwe jest dopiero, gdy oba obrazy oddzieli co najmniej jeden nie oświetlony, a więc nie pobudzony czopek siatkówki. Łatwo obliczyć graniczną wartość kątową — zdolność rozdzielczą oka ludzkiego. Skoro obrazy na siatkówce muszą być oddalone prawie o podwójną średnicę światłoczułego zakończenia nerwowego, to jest o 5 do 7 mikronów, przy przeciętnej ogniskowej soczewki oka, wynoszącej 17 mm, otrzymujemy graniczną wartość około jednej minuty-łuku. Dodajmy, że granica ta jest niższa, gdy chodzi nie o rozdzielenie obrazów punktowych, ale np. stwierdzenie równoległości linii (około 30 sekund łuku).

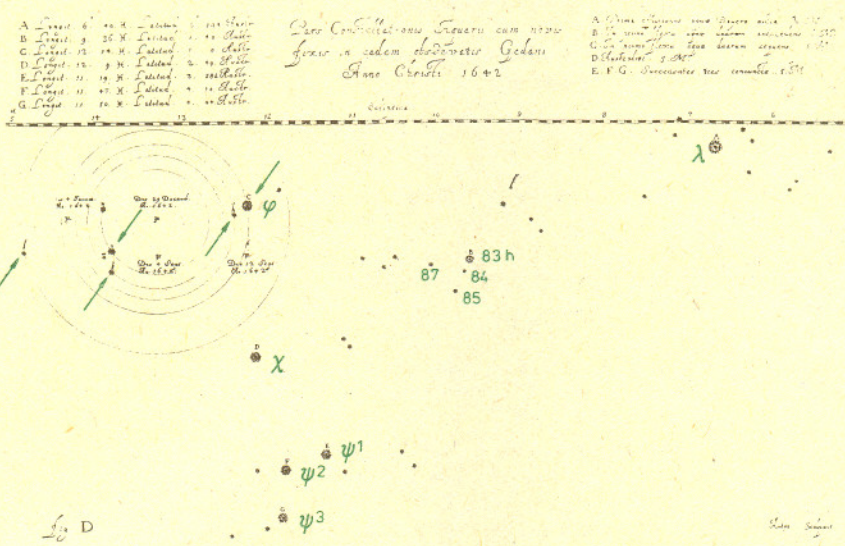
Spór o lunetę w astronomii dotyczył tylko jej użycia w pomiarach kątowych. Heweliusz był przecież sam wytrwałym konstruktorem lunet; jeśli tylko nie były to ogromnie niewygodne w użyciu lunety-giganty (największa, zbudowana przez Heweliusza, miała ponad 40 m długości), osiągał za ich pomocą cenne rezultaty. Najważniejsze to, oczywiście, studia nad topografią Księżyca i badanie zjawiska libracji. Właśnie przy okazji obserwacji teleskopowych, jeszcze w wcześniejszym okresie swej działalności, uzyskał Heweliusz materiał do krytycznej oceny twierdzeń współczesnego mu autora, Antoniego M. Schyrlego, zakonnika z Reity w Czechach,



Gwiazdozbiór Wodnika i okolice wg atlasu Jerzego Dobrzyckiego, PWN, Poznań 1956.

znanego – od nazwy tej miejscowości – jako Rheita (1597 – 1660). Dodajmy od razu, że Rheita był utalentowanym technikiem-konstrukтором przyrządów optycznych, wynalazcą lunety ziemskiej (o obrazie prostym) i nowej konstrukcji okularu (określenia: obiektów i okular pochodzą również od Rheity). Dużo gorzej powiodło mu się przy wykorzystywaniu przyrządów do obserwacji astronomicznych: najwyraźniej pozbawiony niezbędnego zmysłu samokrytycznego, działał jakby pod przymusem dokonania jakiegokolwiek odkrycia. W rezultacie w 1643 r. ogłosił informację o zaobserwowaniu dziewięciu księżyców Jowisza, sześciu – Saturna i dwóch – Marsa. Nowe pięć księżyców Jowisza Rheita nazwał gwiazdami Urbana VIII (*Stellae Urbanoctavianae*), wyraźnie w przeciwstawieniu z czterema gwiazdami Medycejskimi – pierwszymi czterema księżycami Jowisza nazwanymi tak przez Galileusza. Sceptycznych i krytycznych uwag współczesnych nie przyjmował do wiadomości, podtrzymując swe odkrycie.

Dzięki tej polemice dotarły do Heweliusza szczegóły obserwacji Rheity i wykres przedstawiający konfigurację dziewięciu domniemych księżyców Jowisza w grudniu 1642 r. (Jowisz znajdował się w pobliżu φ Wodnika). Heweliusz, który systematycznie obserwował wielkie planety, mógł obserwację Rheity porównać z własnymi obserwacjami tej samej okolicy nieba, wykonanymi w Gdańsku w drugiej połowie 1642 r. Były to obserwacje teleskopowe, przy których Heweliusz rejestrował graficznie położenie księżyców Jowisza i konfigurację gwiazd stałych. Dzięki temu mógł wykazać, że o tych pięć księżyców Rheity to w rzeczywistości gwiazdy, poza φ Wodnika gwiazdy niewidoczne gołym okiem, a więc o jasnościach poniżej 6 wielkości gwiazdowej.



Gwiazdy Władysławowskie (zaznaczone strzałkami) wg *Selenographii* Heweliusza. Strzałki i greckie oznaczenia gwiazd dorysowane przez grafika.

Oczywiście najdotkliwszą pomyłką Rheity było przemianowanie na satelitę Jowisza gwiazdy φ Wodnika – gwiazdy czwartej wielkości, znanej dobrze od czasów starożytnych i określonej przez Ptolemeusza w gwiazdozbiornie Wodnika jako ostatnia z gwiazd w pierwszym zakolu strumienia.

Obserwacjom własnym i Rheity poświęcił Heweliusz sporo miejsca w wydanej w 1647 r. *Selenographii*. Podkreślając własny wkład w obserwacje gwiazd – domniemych satelitów Jowisza – i w określenie ich położenia, zaproponował nadanie im nazwy *Gwiazd Władysławowskich* – *Stellae Vladislavianae*, na cześć Władysława IV (*Selenographia*, s. 63; o dedykacji i stosunkach Heweliusza z dworem Władysława IV pisała K. Targosz; *Uczony dwór Ludwiki Marii Gonzagi*, Wrocław-Warszawa 1975, s. 292 i nn.). Król zapewne przychylnie przyjął tę dedykację. Nie zaznaczyła się ona jednak ani w postaci wyraźnego mecenatu królewskiego dla działalności Heweliusza (jak to później miało miejsce za Jana III), ani też nie przyjęła się w literaturze naukowej. Były to zresztą dość groźny w skutkach precedens nadawania nazwisk możliwych tego świata w olbrzymim zbiorze gwiazd teleskopowych. Inaczej rzecz się miała z nowymi gwiazdozbiornami, jakie wprowadził Heweliusz. Obejmowały one gwiazdy widoczne gołym okiem, a do ich przyjęcia przez społeczność uczonych przyczynił się autorytet Heweliusza, autora katalogu i atlasu nieba *Firmamentum Sobiescianum*. Tam właśnie, z dedykacją odwołującą się do bitwy wiedeńskiej, wyodrębnił i nazwał Heweliusz Tarczę Sobieskiego na cześć zwycięskiego monarchy.



Co to są zbiory rozmyte

Doc. dr Tadeusz GERSTENKORN, mgr Jacek MAŃKO

W roku 1871 ukazała się praca Georga Cantora inicjująca badania nad pojęciem zbioru. Niewiele osób wróżyło wówczas temu pojęciu tak wielką przyszłość, jaka stała się jego udziałem. Pojęcie zbioru jest dziś podstawowym pojęciem matematyki.

Niech X oznacza pewną zbiorowość (mnogość) najróżniejszych przedmiotów. Zbiór (w znaczeniu zwykłym – klasycznym, cantorowskim) rozumiany jest wtedy jako zespół Z tych przedmiotów z X , które wyróżnia jakaś wspólna własność. Zatem przedmiot należy do pewnego zbioru, gdy ma określoną własność, nie należy do niego, gdy tej własności nie ma. Przy takim ujęciu zakłada się milcząco, że dany konkretny przedmiot może pewną własność mieć lub jej nie mieć, czyli może do zbioru należeć lub nie. Innej możliwości nie ma. Przykładem może być zbiór A liczb całkowitych większych od -3 i mniejszych od 4

$$A = \{x \in \mathbb{C} : -3 < x < 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

gdzie \mathbb{C} oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych (rys.1).

Nie jest to jedyny sposób przedstawienia zbioru. Zbiór można również dobrze określić podając jego funkcję charakterystyczną.

Funkcją charakterystyczną zbioru $Z \subset X$ nazywamy funkcję $\chi_Z : X \rightarrow \{0, 1\}$ określoną wzorem

$$(1) \quad \chi_Z(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in Z, \\ 0, & \text{gdy } x \notin Z. \end{cases}$$

Zbiór Z można wtedy przedstawić w postaci zbioru par

$$(2) \quad Z = \{(x, \chi_Z(x))\}.$$

Wspomniany zbiór A wyglądałby następująco

$$A = \{\dots, (-4, 0), (-3, 0), (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, 0), \dots\}.$$

Wykres funkcji χ_A przedstawia rysunek 2.

Życie codzienne dostarcza nam jednak przykładów, gdzie podobna interpretacja, tzn. dokładne wskazanie elementów przynależnych do zbioru (czyli mających określoną własność), nastęrcza duże trudności.

Dla przykładu weźmy „wysokiego mężczyznę”. Czy wysoki mężczyzna to ten, który ma co najmniej 180 cm, czy 185 cm, czy też dopiero 193 cm wzrostu? Widać wyraźnie, że nie można tu w żaden sposób przeprowadzić naturalnej i sensownej granicy między „mężczyzną wysokim” a tym, który nim nie jest. Stwierdzenie, że np. wysocy są tylko ci, którzy mają powyżej 185 cm wzrostu, jest tu, oczywiście, sztuczne. Bo co zrobić z mężczyzną, który ma 184 cm wzrostu? On jest przecież też „wysoki”, podobnie jak i ten, który ma 183 cm wzrostu.

Analogicznie przedstawia się sprawa z pojęciem „łysy”. O człowieku, który nie ma ani jednego włosa na głowie, z pewnością powiemy, że jest łysy; ale co zrobić z tym, który ma pewną ilość włosów na głowie, choć nie za bardzo zaznaczoną?

Podobnie, jak określić cenę za 100 kg ziemniaków, oferowanych w różnych punktach sprzedaży. Czy cena 2500 zł jest „wysoka”, czy nie? Jak wygląda „wysokość” tej ceny dla 2800 zł, 3000 zł czy też 3200 zł?

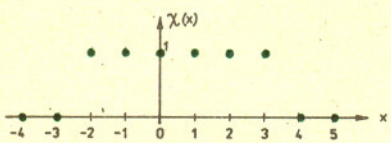
W celu uniknięcia takich nieścisłości L. A. Zadeh wprowadził w 1965 roku pojęcie zbioru rozmytego (ang. *fuzzy set*). Analogicznie do zależności (1) i (2) zbiór rozmyty Z określony w obszarze rozważań X można przedstawić jako zbiór par

$$(3) \quad Z = \{(x, \mu_Z(x))\},$$

gdzie $\mu_Z : X \rightarrow [0, 1]$ jest tzw. funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje stopień przynależności do danego zbioru rozmytego: od nieprzynależności ($\mu_Z(x) = 0$) poprzez przynależność częściową ($0 < \mu_Z(x) < 1$), do całkowitej przynależności ($\mu_Z(x) = 1$).



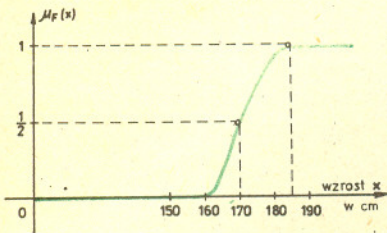
Rys. 1



Rys. 2



Rozwiązanie zadania M 518.
Założmy, że a i b są względnie pierwsze. Jeśli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$, to $a^2 + b^2 = abk$, czyli $b^2 = a(bk - a)$. Znaczący to, że b^2 jest podzielne przez a . Jest to możliwe tylko dla $a = \pm 1$. Podobnie $b = \pm 1$. Tak więc wśród par liczb względnie pierwszych rozwiązaniami są tylko $(\pm 1, \pm 1)$.
Ogólnie: liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ jest całkowita tylko dla $a = \pm b$.



Rys. 3

Poniższy, uproszczony bardzo przykład pozwoli zapoznać Czytelnika z pewnym zastosowaniem pojęcia rozmytości w wybranym problemie ekonomicznym.

Przyjmijmy, że na pewnym terytorium znajdują się dwa zakłady produkcyjne A i B produkujące ten sam wyrób przy różnym koszcie jednostkowym. Ceny tego wyrobu są więc równe: k_A i k_B . Może się zdarzyć, że ceny te nie są stałe i nie każda cena jest możliwa do przyjęcia. Ceny zbyt wysokie mogą wywołać niezadowolenie, a ceny zbyt niskie mogą spowodować upadłość zakładu. Ceny k_A i k_B można wówczas potraktować jako rozmyte określając funkcje możliwości (przynależności) wprowadzenia różnych cen wyrobów obu zakładów (powołując np. grupę ekspertów proponujących różne ceny). Powiedzmy, że w zakładzie A rozważano cztery warianty cen, a w zakładzie B trzy warianty, przy czym każda z proponowanych cen ma odpowiedni stopień realności funkcjonowania na rynku. Pokazują to tabele:

k	1	2	3	4
$\mu_A(k)$	0,5	0,7	1	0,2

k	1	2	3
$\mu_B(k)$	0,5	1	0,3

Z tych tabel widać, że najbardziej realna cena dla zakładu A to cena nr 3, a dla zakładu B cena nr 2.

Mając funkcje przynależności cen dla obu zakładów można zainteresować się problemem ustalenia zbiorowości nabywców wyrobów rozważanych zakładów (przy założeniu, że są sprzedawane tylko w miejscowości A i odpowiednio B). Stawiamy zadanie znalezienia granicy rozdzielającej klientów kupujących w miejscowości A od klientów kupujących w miejscowości B. Przyjmujemy dość naturalne założenia, że cena p przejazdu jednego kilometra jest stała oraz że klient chce płacić jak najmniej. Niech C będzie miejscem zamieszkania pewnego klienta. Odległość C od A i B jest odpowiednio d_{CA} i d_{CB} . Wtedy dla klienta zlokalizowanego w punkcie C koszt zakupu wyrobu z zakładu A wynosi $d_{CA} \cdot p + k_A$ jednostek płatniczych, a z zakładu B wynosi $d_{CB} \cdot p + k_B$ jednostek. Szukaną granicę stanowi wtedy zbiór punktów spełniających równanie: $d_{CA} \cdot p + k_A = d_{CB} \cdot p + k_B$. Wielkości d_{CA} i d_{CB} (a więc i potencjalny klient) będą zmienne w zależności od przyjętych cen k_A i k_B .

Dla ilustracji załóżmy, że funkcja przynależności zbioru rozmytego F przedstawiającego „wysokiego mężczyznę” wygląda tak, jak na rysunku 3. Można ją interpretować następująco: mężczyzny poniżej 160 cm nie uznajemy na pewno za wysokiego, mężczyznę powyżej 185 cm na pewno uznajemy za wysokiego, a mężczyznę o wzroście od 160 cm do 185 cm uznajemy za wysokiego w pewnym stopniu (170 cm – wysoki w stopniu 1/2), przy czym tym bardziej, im bliższe 1 są wartości funkcji μ_F .

A oto inne przykłady zbiorów rozmytych.

Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Rozmyty zbiór „kilka” w przestrzeni X można określić jako

$$\text{„kilka”} = \left\{ \left(1, 0\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(4, \frac{3}{4}\right), \left(5, 1\right), \left(6, \frac{3}{4}\right), \left(7, \frac{1}{2}\right), \left(8, \frac{1}{3}\right), \left(9, 0\right), \left(10, 0\right) \right\}.$$

Oznaczmy przez d zbiór bułek pieczonych dzisiaj, przez w – zbiór bułek pieczonych wczoraj, przez p – przedwczoraj. Umówmy się, że wartość funkcji przynależności dana będzie równościami: $\mu(d) = 1$, $\mu(w) = 0,5$, $\mu(p) = 0,1$. Otrzymujemy zbiór rozmyty, który można traktować jako matematyczne ujęcie terminu „świeże bułki”: bułki pieczone przedwczoraj są „świeże” w stopniu 0,1, bułki wczorajsze są „świeże” w stopniu 0,5, a dzisiejsze są rzeczywiście „świeże” (w stopniu 1).

Zauważmy, że zwykły zbiór można traktować jako zbiór rozmyty, a jego funkcję przynależności jest funkcja charakterystyczna.

Na zbiorach rozmytych można wykonywać działania podobnie jak na zbiorach zwykłych. Pokażemy, jak to można czynić, wskazując jednocześnie na pewne różnice.

Załóżmy, że w pewnym zbiorze rozważań X mamy dwa zbiory rozmyte A i B o funkcjach przynależności odpowiednio μ_A i μ_B .

Zbiory te są równe, gdy dla dowolnego x jest $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Mówimy zaś, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B, gdy $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$. Aby określić sumę $(A \cup B)$, część wspólną $(A \cap B)$ i uzupełnienie (A') , wystarczy podać wartości ich funkcji przynależności dla $x \in X$:

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A'}(x) &= 1 - \mu_A(x). \end{aligned}$$

Powyżej określone działania są uogólnieniem działań na zwykłych zbiorach i mają wiele własności tych działań.

$A \cup B = B \cup A$	– przemienność
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	– łączność
$A \cap B = B \cap A$	– przemienność
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	– łączność
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	– rozdzielność
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$(A')' = A$	– involucja
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	– prawa de Morgana
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	

Nie mają jednak wszystkich własności. Np. nie są spełnione warunki $A \cup A' = X$, $A \cap A' = \emptyset$ ($\mu_{\emptyset}(x) \equiv 0$ i $\mu_X(x) \equiv 1$). Można to łatwo sprawdzić na przykładzie zbioru „kilka”.

Przedstawione tutaj pojęcie zbioru rozmytego, zilustrowane kilkoma przykładami, znajduje szczególnie szerokie zastosowanie w naukach „miękkich”, takich jak medycyna, ekonomia, psychologia. Występujące w nich określenia: zdrowy człowiek, mały popyt, duża wydajność, dobry pracownik, wysoka cena itp., często prowadzą, jak widzieliśmy, do wieloznaczności i nieporozumień, gdyż zawierają zbyt dużo „rozmycia”.

Metody teorii zbiorów rozmytych bywają przedmiotem wielu dyskusji i znajdują obecnie coraz większe zastosowanie we wspomnianych wyżej naukach, a także w technice (np. teoria systemów i sterowania). Okazuje się bowiem, że problem „rozmycia” można badać ścisłymi metodami matematycznymi, a pewien sceptycyzm oraz nieufność w efekty tej nowej teorii wynikają zwykle z jej nieznaności.

5 mała delta

Gra w 20 pytań

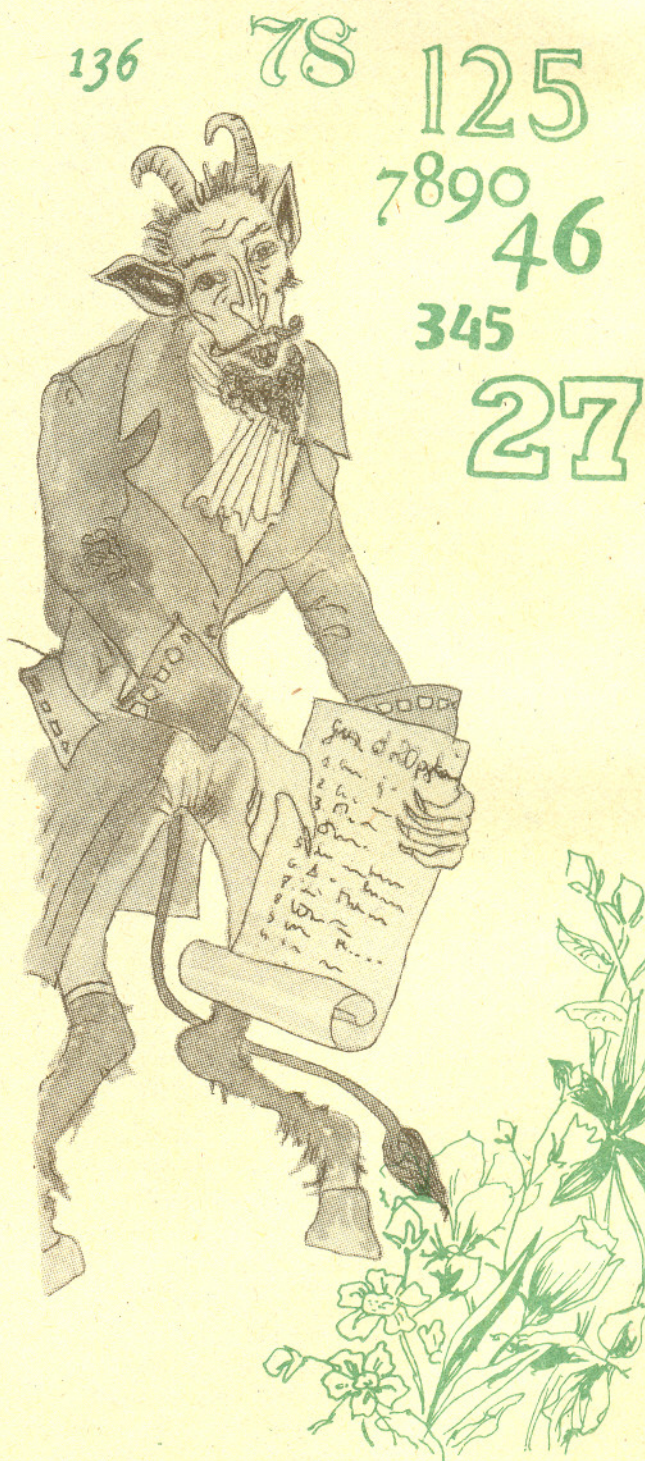
to dobrze znana gra. Jeden z dwóch graczy, którego dalej będziemy nazywać Odpowiadającym, w tajemnicy przed drugim graczem (nazywanym Pytającym) wybiera liczbę naturalną nie większą od 1 000 000 (i oczywiście nie mniejszą od 1). Następnie Pytający zadaje kolejno 20 pytań dotyczących pomyślanej liczby. Pytania te muszą być jednak tak sformułowane, by dopuszczały jedynie odpowiedzi „tak” lub „nie”.

Pozornie pytania takie mogą być bardzo różne. „Czy pomyślana liczba jest mniejsza od 27?”. „Czy jest parzysta?”. „Czy jest liczbą pierwszą?”. „Czy mieści się między 23 i 456 lub między 1287 i 56007?”. „Czy jest to jedna z liczb 1475, 2964, 41994, 846711?”. Jeżeli się wszelkim takim pytaniom przyjrzeć, można zauważyć, że są one zawsze pytaniami o to, czy pomyślana liczba jest elementem pewnego, dowolnie wybranego przez Pytającego, podzbioru X przedziału $[1, 1\ 000\ 000]$.

Odpowiadający za każdym razem udziela odpowiedzi zgodnej z prawdą. Po zadaniu 20 pytań Pytający musi odgadnąć pomyślaną liczbę: wymienia jedną z liczb od 1 do 1 000 000 i wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy jest to liczba wybrana na początku przez Odpowiadającego.

W grze w 20 pytań Pytający ma strategię wygrywającą, czyli istnieje taki sposób zadawania pytań, by niezależnie od tego, jaką liczbę wybrał Odpowiadający, liczbę tę odnaleźć.

Strategia, o której mowa, jest bardzo prosta: w każdym momencie dzielimy zbiór, w którym może się znajdować wybrana przez Odpowiadającego liczba, na dwie, możliwie równe, części (a więc jedna z nich zawiera co najwyżej o jedną liczbę więcej od drugiej) i pytamy, czy wybrana liczba jest w którejś (dowolnie przez nas wybranej) z nich. Zamiast uzasadniać, że jest to wygrywająca strategia w grze w 20 pytań, wykażę ogólniejszą prawidłowość.



Zamiast liczb od 1 do 1 000 000 zajmijmy się liczbami od 1 do n i zamiast 20 pytań niech będzie ich k . Opisana strategia jest wygrywająca, gdy $n \leq 2^k$; w przeciwnym razie Pytający strategii wygrywającej nie ma (i może wygrać tylko przypadkiem). Gdy to stwierdzenie uda się udowodnić, będziemy wiedzieli, że w grze w 20 pytań Pytający ma strategię wygrywającą – przecież $1\,000\,000 < 2^{20} = 1\,048\,576$.

Najpierw uzasadnienie, że dla $n > 2^k$ nie ma wygrywającej strategii dla Pytającego. Wystarczy w tym celu podać sposób, w jaki może wygrać Odpowiadający. Sposób ten nazywa się strategią diabelską, choć strategią nie jest. Przecież Odpowiadający ma zawsze odpowiadać zgodnie z prawdą, więc w ogóle nie ma żadnej strategii. Chyba żeby . . . , no właśnie. Może nie wybrać żadnej liczby i odpowiadać na pytania najmniej korzystnie dla Pytającego.

Na początku jest więcej niż 2^k liczb. Jeśli Pytający zapyta, czy szukana przez niego liczba jest elementem zbioru X , to Odpowiadający mówi „tak”, gdy w X jest więcej liczb, niż w jego uzupełnieniu i „nie” – w przeciwnym przypadku. W ten sposób wybiera tę odpowiedź, która jest mniej korzystna dla Pytającego (bo umiejscawia szukaną liczbę w większym zbiorze, a zatem mającym więcej niż 2^{k-1} elementów). Podobnie postępuje Odpowiadający, gdy otrzymuje kolejne pytania. Umiejscawia szukaną liczbę po dwóch pytaniach w zbiorze zawierającym więcej niż 2^{k-2} liczb itd., aż po k pytaniach ma ją umiejscowioną w zbiorze zawierającym więcej niż $2^{k-k} = 1$ liczbę, czyli co najmniej dwie liczby. Jakkolwiek zatem Pytający odgadywałby, zawsze może mu odpowiedzieć „źle” i wymienić, jako wybraną, inną liczbę.

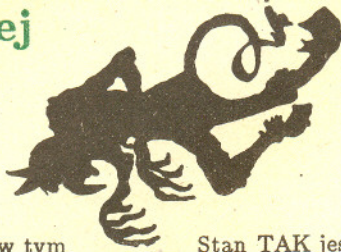
Powiecie, że Odpowiadający oszukiwał. Zgoda, ale przecież mogłoby się zdarzyć, że rzeczywiście taką liczbę, jaką wymienił na końcu, wybrał na początku gry, a Pytający nie miał szczęścia i pytał zgodnie z tym, jak to Odpowiadający z góry przewidział. Z tego, co opowiadają o diable, wynika, że on mógłby to istotnie przewidzieć – stąd nazwa: strategia diabelska.

Gdy jednak $n \leq 2^k$, i diabeł Odpowiadającemu nie pomoże. Jeśli Pytający będzie pytał zgodnie z opisaną strategią, to nawet najgorsza dla niego możliwość będzie dopuszczała po pierwszym pytaniu umiejscowienie szukanej liczby w zbiorze zawierającym co najwyżej 2^{k-1} liczb, po drugim – 2^{k-2} liczb i wreszcie po k pytaniach – w zbiorze zawierającym 2^{k-k} liczb, czyli jedną liczbę. A więc Pytający wygra.

Nasuwa się pytanie – ile pytań musi mieć do dyspozycji Pytający, by na pewno wygrać, mimo że Odpowiadającemu pozwolimy raz skłamać? Odpowiedź na to pytanie jest trudna, ale znana. Jest w tym numerze *Delty*.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI





Doc. dr Wojciech GUZICKI

W artykule o grze w 20 pytań (w *Małej Delcie*, w tym numerze) omówiliśmy sposób gry z graczem, który nie kłamie. A jak postępować z graczem, który kłamie? Czy jesteśmy zupełnie bezradni? To pytanie postawił Stanisław Ulam w swojej książce *Adventures of a Mathematician*. Zapytał on mianowicie o to, jaka jest najmniejsza możliwa liczba pytań, które musi zadać Pytający, by odgadnąć pomyślaną liczbę z przedziału $[1, 1\ 000\ 000]$, jeżeli wiadomo, że Odpowiadający może raz skłamać? Strategia wygrywająca oczywiście istnieje: powtarzamy każde pytanie 3 razy.

Zajmiemy się od razu problemem ogólnym: Odpowiadający wybiera liczbę z przedziału domkniętego $[1, n]$, Pytający zadaje k pytań, Odpowiadającemu wolno raz skłamać. Podobnie, jak poprzednio, Pytający zadaje pytania typu „czy $e \in X$?”, gdzie X jest dowolnym podzbiorem przedziału $[1, n]$.

W tej postaci problem został niedawno rozwiązany przez Andrzeja Pelca z Kanady. Problem analogiczny, w którym zadawane pytania muszą być porównawcze, nie jest jeszcze rozwiązany do końca. Przedstawimy teraz rozwiązanie oryginalnego problemu Ulama, dowód będzie niewielką modyfikacją dowodu Pelca.

Zauważmy najpierw, że w każdym momencie naszej gry musimy rozpatrywać dwa zbiory dopuszczalnych liczb (a nie jeden zbiór, jak w przypadku gry bez kłamstw). Pierwszy z tych zbiorów składa się z tych liczb, które są zgodne ze wszystkimi dotychczas udzielonymi odpowiedziami – tzn. liczb o tej własności, że gdyby Odpowiadający pomyślał którąś z nich, to w dotychczasowych odpowiedziach jeszcze nie skłamał, ma więc prawo skłamać w dalszym ciągu gry. Drugi z tych zbiorów składa się z liczb, spełniających wszystkie odpowiedzi z wyjątkiem jednej – są to więc liczby, o których Odpowiadający już skłamał. Niech pierwszy zbiór ma a elementów, a drugi b elementów. Parę (a, b) nazwiemy stanem gry. Teraz zauważmy, że każde pytanie jest w istocie rzeczą pytaniem o pewną liczbę elementów każdego z rozważanych powyżej zbiorów. Przypuśćmy zatem, że pytamy o x elementów pierwszego zbioru i y elementów drugiego. W zależności od odpowiedzi, gra przejdzie ze stanu (a, b) w jeden z dwóch stanów oznaczanych dalej przez TAK i NIE. Zastanówmy się, jaką postać ma stan TAK. Niech A będzie pierwszym zbiorem (ma on a elementów) i B drugim zbiorem (o b elementach). Pytanie „czy $e \in X$?” jest pytaniem o x elementów zbioru A i y elementów zbioru B , tzn. zbiór $X \cap A$ ma x elementów i zbiór $Y \cap B$ ma y elementów. Zatem zbiory $A \setminus X$ i $B \setminus Y$ mają odpowiednio po $a - x$ i $b - y$ elementów. W przypadku odpowiedzi „tak” pierwszy zbiór będzie się składał z tych elementów zbioru A , które są zgodne z ostatnią odpowiedzią, czyli należą do X . Jest to zatem zbiór $A \cap X$. Do drugiego zbioru należą natomiast te elementy zbioru A , o których teraz skłamał (tzn. $A \setminus X$) oraz te elementy zbioru B , o których nie skłamał (tzn. $B \cap Y$).

Stan TAK jest zatem równy $(x, a - x + y)$. Podobnie rozumując stwierdzimy, że stan NIE ma postać $(a - x, x + b - y)$.

Z każdym stanem zwiążemy teraz funkcję zwaną jego wagą. Przypuśćmy, że w stanie (a, b) Pytający może zadać jeszcze j pytań. Wtedy kładziemy $w_j(a, b) = a \cdot (j + 1) + b$. Funkcję w_j nazwiemy właśnie funkcją wagi (dokładniej j -tą wagą) stanu (a, b) . Funkcja wagi mówi nam, jakie możliwości ma jeszcze Odpowiadający. Ma on do dyspozycji a liczb, o których dotychczas mówił prawdę, może więc o każdej z nich dalej mówić prawdę lub skłamać w jednym z następnych j pytań – daje to $j + 1$ możliwości dla każdej z tych a liczb. Wreszcie ma on do dyspozycji b liczb, o których musi mówić prawdę do końca. Następnie określimy tzw. charakter stanu

$$ch(a, b) = \min\{j : w_j(a, b) \leq 2^j\}.$$

Zauważmy na koniec, że

$$w_j(a, b) = w_{j-1}(\text{TAK}) + w_{j-1}(\text{NIE}).$$

W dalszym ciągu będziemy wielokrotnie zastanawiali się nad istnieniem strategii wygrywającej dla Pytającego w środkowej fazie gry. Jeżeli gra znalazła się w stanie (a, b) i Pytający ma od tego momentu strategię wygrywającą za pomocą co najwyżej j pytań, to będziemy nazywać ją strategią wygrywającą począwszy od tego stanu.

Lemat 1. Jeśli $w_k(a, b) > 2^k$, to Pytający nie ma strategii wygrywającej w k pytaniach w grze począwszy od stanu (a, b) .

Dowód. Odpowiadający może zastosować diabelską strategię (patrz *Mała Delta*). Po pierwszym pytaniu będziemy mieli nierówność

$$w_{k-1}(\text{TAK}) + w_{k-1}(\text{NIE}) > 2^k.$$

Stąd jeden ze stanów TAK i NIE ma $(k - 1)$ -szą wagę większą od 2^{k-1} . Odpowiadający wybiera tę odpowiedź, która ma większą wagę. W ten sposób po k pytaniach dojdzie do stanu, którego zerowa waga jest co najwyżej równa 2. Teraz wystarczy zauważyć, że Pytający ma pewność zgadnięcia po zadaniu wszystkich pytań tylko wtedy, gdy stan gry jest jednym ze stanów $(1, 0)$ lub $(0, 1)$. Oba te stany mają jednak zerową wagę równą 1. Diabelska strategia okazała się zatem skuteczna dla Odpowiadającego, co kończy dowód lematu.

Z powyższego lematu wynika, że Pytający może mieć strategię wygrywającą w k pytaniach tylko wtedy, gdy k -ta waga stanu początkowego jest co najwyżej równa 2^k . W szczególności może się zdarzyć, że Pytający ma strategię wygrywającą w $ch(a, b)$ pytaniach począwszy od stanu (a, b) . Pokażemy teraz, że tak jest w istocie dla bardzo obszernej klasy stanów.

Nazwijmy stan (a, b) stanem przyjemnym, jeśli Pytający ma strategię wygrywającą w $ch(a, b)$ pytaniach począwszy od stanu (a, b) . Stan (a, b) nazwiemy stanem typowym, jeśli $b \geq a - 1$.

Twierdzenie. Wszystkie stany typowe są przyjemne.

Dowód. Stosujemy indukcję względem charakteru stanu.

Jedynymi stanami o charakterze 0 są stany $(1,0)$ i $(0,1)$. Są one stanami przyjemnymi, bo Pytający zna pomyślaną liczbę bez zadawania jakichkolwiek pytań.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie stany typowe o charakterze mniejszym od k są przyjemne. Niech (a,b) będzie dowolnym stanem typowym charakteru k . Pokażemy, że jest on przyjemny. W tym celu wystarczy znaleźć takie pytanie, że otrzymane w jego wyniku stany mają $(k-1)$ -sze wagi różniące się co najwyżej o 1. Mianowicie z założenia o charakterze stanu (a,b) wiemy, że $w_k(a,b) \leq 2^k$. Jeśli teraz $|w_{k-1}(\text{TAK}) - w_{k-1}(\text{NIE})| \leq 1$, to $w_{k-1}(\text{TAK})$ i $w_{k-1}(\text{NIE})$ są nie większe od 2^{k-1} . Stąd wynika, że charakter stanów TAK i NIE jest co najwyżej równy $k-1$. Jeśli teraz uda nam się dobrać pytanie tak, aby stany TAK i NIE były typowe, to z założenia będą one przyjemne. Pytający ma zatem strategię wygrywającą w $k-1$ pytaniach, co łącznie z zadaniem już pierwszym pytaniem daje strategię wygrywającą w k pytaniach.

Przypadek 1. Niech $a = 2 \cdot a_1$.

W zależności od parzystości liczby b bierzemy liczbę b_1 tak, by $b = 2 \cdot b_1$ lub $b = 2 \cdot b_1 + 1$. Wystarczy zadać teraz pytanie o a_1 elementów pierwszego zbioru i b_1 elementów drugiego zbioru. Otrzymamy stany typowe

$$\text{TAK} = (a_1, a_1 + b_1), \quad \text{NIE} = (a_1, a_1 + b - b_1),$$

których wagi różnią się, oczywiście, co najwyżej o 1.

Przypadek 2. Niech $a = 2 \cdot a_1 + 1$.

Udowodnimy najpierw pomocniczy lemat.

Lemat 2. Jeśli $b \geq k$, to można dobrać pytanie, którego poszukujemy.

Dowód. Bierzemy takie liczby b_1 i c , by $b = 2b_1$ lub $b = 2b_1 + 1$ oraz $k = 2c$ lub $k = 2c + 1$. Zadajemy teraz pytanie o a_1 elementów pierwszego zbioru i $b_1 + c$ elementów drugiego zbioru. Otrzymamy stany typowe

$$\text{TAK} = (a_1, a_1 + 1 + b_1 + c), \quad \text{NIE} = (a_1 + 1, a_1 + b - b_1 - c)$$

różniące się wagami co najwyżej o 1:

$$|w_{k-1}(\text{TAK}) - w_{k-1}(\text{NIE})| = |1 + (2 \cdot b_1 - b) + (2 \cdot c - k)| \leq 1.$$

Niech teraz (a,b) będzie stanem typowym, takim, że $b \geq 6$.

Pokażemy, że wtedy $b \geq k$, czyli spełnione jest założenie lematu 2. Otóż wystarczy pokazać, że $w_b(a,b) \leq 2^b$.

$$w_b(a,b) = a \cdot (b+1) + b \leq (b+1)^2 + b \leq 2^b \quad \text{dla } b \geq 6.$$

Ostatnią nierówność sprawdza się łatwo przez indukcję względem b , co skończy dowód lematu.

Niech teraz (a,b) będzie stanem typowym, takim, że $a \geq 7$.

Wtedy $b \geq 6$ i z powyższych rozważań wynika, że istnieje poszukiwane pytanie. Pozostają do rozpatrzenia przypadki stanów (a,b) , takich, że $a = 1$, $a = 3$ lub $a = 5$ oraz $a - 1 \leq b \leq 5$. Znalezienie w każdym z tych przypadków (z wyjątkiem stanu $(3,2)$) pytania, takiego, że stany TAK i NIE mają wagi różniące się co najwyżej o 1, jest łatwym ćwiczeniem dla Czytelnika. W stanie $(3,2)$, który ma charakter 5, zadajemy pytanie o 2 elementy pierwszego zbioru, otrzymując w wyniku stany $(2,1)$ i $(1,4)$. Teraz wystarczy zauważyć, że $w_4(2,1) = 11 < 16 = 2^4$ oraz $w_4(1,4) = 9 < 16 = 2^4$. To kończy dowód twierdzenia.

Udowodnione twierdzenie pozwala już na dokładne określenie liczby pytań potrzebnych Pytającemu

do odgadnięcia pomyślanej liczby. Ograniczmy się w dalszym ciągu do szczególnego przypadku, gdy liczba n jest parzysta. Rozważmy zatem stan $(n,0)$ i przypuśćmy, że jego charakter wynosi k . Zatem $w_k(n,0) = n \cdot (k+1) \leq 2^k$. Zadamy pytanie o n_1 elementów (gdzie $n = 2 \cdot n_1$). Otrzymamy w wyniku tego pytania dwa identyczne stany (n_1, n_1) , każdy o tej samej wadze $w_{k-1}(n_1, n_1)$. Zatem $w_{k-1}(n_1, n_1) \leq 2^{k-1}$, skąd wynika, że otrzymane stany mają charakter równy co najwyżej $k-1$. Jednocześnie są one typowe, a więc z twierdzenia wynika, że są one przyjemne. Oznacza to, że Pytający ma strategię wygrywającą w $k-1$ pytaniach, poczynawszy od każdego z tych stanów. Łącznie z pierwszym pytaniem daje to strategię wygrywającą w k pytaniach, poczynawszy od stanu wyjściowego $(n,0)$, a więc od przedziału domkniętego $[1, n]$.

Z drugiej strony, jeśli $w_k(n,0) = n \cdot (k+1) > 2^k$, to Odpowiadający ma swoją strategię diabelską. Ostatecznie dostajemy odpowiedź na pytanie, kiedy Pytający ma strategię wygrywającą: strategia ta istnieje dla przedziału domkniętego $[1, n]$ (dla n parzystego) i k pytań wtedy i tylko wtedy, gdy $n \cdot (k+1) \leq 2^k$. Analogiczne rozwiązanie dla n nieparzystego Czytelnik bez trudu znajdzie samodzielnie – jedyna drobna trudność polega na tym, że po pierwszym pytaniu nie otrzymujemy stanów identycznych. Najrówniejszy podział stanu $(n,0)$ dla $n = 2 \cdot n_1 + 1$ otrzymamy pytając o n_1 elementów – wynikiem będą stany $(n_1, n_1 + 1)$ oraz $(n_1 + 1, n_1)$. Z otrzymanej zależności po chwili wynika, że dla $n = 1\,000\,000$ potrzeba 25 pytań. Jako ciekawostkę można podać, że analogiczna gra z dwoma kłamstwami wymaga 29 pytań.

Analiza przedstawionego dowodu pozwala zauważyć, że pytania, które będziemy zadawać, są pytaniami o przedział: „czy pomyślana liczba leży w przedziale domkniętym $[p, q]$?”.

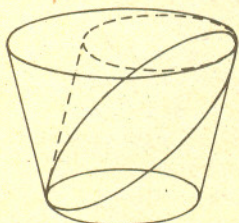
Czytelnikom umiejącym pisać programy komputerowe można teraz zaproponować napisanie programu odgadującego pomyślaną liczbę według opisanego wyżej algorytmu.

Zastosowanie dla tego typu zabaw jest chyba widoczne. Chodzi mianowicie o przesyłanie informacji kanałami, które czasami powodują powstawanie błędów. Wystąpienie dwóch błędów jest bardzo mało prawdopodobne, spróbujmy więc opracować metodę postępowania w przypadku pojawienia się co najwyżej jednego błędu. Zobaczyliśmy pewną metodę postępowania w takich przypadkach, mianowicie wtedy, gdy mamy do czynienia z interakcyjną wymianą informacji. Można teraz wyobrazić sobie, że chcemy odgadnąć pomyślaną liczbę, ale musimy zadać wszystkie pytania od razu. Pytania te będą, oczywiście, znane Odpowiadającemu przed grą. Wystarczy więc, jeśli przyśle on nam ciąg odpowiedzi, zakodowany w postaci ciągu zer i jedynek: zero na i -tej pozycji oznacza, że na to pytanie dał odpowiedź negatywną, jedynka – pozytywną. Problemem będzie teraz znalezienie minimalnej długości kodu (i oczywiście sposobu rozkodowywania, czyli treści kolejnych pytań), tak aby móc przesłać jednoznacznie informację o pomyślanej liczbie, pomimo że zakodowany ciąg po odebraniu go może różnić się na jednym miejscu od ciągu wysłanego. W ten sposób doszliśmy do pojęcia tzw. kodów korygujących błędy, o których innym razem.

Obalamy prawa fizyki

Doc. dr Jan GAJ

Rozwiązanie zadania M 511.



Powierzchnia wody ma środek symetrii O (bo jest po prostu elipsą). Woda, zawarta w kuble, stanowi bryłę, której obraz przy symetrii środkowej względem O mieści się nadal w kuble. Istotnie, widać od razu, że dno oraz odpowiednie odcinki tworzących stożka mieszczą się gdzie trzeba (patrz rysunek). Wobec tego wody jest mniej niż połowa pojemności kubła.

Daniel Bernoulli, Szwajcar, 1700 - 1782, znany matematyk i fizyk.



Rozwiązanie zadania F 249.

Oznaczmy przez I moment bezwładności Ziemi przed stopieniem lodu, a przez $I + \Delta I$ - po stopieniu. Na podstawie prawa zachowania momentu pędu możemy zapisać

$$I\omega = (I + \Delta I)(\omega + \Delta\omega),$$

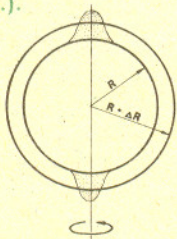
(ω i $\omega + \Delta\omega$ - prędkości kątowe Ziemi przed i po stopieniu lodu). Powyższy wzór możemy zapisać w postaci

$$\frac{I}{T} = \frac{I + \Delta I}{T + \Delta T}, \text{ gdzie } T = 2\pi/\omega.$$

Stąd poszukiwana zmiana okresu obrotu

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I} T.$$

Zmiana momentu bezwładności ΔI powstała na skutek zmiany rozkładu masy lodu (wody), który początkowo znajdował się w pobliżu osi obrotu (i dlatego dawał bardzo mały wkład do całkowitego momentu bezwładności), a po roztopieniu został, jak zakładamy, równomiernie rozłożony w warstwie kulistej o promieniu R i grubości ΔR (patrz rys.).



Moment bezwładności takiej warstwy wynosi (patrz rozwiązanie zadania F 248)

$$\Delta I \approx \frac{8}{3} \pi \rho R^4 \Delta R.$$

A więc zmiana okresu obrotu Ziemi wokół osi wyniesie

$$\Delta T \approx \frac{8 \pi \rho R^4}{3 I} T \Delta R.$$

Uwzględniając, że dla wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, okres $T = 24 \text{ h}$ i $\Delta R = 61 \text{ m}$ otrzymujemy $\Delta T \approx 1 \text{ s}$.

Dziś po raz trzeci zapraszam Cię, Czytelniku, do obalania praw fizyki. Poprzednie nasze rozważania miały na celu uświadomienie ograniczeń, jakie zawiera nasz obraz konstrukcji świata. Możemy jednak bawić się obalaniem powszechnie uznanych poglądów dla samej przekornej przyjemności stąd płynącej. Nawet jeśli nam się nie uda obalić tego czy innego prawa, pozostaje pożytek z gimnastyki umysłu i - mam nadzieję - chęć do podejmowania dalszych prób: a może następnym razem powiedzie nam się lepiej?

Dzisiaj chciałbym, abyśmy wzięli na warsztat

Prawo Bernoulliego

Zacznijmy od sformułowania tego prawa:

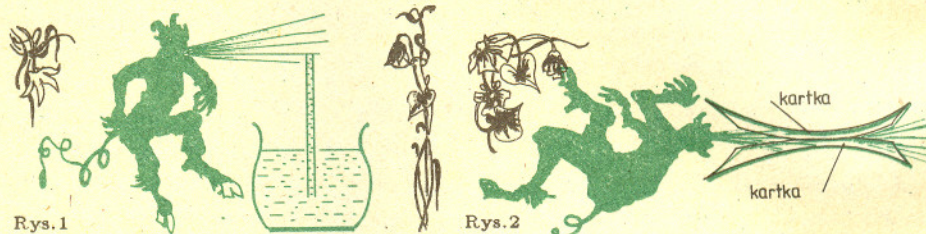
Wzdłuż linii prądu suma ciśnienia i połowy iloczynu gęstości przez kwadrat prędkości płynu (przez płyn rozumiemy ciało nie mające sprężystości postaci - ciecz lub gaz) jest wielkością stałą. Wzorem zapisujemy to tak:

$$(*) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Należy dodać, że prawo to stosuje się do płynów nielepkich.

Jak objawia się prawo Bernoulliego w praktyce?

Zauważmy przede wszystkim, że zwiększeniu prędkości odpowiada w myśl prawa Bernoulliego obniżenie ciśnienia, żeby lewa strona równości (*) mogła pozostać stała. Dlatego szybki strumień powietrza w rozpylaczu (rys.1) wciąga ciecz przez rurkę i powoduje rozpylanie jej na małe kropelki. Możemy też powiązać z prawem Bernoulliego zbliżanie się dwóch kartek papieru, między które dmuchamy (rys.2).



Rys.1

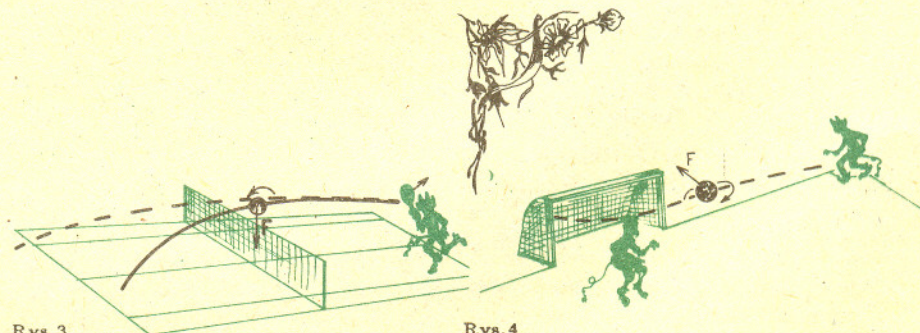
Rys.2

Prawo Bernoulliego możemy uważać za formę zasady zachowania energii: dwie części lewej strony równości (*) opisują potencjalną i kinetyczną energię jednostki masy płynu.

Skorośmy się już oswoiili z prawem Bernoulliego, możemy przystąpić do jego obalania. Posłuży nam do tego

Efekt Magnusa

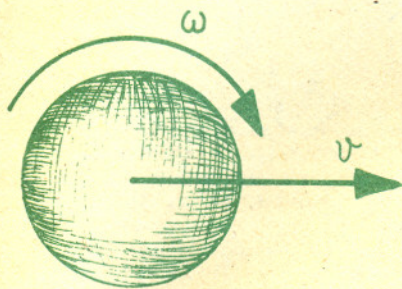
Polega on na powstawaniu siły poprzecznej, działającej na ciało obracające się i jednocześnie poruszające się ruchem postępowym w kierunku prostopadłym do osi obrotu. Działanie efektu Magnusa znane jest świetnie tenisistom („liftowana” piłka upadnie na kort po stronie przeciwnika, choć bez efektu Magnusa wyleciałaby na aut - rys.3) oraz piłkarzom próbującym strzelić bramkę z rzutu różnego (rys.4). Wszyscy oni w momencie uderzenia nadają piłce ruch wirowy, dzięki czemu zakreca ona w pożądanym kierunku.



Rys.3

Rys.4

Skąd bierze się efekt Magnusa?



Rys.5

– Musi być związany z prawem Bernoulliego – zawołasz z pewnością. Na pewno piłka skręca w tę stronę, po której prędkość jest większa, a więc ciśnienie powietrza jest mniejsze! Spróbujmy rozważyć to spokojnie. Niech nasza piłka o promieniu R porusza się ruchem postępowym z prędkością v , a jednocześnie obraca się z prędkością ω tak, aby górna część piłki w ruchu obrotowym poruszała się do przodu (rys.5). Sytuacja taka odpowiada dokładnie „liftowanej” piłce w tenisie z rysunku 3. Zgodzisz się ze mną, Czytelniku, że górna część piłki porusza się szybciej do przodu (z prędkością $v + \omega R$) niż dolna (z prędkością $v - \omega R$). Z doświadczenia wiemy, że piłka jest spychana w dół, a więc ciśnienie działające na jej górną część musi być większe niż ciśnienie pod piłką. Ale w takim razie wielkość $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ nie jest stała, czyli prawo Bernoulliego zostało obalone.

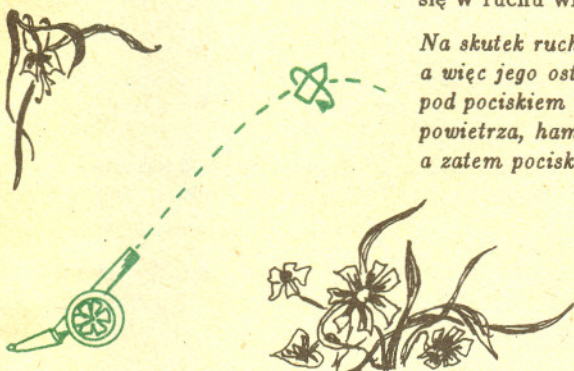
Jeżeli w tym momencie czujesz wątpliwości, czy w ogóle coś z mechaniki płynów można zrozumieć, nie przejmuj się. Wiadomo przecież, że

Errare Humanum Est

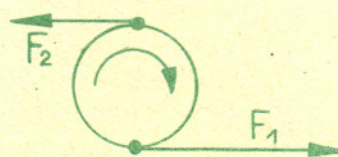
Nawet wielcy ludzie mylili się w tej dziedzinie, co nie przeszkodziło im zdobyć sławę. Wielki uczony Siméon Denis Poisson następująco tłumaczył znany artylerzystom fakt, że wirujący pocisk odchyła się od płaszczyzny swego toru w stronę, w którą porusza się w ruchu wirowym górna część pocisku:

Na skutek ruchu wirowego pocisk zachowuje kierunek, jaki miał w momencie wystrzału, a więc jego ostrze jest odchylone w górę w stosunku do toru (rys.6). Ciśnienie powietrza pod pociskiem będzie w takiej sytuacji większe niż nad nim. Również i siła lepkości powietrza, hamująca ruch obrotowy pocisku, będzie silniej działała na dolną część pocisku, a zatem pocisk odchylił się w prawo (rys.7).

Siméon Denis Poisson, Francuz, 1781 – 1840, wybitny matematyk i fizyk.



Rys.7



Rys.6

(widok z tyłu)

Zwróć uwagę, Czytelniku, że rozumowanie Poissona, gdyby je zastosować do wyjaśnienia efektu Magnusa, dałoby niewłaściwy znak efektu; rozważając ruch pocisku Poisson otrzymuje jednak wynik zgodny z doświadczeniem. Dlatego też jego wyjaśnienie było powszechnie uważane za słuszne, dopóki nie okazało się, że kierunek wirującego w prawo pocisku nie jest odchylony od toru w górę, tylko w prawo, a w tej sytuacji skłonność pocisku do skręcenia w prawo staje się oczywista.

W tym momencie zapytasz pewnie:

A może jednak da się uratować prawo Bernoulliego?

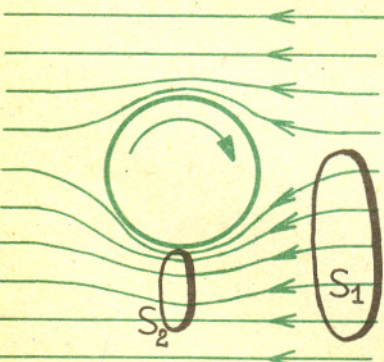
Powiesz może: przecież prawo to stosuje się do płynów nielepkich, a powietrze ma pewną lepkość, o czym najlepiej świadczy opór, jaki czujemy wystawiwszy rękę przez okno szybko jadącego pociągu lub samochodu.

Masz rację, ale przecież doświadczenia z rysunków 1–2 dadzą się wyjaśnić za pomocą prawa Bernoulliego, choć i tam występuje powietrze dalekie od nielepkiego ideału. Jeżeli jesteś uparty, będziesz obstawał przy swoim: A może w sytuacji, w jakiej znajdują się obracające się piłki w tenisie lub piłce nożnej, są one z jakichś powodów szczególnie wrażliwe na lepkość?

Nie mogę już dłużej ukrywać poprawnego rozwiązania: masz rację, to właśnie lepkość jest winna. Ona to właśnie powoduje, że piłka obracając się odsuwa ze swej drogi powietrze głównie na jedną stronę (rys.8).

Wybraliśmy tym razem dla wygody układ odniesienia związany z piłką, w którym na obracającą się piłkę wieje strumień powietrza. Widać, że powietrze zawarte w przekroju S_1 , odgarniane w dół, musi przepłynąć pod piłką przez wyraźnie mniejszy przekrój S_2 , musi więc płynąć szybciej przez przekrój S_2 . Ten wzrost prędkości okazuje się efektem silniejszym niż dodawanie i odejmowanie się składowej ruchu obrotowego. Teraz prawo Bernoulliego funkcjonuje: to na dole prędkość jest większa, a więc ciśnienie mniejsze – piłka będzie spychana w dół. Możesz jeszcze mieć zastrzeżenia: A czy nie dałoby się sprawdzić doświadczalnie, o ile rzeczywiście wzrasta prędkość pod piłką? Spróbuj wymyślić, jak by się to dało zrobić.

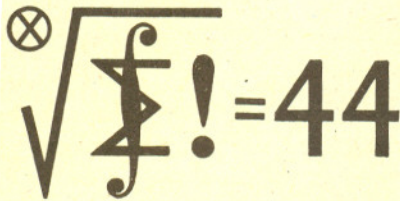
Autor nie ponosi odpowiedzialności za ewentualne wypadki drogowe lub kolejowe powstałe w wyniku doświadczeń tego rodzaju wykonanych przez gorliwych Czytelników.



Rys.8

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1988

Przypominamy treść zadań:

167. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P w jego wnętrzu, przy czym $|\angle CAP| = |\angle CBP|$. Niech K i L będą rzutami punktu P na boki AC i BC . Udowodnić, że symetralna odcinka KL połowi bok AB .

168. Podać warunek konieczny i dostateczny, jaki muszą spełniać liczby naturalne n i k , aby szachownicę o wymiarach $n \times n$ można było pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami o wymiarach $1 \times k$.

167. Uzupełnijmy trójkąty PKA i PLB do prostokątów $PKAE$ i $PLBF$. Oznaczmy środki odcinków AB i KL odpowiednio przez M i S (rysunek 1).

Użyjemy rachunku na wektorach:

$$\vec{SM} = \vec{PM} - \vec{PS} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB}) - \frac{1}{2}(\vec{PK} + \vec{PL}) = \frac{1}{2}(\vec{KA} + \vec{LB}) = \frac{1}{2}(\vec{PE} + \vec{PF});$$

możemy więc obliczyć iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} \vec{SM} \cdot \vec{KL} &= \frac{1}{2}(\vec{PE} + \vec{PF}) \cdot (\vec{PL} - \vec{PK}) = \frac{1}{2}(\vec{PE} \cdot \vec{PL} - \vec{PE} \cdot \vec{PK} + \vec{PF} \cdot \vec{PL} - \vec{PF} \cdot \vec{PK}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{PE} \cdot \vec{PL} - \vec{PF} \cdot \vec{PK}) = \frac{1}{2}(|PE| \cdot |PL| - |PF| \cdot |PK|) \cos \varphi, \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = |\angle KPF| = |\angle LPE| (=90^\circ + |\angle BCA|)$. Z warunków zadania wynika, że

$$\frac{|PK|}{|PE|} = \frac{|PK|}{|KA|} = \operatorname{tg} |\angle CAP| = \operatorname{tg} |\angle CBP| = \frac{|PL|}{|LB|} = \frac{|PL|}{|PF|}.$$

Zatem $\vec{SM} \cdot \vec{KL} = 0$, co oznacza, że prosta SM jest symetralną odcinka KL .

168. Załóżmy, że pokrycie takie jest wykonalne. Oczywiście $k \leq n$. Niech q i r będą ilorazem i resztą z dzielenia n przez k . Oznaczmy kropką wszystkie pola jednej z dwóch przekątnych szachownicy oraz wszystkie pola na liniach ukośnych, równoległych do tej przekątnej i odległych od niej o $k, 2k, 3k, \dots$ pól (rysunek 2 ilustruje przypadek: $n = 10, k = 3$). Łączna liczba wyróżnionych pól wynosi

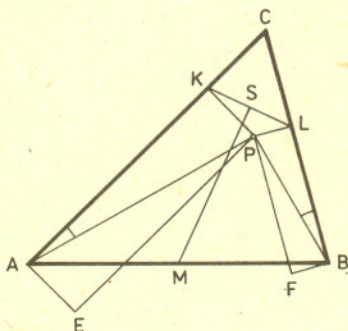
$$\begin{aligned} n + 2((n - k) + (n - 2k) + \dots + (n - qk)) &= (2q + 1)n - 2k(1 + 2 + \dots + q) = \\ &= (2q + 1)(qk + r) - kq(q + 1) = kq^2 + (2q + 1)r. \end{aligned}$$

Każda płytka zakrywa dokładnie jedno z wyróżnionych pól. Znalaziona liczba powinna być zatem równa $1/k$ wszystkich pól szachownicy, czyli

$$\frac{n^2}{k} = \frac{(qk + r)^2}{k} = kq^2 + 2qr + \frac{r^2}{k}.$$

Przyrównując otrzymane liczby stwierdzamy, że $r = r^2/k$. A ponieważ $r \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, wnosimy stąd, że $r = 0$. To znaczy, że k musi być dzielnikiem n .

Na odwrót, jeśli k dzieli n , to potrafimy bez trudu pokryć szachownicę $n \times n$ prostokątami $1 \times k$. Podzielność n przez k jest więc poszukiwanym warunkiem.

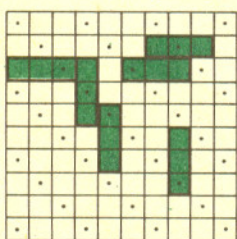


Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 161 /WT=2,89/ i 162 /WT=1,25/
z numeru 12/1987

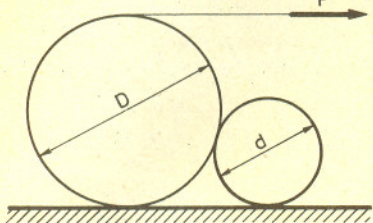
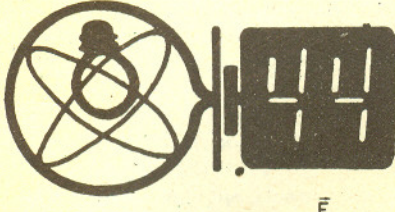
Piotr Wach	- Katowice	44,08pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	43,15pkt
Krzysztof Hryniewiecki	- Białystok	41,18pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	40,48pkt
Adam Ruszel	- Krosno	38,97pkt

Pan Wach jest pięćdziesiątym czwartym członkiem Klubu 44 M.

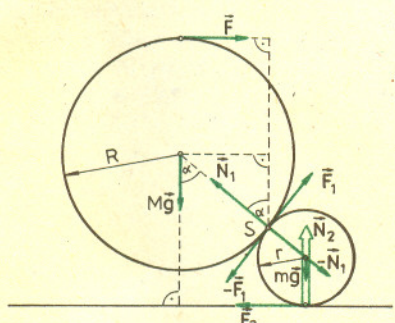


Rys. 2

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2

65. Określić, przy jakim stosunku średnic D/d można za pomocą poziomej siły F , przyłożonej do końca linki owiniętej wokół walca, przetoczyć go przez mniejszy walec. Podać wartość siły, gdy współczynniki tarcia walców o siebie i podłoże wynoszą f (rys.1).

66. Oszacować minimalny promień planety, dla którego możliwe jest utrzymanie się atmosfery z azotu i tlenu. Przyjąć średnią gęstość planety $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, temperaturę powierzchni $T = 300 \text{ K}$. Czy byłoby możliwe utrzymanie atmosfery na Księżycu?

65. Przetoczenie walca będzie możliwe, o ile w pozycji z rysunku 2, niezależnie od wartości kąta α , nie będzie poślizgu ani między walcami, ani w miejscu styku z podłożem. Między siłami tarcia F_1 i F_2 a siłami docisku N_1 i N_2 zachodzą nierówności

$$(1) \quad F_1 \leq f N_1$$

$$(2) \quad F_2 \leq f N_2.$$

(Przedstawione na rysunku siły F_1 i N_1 działają na walec duży, natomiast $-F_1$ i $-N_1$ na walec mały.) W równowadze znikają momenty sił działających na każdy z walców, a więc $F = F_1 = F_2$, a także składowe wypadkowe działających sił – przyrównując do zera sumę składowych poziomych sił działających na mały walec mamy:

$$N_1 \sin \alpha - F_1 \cos \alpha - F_2 = 0.$$

Stąd i z (1) wynika

$$(3) \quad f \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Sprawdźmy warunki spełnienia nierówności (2). Mamy $N_2 = (M + m)g$; a ze znikania wypadkowego momentu sił działających na duży walec względem punktu S otrzymujemy $FR(1 + \cos \alpha) - MgR \sin \alpha = 0$, skąd $F = Mg \sin \alpha / (1 + \cos \alpha)$ i ostatecznie $F_2 \leq f N_2 m / (M + m)$. Przy spełnionym warunku (3) nierówność (2) jest więc zawsze spełniona. Prawa strona nierówności (3) osiąga maksimum dla $\alpha = \alpha_{max}$ odpowiadającego sytuacji wyjściowej (rys.1). Dla położenia startowego zachodzi

$$\cos \alpha_{max} = \frac{R - r}{R + r} = \frac{D - d}{D + d}$$

i ostatecznie poszukiwany warunek ma postać:

$$\frac{D}{d} \geq \frac{1}{f^2}.$$

Siła potrzebna do przetoczenia walca (podstawiamy wartość odpowiadającą α_{max}) jest równa $F = Mg \sqrt{D/d}$.

66. Jeśli atmosfera ma się utrzymać, to prędkości ruchu cieplnego cząsteczek gazu powinny być mniejsze od prędkości ucieczki z powierzchni planety (drugiej prędkości kosmicznej). Do oszacowania prędkości ruchu cieplnego skorzystamy ze związku średniego kwadratu prędkości v^2 cząsteczki o masie m z temperaturą T

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

gdzie k – stała Boltzmanna. Stąd mamy $v^2 = 3kT/m = 3RT/\mu$ (R – stała gazowa, μ – masa cząsteczkowa). Prędkość ucieczki wynosi

$$v_u = \sqrt{2GM/r}$$

(G – stała grawitacji, M – masa, r – promień planety). Z warunku $v^2 < v_u^2$ mamy $3RT/\mu < 2GM/r$ i ostatecznie

$$r > \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G \rho \mu}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych: $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/(kmol K)}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$ (wartość dla N_2 , dla cięższych cząstek O_2 promień jest mniejszy) otrzymujemy $r > 310 \text{ km}$. Promień Księżyca – 1740 km – jest większy od promienia krytycznego (jego średnia gęstość – $3,34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ i maksymalna temperatura – 400 K, co daje promień krytyczny 440 km).







Drabiazi



U większości zwierząt oko zbudowane jest podobnie jak u ludzi, to znaczy obraz powstaje na siatkówce po przejściu światła przez soczewkę, a „strojenie” oka na odpowiednią odległość odbywa się przez zmianę długości ogniskowej soczewki – tak jest u ludzi i u większości kręgowców – lub przez zmianę odległości soczewki od siatkówki – u niektórych ryb. Wśród małży i skorupiaków żyjących w głębokich wodach spotykane są również oczy wykorzystujące skupianie promieni po odbiciu od zakrzywionej powierzchni (lustra). Podobnie jak w przypadku teleskopów taka konstrukcja okazała się „tańsza” przy rejestracji bardzo słabego światła.




Gwiazda magnetyczna HD 37776 zmienia swoją jasność z okresem 1,538 dnia, natomiast natężenie jej pola magnetycznego mierzonego na podstawie efektu Zeemana wykazuje w tym okresie dwa minima i dwa maksima (osiągając wtedy 2000 Gs). Fakty te najlepiej tłumaczy przyjęcie hipotezy, że pole magnetyczne tej gwiazdy jest kwadrupolowe. Taka interpretacja została podana w 1985 r. i jeśli potwierdzi się, będzie to pierwszy przypadek gwiazdy tego rodzaju.



Podczas spotkania z Heisenbergiem w Getyndze w 1922 roku Bohr wspominał o motywach, które skłoniły go do sformułowania teorii budowy atomu. Przytaczamy jego wypowiedź za Heisenbergiem (Część i całość – tłum. K. Napiórkowski):


Punktem wyjścia nie była myśl o tym, że atom jest miniaturowym układem planetarnym i że można tu stosować prawa astronomii. Tak dosłownie nigdy tego wszystkiego nie brałem. Punktem wyjścia była dla mnie natomiast stabilność materii, która jest przecież czystym cudem z punktu widzenia dotychczasowej fizyki.

Przez słowo stabilność rozumiem to, że występują wciąż te same substancje o tych samych właściwościach, tworzą takie same kryształy, powstają te same związki chemiczne itd. Musi to przecież znaczyć, że po wielu zmianach mogących się zdarzyć w wyniku oddziaływań zewnętrznych atom żelaza jest ostatecznie z powrotem atomem żelaza o dokładnie takich samych właściwościach. Według mechaniki klasycznej jest to niepojęte, szczególnie wtedy, gdy atom jest podobny do układu planetarnego. Istnieje więc w przyrodzie tendencja do tworzenia określonych form – słowo „forma” rozumiem tutaj w najogólniejszym sensie – i odtwarzania ich, jeśli formy te zostają zaburzone lub zniszczone.




Już Euler udowodnił, że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest nieskończona. Jednak suma odwrotności znanych liczb pierwszych jest mniejsza od czterech.


Powierzchnia cieczy w zbiorniku wirującym wokół pionowej osi przyjmuje kształt paraboloidy obrotowej. Gdyby taką powierzchnię „utrwalić”, mogłoby powstać idealne lustro do teleskopu. Aż dziwne, że sposób ten został po raz pierwszy zastosowany dopiero 8 VI 1984 r. Wtedy w *University of Arizona* w Tucson zostało odlane w wirującym piecu lustro o średnicy 80 cm i światłosile 1/2! Oczywiście, powierzchnia lustra wymaga końcowego polerowania, ale i tak metoda ta oszczędza mnóstwo czasu, pracy i kosztów. Ocenia się, że za pomocą drugiego, większego, wirującego pieca można będzie wręcz masowo produkować 8-metrowe lustra o niemal dowolnej światłosile.




Jeśli umiemy skonstruować m -kąąt i n -kąąt foremny, a m i n są względnie pierwsze (nie mają różnych od 1 wspólnych dzielników), to skonstruowanie mn -kąąta foremnego jest bardzo proste. Konstruujemy m -kąąt i n -kąąt wpisane w ten sam okrąg i mające wspólny wierzchołek. Wówczas jeden z łuków, na jakie dzieli okrąg wierzchołki obu wielokątów foremnych, stanowi mn -tą część tego okręgu. Wynika to natychmiast z faktu, że m i n są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite p i q , że $pm + qn = 1$. Dowód tego arytmetycznego twierdzenia jest już jednak bardziej skomplikowany.



Najjaśniejszą znaną gwiazdą w naszej Galaktyce jest gwiazda oznaczana jako HD 93129A, należąca do gromady gwiazd Tr 14, znajdującej się w mgławicy NGC 3372 wokół η Carinae. Jej jasność jest około 5 mln razy większa od jasności Słońca L_{\odot} . Sama η Carinae jest nieco słabsza, przy czym jej obserwowana jasność spadła po roku 1850 od około 6^m do około 6^m , co związane było z wyrzutem materii i z powstaniem dookoła η Carinae gazowego pierścienia o średnicy $\approx 10^4$ j.a. i masie $\approx 10 M_{\odot}$. Masy η Carinae i HD 93129A szacuje się na około $100 M_{\odot}$. Najjaśniejszą znaną gwiazdą w Wielkim Obłoku Magellana jest HD 33579 o jasności $0,5 \text{ mln } L_{\odot}$ i masie $25 M_{\odot}$.



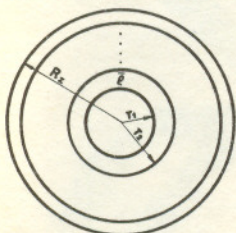
Mówimy, że przestrzeń X ma własność paradoksalnego rozkładu, gdy mając do czynienia z dowolnymi dwiema ograniczonymi figurami o niepustych wnętrzach w tej przestrzeni możemy jedną z nich podzielić na skończoną liczbę części tak, że części te (po przemieszczeniu) złożą się na drugą figurę. Pisaliśmy o tym w *Delcie* 5/1987. Mniej więcej wtedy, za sprawą Jana Mycielskiego, lista przestrzeni mających tę własność została powiększona o płaszczyznę Bolyai – Lobaczewskiego. W ten sposób lista „przyzwoitych” przestrzeni (takich, w których np. nie można z jednej figury zrobić dwóch takich jak ona) ograniczona została praktycznie tylko do płaszczyzny euklidesowej.



Rozpuszczone w wodzie powietrze zmniejsza siły spójności cząsteczek wody. Woda pozbawiona powietrza może być ogrzana nawet o kilkadziesiąt stopni powyżej jej temperatury wrzenia, a samo wrzenie ma wówczas charakter wybuchowy.



Rozwiązanie zadania F 248.
Przyjmijmy, że Ziemia składa się z szeregu warstw kulistych o stałej gęstości równej średniej wartości $\bar{\rho}$ na początku i na końcu warstwy (rys.).



Tam, gdzie występuje nieciągłość gęstości, większą wartość ρ przypiszemy warstwie wewnętrznej, a mniejszą – zewnętrznej. Moment bezwładności warstwy kulistej o gęstości i promieniach zewnętrznym r_1 i wewnętrznym r_2 znajdziemy odejmując od momentu bezwładności kuli o promieniu r_1 moment kuli o promieniu r_2 :

$$I_w = \frac{2}{5} (M_1 r_1^2 - M_2 r_2^2) = \frac{8}{15} \pi (r_1^5 - r_2^5) \rho.$$

Stąd dla warstwy np. o numerze i mamy

$$I_i = \frac{8}{15} \pi (r_i^5 - r_{i-1}^5) \bar{\rho}_i.$$

Pełny moment bezwładności Ziemi jest równy sumie momentów wszystkich warstw

$$I = \sum_{i=1}^{11} I_i \approx 8,1 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Moment pędu jest równy $L = I\omega = 2\pi I/t \approx 5,9 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s}$, gdzie $t = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$ jest czasem obrotu Ziemi wokół osi. Natomiast energia kinetyczna ruchu wirowego jest równa $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2,1 \cdot 10^{29} \text{ J}$.



Rozwiązanie zadania M 512.
Rozwiążemy zadanie dla n myśliwych i n kaczek. Pojedyncza kaczka przeżywa z prawdopodobieństwem $(1 - \frac{1}{n})^n$, czyli średnio przeżywa $(1 - \frac{1}{n})^n$ kaczki. W sumie średnio przeżywa $n(1 - \frac{1}{n})^n$ kaczek (co dla dużych n wynosi w przybliżeniu n/e).

Osoby, które latem 1986 r. obserwowały Marsa podczas jego ostatniej opozycji, mają już przedsmak tego, co czeka nas wkrótce. Opisana w *Delcie 7/1986* opozycja charakteryzowała się warunkami zbliżonymi do wielkiej, jednak ta, która przypadnie 28 września bieżącego roku, będzie rzeczywiście jego Wielką Opozycją. Nie traćmy więc okazji, bo na kolejne, równie korzystne usytuowanie Marsa, przyjdzie nam poczekać 15 lat.

W stosunku do poprzedniej opozycji warunki obserwacji znacznie polepszą się i to nie tylko z powodu większego zbliżenia Marsa do Ziemi. Nocą z 21 na 22 września, gdy znajdzie się on w najmniejszej odległości od Ziemi (58,8 mln km), średnica jego tarczy (23,8) zaledwie o kilka procent przewyższy tę, jaką uprzednio obserwowaliśmy. Jednak tym razem w naszych szerokościach geograficznych Mars będzie wędrował znacznie wyżej nad horyzontem, gdyż obecnie jego deklinacja jest o blisko 27° większa. Najlepsze warunki będą mieli obserwatorzy w okolicy równika, gdzie górujący Mars znajdzie się w zenicie. Ale i my nie mamy na co narzekać – w centralnej Polsce osiągnie on maksymalną wysokość 37° nad horyzontem. Już zimą, można było dostrzec go przed świtem nisko po wschodniej stronie nieba. Teraz wschodzi przed północą, a w bezpośredniej okolicy opozycji będzie świecił przez całą noc jak gwiazda –2,5 wielkości, zataczając pętlę na tle gwiazdozbioru Ryb. Po opozycji, stopniowo słabnąc, pozostanie widoczny na niebie wiecznym jeszcze do wiosny przyszłego roku.

Mars jest wciąż jeszcze planetą budzącą duże zainteresowanie, toteż w czasie każdej opozycji (zwłaszcza wielkiej) wiele uwagi poświęcają mu astronomowie i miłośnicy astronomii. Trudno przecenić wartość historycznych obserwacji dokonanych podczas Wielkich Opozycji (szczegółowe mapy powierzchni, odkrycie kanałów i księżyców), a nawet dziś, w dobie lotów kosmicznych, tradycyjne obserwacje Marsa prowadzone z Ziemi są nadal cenne. Niestety, nie dla każdego dostępne są badania szczegółów jego powierzchni – stają się one możliwe dopiero przy użyciu dość silnych przyrządów optycznych. Przy 75-krotnym powiększeniu jego tarczy obserwowana w czasie Wielkiej Opozycji osiąga rozmiary tarczy Księżyca w pełni.

Obserwując Marsa przez kilka kolejnych nocy o podobnej porze można łatwo stwierdzić, że stałe szczegóły na jego powierzchni ulegają bardzo niewielkim przesunięciom. Wynika stąd prosty wniosek dotyczący okresu jego obrotu – musi być on bardzo zbliżony do okresu obrotu Ziemi. Rzeczywiście, doba na Marsie trwa zaledwie o 37 minut 23 sekundy dłużej od doby ziemskiej.

Również nachylenie osi obrotu Marsa do płaszczyzny jego orbity (około 65°) jest prawie takie samo jak w przypadku Ziemi. W związku z tym zmiany pór roku zachodzące na nim są analogiczne do ziemskich, tyle że czas ich trwania jest prawie dwa razy dłuższy. Zmiany te uwidaczniają się szczególnie wyraźnie w różnicach powierzchni zajmowanych przez tzw. czapy polarne – wyraźne białe plamy otaczające obydwą bieguny. Rozmiary plam są większe zimą niż latem, co wskazuje na jesienne osadzanie się lodów w tych obszarach i ich tajanie na wiosnę.

Widoczne są również sezonowe zmiany w nateżeniach barw mórz (obszarów ciemniejszych) i łądów (obszarów jaśniejszych). Zwróćmy uwagę, że nazwy: morza i łądy są wyłącznie tradycyjne – w rzeczywistości na Marsie nie ma prawdziwych zbiorników wodnych. Jest on suchą, pustynną planetą o czerwonej barwie, której zawdzięcza nazwę boga wojny. Tu również konieczne jest pewne uściślenie – Mars jest czerwony dla obserwatora patrzącego na niego „z daleka”, pozbawionego obiektów porównania. Jak wykazano na podstawie badań widm i danych uzyskanych za pomocą sond kosmicznych, jego powierzchnia jest ciemnobrązowa i odbija ona zaledwie 10% promieniowania słonecznego.

Dużo ze swej tajemniczości stracił Mars „ogładany” z bliska przez próbniki serii Mariner i Viking. Sondy te stały się jego sztucznymi satelitami dołączając do dwóch naturalnych księżyców – Phobosa i Deimos. Szczegółowe zdjęcia wykonane przez aparaturę umieszczoną na ich pokładach umożliwiły stworzenie niezwykle precyzyjnych map planety. Lądowiki serii Viking, które latem 1976 r. osiągnęły powierzchnię Marsa, dostarczyły bezcennych informacji o warunkach fizycznych tam panujących. Krajobraz sfotografowany przez Vikinga 2 pokazany jest na zdjęciu na okładce. Przyrządy pomiarowe wykazały, że klimat planety w miejscach lądowania jest bardzo surowy, a cienka atmosfera o ciśnieniu około 8 milibarów, złożona aż w 95% z CO₂ i tylko w 0,1% z O₂, stanowi słabą osłonę termiczną. Choć termometry zarejestrowały temperatury od –30°C do –80°C w zależności od pory roku i doby, z zainteresowaniem oczekiwano na wyniki eksperymentów mających na celu odkrycie mikroorganizmów, które mogłyby żyć w takich warunkach. Testy dały jednak wynik negatywny.

Niewątpliwie wiele wiemy już o planecie boga wojny. Być może uzyskamy wkrótce nowe dane obserwacyjne z planowanej na ten rok radzieckiej misji Phobos. A jakich sensacji dostarczy planowana na koniec tego lub początek przyszłego stulecia wyprawa załogowa?