

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 3(171)

Manowce intuicji (I) <i>prof. dr Stanisław Hartman</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 2
„Nowe” nadprzewodnictwo <i>prof. dr Łukasz A. Turski</i>	str. 4
Izometrie przestrzeni metrycznych <i>Andrzej Żuk</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Klub 44	str. 10
Kącik prac uczniowskich	str. 12
Pola magnetyczne w galaktykach spiralnych <i>dr Rainer Beck</i>	str. 13
Zadania	str. 15
Drobiazgi	str. 16
Co zrobić, aby komputer się nie mylił	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Czy Słońce jest czarne?**

#### UWAGA CZYTELNICI

Krajowe Wydawnictwo Czasopism informuje, że peczęwszy od numeru 4 ulega zmianie cena naszego pisma. Obecnie będzie ona wynosić 70,- zł.

Konieczność podwyższenia ceny wynika ze znacznego wzrostu kosztów: papieru o 84%, druku o 58% w stosunku do sierpnia 1987r. Wzrosły również koszty pozostałe jak transport, energia, telekomunikacja, szynsze itp.

Nowa cena pokrywa w najmniejszej tylko wielkości niezależny od wydawcy wzrost kosztów wydawania, które powodują zwiększenie wykosceń depozytu.

Krajowe Wydawnictwo  
 Czasopism



#### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc. dr Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc. dr Tomasz Hofmoki — v-przewodniczący  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc. dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Makowski  
 dr Zbigniew Plochocki  
 dr Jan Rempała  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Grzegorz Sitarski  
 prof. dr Józef I. Smak  
 prof. dr Kazimierz Stępień  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Aniela Wolska  
 prof. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Zakowski —  
 przewodniczący

#### Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast  
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
 dr Andrzej Majhofer  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa  
 tel. 21-19-85

#### Krajowe Wydawnictwo Czasopism RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. centr. 25-72-91 do 93  
 Biuro Reklam i Propagandy  
 tel. 25-56-26  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 5122/12/87. U-58.

#### WARUNKI PRENUMERATY

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych-właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 40,—

Prof. dr Stanisław HARTMAN

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

### NOWA WARTOŚĆ STAŁEJ RYDBERGA

Dokładność pomiarów fizycznych stale rośnie. Ostatnio grupa fizyków amerykańskich z Yale University (New Haven, Connecticut) oraz National Bureau of Standards (Gaithersburg, Maryland) przeprowadziła bardzo precyzyjne pomiary linii  $\beta$  serii Balmera w wodorze oraz deuterze, co umożliwiło wyznaczenie nowej, dokładniejszej wartości stałej Rydberga. Przypomnijmy, że stała Rydberga

$$R_{\infty} = m_0 e^4 / 8 h^3 c \epsilon_0^2$$

wiąże się z energią jonizacji atomu wodoru w sposób następujący:

$$E_H = R_{\infty} h c [M / (m_0 + M)] \approx 13,6 \text{ eV},$$

gdzie  $M$  jest masą jądra atomowego. Jądro wodoru to, oczywiście, proton, a deuteru — proton i neutron. W konsekwencji:

$$E_H \approx 0,99946 R_{\infty} h c \approx 13,598 \text{ eV},$$

$$E_D \approx 0,99973 R_{\infty} h c \approx 13,602 \text{ eV}$$

Energie poszczególnych stanów wzbudzonych otrzymuje się dzieląc  $E_H$  lub  $E_D$  przez  $n^2$ , (gdzie  $n=2,3,4, \dots$ ). W omawianym eksperymencie mierzona była zielona linia  $\beta$  serii Balmera, odpowiadająca przejściu ze stanu  $n=2$  do stanu  $n=4$ . Długość fali świetlnej  $\lambda_{\beta}$  odpowiadająca tej linii jest równa w przybliżeniu  $16/3R_{\infty} \approx 0,49 \mu\text{m}$  co odpowiada energii około 2,5 eV. Ze względu na istnienie oddziaływania spin-orbita linia ta ulega rozszczepieniu na szereg składowych, odległych od siebie o setne części meV. Zasadnicze pomiary wykonano więc dla dwóch najsilniejszych składowych linii  $\beta$  w wodorze i deuterze oznaczanych jako  $2^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$  oraz  $2^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$ . Z położenia każdej z tych składowych wyznaczono stałą Rydberga. Ostateczny rezultat będący średnią wszystkich uzyskanych w ten sposób wyników wynosi:

$$R_{\infty} = 109\,737\,315\,73 \pm 0,00003 \text{ cm}^{-1},$$

co oznacza błąd względny mniejszy niż  $3 \times 10^{-10}$ . Odpowiada to zważeniu człowieka z dokładnością do 0,02 mg lub pomiarowi długości równika z dokładnością do około 1 cm. Jest to najprecyzyzniej wyznaczona stała fizyczna i niewątpliwie jeden z najdokładniejszych pomiarów w historii ludzkości. Warto nadmienić, że przed rokami grupa ze Stanford University (Palo Alto, Kalifornia) opublikowała nieco inną wartość stałej Rydberga ( $R_{\infty} = 109\,737,314\,92 \pm 0,00022 \text{ cm}^{-1}$ ). Niezgodność tego rezultatu z omawianą powyżej pracą zmusiła grupę stanfordzką do powtórzenia eksperymentu. Otrzymana ostatecznie wartość  $R_{\infty} = 109\,737,315\,71 \pm 0,00007 \text{ cm}^{-1}$  jest zgodna z wynikami pomiarów przeprowadzonych na wschodnim wybrzeżu.

Napisany dowód matematyczny ma formę łańcucha wnioskowań. A dowód powstający dopiero w umyśle matematyka? Pragnąc rozstrzygnąć problem matematyk zwykle próbuje wnioskować w kierunku rozwiązania, które wydaje mu się bardziej prawdopodobne lub bardziej pożądane. Czasami w toku tych prób zmienia kierunek myśli — widząc, że dowód na „tak” nie „wychodzi”, zaczyna szukać dowodu na „nie”. Nie rozumuje jednak na ślepo. — Gdy udowodnię  $a$ , potrafię stąd wywnioskować, że  $b$ , a od  $b$  niedaleka już droga do  $c$ , o które mi właśnie chodzi. Tak mniej więcej ten proces myślenia przebiega, a więc wybiega wprzód, wyprzedza dedukcję. Nazywa się to często intuicją. Nie pretendujemy tu do ściśłego określenia tego słowa, którego sens jest niejasny i rozmyty. Gdy więc twierdzenie mniej więcej „widać”, gdy odpowiada ono oczekiwaniom, mówi się, że jest intuicyjne. Takie np. jest twierdzenie, że z każdego punktu na zewnątrz koła można poprowadzić styczną do tego koła, albo że prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej samej płaszczyźnie, co one obie. Jeśli jakieś twierdzenie jest bardzo intuicyjne, mówimy, że jest oczywiste, jak np. twierdzenie, że przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające, albo że trójkąty o bokach odpowiednio równych mają także kąty odpowiednio równe. Oczywiście (chyba) jest twierdzenie, że jeśli  $k$ ,  $m$  i  $n$  są liczbami naturalnymi, a  $k$  nie ma wspólnego dzielnika ani z  $m$ , ani z  $n$ , to nie ma wspólnego dzielnika z iloczynem  $mn$ .

Dowody takich twierdzeń mogą się wydawać zbędne. Po co dowodzić, kiedy i tak widać? Ale dowód czasem sięga głębiej i pozwala zobaczyć więcej. Na przykład dowód przytoczonego tu twierdzenia o dzielnikach (z którego, dodajmy, łatwo wywnioskować, że każda liczba naturalna da się rozłożyć na czynniki pierwsze w jeden tylko sposób) wiąże jego treść z rozwiązalnością w liczbach całkowitych  $x$ ,  $y$  równań postaci  $ax + by = c$ , gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są całkowite. Sceptyk powie może, że to jest komplikowanie prostych rzeczy. On i tak „widzi”. Nie kłómy się z nim, na razie przynajmniej. Pokażmy mu lepiej takie twierdzenia, których „nie widać”. Mało kto na przykład od razu „zobaczy”, że dwusieczne kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie i tak samo symetralne boków. Niemal każdy słysząc o tym po raz pierwszy zapyta „dlaczego?”. Łatwo go będzie przekonać prostym dowodem, a trudniej już o tym, że także wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie. Jeszcze mniej intuicyjne jest twierdzenie, że jeśli liczba naturalna  $a$  nie dzieli się przez liczbę pierwszą  $p$ , to liczba  $a^{p-1}$  daje przy dzieleniu przez  $p$  resztę 1 (może ktoś spróbuje to udowodnić?). Dla ogromnej większości ludzi to twierdzenie będzie zupełnie nieoczekiwane. Mówimy ostrożnie „dla ogromnej większości”, bo intuicja zależy od posiadanej wiedzy i wprawy i co dla jednego jest nieintuicyjne, dla drugiego może być niemal oczywiste.

Nie jest jednak moim celem tutaj przekonywać Czytelników *Delta*, że sama intuicja w matematyce nie wystarcza, że jest zbyt słabym narzędziem. Oni zapewne o tym wiedzą. Chciałbym im raczej pokazać, jak intuicja potrafi zwodzić, prowadzić na manowce.

Uczeń jest przyzwyczajony uważać linię prostą za zbiór punktów. Nie zawsze tak trzeba myśleć o prostej, zwłaszcza w geometrii, ale tutaj to ujęcie „mnogościowe” jest dla mnie wygodne. Uważajmy prostą za zbiór punktów, wybierzmy na niej punkt zerowy i jednostkę długości, a wtedy punkty prostej będziemy mogli utożsamiać z liczbami i mówić np. o punktach wymiernych lub całkowitych zamiast o liczbach wymiernych lub całkowitych. Punkty wymierne leżą na prostej gęsto. Znaczy to, że w każdym odcinku (dobrze jest myśleć tu o małych odcinkach) leży jakiś punkt wymierny, czyli liczba postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p$  i  $q$  to liczby całkowite, a  $q > 0$ . To niemal oczywiste. Gdy  $I$  jest dowolnym odcinkiem, a  $|I|$  oznacza jego długość, wybierzmy takie  $q$ , żeby było  $\frac{1}{q} < |I|$ . Odkładajmy kolejno odcinek długości  $\frac{1}{q}$  od 0 w prawo i w lewo. Powstanie na prostej zbiór



Rozwiązanie zadania F 240. Całkowita energia elektronu w odległości  $r$  od jądra jest określona równaniem

$$W = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

gdzie  $m_e$ ,  $e$  i  $p$  są odpowiednio masą, ładunkiem i pędem elektronu. Minimalną energię otrzymamy dla najmniejszych wartości  $p$  i  $r$ . Jednakże zgodnie z zasadą nieoznaczoności mamy  $\Delta p \cdot \Delta r \geq \hbar/2\pi$ . Zauważmy, że w zapisie tego wyrażenia prędkość występująca w pędzie jest prędkością w kierunku  $r$  (radialną). Średnie wartości promienia  $\langle r \rangle$  i pędu  $\langle p \rangle$  nie mogą być mniejsze od nieoznaczoności położenia  $\Delta r$  i pędu  $\Delta p$ . Stąd dla średnich wartości  $r$  i  $p$  mamy

$$\langle r \rangle \cdot \langle p \rangle \geq \hbar/2\pi.$$

Średnia wartość energii całkowitej  $W$  jest równa

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar^2/2\pi^2}{2m_e \langle r^2 \rangle} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle}.$$

Wielkość ta jest najmniejsza, gdy

$$\langle r \rangle = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2/2\pi^2}{m_e e^2}.$$

Jest to wartość promienia pierwszej orbity w modelu Bohra. Minimalna wartość energii odpowiadająca energii stanu podstawowego jest więc równa

$$W_0 = - \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 (\hbar/2\pi)^2}.$$

punktów odległych każdy o  $\frac{1}{q}$  od dwóch sąsiednich. Co najmniej jeden punkt tego zbioru leży w odcinku  $I$ , a jest postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p$  jest liczbą całkowitą, więc jest wymierny.

Ograniczmy się teraz do odcinka  $[0, 1]$ . I w nim liczby wymierne tworzą zbiór gęsty. Oznaczmy go przez  $W$ . „Otoczmy” każdą liczbę ze zbioru  $W$  odcinkiem, to znaczy utwórzmy dla każdej liczby  $\frac{p}{q}$  odcinek  $\left[\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right]$ , gdzie  $\delta$  jest liczbą dodatnią. Nie zakładamy, że jest to za każdym razem ta sama liczba dodatnia. Każda liczba z  $W$  staje się w ten sposób środkiem jakiegoś wybranego odcinka. O długościach tych odcinków nic nie zakładamy. Czy te odcinki łącznie zawsze muszą pokryć cały odcinek  $[0, 1]$ ? Innymi słowami, czy każdy punkt w  $[0, 1]$  zawsze leży w którymś z wybranych odcinków, jakkolwiek je wybraliśmy? Pamiętajmy, że w dowolnej bliskości każdego punktu leży jakiś punkt wymierny i postarajmy się odpowiedzieć na zadane pytanie. Co podpowiada intuicja? Myślę, że prawie każdemu podpowiada „tak”, a więc kłamie.

Liczby z  $W$  nie dadzą się ponumerować w porządku wzrastania, ale można to zrobić inaczej. Napiszmy:  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots$ . Widać, jak ten ciąg jest zbudowany i że wystąpi w nim każda liczba

wymierna między 0 a 1, i to nawet nie raz, lecz nieskończenie wiele razy, np.  $\frac{1}{2}$  wystąpi także jako  $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$  itd. Poskreślajmy teraz te liczby, które już raz wystąpiły, to znaczy zostawmy tylko ułamki nieskracalne. Otrzymamy ciąg  $(w_n)_{n=1}^{\infty}$  o wyrazach  $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \frac{1}{2}, w_4 = \frac{1}{3}, w_5 = \frac{2}{3}, w_6 = \frac{1}{4}, w_7 = \frac{3}{4}, w_8 = \frac{1}{5}, \dots, w_{12} = \frac{1}{6}, w_{13} = \frac{5}{6}, \dots$ . Jest to dokładnie ciąg wszystkich różnych liczb ze zbioru  $W$ , które w ten sposób zostały ponumerowane. Np. siódmą z kolei liczbą wymierną w  $[0, 1]$  jest  $\frac{3}{4}$ . Otoczmy teraz każdą liczbę  $w_n$  odcinkiem  $I_n = \left[w_n - \frac{1}{2^{n+2}}, w_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right]$ . Jego długość wynosi  $\frac{1}{2^{n+1}}$ . Odcinki te będą

## Patrz w niebo

Po zimowej obfitości jasnych, przyciągających wzrok gwiazd, niebo wiosenne prezentuje się raczej skromnie. Jednak właśnie teraz nadarza się sposobność do zwrócenia uwagi na trzy największe (pod względem zajmowanej powierzchni) gwiazdozbiory. Są nimi (wg malejącej powierzchni) Hydra (*Hydra*), Panna (*Virgo*) i Wielka Niedźwiedzica (*Ursa Major*).

Hydra jest konstelacją bardzo wyciągniętą w rektascensji — obejmuje swymi splotami ponad 1/4 obwodu nieba. Jej „głowa”, składająca się z czterech słabych gwiazdek, wschodzi o tej porze roku jeszcze w dzień — około południa, a koniec „ogona” pojawia się nad horyzontem dopiero po zapadnięciu całkowitego zmroku. Szczęśliwie „głowa” nie zdąży jeszcze zejść w tym czasie, a więc przez parę godzin można Hydre podziwiać w całości. Ponad półtora raza dłuższy w rektascensji jest, widoczny u nas o każdej porze roku, Smok (*Draco*). Jednak, jako gwiazdozbiór leżący w pobliżu bieguna, jest na niebie znacznie bardziej zwinięty, w związku z czym ma powierzchnię prawie o 20% mniejszą od powierzchni Hydry — zajmuje ósmą pozycję w grupie największych gwiazdozbiorów.

Konstelacja Panny — gwiazdozbiór drugi pod względem zajmowanej powierzchni — góruje o tej porze roku około północy. Przypomnijmy, że gdy Słońce znajduje się w znaku Barana (kwiecień), jest ono — wskutek przesunięcia precesyjnego — w gwiazdozbiorze Ryb. Panna, jako leżąca po przeciwnej, w stosunku do Ryb, stronie Zodiaku, góruje w momencie dołowania Słońca, czyli o północy (o regularności pojawiania się gwiazdozbiorów zodiakalnych pisaliśmy w *Delcie* 2/1987).

Jeśli chodzi o Wielką Niedźwiedzicę, to jej obecność na niebie o żadnej porze roku nie budzi zdziwienia. Jest powszechnie znanym gwiazdozbiorem okołobiegunowym, który w naszych szerokościach geograficznych nigdy nie wschodzi ani nie zachodzi. Tak się jednak składa, że właśnie w podobnym czasie, co Hydra i Panna, Wielka Niedźwiedzica zajmuje najwyższe na niebie, a więc najdogodniejsze do obserwacji, położenie. Fakt, że Wielka Niedźwiedzica jest

Osoby, które w celu odnalezienia Hydry zechcą skorzystać z mapy nieba wydrukowanej na okładkach rocznika *Delty* z 1985 roku lub obrotowej mapy nieba wydanej przez PTMA, mogą napotkać poważne trudności. Czyżby nie zaznaczono tam największego gwiazdozbioru? Rzecz jasna, jest to niemożliwe. Na mapach tych Hydra została nazwana Wężem Wodnym. Rzeczywiście czasem tak się ją nazywa, choć jest to dość niebezpieczne, gdyż może prowadzić do nieporozumień. Na południowej półkuli nieba leży gwiazdozbiór o nazwie Wąż Morski (*Hydrus*) i z Wężem Wodnym łatwo go pomylić.



Rozwiązanie zadania M500. Aby zrozumieć, co właściwie robi ten nieco zagmatwany algorytm, należy obliczyć kilka początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ . Po otrzymaniu samych zer i jedynek można zacząć coś podejrzewać. Wynik, zapisany jako ułamek dwójkowy: 1,0110101 ... (co daje ułamek dziesiętny 1,414 ...) , sprawi, że podejrzania staną się bardziej konkretne: I rzeczywiście — dostajemy rozwinięcie dwójkowe  $\sqrt{2}$ . Dla dowodu zauważmy, że  $4(2 - a_0^2) = r_1$ ,  $4(2 \cdot 4 - (2^1 a_0 + 2^0 a_1)^2) = 4(2 \cdot 4 - 4a_0^2 - 4a_1^2 - 4a_0 a_1) = 4(2 - a_1^2) = r_2$  i ogólnie,  $4(2 \cdot 4^n - (2^n a_0 + \dots + 2^0 a_n)^2) = r_{n+1}$ . Stąd  $p_n^2 = (a_0 + a_1 2^{-1} + \dots + a_n 2^{-n})^2 \leq 2$ , ponadto  $(p_n + 2^{-n})^2 > 2$ . Zatem  $p_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Zauważmy jeszcze, że  $a_n \in \{0, 1\}$ . Gdyby bowiem  $a_n \geq 2$ , to  $(a_0 + a_1 2^{-1} + \dots + 2 \cdot 2^{-n})^2 \leq 2$ , więc  $(a_0 + a_1 2^{-1} + \dots + (a_{n-1} + 1) 2^{-(n-1)})^2 \leq 2$  — sprzeczność, bo  $(p_{n-1} + 2^{-(n-1)})^2 > 2$ . Ostatecznie, ciąg  $(a_n)$  nie jest okresowy, bo  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną.

w rozmaity sposób zachodzą na siebie. Czy łącznie pokrywają zbiór  $[0, 1]$ ? Gdyby tak było, to ułożone jeden za drugim, tak, żeby tylko końcami się stykały, musiałyby utworzyć odcinek długości co najmniej 1. Tymczasem suma ich długości, czyli suma ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie  $\frac{1}{4}$  i ilorazie  $\frac{1}{2}$  wynosi zaledwie  $\frac{1}{2}$ .

W tym dowodzie nie korzystaliśmy naprawdę z tego, że liczby  $w_n$  są wymierne. Istotne było, że dadzą się ponumerować, czyli ustawić w ciąg. Jeśli elementy zbioru można ponumerować, zbiór nazywa się przeliczalny. Udowodniliśmy zatem, że jeśli zbiór w  $[0, 1]$ , choćby gęsty, jest przeliczalny, to jego punkty można otoczyć odcinkami w ten sposób, żeby nie cały odcinek  $[0, 1]$  został pokryty. Co więcej, można sobie długości tych odcinków dowolnie z góry zadać, na przykład tak, żeby ich suma była mniejsza od dowolnie zadanej liczby  $\epsilon > 0$ .

Dla zbioru  $W$  mogliśmy zamiast  $I_n$  wziąć równie dobrze odcinki  $J_n = \left[ w_n - \frac{1}{2^{n+k}}, w_n + \frac{1}{2^{n+k}} \right]$ , gdzie  $k$  jest dowolnie duże, a niekoniecznie równe 2. Przy odpowiednio dużym  $k$  będzie  $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \epsilon$ . Zbiór na prostej, który można pokryć odcinkami

o dowolnie małej sumie długości, nazywa się zbiorem miary 0, a więc każdy zbiór przeliczalny jest miary 0. Zbiór wszystkich liczb wymiernych także jest przeliczalny, a więc miary 0. Jak go ustawić w ciąg? To trochę trudniejsze niż dla liczb wymiernych w odcinku, ale można się o to pokusić. A czy w ogóle istnieją zbiory, których nie można ustawić w ciąg?

Oczywiście nie jest zbiorem miary 0 żaden odcinek, bo go w żaden sposób nie pokryjemy przedziałami o sumie długości mniejszej niż jego własna długość. Stąd wniosek, że zbiór liczb z odcinka  $[0, 1]$ , a tym bardziej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny — jego elementów nie można ponumerować, nie starczy numerów. Inaczej mówiąc — liczb rzeczywistych już w odcinku  $[0, 1]$  jest więcej niż liczb naturalnych. Zatem nieskończoność nieskończoności nierówna — jedna może być większa od drugiej. Co na to nasza intuicja? To odkrycie sprzed 113 lat, jedno z największych w historii matematyki, zawdzięczamy matematykowi niemieckiemu Georgowi Cantorowi.

Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych wynikała nam stąd, że nie jest to zbiór miary 0. A czy każdy zbiór miary 0 musi być przeliczalny? Odpowiemy na to pytanie w drugiej części tego artykułu.

Dziesięć największych gwiazdozbiorów

Nazwa łacińska	Powierzchnia (w stopniach kwadratowych)
Hydra	1303
Virgo	1294
Ursa Major	1280
Cetus	1231
Hercules	1225
Eridanus	1138
Pegasus	1121
Draco	1083
Centaurus	1060
Aquarius	980

trzecim co do wielkości gwiazdozbiorem, może budzić zdziwienie jedynie wśród osób, które utożsamiają ją z Wielkim Wozem. Sam Wielki Wóz nie jest aż tak duży, stanowi on tylko fragment Wielkiej Niedźwiedzicy — jej „tułów” i „ogon”. „Przednie łapy” i „łeb” Niedźwiedzicy (utworzone ze znacznie słabszych gwiazd) leżą aż nad „głową” Hydry. Wielka Niedźwiedzica jest prawie tak samo długa jak Hydra, tyle że podobnie jak Smok leży w pobliżu bieguna, gdzie koła rektascensji zagęszczają się.

Inne, charakterystyczne zgrupowanie rozległych gwiazdozbiorów można zaobserwować w wieczory jesienne, kiedy to górują Wodnik (*Aquarius*), Pegaz (*Pegasus*), Erydan (*Eridanus*) i Wieloryb (*Cetus*). W ten sposób niemal wyczerpaliśmy listę dziesięciu największych gwiazdozbiorów obu półkul nieba (patrz tabelka). Z pozostałych dwóch Herkules (*Hercules*) jest najlepiej widoczny w wieczory letnie, Centaura (*Centaurus*) zaś praktycznie nie widać w naszych szerokościach geograficznych — jego niewielkie fragmenty można dostrzec tuż nad horyzontem pod „ogonem” Hydry.

Zwróćmy uwagę, że największe gwiazdozbiory wcale nie są najbardziej znane (oczywiście z wyjątkiem Wielkiej Niedźwiedzicy), w tym sensie, że nie jest łatwo wskazać ich kształty na niebie. Zawierają stosunkowo niewiele jasnzych gwiazd i dlatego prezentują się o wiele mniej okazałe niż np. tak znane konstelacje nieba zimowego jak Orion (*Orion*) czy Bliźnięta (*Gemini*).

Dawniej największym gwiazdozbiorem był Okręt Argonautów leżący na południowej półkuli nieba. Zgodnie z obowiązującymi do dziś postanowieniami Międzynarodowej Unii Astronomicznej Okręt rozpadł się na mniejsze fragmenty — Kil (*Carina*), Rufę (*Puppis*) i Żagiel (*Vela*) — i jako całość przestał istnieć. Tym samym Hydra stała się największą konstelacją i ogólnie można powiedzieć, że znaczna większość gwiazdozbiorów zajmujących największe powierzchnie leży na północnej półkuli nieba. Czy dotyczy to również gwiazdozbiorów najmniejszych? Napiszemy o tym innym razem.

mgr Joanna UDALSKA

# „Nowe” nadprzewodnictwo

Prof. dr  
Łukasz A. TURSKI

Artykuł został  
napisany w kwietniu  
1987 roku.

Elektron poruszający się wewnątrz kryształu może część swojej energii kinetycznej przekazać drganiom sieci (fononom) i na odwrót. Oddziaływanie przez wymianę fononów może prowadzić do powstawania słabego przyciągania elektronów. W niskich temperaturach część elektronów wiąże się w pary (pary Coopera). Rozmiary takiej pary są o rzędy wielkości większe od średnich odległości między elektronami. Zmiana stanu pary Coopera wymaga dostarczenia energii równej jej energii wiązania. Energia ta jest wystarczająco duża, aby para nie mogła rozprasać się podczas przewodzenia prądu, a więc porusza się bez strat energii. Tak w bardzo grubym przybliżeniu teoria BCS tłumaczy zjawisko nadprzewodnictwa.

Temperatura Debye'a  $T_D$  jest to temperatura, dla której  $k_B T_D$  równa się największej możliwej energii fononu w danym kryształce.

W wielu substancjach namagnesowanie wywołane zewnętrznym polem magnetycznym skierowane jest przeciwie do tego pola (ujemna podatność magnetyczna). Pole magnetyczne wewnątrz takiego materiału jest słabsze niż pole zewnętrzne. Zjawisko to nazywane jest diamagnetyzmem.

W nadprzewodniku „namagnesowanie” całkowicie kompensuje zewnętrzne pole magnetyczne. Tak więc zewnętrzne pole nie wnika do nadprzewodnika — nadprzewodniki są doskonałymi diamagnetykami.

Kiedy cztery lata temu pisałem dla *Delta* artykuł wstępny do numeru poświęconego skropleniu powietrza przez Wróblewskiego i Olszewskiego, umieściłem w nim zdanie: „... już nigdy po tym odkryciu nie byliśmy tak blisko światowego rekordu niskich temperatur”. Od tego czasu niewiele się w tej materii zmieniło. Jednak „świat nie jest taki zły” i oto w ciągu ostatnich miesięcy nasi fizycy ciała stałego dołączyli do wyścigu, który rozpoczął się na całym świecie, wyścigu do osiągnięcia jak najwyższej temperatury przemiany nadprzewodzącej.

Kiedy *Delta* drukowała swój „niskotemperaturowy” numer, światowy rekord temperatury krytycznej dla nadprzewodników wynosił około dwudziestu kelwinów. W dniu dzisiejszym wynosi on około 90 K, a jeżeli wierzyć prasie codziennej, to osiągnano już temperatury krytyczne zbliżone do temperatur pokojowych (na cały w próbkach, z którymi doświadczenia nie są powtarzalne). Najciekawsze jest przy tym to, że cały postęp dokonał się w ciągu li tylko pół roku. Jak do tego doszło i dlaczego jest to tak ważne?

Zjawisko nadprzewodnictwa znane jest od 1911 r. Przez wiele dziesiątków lat wybitni fizycy próbowali podać wyjaśnienie tego zjawiska. Nie powiodło się to nawet takim tuzom jak Heisenberg. Dopiero w końcu lat trzydziestych bracia Fritz i Heinz Londonowie oraz Lew Landau sformułowali fenomenologiczną teorię nadprzewodnictwa, która okazała się szalenie użyteczna i, z niewielkimi zmianami, obowiązuje do dziś.

Koniec lat pięćdziesiątych to okres, kiedy prace nad mikroskopową teorią nadprzewodnictwa prowadzone były bardzo aktywnie. W końcu grupa fizyków kierowana przez Johna Bardeena (John Bardeen, Leon Cooper i J. Robert Schrieffer) zaproponowała model nadprzewodnictwa zwany dziś modelem BCS. Prace te zostały uwieńczone w latach siedemdziesiątych nagrodą Nobla. Notabene John Bardeen to jedyny uczony, który uzyskał dwukrotnie nagrodę Nobla w fizyce, pierwszą dostał za wynalezienie tranzystora.

Teoria BCS wiąże zjawisko nadprzewodnictwa z długozasięgową koherencją funkcji falowej opisującej układ stanów związanych dwu elektronów, tzw. par Coopera. Za powstawanie tych par odpowiedzialne jest oddziaływanie między elektronami a drganiami sieci krystalicznej — fononami. (Powtarzam swoją uwagę sprzed lat: fizyka nadprzewodnictwa jest trudna, bowiem naprawdę wymaga ona znajomości mechaniki kwantowej.) Teoria BCS jest jedną z najpiękniejszych teorii w fizyce, odegrała ona jednak trochę szkodliwą rolę w pogoni za materiałami o wysokiej temperaturze przemiany w stan nadprzewodzący. Według teorii BCS temperatura tej przemiany jest równa  $T_c = \theta \exp(-1/g)$ , gdzie  $k_B \theta$  ( $k_B$  — stała Boltzmanna) jest szerokością tego obszaru energii w pobliżu powierzchni Fermiego, w którym następuje tworzenie się par, a  $g$  jest miarą siły oddziaływania prowadzącego do tworzenia się par Coopera.

Po to, aby teoria BCS „pracowała”, stała  $g$  musi być mniejsza od jedności. Dla większości znanych nadprzewodników jest ona równa  $g \approx 1/3 \div 1/4$ . Temperatura  $\theta$  zależy od mechanizmu oddziaływań i w „zwykłym” fononowym nadprzewodnictwie jest rzędu temperatur Debye'a dla kryształu, tj.  $\approx 10^2 - 10^3$  K. Jeżeli np.  $\theta = 500$  K, a  $g = 1/3$ , to  $T_c = 25$  K. Bardziej „zaawansowane” metody prowadzą do oszacowania  $T_c \leq 30$  K! Ten właśnie wynik sugerował (wielu fizyków w to wierzyło), że nadprzewodnictwo na zawsze pozostanie domeną fizyki niskich temperatur. (Przez niskie temperatury rozumiem tu temperatury poniżej temperatury krystalizacji ciekłego azotu — 63,3 K.) Dokładniejsze analizy teoretyczne, rozszerzające model BCS, a także sugerujące inny niż fononowy mechanizm prowadzący do tworzenia się par Coopera i powstawania koherentnych funkcji falowych, opisujących stan nadprzewodzący, przekonały fizyków, gdzieś w początku lat siedemdziesiątych, że nie istnieją powody, dla których nie można by osiągnąć nadprzewodnictwa w „wysokich” temperaturach, nawet pokojowych. Ale jak to zrobić?

Wielu badaczy poświęciło niemało sił i środków na badanie nadprzewodnictwa w „egzotycznych” materiałach, np. w bardzo skomplikowanych kryształach organicznych, w których przewodnictwo odbywa się w zasadzie w jednym wyróżnionym kierunku. Taka jednowymiarowość jest dość ważna i w ogóle postęp w fizyce ciała stałego odbywa się głównie przez badanie struktur nisko-, tj. jedno- lub dwuwymiarowych; przykładem niech będzie kwantowy efekt Halla. W 1973 r. *New York Times* podał sensacyjną informację o odkryciu przez grupę fizyków ze stanowego Uniwersytetu Pensylwanii nadprzewodnictwa w substancji o niewymawialnej nazwie ukrytej pod skrótem TCNQ i to w temperaturze około 60 K. Okazało się, że było to inne zjawisko, pasjonujące i trudne do wyjaśnienia — stało się między innymi motywem do zastosowania w fizyce ciała stałego pojęcia solitonu — ale nie nadprzewodnictwo.

W początku lat osiemdziesiątych zainteresowanie wzbudziły doświadczenia nad „naddiamagnetyzmem” w prostych substancjach, takich jak CdS czy też CuCl. W istocie rzeczy bowiem znacznie czulszym „wskaźnikiem” nadprzewodnictwa jest nie znikanie oporu elektrycznego, ale zjawisko Meissnera-Ochsenfelda — idealnego diamagnetyzmu nadprzewodników.



Rozwiązanie zadania M 501. Przyjmijmy, że dla pewnego  $n$  cyfra  $k$  występuje  $n+1$  razy, poczynając od  $(n-1)$ -ego miejsca po

przecinku. W takim razie liczba  $x = \sqrt{2} \pm \frac{k}{9}$  ma na tych miejscach zera lub dziewiątki.

Jeśli teraz  $\frac{p}{10^{n-2}}$  jest odpowiednim (z nadmiarem lub niedomiarem) przybliżeniem liczby  $x$ , to

$$\left| x - \frac{p}{10^{n-2}} \right| < \frac{1}{10^{2n-1}}$$

Z drugiej strony,  $x$  spełnia równanie

$$81x^2 + 18kx + (k^2 - 162) = 0.$$

Z zadania 499 wynika więc, że

$$\left| x - \frac{p}{10^{n-2}} \right| \geq \frac{1}{81 \left( x + \frac{p}{10^{n-2}} \right) + 18k} \times \frac{1}{10^{2n-4}} > \frac{1}{500} \frac{1}{10^{2n-4}} > \frac{1}{10^{2n-1}}$$

Sprzeczność dowodzi, że (\*) wśród  $2n$  początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\sqrt{2}$  żadna cyfra nie występuje  $n+1$  razy pod rząd poczynając od  $(n-1)$ -ego miejsca po przecinku.

Gdyby jakaś cyfra pojawiła się  $n+1$  razy poczynając od  $i$ -tego ( $i < n-1$ ) miejsca po przecinku, to wśród  $2i+2$  początkowych cyfr rozwinięcia  $\sqrt{2}$  ta cyfra występowałaby  $i+2$  razy, sprzeczność z (\*) kończy dowód.

Efekt Josephsona — zjawisko polegające na przepływie prądu przez warstwę izolatora rozdzielającego dwa nadprzewodniki. Przepływ taki możliwy jest dzięki istnieniu efektu tunelowego.



Rozwiązanie zadania F 241. Maksymalna wartość pola  $H$  (w A/m) wyraża się w sposób następujący

$$H = \frac{M}{4\pi r^3},$$

gdzie  $M$  oznacza moment magnetyczny elektronu. Maksymalna wartość pola powstającego na skutek ruchu elektronu z prędkością  $v$  jest równa

$$H' = \frac{ev}{4\pi r^2}.$$

Moment magnetyczny  $M$  jest równy magnetonowi Bohra

$$M = \frac{e\hbar/2\pi}{2m_e}.$$

Warunek  $H \gg H'$  daje nam  $\hbar/2\pi \gg 2pr$ , gdzie  $p = m_e v$ . Natomiast z zasady nieoznaczoności  $\Delta p \cdot \Delta r \gg \hbar/2\pi$ , co dla  $\Delta r \ll r$  prowadzi do warunku

$$\hbar/2\pi \ll r\Delta p.$$

Przećzy to otrzymanej nierówności  $\hbar/2\pi \gg 2pr$

Rewolucja zaczęła się wiosną 1986 r. w podzurskim laboratorium firmy IBM w Rüschlikonie. (W ogóle to wyciąg do nadprzewodników z wysoką  $T_c$  jest szwajcarską specjalnością; przez lata rekord należał do sławnego „alchemika” z La Jolla, Berta Mattiasa — fizyka amerykańskiego urodzonego w ... Zurychu!) Pracujący w tym laboratorium wybitny fizyk szwajcarski prof. K. Alex Müller, przy pomocy i współpracy krystalografa J. G. Bednorza, odkrył nadprzewodnictwo w temperaturze  $T_c > 30$  K w związkach  $Ba_xLa_{5-x}Cu_3O_{5(3-y)}$  przy różnych wartościach  $x$  (1 i 0,75) oraz  $y > 0$ . Doniesienie o tym ukazało się w 64 numerze *Zeitschrift für Physik* z 1986 roku na stronie 189. Z ukazaniem się tego artykułu narodziła się fizyka wysokotemperaturowego nadprzewodnictwa.

Już w pierwszych miesiącach 1987 roku temperatury  $T_c$  wzrosły do temperatur ciekłego azotu. Zjawisko to zaobserwowano w innych substancjach, w których lantan zastąpiono itrem itp. Wiadomości o tych wynikach podawane są przez gazety codzienne. Ponieważ jednym z pierwszych i wiodących ośrodków zajmujących się tym jest ośrodek pekiński, to gwałtownie wzrosło zainteresowanie nie tyle językiem chińskim, ile posiadaniem w zespole chińskiego doktoranta, który mógłby czytać codzienną prasę pekińską.

Większość publikacji na temat wysokotemperaturowego nadprzewodnictwa, a już szczególnie doniesienia prasowe, dotyczą pomiaru  $T_c$ . Znacznie mniej miejsca poświęca się fizyce tego zjawiska niż „kuchni” technologicznej. Sam Alex Müller i współpracownicy pracują niemal wyłącznie nad fizyką zjawiska, nowe próbki o znacznie wyższej  $T_c$  przygotowują dla nich inne laboratoria IBM w USA.

Co już wiemy o tym zjawisku? Po pierwsze wiemy, że są to nadprzewodniki o zupełnie innej strukturze niż konwencjonalne. Wiemy, że są to nadprzewodniki tzw. drugiego rodzaju i wiemy, że nadprzewodnictwo odbywa się w nich w zasadzie w dwuwymiarowych warstwach równoległych do krystalograficznych płaszczyzn zawierających tlenek miedzi. Wiemy też, że tworzenie się par Coopera (pojęcia tego używam tu świadom jego nieprecyzyjności w odniesieniu do nadprzewodników Müllera) związane jest z jednym z typów drgań ośmiościanów tlenu otaczających atomy miedzi. Wiemy też, że nadprzewodniki te mają strukturę „ziarnistą”, tj. w objętości materiału powstają niemal dwuwymiarowe „grona” nadprzewodzące, sprzężone między sobą poprzez oddziaływania typowe dla efektu Josephsona. Taki nadprzewodnik można sobie wyobrazić jako dwuwymiarowy układ dość przypadkowo rozłożonych gron, z których każde opisane jest swoją własną funkcją falową stanu nadprzewodzącego  $\psi_i = \sqrt{\rho} \exp(i\Phi_i)$ . Zgodnie z teorią efektu Josephsona energia oddziaływania dwóch gron jest proporcjonalna do cosinusa różnicy faz owych funkcji falowych  $E_{12} = M_{12} \cos(\Phi_1 - \Phi_2)$ . W nadprzewodniku ziarnistym współczynniki  $M_{12}$  są wielkościami losowymi. Okazuje się, że w takich układach możliwe jest przejście fazowe prowadzące do pojawienia się efektu Meissnera-Ochsenfelda, któremu niekoniecznie towarzyszy przejście do stanu nadprzewodzącego, jak to ma miejsce w „normalnych” nadprzewodnikach.

Jeżeli to, co wiemy z doświadczeń Müllera i to, co przewiduje teoretyczny model naszkicowany powyżej, zostanie potwierdzone i ugruntowane, to zjawisko wysokotemperaturowego nadprzewodnictwa okaże się czymś jakościowo nowym w fizyce ciała stałego. Wskazuje ono bowiem na to, że temperatura przemiany zachodzącej w ziarnie nie musi być równa temperaturze  $T_c$  i może być od niej znacznie wyższa! Jedną z hipotez dotyczących niepowtarzalności doświadczeń nad próbkami o  $T_c$  w zakresie temperatur pokojowych jest to, że w jakiś sposób w tych doświadczeniach „dobrano” się do temperatury przemiany w indywidualnym gronie nadprzewodzącym. Miejmy nadzieję, że następne doświadczenia, w tym i te, które teraz, po uzyskaniu próbek nadprzewodzących, mogą wykonywać nasi koledzy z Warszawy i Poznania, pozwolą nam na lepsze zrozumienie tego zjawiska.

Czytelnik musiał zauważyć, że jak dotąd, w ogóle nie zajmowałem się potencjalnymi technologicznymi zastosowaniami nadprzewodników Müllera. Uważam, że dyskusje na ten temat są jeszcze przedwczesne. Wydaje się, i pewnie tak będzie, że materiały te zrewolucjonizują technologię wytwarzania silnych pól magnetycznych (pola krytyczne szacowane dla znanych już nadprzewodników Müllera są bardzo wysokie), być może nadadzą się do produkcji złącz Josephsona i hipotetycznie do produkcji nadprzewodzących „chipów” (obwodów scalonych). To, co jest, moim zdaniem, naprawdę ważne, to fakt, że nadprzewodnictwo przestało być zjawiskiem egzotycznym, a stało się zjawiskiem bardzo powszechnym.

Kilkanaście lat temu zwrócono uwagę na to, że wiele elementów przetwarzających informacje w układach biologicznych, np. w ludzkim mózgu, zużywa za mało energii. Znaleźli się śmiałkowie; którzy twierdzili, że mechanizmem umożliwiającym to jest wysokotemperaturowe nadprzewodnictwo. Oczywiście — dopóki  $T_c$  były zawsze bliskie zera bezwzględnego, to rozważania takie uważane były za *science fiction*. Ale dziś? ...

Na razie nie namawiam jeszcze nikogo, aby w tęgie mrozy chodził bez czapki w celu zmniejszenia zużycia energii własnego mózgu przy obliczaniu całek podwójnych.

Andrzej ŻUK

## Sprostowanie

W artykule *Nierówność cykliczna* (*Delta* 10/1987) błędnie podałem liczby do kontrprzykładu A.Zulaufa. Powinny one mieć następujące wartości:

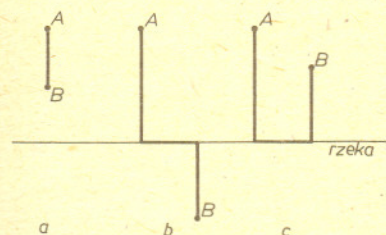
$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{14}) = \left( \frac{1007}{1000}, \frac{7}{1000}, \frac{1004}{1000}, \frac{6}{1000}, \frac{1001}{1000}, \frac{5}{1000}, 1, \frac{2}{1000}, \frac{1001}{1000}, 0, \frac{1004}{1000}, \frac{1}{1000}, \frac{1006}{1000}, \frac{4}{1000} \right).$$

Wtedy

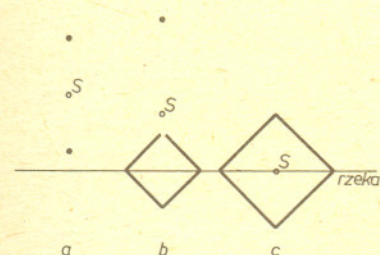
$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{14}) \approx 6,999998254 < \frac{14}{2}.$$

Błąd, który powstał wyłącznie z mojej winy, zauważył p.Tomasz Starecki z Warszawy, za co Mu dziękuję, zaś Czytelników i Redakcję przepraszam.

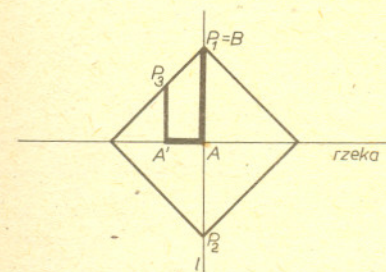
Jarosław GÓRNICKI



Rys. 1. Odległość punktów  $A = (X_A, Y_A)$  i  $B = (X_B, Y_B)$  w metryce rzeka jest równa  $|Y_B - Y_A|$ , gdy  $X_A = X_B$ , a  $|Y_A| + |X_A - X_B| + |Y_B|$ , jeśli  $X_A \neq X_B$ .



Rys. 2



Rys. 3.  $g^{-1}(f(A)) = A$ ,  $g^{-1}(f(A')) = A'$ .

Geometria zajmuje się badaniem niezmienników izometrii. Opis izometrii jest więc bardzo ważny. Z książki Zofii Krygowskiej *Geometria dla klasy pierwszej* dowiadujemy się, że izometrie płaszczyzny euklidesowej to złożenia symetrii osiowych. Ich opis analityczny wygląda prosto, jeśli posłużymy się płaszczyzną liczb zespolonych. Czytelnik znający liczby zespolone może sprawdzić, że izometrie to funkcje zmiennej zespolonej postaci

$$f(z) = a \cdot z + b \quad \text{lub} \quad f(z) = a \cdot \bar{z} + b, \quad \text{gdzie} \quad |a| = 1 \text{ i } a, b \in \mathbb{C}.$$

Izometrie to przekształcenia zachowujące odległość (dokładnie:  $f$  jest izometrią, jeśli odległość  $X$  od  $Y$  jest równa odległości  $f(X)$  od  $f(Y)$  dla każdego punktu  $X, Y$ ). Jeśli więc na pewnym zbiorze określimy sposób mierzenia odległości między jego elementami, to możemy badać izometrie tego zbioru. Funkcję określającą odległość każdej pary punktów nazywamy metryką. Zbiór wraz z metryką to przestrzeń metryczna (pełną definicję przestrzeni metrycznych oraz ich przykłady znajdzie Czytelnik w książeczce Sławomira Nowaka — *Co to znaczy blisko?*, Wydawnictwo specjalne *Delty*).

W pracy nadesłanej na konkurs podałem opisy izometrii pewnych przestrzeni metrycznych. Były to metryki, które najczęściej nazywane są: rzeka, kolejowa, miejska oraz Czebyszewa (określone na płaszczyźnie). Przedstawię teraz wyniki wraz ze szkicami rozumowań.

Metryka rzeka. Definiujemy ją następująco. Wyróżniamy na płaszczyźnie prostą, którą dalej będziemy nazywać rzeką. Jeśli punkty leżą na prostej prostopadłej do rzeki, to ich odległość jest zwykłą odległością euklidesową (rys. 1a). Gdy punkty nie leżą na takiej prostej, to ich odległość określamy jako sumę ich euklidesowych odległości od rzeki i odległości ich rzutów na rzekę (rys. 1b, c).

Okręgiem o środku  $S$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór tych punktów, których odległość od  $S$  jest równa  $r$ . Można więc oglądać okręgi w różnych metrykach. W metryce rzeka mogą wyglądać jak brzeg kwadratu (rys. 2c), jak brzeg kwadratu z wyrzuconym wierzchołkiem i dodanym jednym punktem (rys. 2b) lub mogą być zbiorem dwuelementowym (rys. 2a). Wspomniałem o okręgach, ponieważ dowody, w przypadku tej metryki i innych, opierały się na badaniu własności okręgów.

Przejdźmy teraz do znalezienia wszystkich izometrii tej przestrzeni metrycznej.

Po pierwsze uzasadnijmy, że obrazem punktu rzeki, w izometrii  $f$ , jest punkt rzeki. Gdyby było inaczej, to pewien okrąg będący brzegiem kwadratu (rys. 2c) zostałby przekształcony w okrąg, do którego należą tylko dwa punkty (rys. 2a). Jest to sprzeczność, ponieważ izometria jest przekształceniem różnowartościowym (dlaczego?).

Z łatwością sprawdzamy, że elementy zbioru  $M$  składającego się z

- przesunięć równoległych do rzeki,
- przesunięć równoległych do rzeki złożonych z symetrią osiową względem prostej prostopadłej do rzeki,

są izometriami w metryce rzeka i przekształcają płaszczyznę na płaszczyznę. Zauważmy, że odległość punktów rzeki to zwykła, euklidesowa ich odległość. Wcześniej pokazaliśmy, że izometria  $f$  przy metryce rzeka przekształca rzekę w rzekę, więc przekształcenie  $f$  jest izometrią rzeki, na której określona jest odległość euklidesowa. Wiemy, że izometrie prostej z metryką euklidesową to przesunięcia oraz symetrie środkowe. Jeśli  $f$  jest dla punktów rzeki przesunięciem o wektor  $v$ , to definiujemy przekształcenie płaszczyzny  $g$  jako przesunięcie punktów płaszczyzny o wektor  $v$ . Gdy  $f$  jest dla punktów rzeki symetrią względem punktu rzeki  $A$ , to przekształcenie płaszczyzny  $g$  określamy jako symetrię osiową o osi prostopadłej do rzeki i przecinającej ją w punkcie  $A$ . W ten sposób dla izometrii  $f$  określiliśmy izometrię  $g$  należącą do zbioru  $M$ , taką, że  $f(X) = g(X)$ , gdy  $X$  jest punktem rzeki. Zamiast izometrii  $f$  możemy więc badać izometrię  $g^{-1} \circ f$ , której punktami stałymi są punkty rzeki.

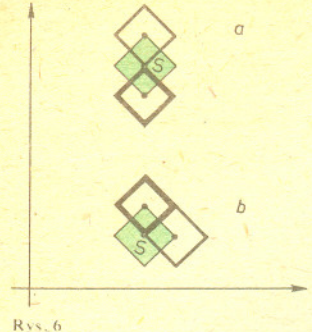
Proste prostopadłe do rzeki nazwijmy leśnymi (wyjaśnienie tej nazwy można znaleźć we wspomnianej już książeczce Sławomira Nowaka). Niech  $l$  oznacza jedną z nich. Obrazem  $l$  w izometrii  $g^{-1} \circ f$  jest  $l$ . Mianowicie, niech  $A$  oznacza punkt przecięcia prostej  $l$  z rzeką, a punkt  $B$ , różny od  $A$ , niech będzie punktem prostej  $l$ . Ponieważ  $g^{-1} \circ f(A) = A$ , więc  $g^{-1} \circ f(B)$  leży na okręgu o środku w  $A$  i promieniu równym odległości  $A$  od  $B$  (rys. 3). Obrazem  $B$  mogą być tylko punkty  $P_1$  lub  $P_2$  (należące do prostej  $l$ ). Gdyby bowiem był nim np. punkt  $P_3$ , to odległość  $P_3$  od  $A'$  byłaby różna od odległości  $B$  od  $A'$  (rys. 3), co przeczy definicji izometrii.

Odległość punktów leżących na prostej leśnej  $l$  to zwykła odległość euklidesowa tych punktów. Zatem izometria  $g^{-1} \circ f$ , przekształcająca  $l$  w  $l$ , jest izometrią prostej  $l$  w metryce euklidesowej. Ponieważ  $A$  jest punktem stałym, jest to identyczność lub symetria względem  $A$ . Na innych prostych leśnych złożenie  $g^{-1} \circ f$  oczywiście też jest bądź identycznością, bądź symetrią względem punktu przecięcia prostej leśnej z rzeką. Ostatecznie  $g^{-1} \circ f$  jest dziwną izometrią  $s$ , która proste leśne odbija względem rzeki lub jest dla nich identycznością, przy czym dla każdej prostej leśnej jest określona niezależnie od tego, jak działa na inne proste leśne. Zatem każda izometria  $f$  tej przestrzeni metrycznej jest postaci

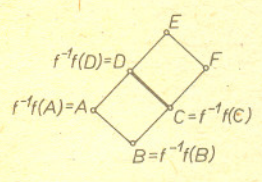
$$f = g \circ s.$$

Można dać również analityczny opis izometrii tej przestrzeni metrycznej. Dla wygody rzekę utożsamiamy z osią  $OX$ . Otóż, izometria to funkcja postaci

$$f(X, Y) = (h(X), k(X) \cdot Y), \quad \text{gdzie} \quad h(X) = X + m \text{ lub } h(X) = -X + m \quad (m \in \mathbb{R}) \text{ oraz } k : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}.$$



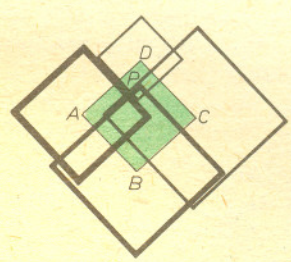
Rys. 6



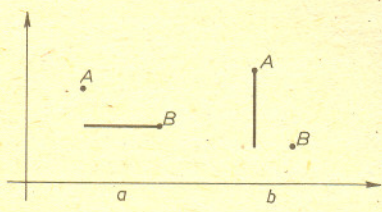
Rys. 7



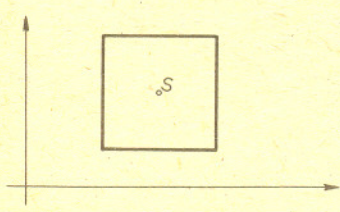
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10. Odległość punktów  $A = (X_A, Y_A)$  i  $B = (X_B, Y_B)$  w metryce Czebyszewa określamy jako  $\max\{|X_A - X_B|, |Y_A - Y_B|\}$ .

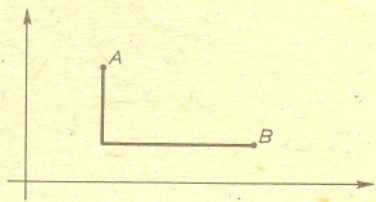


Rys. 11

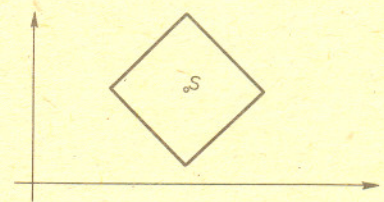
Czytelnika znającego pojęcie mocy zbioru powinien zastanowić fakt, że moc tego zbioru izometrii to  $2^c$ , podczas gdy moc zbioru izometrii płaszczyzny euklidesowej to tylko  $c$ .

Zbadanie metryki kolejowej dostarczyło przykładów izometrii, które nie są przekształceniami płaszczyzny na płaszczyznę (!).

Następna metryka, którą się zajmowałem, to metryka miejska. Odległość punktów to suma euklidesowych odległości współrzędnych (rys. 4). Okręgi w tej metryce wyglądają jak brzeg kwadratu (rys. 5).



Rys. 4. Odległość  $A = (X_A, Y_A)$  i  $B = (X_B, Y_B)$  w metryce miejskiej jest równa  $|X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|$ .



Rys. 5

Nietrudno sprawdzić, że zbiór  $K$  przekształceń składających się z

- przesunięć,
  - odbić względem osi układu współrzędnych oraz prostych nachylonych do osi  $OX$  pod kątem  $45^\circ$  i  $135^\circ$ ,
  - obrotów o wielokrotności  $90^\circ$  wokół początku układu współrzędnych oraz ich złożań,
- składa się z izometrii tej przestrzeni metrycznej przekształcających płaszczyznę na płaszczyznę. Wprawdzie izometrie można wskazać bez trudu, to jednak dowód, że są to wszystkie izometrie, sprawił mi pewną trudność.

Metryka euklidesowa ma następującą własność: każda trójka niewspółliniowych punktów wyznacza jednoznacznie położenie punktu przez podanie jego odległości od tych punktów. Własność ta jest bardzo istotna, ponieważ dzięki niej obraz dowolnej trójki niewspółliniowych punktów wyznacza izometrię płaszczyzny. W metryce miejskiej nie istnieje trójka punktów o podobnej własności. Jednak obrazy pewnej czwórki punktów wyznaczają izometrię w metryce miejskiej.

Jak więc poradziłem sobie z dowodem? Intuicyjnie oczywiste jest, że w dowolnej izometrii  $1^\circ$  wierzchołki kwadratu (okręgu w tej metryce) przejdą na „wierzchołki okręgu”;

$2^\circ$  obrazami sąsiednich wierzchołków będą sąsiednie. Aby dowieść  $1^\circ$ , należy wierzchołki okręgu wyróżnić metrycznie. Zauważmy, że odległość każdych dwóch wierzchołków jest równa podwojonej długości promienia okręgu. Nietrudno sprawdzić, że nie ma innej czwórki punktów okręgu o tej własności. Fakt  $2^\circ$  wykazujemy następująco. Narzucmy okręgi o środkach w wierzchołkach okręgu. Promienie ich niech będą równe promieniowi okręgu (rys. 6 a, b). Widzimy, że do części wspólnej okręgów, których środki są sąsiednimi wierzchołkami, należy nieskończenie wiele punktów (rys. 6 b), natomiast część wspólna okręgów o środkach w przeciwległych wierzchołkach to zbiór jednoelementowy (rys. 6 a). Dzięki różnowartościowości izometrii otrzymuje się więc prawdziwość  $2^\circ$ .

Niech  $f$  będzie izometrią tej metryki. Można sprawdzić, że na mocy  $1^\circ$  i  $2^\circ$  istnieje przekształcenie  $t$ , należące do zbioru  $K$ , takie, że  $f(P) = t(P)$ , gdzie  $P \in \{A, B, C, D\}$  (wierzchołki okręgu, rys. 7). Zatem  $t^{-1}f$  jest izometrią, której punkty stałe to  $A, B, C, D$ . Punkty  $C, D, E, F$  to również wierzchołki okręgu (rys. 7). Ponieważ  $t^{-1}f(D) = D$  i  $t^{-1}f(C) = C$ , więc korzystając z  $1^\circ$  i  $2^\circ$  mamy  $t^{-1}f(E) = E$  i  $t^{-1}f(F) = F$  lub  $t^{-1}f(E) = A$  i  $t^{-1}f(F) = B$ . Drugą możliwość odrzucamy, gdyż przeczy różnowartościowości izometrii. Podobnie uzasadniamy, że inne punkty tworzące kratę (rys. 8) są punktami stałymi izometrii  $t^{-1}f$ .

Zauważmy, że punkt  $P$  jest jednoznacznie wyznaczony przez podanie jego odległości od wierzchołków koła, do którego należy (rys. 9), tzn. okręgi o środkach w wierzchołkach koła, przechodzące przez punkt  $P$  należący do tego koła, nie przecinają się w innym punkcie. Oznacza to, iż  $t^{-1}f$  jest identycznością, czyli  $f = t$ .

Gdy do opisu użyjemy płaszczyzny liczb zespolonych, izometrie będą funkcjami zmiennej zespolonej postaci

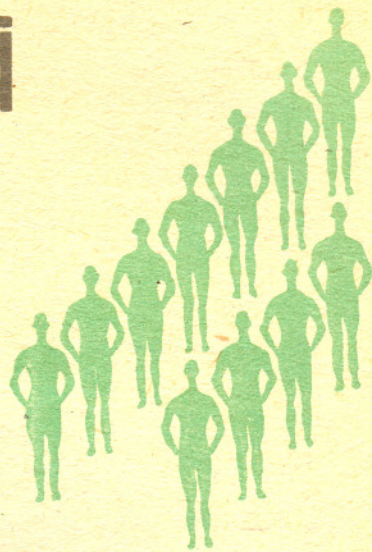
$$f(z) = a \cdot z + b \text{ lub } f(z) = a \cdot \bar{z} + b, \text{ gdzie } a \in \{1, -1, i, -i\} \text{ i } b \in \mathbb{C}.$$

Ostatnią metryką przebadaną przeze mnie jest metryka Czebyszewa. Odległość określamy tu jako maksimum odległości współrzędnych (rys. 10a, b). Okręgi w tej metryce wyglądają jak brzeg kwadratu (rys. 11). W przypadku tej przestrzeni metrycznej skonstruowałem izometrię z płaszczyzny z metryką Czebyszewa na płaszczyznę z metryką miejską. Dzięki temu badanie izometrii tej przestrzeni metrycznej sprowadziło się do badania izometrii poprzedniej przestrzeni metrycznej. Czytelnikowi nie powinno sprawić trudności sprawdzenie, że takim przekształceniem jest obrót płaszczyzny wokół początku układu współrzędnych o kąt  $45^\circ$ , złożony z jednokładnością o środku w początku układu i skali  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Dziwactwem tego artykułu były kwadratowe okręgi — zapewne Czytelnik uwierzy (a może i sprawdzi), że istnieją metryki, w których okręgi są sześciokątami, ale, o dziwo, nie istnieją metryka, w której okręgi są trójkątami równobocznymi.

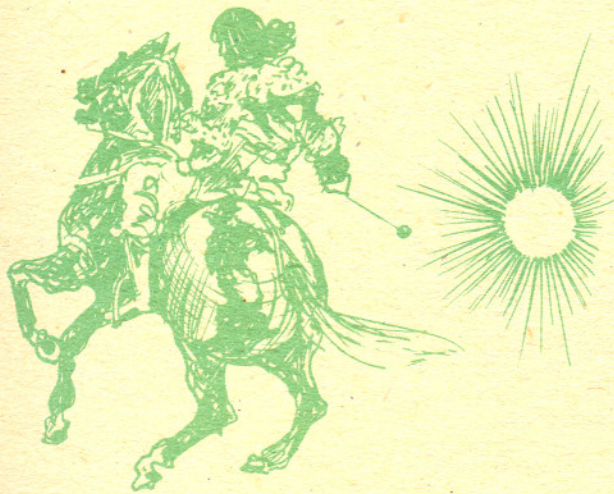


# delta mata delta

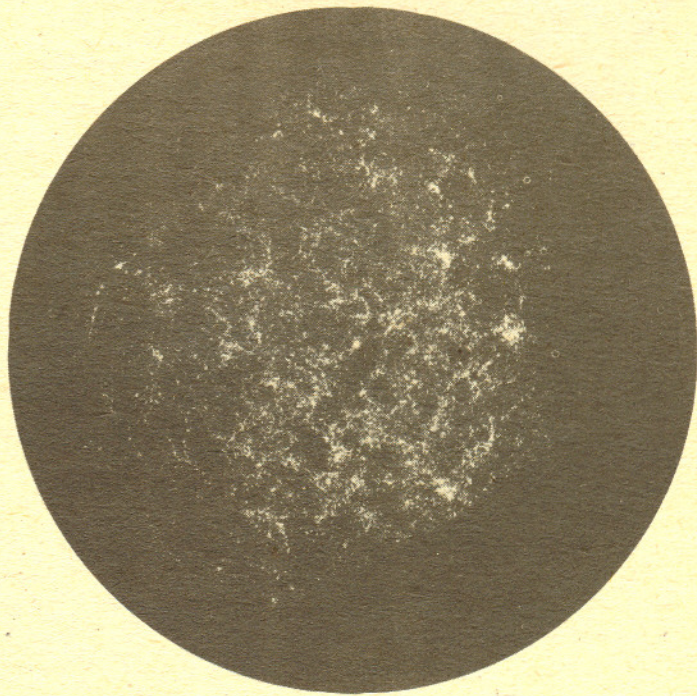


## O pożytku z przeciętności

Mniej więcej do czasów Kopernika (XV/XVI w.) praktycznie nikt nie wątpił w wyjątkowość Ziemi. Każdy wszak widział, że cały Wszechświat wokół niej się obraca, że ją obiegają wszystkie gwiazdy, planety i życiodajne Słońce. Kopernik zaproponował inny model świata, w którym Ziemia byłaby jedną z planet. Pokazał, że skomplikowane tory planet na niebie można równie dobrze, a nawet łatwiej, wytłumaczyć obiegami ich oraz samej Ziemi wokół Słońca. Hipoteza Kopernika została w pełni potwierdzona, gdy wyznaczone zostały masy Słońca i planet. W ten sposób Ziemia zajęła należne jej przeciętne miejsce w Układzie Słonecznym.



Otóż w czasach, gdy obraz naszej Galaktyki dopiero zaczynał się kształtować, wydawało się, że Słońce zajmuje w niej wyróżnione położenie. Mianowicie William Herschel w końcu XVIII w. próbował poznać rozmieszczenie gwiazd w przestrzeni, a tym samym określić kształt Galaktyki. Jego obserwacje polegały na zliczaniu gwiazd do określonej jasności. Chodzi o to, że jeżeli gwiazdy wypełniają przestrzeń równomiernie, to można obliczyć, jakie prawo wiąże ich liczbę z jasnością. Im słabsze gwiazdy zliczamy, tym jest ich więcej, a rozbieżność zliczeń z tym teoretycznym prawem świadczy wtedy o nierównomiernym rozmieszczeniu gwiazd. I właśnie Herschelowi wyszło, że Słońce leży w najgęstszym miejscu Galaktyki, tzn. w jej centrum.



Obecnie, mniej lub bardziej jawnie, panuje w astronomii przekonanie, że Wszechświat z każdego miejsca wygląda z grubsza tak samo (oczywiście w dużych skalach). Inaczej mówiąc, żaden punkt Wszechświata, w szczególności nasza Ziemia, nie jest niczym wyróżniony. Pogląd ten znany jest jako tzw. pierwsza zasada kosmologiczna lub zasada kopernikowska, ponieważ właśnie Kopernik zastosował ją po raz pierwszy. Okazuje się, że jej uznanie może prowadzić do odkryć, zaś zaniedbanie do wyników fałszywych.

Wielkoskalowy rozkład galaktyk na niebie. Na rysunku jest około miliona galaktyk jaśniejszych od 19 mag widocznych nad horyzontem Obserwatorium Licka.

Teraz, po latach, wiemy, że Herschel nie uwzględnił pochłaniania światła w rozrzedzonej materii międzygwiazdowej, wskutek czego przecenił odległości gwiazd: gwiazda słaba może przecież być blisko, a tylko przestłonięta warstwą materii międzygwiazdowej. Zasada kopernikowska mogła tu Herschelowi podpowiedzieć, że „centralne” położenie Słońca w Galaktyce jest podejrzane.



Uznanie istnienia ciemnej rozproszonej materii międzygwiazdowej zachodziło osobliwie opornie. W 1930 r. Robert Trumpler wyznaczając rozmiary gromad gwiazdowych stwierdził, że im dalej od Słońca, tym są one większe. Uznał jednak to za efekt pozorny, którego przyczyną jest znowu przecenianie odległości gromad spowodowane nieuwzględnieniem pochłaniania światła w rozproszonej materii. W ten sposób zasada kopernikowska przyczyniła się do ostatecznego „odkrycia” materii międzygwiazdowej.



Później powtórzyła się ta sama historia z rozmiarami galaktyk. Przez długi czas wydawało się, że nasza Galaktyka jest wyjątkowo duża — tym razem dlatego, że odległości innych galaktyk były niedoceniane. Fakt ten lekko niepokoił astronomów, trzeba było jednak go „tolerować”, dopóki nie wykazano błędów w wyznaczeniach odległości galaktyk. Gdy to się stało, nasza Galaktyka okazała się przeciętna i znowu wszyscy odetchnęli z ulgą. Obecnie wszystko wskazuje na to, że i dalsze obszary Wszechświata również są nierozróżnialne, czyli że cały Wszechświat jest w przybliżeniu jednorodny.



Skoro więc zasada kopernikowska jest tak uniwersalna i Ziemia jest planetą przeciętną, to gdzie są nasi „kosmiczni bracia”?

*Małą Deltę opracował Tomasz KWAST*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1988 Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Cześćówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 155 /WT=2,45/ i 156 /WT=2,39/  
z numeru 9/1987

Konrad Pióro	- Warszawa	42,82pkt
Mirosław Mikułki	- Augustów	42,68pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	41,83pkt
Pietr Wach	- Katowice	41,59pkt
Krzysztof Jędrusiński	- Katowice	39,85pkt
Krzysztof Hrymiewiecki	- Białystok	37,86pkt

## Zadania z matematyki nr 167, 168

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**167.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$  oraz punkt  $P$  w jego wnętrzu, przy czym  $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$ . Niech  $K$  i  $L$  będą rzutami punktu  $P$  na boki  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$ . Udowodnić, że symetralna odcinka  $\overline{KL}$  połowi bok  $\overline{AB}$ .

**168.** Podać warunek konieczny i dostateczny, jaki muszą spełniać liczby naturalne  $n$  i  $k$ , aby szachownicę o wymiarach  $n \times n$  można było pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami o wymiarach  $1 \times k$ .

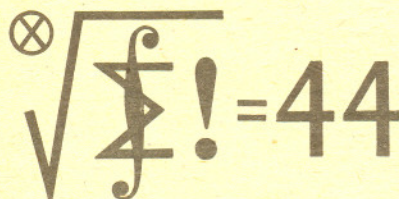
Zadanie 168 zaproponował pan Piotr Chrzastowski z Warszawy.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1987

Przypominamy treść zadań:

**159.** Dany jest  $n$ -punktowy zbiór  $Z$  na płaszczyźnie ( $n \geq 3$ ), bez trójki współliniowej. Dowiedź, że  $|\sphericalangle PQR| \leq 180^\circ/n$  dla pewnych punktów  $P, Q, R \in Z$ .

**160.** Wykazać zbieżność ciągu określonego wzorem  $x_{n+2} = 2(x_n + x_{n+1})^{-1}$ ;  $x_1, x_2$  — dane liczby dodatnie.



**159.** Niech  $W = \text{conv} Z$  będzie najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym  $Z$ . Jest to wielokąt. Przypuśćmy, że ma on  $k$  wierzchołków ( $k \leq n$ ); pozostałe  $n - k$  punktów znajduje się w jego wnętrzu. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta  $W$  wynosi  $(k-2) \cdot 180^\circ$ , a zatem najmniejszy z nich ma miarę  $\psi \leq (k-2) \cdot 180^\circ/k \leq (n-2) \cdot 180^\circ/n$ . Z wierzchołka tego kąta prowadzimy odcinki do wszystkich (poza nim samym) punktów zbioru  $Z$ . Wyznaczają one  $n-2$  kątów wypukłych o łącznej rozwartości  $\psi$ . Najmniejszy z tych kątów ma miarę  $\varphi \leq \psi/(n-2) \leq 180^\circ/n$ . Jest to szukany kąt  $PQR$ .

**160.** Lemat. Jeśli dla pewnego  $n > 2$  wyrazy  $x_{n-2}, x_{n-1}$  należą do przedziału  $I_a = \langle 1/a; a \rangle$ , gdzie  $a \geq 1$ , to wyrazy  $x_{n+1}, x_{n+2}$  należą do przedziału  $I_b = \langle 1/b; b \rangle$ , gdzie

$$b = a \cdot \frac{8+5(a^2-1)}{8+6(a^2-1)} \geq 1.$$

Dowód. Z podanego wzoru rekurencyjnego wynika, że jeśli  $x_{n-2}, x_{n-1} \in I_a$ , to  $x_n \in I_a$ . Kolejny wyraz ciągu wyraża się wzorem  $x_{n+1} = F(x_{n-2}, x_{n-1})$ , gdzie

$$F(x, y) = \frac{2}{y + \frac{2}{x+y}} = \frac{2x+2y}{xy+y^2+2}.$$

Badamy zachowanie funkcji  $F$  na zbiorze  $I_a \times I_a$ . Przy ustalonym  $y$  mianownik  $y+2(x+y)^{-1}$  maleje, gdy  $x$  rośnie. Zatem dla dowolnego punktu  $(x, y) \in I_a \times I_a$  zachodzi nierówność  $g(y) \leq F(x, y) \leq h(y)$ , gdzie

$$g(y) = F\left(\frac{1}{a}, y\right) = \frac{2ay+2}{ay^2+y+2a}, \quad h(y) = F(a, y) = \frac{2y+2a}{y^2+ay+2}.$$

Wartości ekstremalne funkcji  $F$  na kwadracie  $I_a \times I_a$  to: minimum funkcji  $g$  oraz maksimum funkcji  $h$  na przedziale  $I_a$ . Znajdujemy te wartości w zwykły sposób rachunkiem różniczkowym. Wynik obliczeń:

$$\begin{aligned} \min_{y \in I_a} g(y) &= g(a) = \frac{2a^2+2}{a^3+3a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{4+2c}{4+c} \\ \max_{y \in I_a} h(y) &= h\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2a^3+2a}{3a^2+1} = a \cdot \frac{4+2c}{4+3c} \end{aligned} \quad (c = a^2 - 1).$$

Tak więc, jeżeli  $x_{n-2}, x_{n-1} \in I_a$ , to

$$\frac{1}{a} \leq x_n \leq a, \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{4+2c}{4+c} \leq x_{n+1} \leq a \cdot \frac{4+2c}{4+3c}.$$

Dodając stronami i biorąc odwrotność stwierdzamy, że następny wyraz  $x_{n+2} = 2(x_n + x_{n+1})^{-1}$  spełnia nierówność

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{8+6c}{8+5c} \leq x_{n+2} \leq a \cdot \frac{8+2c}{8+3c}.$$

Lewy człon ostatniej nierówności równa się  $1/b$ . Nietrudno się przekonać, że prawy człon jest liczbą  $\leq b$  (stąd w szczególności dostajemy  $b \geq 1$ ), a także, że otrzymane powyżej ograniczenia na  $x_{n+1}$  również nie wychodzą poza przedział  $I_b$ . To kończy dowód lematu.

Dalej rozumiemy tak: bierzemy dowolną liczbę  $a \geq 1$  taką, żeby  $x_1, x_2 \in I_a$  (wtedy też  $x_3 \in I_a$ ). Na mocy lematu  $x_4, x_5 \in I_b$ , gdzie  $b$  jest liczbą określoną w lemacie ( $a \geq b \geq 1$ ); także  $x_6 \in I_b$ . Oznaczamy  $b$  przez  $a_1$  i powtarzamy rozumowanie. Postępując tak dalej, wnioskujemy indukcyjnie, że (dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) wyrazy o numerach  $3k+1, 3k+2, 3k+3$  należą do przedziału  $I_{a_k} = \langle 1/a_k; a_k \rangle$ , gdzie

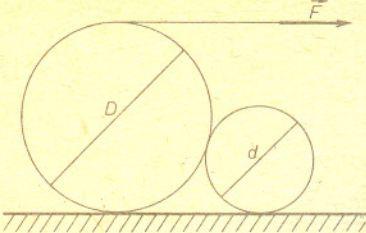
$$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{8+5(a_k^2-1)}{8+6(a_k^2-1)}; \quad a_k \geq a_{k+1} \geq 1.$$

Istnieje wobec tego granica  $s = \lim a_k \geq 1$ , która musi spełniać równanie

$$s = s \cdot \frac{8+5(s^2-1)}{8+6(s^2-1)}.$$

Jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania jest  $s = 1$ . Stąd ostatecznie  $\lim x_n = 1$ .

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Rys. 1

65. Na poziomym stole leżą dwa walce o średnicach  $D$  i  $d$ , które na całej długości — jednakowej dla obu walców — stykają się (rys. 1). Współczynnik tarcia (statycznego) między powierzchniami walców oraz między walcami a stołem wynosi  $f$ . Na walec o większej średnicy jest w środku jego długości nawinięta linka (przymocowana w pewnym miejscu do walca). Określić, przy jakim stosunku średnic  $D/d$  da się za pomocą poziomej siły  $F$  przyłożonej do końca linki przetoczyć duży walec przez mały i obliczyć wartość tej siły.

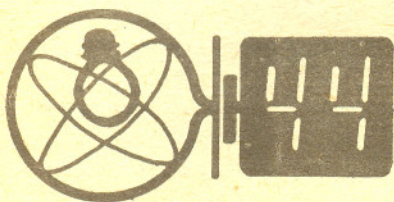
66. Obliczyć w przybliżeniu, jaki co najmniej powinien być promień planety o średniej gęstości  $5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  i temperaturze powierzchni 300 K, aby mogła się na niej utrzymywać atmosfera składająca się z azotu i tlenu. Czy byłoby możliwe utrzymywanie się atmosfery na Księżycu?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1987

Przypominamy treść zadań:

57. W narożniku ścian poziomej i pionowej umieszczono jednorodną kulę obracającą się z początkową prędkością kątową  $\omega$  wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do krawędzi narożnika. Współczynnik tarcia kinetycznego kuli o ściany narożnika wynosi  $f$ . Obliczyć czas, jaki upłynie do zatrzymania ruchu obrotowego kuli oraz kąt, o który się w tym czasie kula obróci.

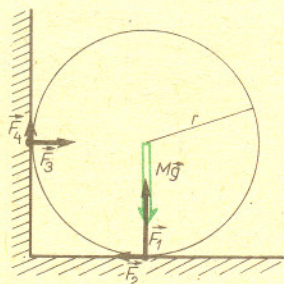
58. Pionowy cylinder, wypełniony powietrzem o ciśnieniu atmosferycznym  $p_0$  i temperaturze  $T_0$ , zamknięty jest od góry początkowo nieruchomym tłokiem o masie  $m$ . W połowie wysokości cylindra znajduje się nieruchoma przegroda z małym otworem. W pewnej chwili tłok zostaje zwolniony i opada, dochodząc do przegrody. Wyznaczyć końcową temperaturę powietrza w cylindrze przy zaniedbaniu tarcia tłoka o ścianki cylindra oraz wymiary ciepła między powietrzem a ściankami cylindra, przegroda i tłokiem. Jaka porównawczo byłaby końcowa temperatura powietrza, gdyby otwór w przegrodzie był duży?



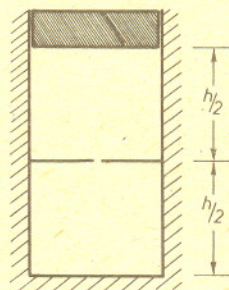
Cześćówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 53 /WT=1,36/ 1 54 /WT=3,26/ z numeru 9/1987

Piotr Wach	-	Katowice	44,75pkt
Leszek Szalast	-	Radzyń Podl.	44,00pkt
Dzierżysław Lipniacki	-	Lublin	32,17pkt
Bogusław Mikielwicz	-	Brednica	30,23pkt
Janusz Osada	-	Legnica	24,07pkt
Andrzej Eilmes	-	Gorlice	20,82pkt
Maciej Stasiak	-	Czuchów	18,73pkt
Wiesław Kacprzak	-	Kraków	18,33pkt

Panowie Wach i Szalast dołączają do grona członków Klubu 44 F, których liczba tym samym zaokrągla się do dziesięciu.



Rys. 2



Rys. 3

57. Na obracającą się kulę działają, poza siłą ciężkości  $Mg$  ( $M$  — masa kuli,  $g$  — przyspieszenie ziemskie), siły reakcji ścian narożnika  $F_1$  i  $F_3$  (prostopadle do tych ścian) oraz siły tarcia  $F_2$  i  $F_4$  (równoległe do ścian) — jak na rysunku 2. Między siłami tarcia a siłami reakcji (nacisku) zachodzą związki:  $F_2 = f F_1$ ,  $F_4 = f F_3$ . Ponieważ środek masy kuli pozostaje nieruchomy, wszystkie te siły muszą się równoważyć. Stąd mamy:  $F_1 + F_4 = Mg$ ,  $F_2 = F_3$ . Moment sił działających na kulę względem jej środka ma wartość  $(F_2 + F_4)r$ , gdzie  $r$  — promień kuli, i zwrot przeciwny do prędkości kątowej kuli. Powoduje on opóźnienie kątowe  $\varepsilon$  (ujemne przyspieszenie) kuli równe  $\varepsilon = (F_2 + F_4)r/I$ ,

gdzie  $I = \frac{2}{5} Mr^2$  jest momentem bezwładności kuli.

Rozwiązując układ powyższych równań otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{f(1+f)}{1+f^2} \frac{g}{r}$$

Czas do zatrzymania kuli obliczamy jako

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{2}{5} \frac{1+f^2}{f(1+f)} \frac{r\omega}{g}$$

W tym czasie kula obróci się o kąt

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega t = \frac{1}{5} \frac{1+f^2}{f(1+f)} \frac{r\omega^2}{g}$$

58. Dzięki oporom przepływu powietrza przez mały otwór można przyjąć, że tłok dochodzi do przegrody z bardzo małą prędkością i że jego energia kinetyczna w tym momencie jest do pominięcia. Zatem praca sił działających na tłok jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu  $\Delta U$ :

$$(1) \quad \Delta U = (Sp_0 + mg) h/2,$$

gdzie  $S$  — pole powierzchni tłoka,  $g$  — przyspieszenie ziemskie,  $h$  — wysokość cylindra (rys. 3).

Ponieważ energia wewnętrzna gazu zależy jedynie od temperatury, jej przyrost w dowolnym procesie, w którym zachodzi ogrzewanie gazu od temperatury  $T_0$  do temperatury  $T_1$ , jest taki sam jak w procesie ogrzewania izochorycznego:

$$\Delta U = nC_V (T_1 - T_0),$$

( $n$  — liczba moli gazu,  $C_V$  — molowe ciepło właściwe przy stałej objętości).

Z przyrównania prawych stron powyższych równań otrzymujemy

$$(2) \quad T_1 = T_0 + \frac{(Sp_0 + mg)h}{2nC_V}$$

Liczbę moli gazu zawartego w cylindrze możemy wyznaczyć z równania stanu gazu w sytuacji wyjściowej:

$$p_0 V_0 = nRT_0$$

( $V_0$  — objętość cylindra,  $R$  — stała gazowa). Uwzględniając, że  $V_0 = Sh$ , mamy stąd

$$n = \frac{p_0 Sh}{RT_0}$$

Dla gazu o cząsteczkach dwuatomowych, jakim jest powietrze (składające się głównie z  $N_2$  i  $O_2$ ),  $C_V = \frac{5}{2} R$ . Podstawiając wyrażenia na  $n$  oraz  $C_V$  do wzoru (2) otrzymujemy wzór na końcową temperaturę powietrza w cylindrze:

$$T_1 = T_0 \left( 1 + \frac{Sp_0 + mg}{5Sp_0} \right)$$

Sprawdźmy jeszcze, czy tłok w każdym przypadku dojdzie do przegrody. Wymaga to spełnienia warunku

$$(3) \quad Sp_1 \leq Sp_0 + mg.$$

Ciśnienie końcowe  $p_1$  wyznaczamy z równania stanu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Po podstawieniu  $V_1 = V_0/2$  oraz wyrażenia (2) na  $T_1$  otrzymujemy

$$(4) \quad p_1 = \frac{12}{5} p_0 + \frac{2}{5} \frac{mg}{S}$$

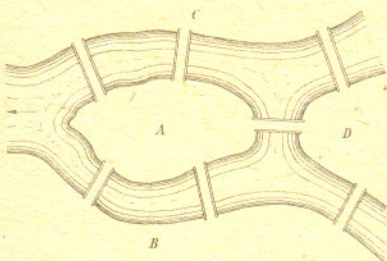
Z nierówności (3) po uwzględnieniu (4) wynika

$$m \geq \frac{7}{3} \frac{Sp_0}{g}$$

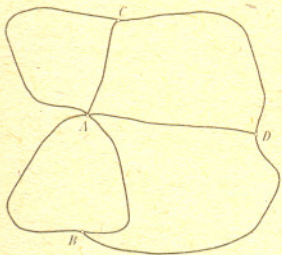
Przy redakcji *Delty* powstał ZERO KOPRU, czyli Zespół Rozpowszechniania Konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją *Delty* w celu uzgodnienia szczegółów wizyty.

Liczymy na to, że uda nam się zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze — pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w *Delcie* 2/1988.

## Duch Eulera na mostach królewskich



Rys. 1



Rys. 2



Łatwo można obliczyć, że tłok stalowy, który by spełniał kryterium, miałby grubość ponad 3 m (!). Gdyby otwór w przegrodzie był duży, odpowiednio ciężki tłok dochodziłby do przegrody z niezaniebdywalną prędkością  $v$ . W takim przypadku zamiast równania (1) mielibyśmy

$$\Delta U = (Sp_0 + mg) \frac{h}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

W konsekwencji przyrost temperatury gazu byłby mniejszy.

W obu omawianych zadaniach należało zauważyć, że podany zestaw danych był niekompletny: w zadaniu 57 wymagany był dodatkowo promień kuli, w zadaniu 58 — pole powierzchni tłoka (ponadto w obu zadaniach przyspieszenie ziemskie).

Dnia 22 września 1987 r. gościłem w LO w Działdowie. Moje spotkanie z młodzieżą tej szkoły zapoczątkowało działalność ZERO KOPRU, w skład którego wchodzi laureaci KOPRU z lat ubiegłych chętni do spotkań z uczniami i propagowania Konkursu. Zaaranżowanie spotkania w Działdowie przed ukazaniem się anonsu w *Delcie* było możliwe dzięki „głodnej kozie”, która w ostatnim finale KOPRU zdobyła brązowy medal, czym umożliwiła wcześniejszy kontakt redakcji *Delty* ze szkołą w Działdowie. Za zaproszenie serdecznie dziękuję.

Jedną z przyczyn małej popularności KOPRU są trudności uczniów ze znalezieniem odpowiedniego tematu pracy. Może bowiem braknąć nie tylko pomysłu na interesujący temat, ale także rozeznania, co może być tematem pracy. ZERO KOPRU rozpoczyna więc nową formę działalności: publikowanie zagadnień do samodzielnego zbadania. Liczymy na to, że z jednej strony podsunie uczniom ciekawe tematy na Konkurs, a z drugiej pokażemy, jakiego rodzaju zagadnienia mogą być opracowane jako prace konkursowe. Chociaż ta rubryka jest adresowana do potencjalnych uczestników KOPRU, mamy nadzieję, że zaprezentowane w niej zagadnienia zainteresują wszystkich Czytelników *Delty*. Dziś temat pierwszy.

Jarosław WRÓBLEWSKI

Przypomnijmy historię, którą zna zapewne większość Czytelników. Kiedyś postawiono Eulerowi zagadkę mostów królewskich. Czy można przejść przez wszystkie 7 mostów Królewca (rys. 1) przechodząc przez każdy dokładnie 1 raz? Euler dał na to pytanie odpowiedź negatywną. Zagadka ta zainspirowała Eulera do zajęcia się następującym zagadnieniem: jakie figury dadzą się narysować na papierze bez odrywania ołówka i powtarzania linii?

Z matematycznego punktu widzenia problem obejścia mostów królewskich jest równoważny problemowi jednobieżnego narysowania figury na rysunku 2. Liniom odpowiadają mosty (jedne i drugie musimy przebyć dokładnie 1 raz), węzłom zaś odpowiadają kawałki łądu, po których możemy chodzić do woli, ale bez istotnego efektu. Problem figur jednobieżnych (a więc i różnych układów wysp i mostów) został rozwiązany całkowicie. Układ wysp i mostów daje możliwość obejścia wszystkich mostów po 1 razie dokładnie wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

- 1) każde 2 mosty łączy droga po wyspach i mostach,
- 2) z prawie każdej wyspy wychodzi parzysta liczba mostów.

„Z prawie każdej” znaczy tu „z każdej” lub „z każdej z wyjątkiem dwóch”.

A teraz wymyślmy sobie taką bajeczkę: Euler, który odebrał mieszczanom Królewca nadzieję na znalezienie sposobu obejścia wszystkich mostów, nie zaznał po śmierci spokoju, lecz pod postacią ducha każdej nocy ukazuje się na mostach Królewca i szuka sposobu obejścia wszystkich mostów. Będzie się ukazywał, dopóki mu się to nie uda. Trzeba jednak wiedzieć, że

- 1) duch znika po przejściu mostu, jeśli wszedł na niego lewą nogą,
- 2) jeśli zaś wszedł prawą, to po przejściu mostu jego postać się rozdwa; każda z tak powstałych postaci idzie dalej swoją drogą,
- 3) od ducha żąda się, aby w czasie jego wędrówki każdy most był przebyty dokładnie raz przez jedną z postaci. Czy mu się to uda?

I tak oto z całkiem naiwnej bajeczki doszliśmy do całkiem poważnego problemu matematycznego. Bo oto stawiamy sobie dalsze pytania:

Jakie układy mostów może obejść duch, a jakich nie?

Czy mosty Królewca mogą obejść inne duchy (tzn. z innymi możliwościami zmiany liczby postaci po przejściu mostu)?

Co będzie, jeśli postawimy duchowi dodatkowy warunek dotyczący liczby postaci pozostałych po zakończeniu jego wędrówki?

Te zagadnienia nie były badane i matematyczne opracowanie chociaż części z nich może stanowić dobrą pracę konkursową. Widzisz więc, Czytelniku, że poważna matematyka nie musi się zaczynać całkiem poważnie.

# Pola magnetyczne w galaktykach spiralnych

Dr Rainer BECK, RFN

Kamienie magnetyczne znane były w Chinach już 5000 lat temu. Natura magnetyzmu i jego związek z elektrycznością zostały odkryte w XIX wieku przez Oersteda, Faradaya i Maxwella. Umożliwiło to zastosowanie sił elektromagnetycznych w silnikach i prądnicach. Odkrycie pól magnetycznych na Słońcu przez Hale'a w 1908 roku wprowadziło zjawiska magnetyczne do astrofizyki. Pole magnetyczne Słońca i jego związek z takimi zjawiskami, jak aktywność słoneczna, wiatr gwiazdowy czy ogrzewanie korony słonecznej, są znane dość dobrze. Sporo też wiemy o polu magnetycznym planet (w tym Ziemi). Tematem tego artykułu jest działanie sił magnetycznych w przestrzeni międzygwiazdowej naszej Galaktyki lub w innych galaktykach — problematyka badana w ostatnich latach bardzo intensywnie.

## 1. Pola magnetyczne w naszej Galaktyce

Obserwacje międzygwiazdowych pól magnetycznych zostały rozpoczęte w 1950 roku, kiedy to Alfven, Herlofson i Kipenhauer wysunęli przypuszczenie, że fale radiowe dochodzące z Drogi Mlecznej są emitowane przez elektrony poruszające się w polu magnetycznym (tzw. promieniowanie synchrotronowe). Elektrony takie są także obserwowane w pobliżu Ziemi jako tzw. promieniowanie kosmiczne. W tym samym roku Hanbury Brown i Hazard zaobserwowali za pomocą 66-metrowego radioteleskopu w Jodrell Bank promieniowanie radiowe pochodzące z galaktyki Andromedy (M31). Dało to podstawy do przypuszczenia, że pola magnetyczne występują także poza Drogą Mleczną — w innych galaktykach.

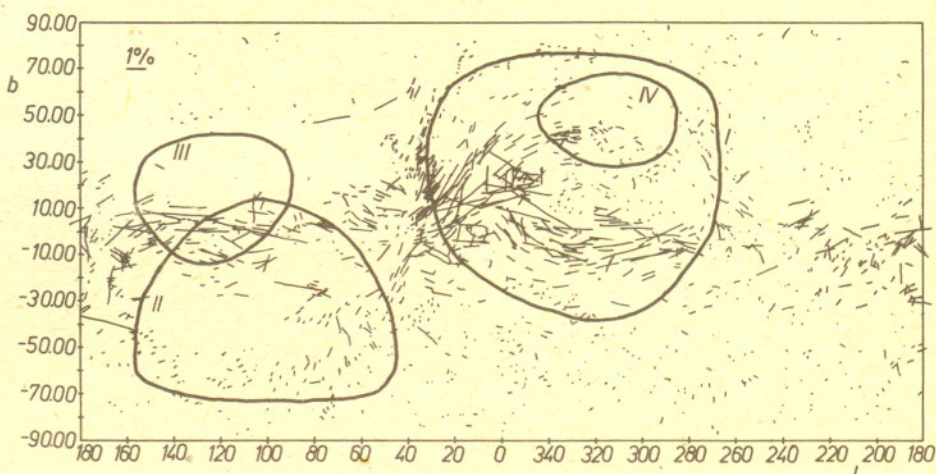
Istnienie międzygwiazdowego pola magnetycznego zostało też potwierdzone przez astronomię optyczną. W roku 1949 Hiltner wykrył, że światło odległych gwiazd jest słabo spolaryzowane. Światło tych gwiazd podczas swej drogi ku nam ulega polaryzacji rozpraszając się częściowo na cząsteczkach pyłu. Cząsteczki te są wydłużone, mają własności paramagnetyczne lub słabo ferromagnetyczne, co powoduje, że układają się one zazwyczaj równoległe do linii pola magnetycznego. Kierunek płaszczyzny polaryzacji światła („wektor polaryzacji”) pokrywa się z kierunkiem pola magnetycznego (zrzuconym na sferę niebieską). Efekt ten został wyjaśniony na drodze teoretycznej przez Davisa i Greensteina w 1951 roku. Obserwacje polaryzacji światła gwiazd obejmujące całe niebo zostały zakończone w 1970 roku (Mathewson i Ford). Dają one wyobrażenie o przebiegu linii pola magnetycznego wzdłuż ramienia spiralnego, w którym się znajdujemy.

Ta sama metoda może być stosowana także do innych galaktyk (Obłoki Magellana, galaktyki M31 i M51), w których możemy obserwować gwiazdy przesłonięte przez pył. Wektory polaryzacji pokrywają się tu z grubszą z ramionami spiralnymi. Obserwowany stopień polaryzacji światła jest niewielki, co powoduje, że wyznaczone w opisany wyżej sposób kierunki pola są obarczone dużym błędem.

Jeszcze trudniejszy do zaobserwowania, lecz łatwiejszy do interpretacji jest tzw. efekt Zeemana, polegający na rozszczepieniu linii widmowych wytwarzanych przez atomy znajdujące się w polu magnetycznym. Rozszczepienie to dla linii 21 cm, wytwarzanej przez wodór neutralny, zostało po raz pierwszy zaobserwowane przez Verschuura w 1968 roku. Efekt ten jest jednak tak słaby, że możemy go jedynie wykorzystywać do badania naszych najbliższych okolic (obejmujących nasze ramię spiralne i dwa sąsiednie).

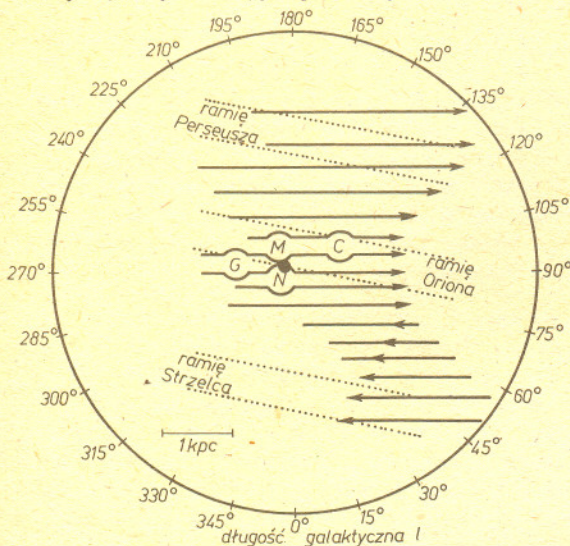
Istnieją, na szczęście, także inne metody badania pól magnetycznych występujących we Wszechświecie. Dostarcza nam ich znowu radioastronomia. Płaszczyzna polaryzacji liniowo spolaryzowanych fal elektromagnetycznych ulega skróceniu, gdy fale te przechodzą przez plazmę znajdującą się w polu magnetycznym — zjawisko to nazywamy rotacją Faradaya. Kąt skrócenia jest proporcjonalny do składowej wektora pola magnetycznego równoległej do linii obserwator-źródło, a także do gęstości i rozmiarów chmur plazmowych oraz do kwadratu długości fali. Kierunek skrócenia zależy od kierunku wektora natężenia pola. Jeśli wektor ten ma kierunek „od obserwatora”, to kierunek skrócenia płaszczyzny polaryzacji jest zgodny z ruchem wskazówek zegara. Słabe pola magnetyczne istniejące w przestrzeni międzygalaktycznej wytwarzają wykrywalną rotację Faradaya dla długości fali powyżej kilku centymetrów.

Pomiary rotacji Faradaya wymagają istnienia punktowych źródeł spolaryzowanego liniowo promieniowania radiowego. Promieniowanie takie wysyłane jest przez pulsary i przez źródła leżące poza Galaktyką (kwazary, radiogalaktyki). Pomiary rotacji Faradaya dla fal radiowych wysyłanych przez pulsary (dokonane przez Manchastera w 1974 r.) umożliwiły bardzo dokładne zmierzenie pola magnetycznego w ramieniu spiralnym, do którego należymy. Wynosi ono  $2,2 \pm 0,4 \mu\text{Gs}$ . Okazuje się, że linie pola magnetycznego w naszej Galaktyce przebiegają wzdłuż jej ramion spiralnych.



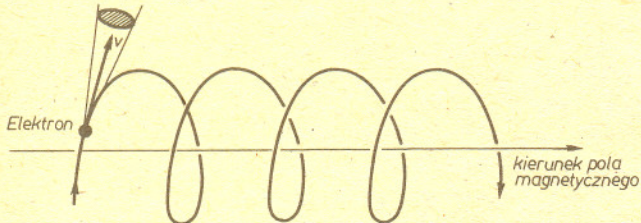
Rys. 1. Kierunki pola magnetycznego widziane z Ziemi (we współrzędnych galaktycznych  $l, b$ ) otrzymane na podstawie obserwacji polaryzacji światła gwiazd, powstającej na pyłe międzygwiazdowym. Uporządkowane linie pola magnetycznego w płaszczyźnie Drogi Mlecznej ( $b = 0$ ) są związane z ramieniem spiralnym, w którym się znajdujemy. Pętle ponumerowane liczbami rzymskimi oznaczają miejsca podwyższonej emisji radiowej.

Wydaje się ponadto, że ich zwrot w „naszym” ramieniu (ramię Oriona) i w ramieniu sąsiednim, bliższym centrum Galaktyki (ramię Strzelca) jest przeciwny.



Rys. 2. Przebieg pola magnetycznego w okolicach Słońca (widziany „z góry” — w płaszczyźnie naszej Galaktyki, ze Słońcem w centrum rysunku), otrzymany na podstawie obserwacji rotacji Faradaya dla radioźródeł pozagalaktycznych. Literami G, M, N, C oznaczono „bąble” — deformacje pola magnetycznego spowodowane prawdopodobnie wybuchami supernowych („bąble” N i C odpowiadają pętlom I i II na rys. 1).

Innym źródłem informacji o polu magnetycznym jest promieniowanie synchrotronowe.



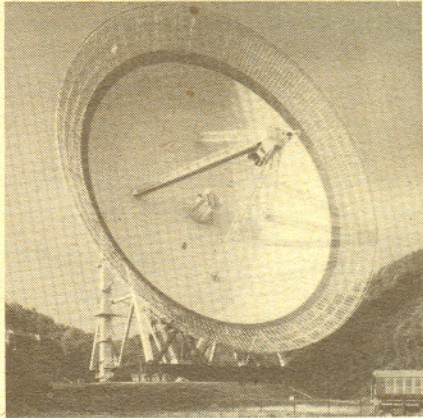
Rys. 3. Promieniowanie synchrotronowe powstaje, gdy naładowane cząstki (elektrony) poruszają się w polu magnetycznym. Staje się ono możliwe do zaobserwowania, gdy cząstki poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Wtedy promieniowanie synchrotronowe jest emitowane (w wąskim stożku) w kierunku ruchu cząstki i jest ono liniowo spolaryzowane w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola magnetycznego i prędkości cząstki.

Moc tego promieniowania (z jednostki objętości) jest w przybliżeniu wprost proporcjonalna do kwadratu składowej wektora pola magnetycznego prostopadłej do kierunku obserwacji; a także do gęstości emitujących je elektronów. Gdy promieniowanie jest liniowo spolaryzowane, świadczy to o tym, że pole magnetyczne, w którym powstało, było jednorodne. Brak polaryzacji świadczy o „chaotyczności” pola.

Spolaryzowane promieniowanie radiowe (na fali 75 cm), pochodzące z naszej Galaktyki, odkryto w latach 1960—1961 w Lejdzie (Holandia) za pomocą 25-metrowego radioteleskopu i w Cambridge (Anglia) za pomocą radioteleskopu 7,5-metrowego. Na promieniowanie to składają się silne małe źródła (punktowe lub w kształcie pętli), będące pozostałościami po wybuchach supernowych, oraz rozległe obszary słabego promieniowania pochodzącego od magnetycznego tła naszej Galaktyki.

## 2. Pola magnetyczne w pobliskich galaktykach

Obserwacje spolaryzowanego promieniowania radiowego pochodzącego z pobliskich galaktyk — konieczne do badania pola magnetycznego w tych galaktykach — wymagają wysokiej zdolności rozdzielczej i wysokiej czułości stosowanych do tego celu radioteleskopów.



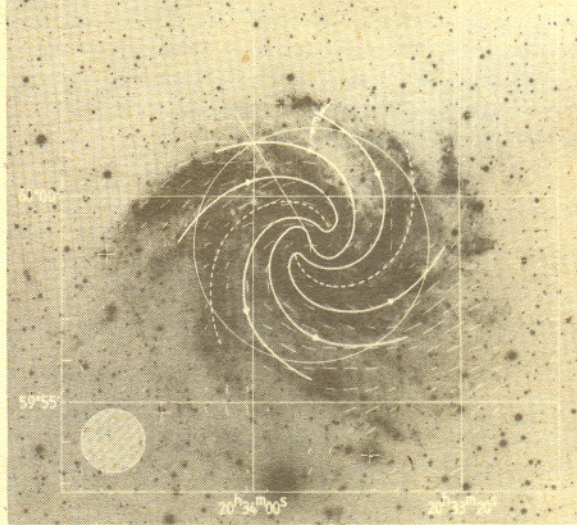
Rys. 4. 100-metrowy radioteleskop w Effelsbergu koło Bonn (RFN).

Przy małej rozdzielczości odbiornik „uśrednia” po pewnym obszarze, co może spowodować spadek obserwowanego stopnia polaryzacji, o ile występuje w tym obszarze pewien rozrzut wektorów polaryzacji będący odbiciem lokalnych niejednorodności natężenia i kierunku pola magnetycznego.

Obserwacje rotacji Faradaya w galaktykach spiralnych napotykają szereg trudności. Pole magnetyczne jest w nich skoncentrowane głównie w ramionach spiralnych, leżących w płaszczyźnie galaktyki. Ponieważ do wystąpienia rotacji Faradaya konieczne jest istnienie niezerowej składowej pola równoległej do osi obserwacji, jest ona tym większa, im silniej dana galaktyka jest nachylona do płaszczyzny sfery niebieskiej (dla galaktyk „leżących” dokładnie w płaszczyźnie stycznej do sfery niebieskiej nie występuje wcale). W galaktykach silnie nachylonych obserwujemy więc co prawda dużą rotację Faradaya, ale powstaje ona w wyniku przejścia fal radiowych przez szereg ramion spiralnych. Powoduje to duże trudności w interpretacji uzyskanych obserwacji i sprawia, że badania samej tylko rotacji Faradaya nie pozwalają na całkowite poznanie struktury pola magnetycznego galaktyk.

Do chwili obecnej spolaryzowaną emisję radiową zaobserwowano zaledwie u 12 bliskich galaktyk. Jest to zbyt mała liczba, by wyciągać na jej podstawie definitywne wnioski o międzygwiazdowych polach magnetycznych, jednakże kilka prawidłowości można już zauważyć.

Linie pola magnetycznego ułożone są zazwyczaj wzdłuż ramion spiralnych.



Rys. 5. Kierunki pola magnetycznego w galaktyce NGC 6946 (kreski). Zaznaczono też model pola magnetycznego (linie ciągłe ze strzałkami). Wykonano na podstawie obserwacji promieniowania synchrotronowego na fali 2,8 cm ze zdolnością rozdzielczą 0'025.

Czasami jednak mają one kształt torusa — jak np. w galaktyce Andromedy (patrz zdjęcie na okładce i rys. 6). Natężenie pola magnetycznego jest najsilniejsze w galaktykach o dużych masywnych ramionach spiralnych (takich jak M51 lub NGC 6946), a słabsze w galaktykach o mniej wyraźnej strukturze spiralnej (takich jak galaktyki tzw. Układu Lokalnego: M31, M33 i nasza Galaktyka).

Jak się przypuszcza, pole magnetyczne w galaktykach spiralnych jest na tyle słabe, że nie wpływa na ruch gazu wokół centrum

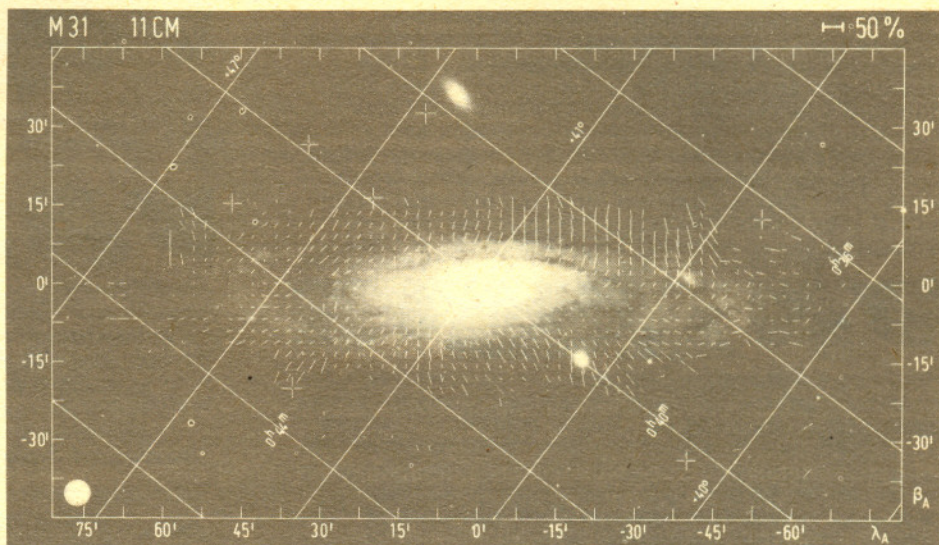
Na okładce: Liniowo spolaryzowane promieniowanie radiowe o długości fali 11 cm pochodzące z galaktyki Andromedy (M31). Rozmiar kątowy przedstawionego obszaru  $2^{\circ}6' \times 1^{\circ}5'$ . Zdolność rozdzielcza —  $0^{\circ}07'$ . Kolor jest funkcją natężenia promieniowania synchrotronowego (niebieski — najniższe, czerwony — najwyższe). Autor: R. Beck (wykorzystano system przetwarzania obrazów „babsy”, istniejący przy instytutach astronomicznych w Bonn).

Rys. 6. Kierunki wektorów polaryzacji w galaktyce Andromedy (kreski); są one prostopadłe do kierunku pola magnetycznego. Wykonano na podstawie obserwacji promieniowania synchrotronowego na fali 11 cm.

galaktyki, lecz na tyle silne, że stabilizuje ramiona spiralne chroniąc je przed rozpraszaniem lub zapadaniem się.

Po renesansie pól magnetycznych w fizyce Słońca (w latach siedemdziesiątych) obserwujemy obecnie ich renesans w fizyce naszej Galaktyki i innych galaktyk. Jest on spowodowany między innymi możliwością obserwacji spolaryzowanych fal radiowych, które zapewne jeszcze przez długi czas będą stanowić główne narzędzie badawcze w tej dziedzinie.

Tłumaczył dr Jacek CHOLONIEWSKI



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 499. Niech  $a, b, c$  będą liczbami całkowitymi i niech równanie  $ax^2 + bx + c = 0$  nie ma pierwiastków wymiernych. Udowodnić, że jeśli  $x$  jest pierwiastkiem tego równania, to dla każdej liczby wymiernej  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q$  są całkowite, mamy

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\left| a \left( x + \frac{p}{q} \right) + b \right|} \cdot \frac{1}{q^2}.$$

Rozwiązanie na str. 17

M 500. Ciąg  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  o wyrazach naturalnych jest określony w następujący sposób:  $a_0 = 1$ ,  $r_1 = 4$ ; dalej,  $a_1$  jest największą liczbą, dla której  $s_1 = (4a_0 + a_1)a_1 \leq r_1$ ; wówczas  $r_2 = 4(r_1 - s_1)$ . Ogólnie, dla danych  $a_0, \dots, a_n, r_{n+1}$  i  $s_n$  określamy  $a_{n+1}$  jako największą liczbę, dla której  $s_{n+1} = [4(2^n a_0 + 2^{n-1} a_1 + \dots + 2^0 a_n) + a_{n+1}]a_{n+1} \leq r_{n+1}$ ; wtedy  $r_{n+2} = 4(r_{n+1} - s_{n+1})$ . Czy wyrazy ciągu  $(a_n)$  powtarzają się okresowo, począwszy od pewnego miejsca?

Rozwiązanie na str. 3

M 501. Udowodnić, że wśród  $2n$  początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\sqrt{2}$  żadna cyfra nie występuje  $n+1$  razy pod rząd.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 240. Korzystając z zasady nieoznaczoności Heisenberga dla pędu cząsteczki i odpowiadającej temu pędowi współrzędnej położenia ( $\Delta p \cdot \Delta r \geq \hbar/2\pi$ ) ocenić energię stanu podstawowego atomu wodoru.

Rozwiązanie na str. 2

F 241. Załóżmy, że chcemy zmierzyć własny moment magnetyczny elektronu — związany z jego spinem — metodą pomiaru pola magnetycznego  $H$ , które indukuje on w odległości  $r$ . Aby taki eksperyment miał sens, powinniśmy zlokalizować elektron w małym obszarze  $\Delta r \ll r$ . Konieczne jest także, aby pole magnetyczne spowodowane ruchem elektronu było zaniedbywalnie małe w porównaniu z polem  $H$ . Czy te warunki pomiaru są w sprzeczności z zasadą nieoznaczoności?

Rozwiązanie na str. 5





W 1961 roku Murray Gell-Mann przewidział teoretycznie istnienie cząstki nazwanej przez niego  $\Omega^-$ . W swych pracach nad klasyfikacją cząstek elementarnych posługiwał się pojęciami symetrii oddziaływań, odkrył przy tym na własny użytek wiele twierdzeń znanej wcześniej matematyce teorii grup Liego. Znaczące rezultaty w tej teorii osiągnął Jean-Pierre Serre, z którym Gell-Mann często jadał obiady (podczas swego pobytu w Paryżu), nigdy jednak nie wpadł na pomysł zapytać Serre'a, czym się ten zajmuje. Jean-Pierre Serre otrzymał Medal Fieldsa w 1954 roku, a Gell-Mann nagrodę Nobla w 1969 roku (po doświadczalnym potwierdzeniu istnienia cząstki  $\Omega^-$  w 1964 r.).



Oś obrotu Księżyca nie jest prostopadła do płaszczyzny jego okołozemskiej orbity; prędkość obrotowa Księżyca jest praktycznie stała, podczas gdy prędkość orbitalna nie; wskutek konkretnych rozmiarów Ziemi obserwator może z niej zobaczyć Księżyc z nieco różnych kierunków. Te trzy zjawiska składają się na tzw. librację Księżyca (odpowiednio: librację w szerokości, w długości i librację dzienną), dzięki której można z Ziemi zobaczyć 59% powierzchni naszego satelity.



Liczniki cząstek naładowanych zainstalowane na pierwszym amerykańskim sztucznym satelicie Ziemi *Explorer 1* (1958 r.) od wysokości kilkuset kilometrów rejestrowały znaczny wzrost gęstości cząstek, po czym na wysokości około 1000 km zamilkły. Amerykański fizyk J. A. van Allen zinterpretował to (jak się okazało — słusznie) jako zablokowanie liczników wskutek zbyt wielkiej liczby cząstek — liczniki po prostu nie nadążały zliczać. Obserwacje te potwierdzone zostały przez następnego satelitę *Explorera 3* i tak doszło do odkrycia tzw. pasów radiacyjnych wokół Ziemi, czyli obszarów o zwiększonej gęstości cząstek uwiecznionych tam przez pole magnetyczne Ziemi (tzw. pasy van Allena).



„Interesującym przykładem powierzchni w  $\mathbb{S}^3$  jest zbiór

$$T = \{\Phi(p) : p \in \mathbb{S}^2\} \subset \mathbb{S}^3,$$

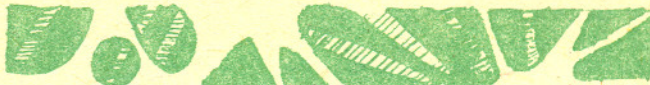
gdzie  $\Phi(u, v) = ((R_1 + R_2 \cos v) \cos u, (R_1 + R_2 \cos v) \sin u, R_2 \sin v)$ ,  $R_1 > R_2 > 0$ . Zbiór  $T$  o kształcie dętki samochodowej (rys. 1) nazywamy torusem.”

Profesor Roman Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.



Kryształ wyobrażamy sobie często jako regularny układ kulek połączonych sprężynami. Za pomocą takiego modelu można jakościowo opisać wiele zjawisk, jednak zawodzi on całkowicie w temperaturach bliskich 0 K. Z zasady nieoznaczoności Heisenberga wynika bowiem, że oscylator harmoniczny nie może mieć energii równej zero (w stanie o zerowej energii zarówno pęd, jak i położenie byłyby jednocześnie dokładnie określone). Atomy kryształu drgają więc w każdej, nawet dowolnie bliskiej 0 K, temperaturze. Ten typowo kwantowy efekt powoduje np. że pod normalnym ciśnieniem nie istnieją kryształy helu III. Amplituda drgań sieci krystalicznej byłaby dla krystalicznego helu większa od odległości między atomami nawet w 0 K.

Ponad sto lat temu Edward C. Pickering rozpoczął w Harvard University (Cambridge, Massachusetts) systematyczne badania widm gwiazd. Jego współpracownica, pani Annie J. Cannon, wprowadziła literowo-cyfrowe symbole dla oznaczenia rozmaitych typów widm. Panoowało wówczas przekonanie, że alfabetyczna kolejność symboli odpowiada przebiegowi ewolucji gwiazd. Dopiero później okazało się, że tak nie jest, niektóre symbole usunięto, a pozostałe zapisane w kolejności O, B, A, F, G, K, M odpowiadają ciągłowi gwiazd uszeregowanych według temperatury: O — najgorętsze, M — najchłodniejsze.



Paragrafy 57, 58, 59 z książki L. C. Younga *Wykłady z rachunku wariacyjnego i teorii optymalnego sterowania* autor pozostawił bez żadnej treści, by, jak pisze, czytelnik mógł trzykrotnie odпочać.



Jedno z podstawowych praw fizyki stwierdza, że w próżni wszystkie ciała spadają z takim samym przyspieszeniem. Dokładne obliczenia uwzględniające oddziaływanie spadającego ciała z promieniowaniem elektromagnetycznym prowadzą do wniosku, że przyspieszenie  $a$  ciała o masie  $m$  spadającego w próżni wynosi

$$a = g \left( 1 - \frac{2\alpha\pi}{3} \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \right),$$

gdzie  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K — stała Boltzmanna,  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  — stała struktury subtelnej,  $T$  — temperatura w skali bezwzględnej,  $c$  — prędkość światła, a  $g$  jest wartością przyspieszenia w  $T = 0$  K. Jak widać, ciała o większej masie i zimniejsze spadają szybciej. Różnice są jednak niezwykle małe. Dla elektronu w temperaturze 300 K poprawka wynosi

$$\frac{2\alpha\pi}{3} \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-17},$$

a więc chyba nieprędko wyniki obliczeń zostaną potwierdzone doświadczalnie.



Czy jedynymi rozwiązaniami równania  $n! + 1 = m^2$  w liczbach naturalnych są pary (4, 5); (5, 11); (7, 71)? (Podobno dla  $n \leq 24000$  nie ma innych rozwiązań.)



Linioowo spolaryzowana fala płaska po odbiciu od powierzchni przewodnika ma na ogół polaryzację eliptyczną. Podobna zmiana polaryzacji fali zachodzi podczas całkowitego odbicia wewnętrznego na granicy dwóch dielektryków.



Hipoteza Bieberbacha z 1916 roku mówiła, że dla każdej funkcji

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

która przekształca koło jednostkowe  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  w siebie, zachodzą nierówności  $|c_n| \leq n$  dla  $n = 2, 3, \dots$

Obok historia dowodu tej hipotezy.

- 1916 —  $|c_2| \leq 2$ ;
- 1923 —  $|c_3| \leq 3$ ;
- 1925 —  $|c_n| \leq en$  dla  $n = 2, 3, \dots$ ;
- 1931 —  $|c_n| \leq n$ , o ile  $c_n \in \mathbb{R}$ ;
- 1955 —  $|c_4| \leq 4$ ;
- 1955 —  $|c_n| \leq n$  dla  $n \geq n_0(f)$ ;
- 1967/68 —  $|c_6| \leq 6$ ;
- 1972 —  $|c_5| \leq 5$ ;
- 1972 —  $|c_n| \leq 1,081n$ ;
- 1978 —  $|c_n| \leq 1,0657n$ ;
- 1984 —  $|c_n| \leq n$  dla  $n = 2, 3, \dots$

# Co zrobić, aby komputer się nie mylił

Elementy składowe nowoczesnych komputerów są niezwykle niezawodne. Nowoczesny komputer, nawet osobisty (choć nie dotyczy to zabawek, takich jak ZX Spectrum), może pracować bezbłędnie nawet przez kilka lat. Projektanci komputerów muszą jednak zabezpieczyć użytkowników przed ewentualnymi przypadkami sprzętu. Dotyczy to szczególnie pamięci, przechowującej od kilku milionów bitów przez wiele godzin (pamięć operacyjna) do kilku miliardów bitów przez miesiące i lata (pamięć dyskowa lub taśmowa). Wprawdzie prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczego konkretnego bitu jest znikome, jednak ze względu na ogromną pojemność pamięci prawdopodobieństwo uszkodzenia któregoś z nich jest spore. A zmiana nawet jednego bitu, nie zauważona w porę, może spowodować katastrofalne wyniki.

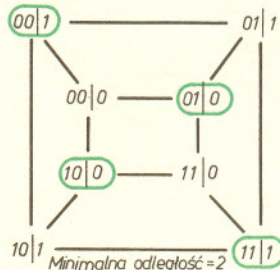
Najprostszym sposobem wykrywania błędów pamięci jest stosowanie tzw. bitu parzystości. Do każdego słowa pamięci dodaje się jeden bit. Wpisuje się do niego zero lub jedynkę, tak, aby liczba wszystkich jedynek w słowie była, w zależności od systemu, parzysta albo nieparzysta. Wówczas zmiana pojedynczego bitu w słowie zmienia liczbę jedynek o jeden, czyli odwraca parzystość. Przy odczytaniu takiego słowa odpowiedni układ wykrywa niepoprawną liczbę jedynek i zgłasza błąd.

Zwykła kontrola parzystości ma jedną zaletę: jest prosta i wymaga jednego dodatkowego bitu niezależnie od długości słowa. Ma jednak dwie wady. Po pierwsze, zmiana na przykład dwóch bitów pozostaje nie zauważona. Po drugie, błąd jest tylko sygnalizowany, natomiast nie ma możliwości poprawienia go. Sposób ten nadaje się więc głównie dla mniejszych komputerów.

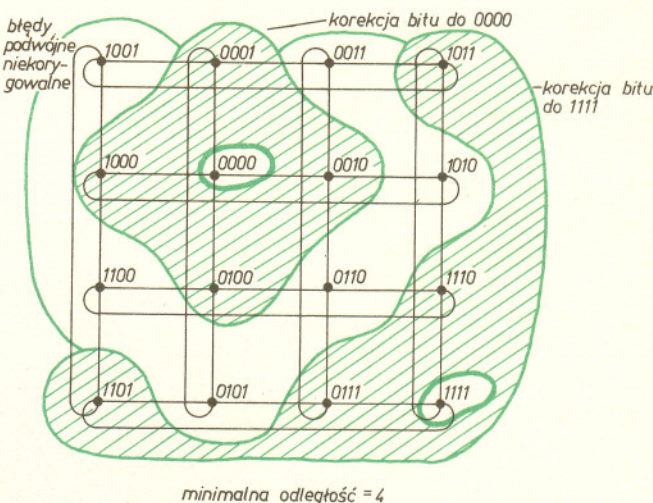
Do zastosowań profesjonalnych używa się zazwyczaj kodu, który pozwala nie tylko wykrywać, ale także poprawiać błędy w przypadku, gdy jeden i tylko jeden bit w słowie uległ przekłamaniu. Oczywiście trzeba do tego więcej bitów. Przyjmijmy, że do osmiobitowego słowa dodamy cztery bity kontrolne, z których każdy jest ustawiony w zależności od liczby jedynek w grupie połączonej z nim.

w przypadku błędów kilkudziesięciu bitów w bloku o długości kilku tysięcy bitów.

Przyjmijmy, że zdefiniujemy odległość między dwoma słowami jako minimalną liczbę bitów, które trzeba zmienić w jednym słowie, aby otrzymać drugie. Jeśli odległość między każdymi dwoma słowami zapisanymi do pamięci wynosi co najmniej 2, to zmiana pojedynczego bitu zawsze zostanie wykryta.

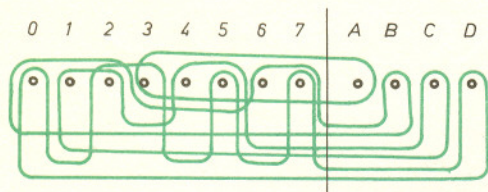


Jeśli ta odległość wynosi co najmniej 3, to każda zmiana pojedynczego bitu może zostać skorygowana, a jeśli 4, to dodatkowo każda zmiana dwóch bitów zostanie wykryta (dlaczego?).



Skonstruowanie kodu odpornego na zakłócenia polega na takim doborze bitów kontrolnych, aby dopisanie tych bitów do zapisywanej informacji powodowało powstanie słów możliwie jak najbardziej oddalonych od siebie. Nie jest to zadanie łatwe, gdy słowa mają po kilka tysięcy bitów, a więc liczba możliwych słów jest niewyobrażalnie wielka. Do projektowania kodów trzeba wówczas korzystać z komputerów ...

mgr Jarosław DEMINET



Sprawdźcie, że zmiana każdego pojedynczego bitu spowoduje powstanie błędów parzystości innego zestawu bitów kontrolnych. Wiadomo więc od razu, który bit jest błędny. Błąd parzystości jednego bitu kontrolnego, gdy na dodatek jest to jedyny błąd, oznacza, że przekłamany jest ... ten właśnie bit.

Przy zapisywaniu informacji na dyskach magnetycznych i przy jej przesyłaniu na duże odległości stosuje się jeszcze mocniejsze kody, pozwalające odtworzyć poprawną informację nawet

W roku 1890 Henri Poincaré sformułował następujące twierdzenie o powrocie: Każdy izolowany układ bardzo wielu cząstek powraca w toku mechanicznej ewolucji dowolnie blisko stanu, od którego ewolucja się rozpoczęła. Dla układów makroskopowych ( $\sim 10^{23}$  cząstek) czas, po którym to następuje, jest rzędu  $10^{10^{23}}$  lat. Trudno, rzecz jasna, czekać tak długo, warto jednak przekonać się, jak bardzo nieregularne „mieszanie” fragmentów obrazu, (np. według poniższego przepisu)



Rozwiązanie zadania M 499. Przyjmijmy  $f(t) = at^2 + bt + c$ . Wtedy  $|f(s) - f(t)| = |a(s^2 - t^2) + b(s - t)| = |a(s+t) + b| |s - t|$ . Ponadto

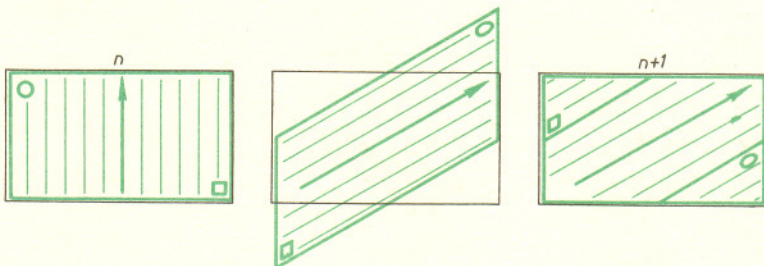
$$\left| f(x) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2} \right| \geq \frac{1}{q^2},$$

ponieważ licznik ostatniego ułamka jest liczbą całkowitą różną od zera.

Mamy więc

$$\frac{1}{q^2} \leq \left| a\left(x + \frac{p}{q}\right) + b \right| \left| x - \frac{p}{q} \right|,$$

skąd wynika żądana nierówność.



prowadzi już po niewielkiej liczbie przekształceń do odtworzenia obrazu początkowego. Na zewnętrznej stronie okładki przedstawiamy to w skrócie dla podobizny Poincarégo.