

## KLUB FIZYKÓW

Interesuje Cię fizyka? Gnebi Cię problem, którego nie umiesz rozwiązać? Chcesz wykonać doświadczenie a nie masz dostępu do odpowiednich przyrządów? Napisz do nas a postaramy się pomóc!

A może już coś udało Ci się osiągnąć? Wykonałeś interesujące doświadczenie, rozwiązałeś, a może wymyśliłeś nietypowe zadanie? Podziel się swoim sukcesem!

Każde (nie musi być wielkie) osiągnięcie w dziedzinie fizyki pozwala Ci pretendować do miana członka Klubu Fizyków. Zaakceptowani członkowie Klubu Fizyków otrzymują od Wydziału Fizyki Książki, a najlepsi będą zapraszani do zwiedzania laboratoriów i dyskusji z pracownikami naukowymi.

Kto może być członkiem Klubu Fizyków? Przede wszystkim uczniowie szkół wszelkich typów (także podstawowych!) Oprócz tego każdy oprócz studentów fizyki i dziedzin pokrewnych oraz osób związanych zawodowo z fizyką.

Nasz adres: Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 74, 00-681 Warszawa

Jan Gaj

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(167)

Kłopoty z cefeidami <i>mgr Joanna Udalska</i>	str. 1
Hipotezy Taita <i>dr Paweł Traczyk</i>	str. 3
Cztery czy dwa?	str. 5
A jednak się kręci <i>dr Jakub Tatarkiewicz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Matematyka a fizyka <i>prof. dr Iwo Białynicki-Birula</i>	str. 10
Zadania	str. 12
Patrz w niebo	str. 13
Jak znaleźć granicę?	str. 14
Nierówność	str. 15
Klub 44	str. 15
Drobiazgi	str. 16

**W następnym numerze:**  
 Energia jądrowa

### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc. dr Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc. dr Tomasz Hofmoki — v-przewodniczący  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc. dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 dr Zbigniew Płochocki  
 dr Jan Rempała  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Grzegorz Sitarski  
 prof. dr Józef I. Smak  
 prof. dr Kazimierz Stepień  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Aniela Wolska  
 prof. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 120,— półrocznej zł 240,— rocznej zł 480,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
- do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 40,—

Przy redakcji „Deltę” powstał

ZERO KOPRU,

czyli Zespół Rozpowszechniania konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją „Deltę” w celu uzgodnienia szczegółów wizyty. Liczymy na to, że uda się nam zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze — pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w „Deltę” 2/1987, ukazał się także w „Deltę” 2/1988.



# Kłopoty z cefeidami

Mgr Joanna UDALSKA



Henrietta S. Leavitt (z prawej)  
i Annie J. Cannon (z lewej).

Gwiazdy zmienne pulsujące, zwane cefeidami (od pierwszej odkrytej tego typu gwiazdy —  $\delta$  Cefeusza), zwracały w pierwszej połowie naszego wieku szczególną uwagę astronomów zajmujących się wyznaczaniem odległości sąsiednich galaktyk. W 1912 roku Henrietta S. Leavitt z obserwatorium harwardzkiego odkryła bardzo ciekawą i zarazem niezmiernie użyteczną ich własność analizując wyniki obserwacji grupy gwiazd zmiennych z Małego Obłoku Magellana. Wykazała ona, że istnieje ścisła korelacja między obserwowaną jasnością tych gwiazd a okresem zmian ich blasku. Cefeidy pulsują — tzn. okresowo zmienia się ich objętość. Zmianom tym towarzyszą zmiany temperatury, a co za tym idzie — zmiany jasności powierzchniowej. Pani Leavitt zauważyła, że zmiany blasku jaśniejszych cefeid odbywają się w dłuższym czasie. W czasach, gdy dokonała tego odkrycia, było już wiadomo, że Obłoki Magellana są obiektami pozagalaktycznymi, a więc z dobrym przybliżeniem można było uznać, że wszystkie cefeidy z Małego Obłoku Magellana znajdują się w jednakowej odległości od Ziemi. Stąd prosty wniosek: okresy cefeid są skorelowane z rzeczywistą ilością emitowanego przez nie światła.

Autorem pomysłu, że obserwacje cefeid mogą posłużyć do wyznaczania odległości we Wszechświecie, był Ejnar Hertzsprung. Zaproponował on następującą metodę. Z bezpośrednich obserwacji można wyznaczyć jasność obserwowaną cefeid. Odkryta przez panią Leavitt zależność okres-jasność daje możliwość wyznaczenia ich jasności rzeczywistej (ściślej — bardziej użytecznej w astronomii tzw. jasności absolutnej zdefiniowanej jako jasność danej gwiazdy oglądanej z odległości dziesięciu parseków). Ponieważ natężenie światła maleje wprost proporcjonalnie do kwadratu odległości badanego obiektu (to prawo znano już od dawna) — znajomość jasności absolutnej i obserwowanej wystarcza do stwierdzenia, jak bardzo oddalona jest cefeida, a tym samym galaktyka, w której dana cefeida się znajduje. Zależność między jasnością obserwowaną ( $m$ ), jasnością absolutną ( $M$ ) i odległością ( $r$ ) — wyrażoną w parsekach — opisuje związek

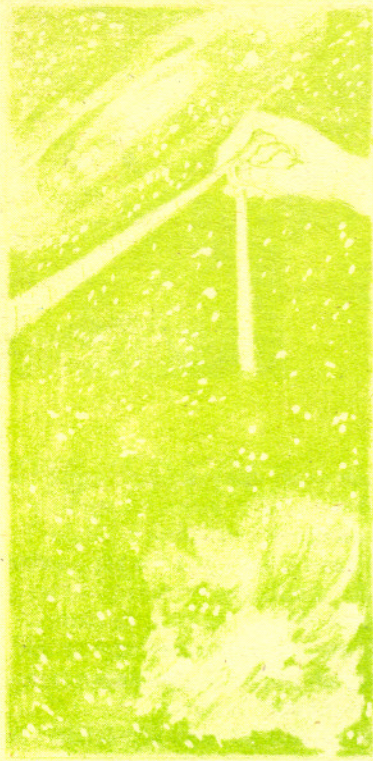
$$M = m + 5 - 5 \cdot \log r.$$

W ten sposób powstały podstawy teoretyczne niezmiernie cennej metody mierzenia Wszechświata, albo raczej tych jego części, w których można stwierdzić istnienie cefeid. Jednak metoda ta od momentu odkrycia przysporzyła astronomom niemało kłopotu. Odkrycie pani Leavitt ograniczało się do stwierdzenia istnienia zależności między okresem i jasnością absolutną cefeid. Pozostawał problem wykalibrowania tej zależności — tzn. zmierzenia jasności absolutnej przynajmniej jednej gwiazdy tego typu. Inaczej można powiedzieć: należało wyznaczyć punkt zerowy skali zdefiniowany jako jasność absolutna cefeidy, dla której okres zmian blasku jest równy jeden dzień. Tego zadania jako pierwszy podjął się Harlow Shapley.

Tak się nieszczęśliwie składa, że nie ma w ogóle cefeid w bliskim sąsiedztwie Słońca — na tyle bliskim, by można było zastosować do badania ich odległości dobrze znaną metodę paralaksy trygonometrycznej. W dodatku cefeidy nie występują w układach podwójnych czy gromadach otwartych gwiazd, dla których metody wyznaczania odległości są również stosunkowo proste. Shapley wyznaczał odległości cefeid za pomocą złożonej metody statystycznej opierającej się na pomiarach prędkości radialnych i ruchów własnych. Wyniki swej pracy przedstawił w latach dwudziestych naszego wieku: cefeidy pulsujące w okresie jednego dnia mają jasność absolutną 0,0 mag. Wynik był rzeczywiście szalenie „elegancki”, choć, niestety, niezupełnie poprawny. Ale nie uprzedzamy faktów.







Od momentu, gdy zależność okres-jasność absolutna dla cefeid została wykalibrowana, astronomowie z zapałem przystąpili do wykorzystywania jej w badaniach odległości rozmaitych galaktyk. Na pierwszy ogień poszły, rzecz jasna, najbliższe — tj. Obłoki Magellana i galaktyka w Andromedzie. Wspólną zasługą Harlowa Shapleya i Edwina P. Hubble'a było oszacowanie odległości Obłoków Magellana na 100 000 lat świetlnych i galaktyki w Andromedzie na 900 000 lat świetlnych. Dalszym wyznaczaniem odległości galaktyk zajął się przede wszystkim Hubble. Badając także widma tych galaktyk doszedł do sformułowania w 1929 roku słynnego prawa: prędkość ucieczki galaktyki od nas jest proporcjonalna do jej odległości. Matematyczna postać tego prawa jest następująca

$$V = H \cdot R,$$

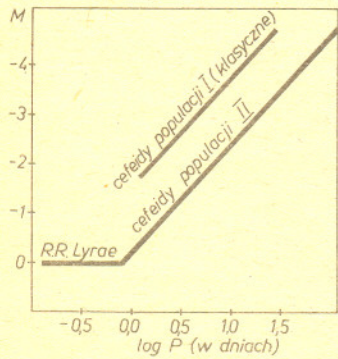
gdzie  $V$  — prędkość oddalania się galaktyki,  $R$  — odległość galaktyki,  $H$  — stała Hubble'a. Parametr zwany stałą Hubble'a określa tempo ekspansji Wszechświata, a wielkość do niego odwrotną ( $1/H$ ) interpretuje się jako wiek Wszechświata. Z pomiarów przeprowadzonych przez Hubble'a wynikało, że  $H = 560 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , co oznacza, że od Wielkiego Wybuchu upłynęło 1,8 miliarda lat. W latach trzydziestych znane były również wyniki datowania skał ziemskich na podstawie radioaktywnego rozpadu pierwiastków. Okazały się one w pełni zgodne z oszacowaniami wieku Wszechświata dokonanymi przez Hubble'a. Zgodność tę powszechnie demonstrowano jako wspaniałe potwierdzenie poprawności dwóch nowych, zupełnie niezależnych metod badania wieku Wszechświata.

Zadowolenie jednak nie trwało długo. Już w drugiej połowie lat czterdziestych, dzięki zastosowaniu ulepszonych technik obserwacyjnych (na Mount Palomar powstał właśnie 508-centymetrowy teleskop), a także na skutek zastosowania innych metod badania odległości (np. na podstawie obserwacji gwiazd nowych) na zależność okres-jasność absolutna dla cefeid padł cień nieufności. Astronomowie raczej nie kwestionowali podstaw teoretycznych samej metody, tylko — co zresztą okazało się słuszne — wątpliwości budziła dokładność wyznaczenia punktu zerowego. Poprawieniem dokładności tej kalibracji zajął się Walter Baade.

Podstawowym wynikiem jego pracy było odkrycie istnienia dwóch populacji gwiazdowych. Fakt ten tylko pozornie pozostaje bez związku z obserwacjami cefeid. W czasach wcześniejszych wszystkie cefeidy „wrzucano do jednego worka” i starano się „naciągnąć” związek okres-jasność tak, by stanowił linię ciągłą dla gwiazd od okresów najkrótszych (2 godziny) do najdłuższych (40—50 dni). Tymczasem okazało się, że takie postępowanie nie jest słuszne. Baade wykazał, że gwiazdy populacji I (młode) i populacji II (stare) różnią się zasadniczo i nie ma żadnego powodu, by dla obydwu tych grup zależność okres-jasność miała być identyczna. Według zaproponowanej przez niego, a obowiązującej do dziś, klasyfikacji oprócz cefeid populacji II i pod wieloma względami podobnych do nich gwiazd typu RR Lyrae istnieją także tzw. cefeidy klasyczne — te z populacji I. W grupie pierwszej rzeczywiście gwiazdy o okresie jednego dnia mają jasność absolutną 0,0 mag, ale błąd tkwił w wyznaczeniu punktu zerowego dla cefeid klasycznych. Dla tych gwiazd krzywą okres-jasność absolutna należało podnieść o 1,5 mag. Wydaje się, że to niewiele, ale w efekcie należało podwoić wszystkie odległości wyznaczone na podstawie obserwacji cefeid klasycznych.

Spośród szeregu konsekwencji, jakie pociągnęło za sobą poprawienie skali odległości, zwróćmy uwagę na zmianę wartości stałej Hubble'a. Zmalała ona dwukrotnie, a jednocześnie szacowany wiek Wszechświata wzrósł do 3,6 miliarda lat. Na szczęście, bo przez pewien czas porównania oszacowań astronomicznych i ulepszonych metod datowania skał prowadziły do wniosku, że Ziemia jest starsza od Wszechświata!

Wśród astronomów panuje dziś powszechne przekonanie, że zależność okres-jasność absolutna dla cefeid jest poprawnie skalibrowana, a punkt zerowy obecnie wyznaczony z dużą dokładnością jest bardzo bliski oryginalnej wartości podanej przez Baadego. Co do wartości stałej Hubble'a powszechnej zgody nie ma — zwykle przyjmuje się, że jest ona w granicach  $50\text{--}100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , co odpowiada wiekowi Wszechświata od 10 do 20 miliardów lat. Wiadomo jednak, że nie powinna być ona wyznaczana na podstawie tak „małych” odległości, na jakie pozwala metoda obserwacji cefeid. W tej skali ekspansja Wszechświata jest zbyt silnie zakłócana przez oddziaływania grawitacyjne galaktyk.

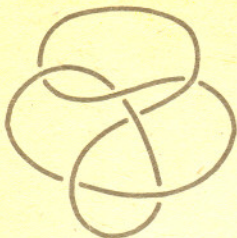


Zależność jasności absolutnej ( $M$ ) od okresu ( $P$ ).

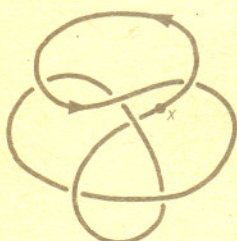


# Hipotezy Taita

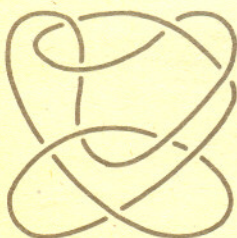
Dr Paweł TRACZYK



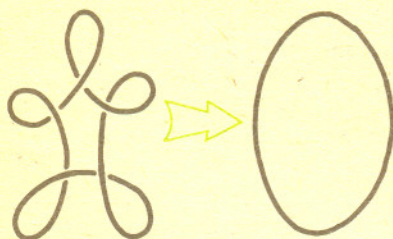
Rys. 1



Rys. 2. Startując z punktu  $X$  i poruszając się zgodnie ze strzałkami przechodzimy trzy kolejne skrzyżowania górą.



Rys. 3



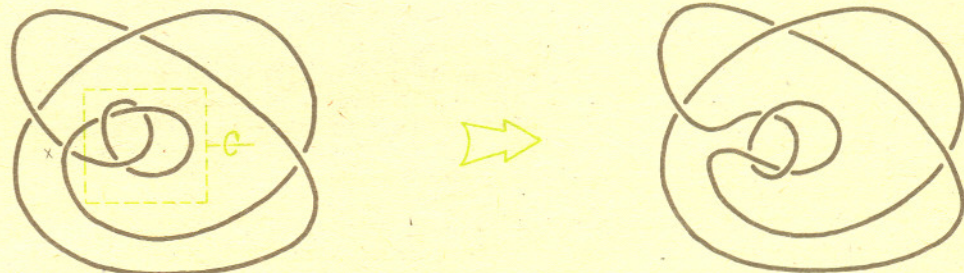
Rys. 4

W ostatnich trzech latach dokonała się prawdziwa rewolucja w teorii węzłów. Poniżej przedstawiamy jedno z najbardziej spektakularnych osiągnięć — pozytywne rozstrzygnięcie tzw. hipotez Taita. Przypomnijmy, że splotem nazywamy pewną liczbę parami rozłącznych okręgów zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Splot o jednej składowej nazywamy węzłem. Dwa sploty uważamy za równoważne, gdy można jeden przeprowadzić na drugi bez rozcinania, stopniowo go tylko deformując.

Bardzo poglądowy i najczęściej stosowany sposób przedstawiania splotu polega na podaniu jego diagramu na płaszczyźnie. Jest to rzut splotu na wybraną płaszczyznę, z zaznaczeniem, która z krzyżujących się nitki przechodzi górą, a która dołem. Diagram nazywamy alternującym, jeżeli ma tę własność, że startując z dowolnego miejsca i poruszając się wzdłuż diagramu przechodzimy kolejne skrzyżowania raz górą, raz dołem — na zmianę. Tak na przykład diagram na rysunku 1 jest alternujący, a na rysunku 2 — nie. Istnieją węzły, które w ogóle nie dadzą się przedstawić w postaci diagramu alternującego (rys. 3).

Jest intuicyjnie dość naturalne uważać diagramy alternujące za bardziej zagmatwane niż niealternujące. W teorii węzłów czekało od około stu lat na rozstrzygnięcie kilku hipotez, pochodzących od Taita, nawiązujących do tej intuicji (i do doświadczenia eksperymentatorów zestawiających pierwsze tablice węzłów). Hipotezy te sformułujemy poniżej już jako twierdzenia. Przedtem jednak potrzebna będzie jeszcze jedna definicja.

Diagram alternujący wydaje się wprawdzie na oko mocno spletany, ale jest od tej reguły jedno oczywiste odstępstwo. Otóż np. diagram na rysunku 4 jest jak najbardziej alternujący, a wcale nie jest spletany, przeciwnie, przedstawiony węzeł jest, oczywiście, trywialny. Z kolei diagram na rysunku 5 można łatwo uprościć — wystarczy we wskazany sposób obrócić zawartość zaznaczonego przerywaną linią prostokąta i w ten sposób skasować skrzyżowanie  $X$  (zauważmy, że takie uproszczenie przerabia diagram alternujący na diagram w dalszym ciągu alternujący).



Rys. 5

Diagram nazwiemy zredukowanym, jeżeli nie można w nim dokonać żadnego uproszczenia tego typu.

Możemy teraz sformułować zapowiedziane twierdzenia (udowodnione niezależnie przez Murasugiego, Kauffmana i Thistlethwaite'a):

1. Każde dwa zredukowane diagramy alternujące, przedstawiające ten sam węzeł, mają taką samą liczbę skrzyżowań.
2. Zredukowany diagram alternujący ma minimalną liczbę skrzyżowań wśród wszystkich diagramów reprezentujących dany węzeł.

Udowodnienie hipotez Taita zostało przyjęte przez specjalistów od teorii węzłów z wielkim entuzjazmem. Nie tylko dlatego, że poddała się w końcu stara i czcigodna hipoteza, ale również z tego powodu, że poddała się w zasadzie bez walki: w dowodzie są użyte tylko bardzo elementarne metody.

Głównym narzędziem jest tzw. wielomian Kauffmana. Jest to bardzo prosty niezmiennik zorientowanych splotów (tzn. splotów z wyróżnionym kierunkiem obiegu). Jest on zdefiniowany przez podanie przepisu pozwalającego dla dowolnego diagramu zorientowanego splotu obliczyć pewien odpowiadający mu wielomian  $f$  zmiennych  $A$  i  $A^{-1}$  o współczynnikach całkowitych. Przepis ten jest tak sprytnie sporządzony, że dla dwóch diagramów reprezentujących ten sam zorientowany splot otrzymujemy ten sam wielomian, choć diagramy mogą być na oko zupełnie niepodobne (takie właśnie jest znaczenie słowa niezmiennik — wielomian się nie zmienia, jeżeli do obliczeń weźmiemy inny diagram tego samego splotu).



Rozszczenie skrzyżowań

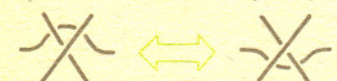
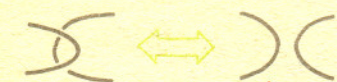
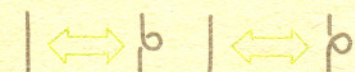


ujemne (idąc od nitki dolnej do górnej w prawo nie napotykamy kreski i rozcięcia),



dodatnie.

Fundamentalne dla teorii węzłów twierdzenie Reidemeistera mówi, że dwa diagramy przedstawiające ten sam spłot mogą być uzyskane jeden z drugiego przez ciąg tzw. ruchów Reidemeistera — prostych, pokazanych poniżej przeróbek diagramów.



(Jak i w wielu innych sytuacjach pokazaliśmy tylko te fragmenty diagramów, które są istotne, fragmenty pominięte mają być po prostu dokładnie takie same dla lewej i prawej strony.)

Oczywiście w twierdzeniu Reidemeistera dopuszcza się oprócz tych trzech typów ruchów także deformacje diagramów, np.



Jak zmienia się nawias Kauffmana, gdy do diagramu dodamy trywialną pętelkę o ujemnym skrzyżowaniu?



Obliczmy

$$\begin{aligned} \langle \text{loop} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = \\ &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle = \\ &= -A^3 \langle \text{loop} \rangle \end{aligned}$$

Natomiast

$$\langle \text{loop} \rangle = -A^3 \langle \text{loop} \rangle$$

A oto przepis.

Najpierw zdefiniujemy tzw. nawias Kauffmana, który każdemu niezorientowanemu diagramowi przyporządkowuje wielomian według następujących reguł:

- $\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle$
- $\langle \text{circle} \rangle = 1$
- $\langle \text{loop} \rangle = (-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle$

W pierwszej równości podany jest związek między wartościami nawiasu Kauffmana dla trzech diagramów, które są identyczne poza fragmentami uwidocznionymi w kółkach zaznaczonych kropkowaną linią, przy czym drugi diagram powstaje przez rozszczenie dodatnie pierwszego, a trzeci przez ujemne.

Warunek 2 to tzw. warunek normalizacji: trywialnemu diagramowi w postaci jednego zwykłego okręgu odpowiada jedynka.

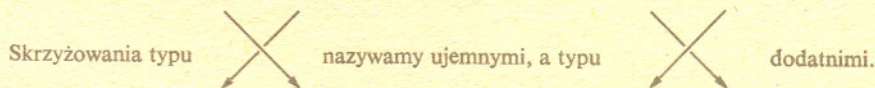
W trzecim warunku rozpatrujemy diagram powstający przez dołączenie do diagramu  $\mathcal{D}$  osobno położonego okręgu (na podstawie tego warunku i warunku 2 można łatwo obliczyć nawias Kauffmana dla układu  $n$  osobno leżących okręgów — wynosi on  $(-A^{-2} - A^2)^{n-1}$ ). Powyższe warunki pozwalają obliczyć nawias Kauffmana dla dowolnego diagramu. Konfiguracja składająca się z  $n$  okręgów, a otrzymana w wyniku wykonania  $k$  dodatnich i  $m$  ujemnych cięć, wnosi do nawiasu Kauffmana wyjściowego diagramu składnik  $A^{k-m} (-A^{-2} - A^2)^{n-1}$ .

Rewelacyjną cechą nawiasu Kauffmana jest łatwość udowodnienia, że jest on niezmienniczy ze względu na II i III ruchy Reidemeistera:

$$\begin{aligned} \langle \text{move I} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = A(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) = \\ &= A(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) = \\ &= -A^2 \langle \text{loop} \rangle + \langle \text{loop} \rangle + A^2 \langle \text{loop} \rangle = \langle \text{loop} \rangle \\ \langle \text{move II} \rangle &= A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle \end{aligned}$$

Nawias Kauffmana nie jest jednak prawdziwym niezmiennikiem: nie jest niezmienniczy ze względu na I ruch Reidemeistera. Aby usunąć tę niedogodność, wprowadza się następujące udoskonalenie:

Niech  $\mathcal{K}$  będzie diagramem zorientowanym.



Przez  $w(\mathcal{K})$  oznaczamy sumę znaków skrzyżowań. Definiujemy

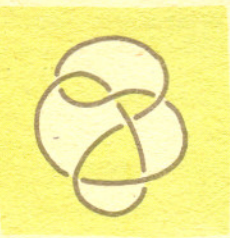
$$f(\mathcal{K}) := (-A)^{-3w(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle$$

( $\langle \mathcal{K} \rangle$  oznacza, oczywiście, nawias Kauffmana diagramu  $\mathcal{K}$  bez orientacji). Wielomian  $f$  jest już prawdziwym niezmiennikiem: wystarczy sprawdzić niezmienniczość ze względu na I ruch Reidemeistera. I tu okazuje się, że jeśli do diagramu  $\mathcal{K}$  dołączymy pętlę o ujemnym skrzyżowaniu, a otrzymany diagram nazwiemy  $\mathcal{L}$ , to  $f(\mathcal{L}) = (-A)^{-3w(\mathcal{L})} \cdot \langle \mathcal{L} \rangle = (-A)^{-3(w(\mathcal{K})-1)} \cdot (-A)^{-3} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle = (-A)^{-3w(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle = f(\mathcal{K})$ . Podobnie nie zmienia wartości wielomianu Kauffmana dołączenie pętli o skrzyżowaniu dodatnim.

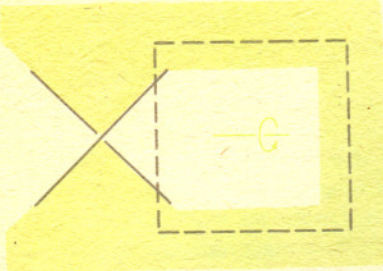
Pokażemy teraz, jak się dowodzi pierwszej hipotezy Taita. Idea jest bardzo prosta. Okazuje się, że dla zredukowanego diagramu alternującego o  $s$  skrzyżowaniach rozpiętość nawiasu Kauffmana (tzn. różnica między najwyższym a najniższym wykładnikiem) jest równa  $4s$ . Nawias Kauffmana nie jest wprawdzie niezmiennikiem, ale jego rozpiętość jest — bo jest taka sama jak rozpiętość wielomianu  $f$ . W takim razie każdy zredukowany diagram alternujący reprezentujący dany węzeł musi mieć taką samą liczbę skrzyżowań (1/4 rozpiętości wielomianu  $f$ ).

Pozostaje więc udowodnić, że rozpiętość nawiasu Kauffmana jest istotnie równa  $4s$ . Okazuje się, że można wskazać wprost te końcowe konfiguracje okręgów, z których pochodzą: wyraz w najwyższej potędze i wyraz w najniższej potędze w nawiasie Kauffmana. Jak łatwo się domyślić, najwyższa potęga pochodzi od tej konfiguracji, którą się otrzymuje przez dodatnie rozszczenie wszystkich skrzyżowań, najniższa — przeciwnie. Żeby się o tym przekonać,





Rys. 6. Kolory zostały rozmieszczone w taki sposób, że każde rozszczepienie dodatnie powoduje połączenie białych obszarów.



Rys. 7. Jeżeli pewien obszar szachownicy styka się ze sobą, to diagram nie jest zredukowany. Możemy obrócić część diagramu zawartą w prostokącie kasując zaznaczone skrzyżowanie.

pokolorujemy obszary, na które nasz diagram dzieli płaszczyznę, w szachownicę, to znaczy, że dwa obszary stykające się wzdłuż linii mają mieć różne kolory, a dwa obszary stykające się narożami mają mieć ten sam kolor. Np. rysunek 6 przedstawia diagram z rysunku 1 pokolorowany w szachownicę. Jeżeli w rozpatrywanym diagramie węzła jest  $s$  skrzyżowań, a w naszej szachownicy  $b$  pól białych i  $c$  pól czarnych, to  $s = b + c - 2$ . Łatwo to udowodnić przez indukcję względem  $s$ . Jeżeli  $s = 0$ , to oczywiście nasz diagram jest po prostu pojedynczym okręgiem i są dwa obszary, jeden czarny, drugi biały. Zatem  $b + c - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 = s$ . A teraz krok indukcyjny. Weźmy dowolne skrzyżowanie i rozszczepmy je tak, aby uzyskać znowu diagram pewnego węzła (to zawsze jest możliwe; rozszczepiając dowolne skrzyżowanie na dwa możliwe sposoby uzyskujemy raz węzeł, a raz splot o dwóch składowych). Po takim rozszczepieniu liczba skrzyżowań spada o 1, ale także liczba obszarów zmniejsza się o jeden!

Dla diagramów alternujących sytuacja jest pod pewnym względem szczególna: można rozmieścić kolory w szachownicy tak, aby rozszczepienie dodatnie powodowało zawsze połączenie białych obszarów, a rozszczepienie ujemne połączenie czarnych obszarów (wystarczy dobrze zacząć od jednego skrzyżowania, dalej już wyjdzie samo).

Rozszczepmy wszystkie skrzyżowania w sposób dodatni. Otrzymamy jedno pole białe i — w dalszym ciągu —  $c$  pól czarnych — po prostu czarne pola nie miały okazji, żeby się łączyć. W uzyskanej konfiguracji jest więc  $c$  okręgów, a jej wkład do nawiasu Kauffmana wyjściowego diagramu wynosi  $A^c(-A^{-2}-A^2)^{c-1}$ . Najwyższą potęgą zmiennej  $A$  w tym wyrażeniu jest  $s + 2c - 2$ . Pokażemy, że żadna inna końcowa konfiguracja nie może już wnieść zmiennej  $A$  w tak wysokiej potęgę. Przyjrzyjmy się najpierw konfiguracjom powstałym przez rozszczepienie  $s - 1$  skrzyżowań w sposób dodatni i jednego w sposób ujemny. Otóż w takiej konfiguracji jest jedno białe pole, ale pól czarnych już tylko  $c - 1$ . (Tutaj korzystamy dwukrotnie z założenia, że diagram jest zredukowany. Np. czarnych pól jest dlatego  $c - 1$ , że dokładnie raz, przy ujemnym rozszczepieniu połączyliśmy dwa czarne pola wyjściowej szachownicy. Ale na wyjściowej szachownicy żaden obszar nie styka się ze sobą, zatem połączyliśmy dwa różne czarne obszary, tym samym zmniejszając ich liczbę o 1.) Wkład nowej konfiguracji do nawiasu Kauffmana jest więc równy  $A^{s-2}(-A^{-2}-A^2)^{c-2}$  i  $A$  nie pojawia się w potęgę wyższej niż  $s + 2c - 6$ . A teraz zobaczymy, co będzie się działo dalej, jeżeli jeszcze jakieś inne skrzyżowania zdecydujemy się rozszczepić ujemnie zamiast dodatnio. Otóż przy każdej takiej zmianie liczba okręgów może wzrosnąć co najwyżej o 1, natomiast suma znaków rozszczepień musi spaść o 2. Nowa konfiguracja nie może więc dostarczyć zmiennej  $A$  w potęgę wyższej niż poprzednia. Zatem maksymalny stopień, w którym zmienna  $A$  pojawia się w nawiasie Kauffmana naszego diagramu, jest równy  $s + 2c - 2$ . Analogicznie najniższy stopień jest równy  $-s - 2b + 2$  (pochodzi on od ujemnych rozszczepień). Rozpiętość wielomianu jest więc równa  $s + 2c - 2 + s + 2b - 2 = 2s + 2(b + c - 2) = 4s$ , co właśnie chcieliśmy udowodnić.

## Cztery czy dwa?

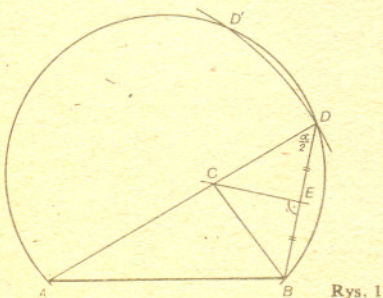
Nietrudno skonstruować trójkąt, jeśli dany jest jego jeden bok  $AB$ , suma dwóch pozostałych  $c$  oraz kąt między nimi  $\alpha$ . Szukany wierzchołek można znaleźć w każdej z dwóch półpłaszczyzn o brzegu  $AB$ , dlatego dalej szukać go będziemy tylko w jednej z nich. Rozwiązujemy tak (rys. 1): znajdujemy punkty przecięcia łuku okręgu, z którego odcinek  $AB$  widać pod kątem  $\alpha/2$ , z półokręgiem o środku  $A$  i promieniu  $c$ . Takie punkty są na ogół dwa — oznaczmy je  $D$  i  $D'$ . Punkt  $C$ , w którym symetralna odcinka  $BD$  przecina prostą  $AD$ , jest trzecim wierzchołkiem trójkąta. Powtarzając to samo dla punktu  $D'$  otrzymujemy drugie rozwiązanie  $C'$ . Ale całą konstrukcję można rozpocząć od punktu  $B$  zamiast  $A$  — są więc cztery rozwiązania...

Z drugiej strony miejscem geometrycznym takich punktów  $X$ , że  $AX + BX = c$ , jest elipsa (interesuje nas tylko jej połowa), a takich punktów  $Y$ , że  $\sphericalangle AYB = \alpha$ , jest łuk okręgu (innego niż poprzednio) o cięciwie  $AB$  (rys. 2). Elipsa przecina okrąg w co najwyżej dwóch punktach...

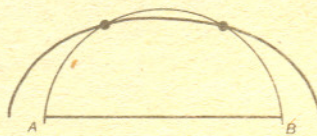
Coś więc się tu nie zgadza, ale co?

Odpowiedź jest prosta. Punkty  $C_1$  i  $C'_1$  skonstruowane dla wierzchołka  $B$  pokrywają się z punktem  $C'$  i  $C$  (mimo że punkty  $D_1$  i  $D'_1$  są różne od  $D$  i  $D'$ ) (rys. 3). Okazuje się, że dzięki temu można uprościć konstrukcję z rysunku 1. Punkt  $C$  leży na przecięciu odcinków  $AD$  i  $BD_1$ , a punkt  $C'$  na przecięciu  $AD'$  i  $BD_1$ .

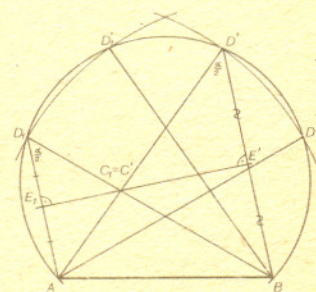
doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3





Rozwiązanie zadania M 487. Zbudujmy trzy sfery, których średnicami będą boki danego trójkąta  $ABC$ . Rozważmy dwie z tych sfer zawierające dowolny wierzchołek, np.  $A$ . Przecinają się one wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do boku  $BC$ , którego średnicą jest wysokość opuszczona z  $A$ . Kula ograniczona trzecią sferą nie zawiera punktu  $A$  (bo kąt  $A$  jest ostry) i zawiera spodek wysokości opuszczonej z  $A$  (bo z ostrokatności trójkąta wynika, że leży on na  $BC$ ). Zatem wszystkie trzy sfery mają dwa punkty wspólne (przecięcia okręgu z trzecią sferą). Półproste łączące dowolny z nich z wierzchołkiem trójkąta są parami prostopadłe. Wystarczy teraz zauważyć, że trójki wzajemnie prostopadłych półprostych wychodzących z jednego punktu są przystające w przestrzeni.



Rozwiązanie zadania M 488. Ustalmy  $t \neq 0$  i niech  $z = \cos t + i \cdot \sin t$ . Wtedy na mocy wzoru de Moivre'a

$$S_n(t) = \operatorname{Im}(z + z^2 + \dots + z^n) = \operatorname{Im}\left(z \frac{1 - z^n}{1 - z}\right),$$

zatem

$$|S_n(t)| \leq \frac{|z|(1 + |z|^n)}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

Jeśli zaś  $t = 0$ , to  $S_n(t) = 0$ .



Rozwiązanie zadania M 489. Okrąg o długości  $n + 1$  dzielimy na łuki o długościach 1.

Spośród punktów podziału losowo wybieramy  $k + 1$  punktów — ze względu na symetrię średnia długość powstałych łuków wynosi  $\frac{n+1}{k+1}$ . Jeżeli rozetniemy okrąg w  $(k + 1)$ -szym z wybranych punktów, a następnie rozwinie my go na osi liczbowej w kierunku dodatnim tak, aby punkt rozcięcia znajdował się w zerze, to wybrane losowo  $k$  punktów okręgu nałożą się na liczby naturalne z przedziału  $\langle 0, n \rangle$ . Średnia wartość najmniejszej z nich będzie równa średniej długości łuku między punktami  $k + 1$  i 1, czyli  $\frac{n+1}{k+1}$ .

# A jednak się kręci (w jedną stronę!)

Dr Jakub TATARKIEWICZ

Gdy Redakcja *Delty* ogłosiła konkurs na zrobienie zabawki, która kręci się tylko w jedną stronę lub sama zmienia kierunek obrotów, nikt nie przypuszczał, że niemalże w tym samym czasie zostanie opublikowana pełna teoria obrotów takich brył. Wszyscy żyjemy w przekonaniu, że mechanika klasyczna jest dziedziną zamkniętą — co było do obliczenia, to dawno obliczono, co trzeba było udowodnić, dawno już udowodniono. A jednak nie! Przez 90 lat konkursowy problem *Delty* pozostawał nie rozwiązany. Po raz pierwszy pojawił się on bowiem w pracy G. T. Walkera, opublikowanej w tomie 28 *Journal of Pure and Applied Mathematics* z roku 1896. Precyzyjne rozwiązanie, jak powiedzieliśmy, zostało podane dopiero w 1986 roku przez Sir Hermana Bondi, FRS (członek Royal Society) z Churchill College w Cambridge i opisane w tomie A405 *Proceedings of the Royal Society of London*. Wprawdzie matematyka w artykule Bondiego jest prosta, niemniej liczba przekształceń potrzebnych do osiągnięcia końcowych wniosków jest znaczna. Dlatego też w tym krótkim artykule przedstawimy tylko zarys metody mającej nadzieję, iż pracownicy Czytelnicy sami wykonają właściwe rachunki.

Najprzód napiszemy układ równań, opisujących ruch obrotowy dowolnej bryły na gładkiej płaszczyźnie. Użyjemy następującej notacji:

- $s$  — położenie środka masy,  $ds/dt = v$ ,
- $r$  — wektor łączący środek masy z punktem styku bryły i płaszczyzny,
- $F$  — siła oddziaływania płaszczyzny na bryłę,
- $\omega$  — prędkość kątowna bryły,
- $h$  — moment pędu bryły,
- $M$  — masa bryły,
- $u$  — pionowy wersor (wektor jednostkowy), skierowany do góry.

Układ równań ruchu wygląda wtedy tak

$$\begin{aligned} Mdv/dt &= F - Mgu, \\ v + \omega \times r &= 0, \\ dh/dt &= r \times F. \end{aligned}$$

Przez „ $\times$ ” oznaczyliśmy mnożenie wektorowe. Przypomnijmy, że pierwsza równość to znane równanie Newtona, gdzie uwzględniono opór ruchu. Druga równość oznacza, że punkt kontaktu z płaszczyzną ma prędkość zerową. Trzecia zaś to konsekwencja zasady zachowania momentu pędu — przekształcając ją z użyciem pierwszego równania otrzymujemy

$$dh/dt = Mr \times [dv/dt + gu].$$

Tak więc składowa pionowa momentu pędu ma postać

$$d(u \cdot h)/dt = M(u \times r) \cdot dv/dt,$$

gdzie przez „ $\cdot$ ” oznaczyliśmy mnożenie skalarne wektorów.

Jeżeli bryła toczy się i wiruje (ruch uogólniony), to mamy parę możliwości. Po pierwsze wektor  $r$  może być zawsze pionowy (środek ciężkości jest zawsze nad punktem styczności bryły z płaszczyzną) — wtedy  $u \times r$  znika i pionowa składowa momentu pędu jest stała w czasie. Jest to typowy ruch, z jakim spotykamy się codziennie, więc intuicyjnie dobrze wyczuwamy jego charakter. Oczywiście wektor  $u \times r$  może być w ruchu uogólnionym niezerowy. Jeżeli jednak nie jest on w sposób systematyczny związany ze zmianami prędkości ruchu bryły (tzn. ze zmianami  $dv/dt$ ), to wtedy moment pędu zmienia się w sposób chaotyczny. Ten przypadek też znamy z dzieciństwa: bak puszczonej na krzywej podłodze skacze, kiwa się i drga. Natomiast jeżeli wektor  $u \times r$  jest związany z  $dv/dt$ , to łatwo można otrzymać olbrzymie wahania pionowej składowej momentu pędu. W ten sposób może nawet dojść do zmiany kierunku obrotów.

Dużo trudniejszym problemem jest pokazanie, że układ może mieć krętność, czyli preferować jeden kierunek obrotów. Ale przecież mamy już dwa układy odniesienia. Jeden jest związany z układem współrzędnych, zaczepionym w punkcie styczności bryły z płaszczyzną. Drugi zaś powiązemy z lokalnymi osiami symetrii bryły w miejscu styku z podłożem. W pierwszym przybliżeniu powierzchnia bryły może być opisana równaniem kwadratowym (elipsoidal). Bondi, podobnie jak i Walker, zauważa, że w ogólności wektor  $r$  w stanie spoczynku nie musi być

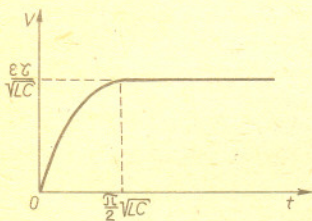




Rozwiązanie zadania F 232. W momencie zamykania wyłącznika  $K$  prąd elektryczny nie płynie przez diodę i kondensator pozostaje nie naładowany. W tym samym czasie SEM indukcji jest równa SEM baterii i prąd przez cewkę rośnie proporcjonalnie z czasem do momentu wyłączenia klucza, kiedy osiąga wartość  $I = \mathcal{E} \tau / L$ . Po otworzeniu wyłącznika  $K$  w obwodzie powstają drgania o okresie  $T = 2\pi \sqrt{LC}$ . Ale kiedy napięcie na kondensatorze osiąga maksymalną wartość  $v_0 = \mathcal{E} \tau / \sqrt{LC}$  (co można otrzymać z zasady zachowania energii), dioda przestaje przewodzić i dalej napięcie pozostaje stałe. A więc zależność napięcia od czasu jest następująca (patrz rysunek)

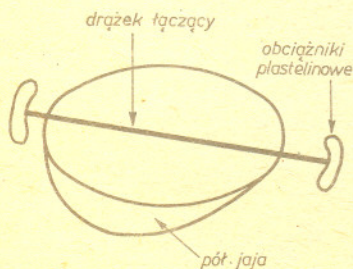
$$V = \frac{\mathcal{E} \tau}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{dla } t < \frac{\pi}{2} \sqrt{LC};$$

$$V = \frac{\mathcal{E} \tau}{\sqrt{LC}} \quad \text{dla } t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}.$$



### Od redakcji

Rewelacyjne „kamienie” nadesłał na nasz konkurs (*Delta* 12/1986) Janusz Sokół z Przeworska. Są znacznie lepsze nie tylko od tych, które wykonaliśmy w redakcji, ale także od opisanych w literaturze (*Scientific American*, październik 1979). Według relacji konstruktora jeden z kamieni obrócił się w kierunku przeciwnym do pierwotnego aż 29 razy. Nam nie udało się powtórzyć tego wyniku, ponieważ, wykonane ze skorupki jajka i patyczka z plastelinowymi ciężarkami, kamienie dotarły do redakcji w stanie uszkodzonym. Uzyskaliśmy „tylko” 19 pełnych obrotów. Zwycięzcy gratulujemy i przyznajemy nagrodę — miernik uniwersalny.



Jeden z kamieni nadesłanych przez Janusza Sokola.

związany z głównymi osiami momentu bezwładności bryły. Jednakże trudno jest wyobrazić sobie płynny ruch obrotowy bez ich zgodności, co założono w dalszych rachunkach. Wybiera się układ współrzędnych w bryle związany z jej środkiem ciężkości i równoległy do głównych osi bezwładności powierzchni przybliżającej okolice punktu styku bryły z podłożem. Osie momentu bezwładności wybieramy tak, że składowe tego momentu spełniają warunek  $A > B$ , a oś odpowiadająca składowej  $C$  jest skierowana pionowo w dół (przez  $A$ ,  $B$  oraz  $C$  oznaczono długość głównych osi elipsoidy momentu bezwładności). W takim układzie współrzędnych powierzchnia okolic styku bryły z podłożem może być opisana w przybliżeniu kwadratowym jako

$$z = a[1 - (p/2)(x/a)^2 - qxy/a^2 - (s/2)(y/a)^2],$$

gdzie  $a$  jest spoczynkową odległością środka ciężkości od punktu styczności;  $p$ ,  $q$  oraz  $s$  to pewne parametry. Człon liniowy w rozwinięciu równania powierzchni znika, gdyż w miejscu styku  $x = y = 0$ . Powierzchnia jest wypukła, gdy  $p > 0$ ,  $s > 0$  oraz  $ps > q^2$  (sprawdzenie tych warunków pozostawiamy Czytelnikom). Ponadto położenie spoczynkowe jest stabilne, gdy promień krzywizny jest nie mniejszy niż  $a$ , mamy więc dodatkowe warunki:  $1 > p$ ,  $1 > s$ ,  $(1-p)(1-s) > q^2$ . Stąd od razu widzimy, że układ wykazuje krętość, o ile tylko  $q \neq 0$ . Wtedy bowiem nie mamy pełnej symetrii układu: intuicja podpowiada, że kształt powierzchni zabawek, przygotowanych przez Czytelników, podobny do kilu jachtowego, wyróżnia pewną linię styku, leżącą w płaszczyźnie symetrii bryły. Jest to zasadnicze odstępstwo od geometrii typowego bąka, który wprawdzie może mieć płaszczyzną symetrii, lecz zwykle ma ostry czubek, na którym się obraca.

Chciałbym w tym miejscu uczynić pewne wyznaczenie. Otóż pamiętam z dzieciństwa, jak dziwiło mnie, gdy mój Ojciec, który zajmuje się mechaniką teoretyczną, siadał na podłodze i puszczał bączki. A miał ich wiele, zrobionych specjalnie z drewna przez stolarza. Dodatkowo jeszcze obciążał je plasteliną. Wydawało mi się wtedy, że takie zabawy to świetne zajęcia, szczególnie gdy za nie płacą. Dziś wiem, że nasza intuicja jest niezmiernie uboga. By ją wzbogacić, należy dokonywać doświadczeń. Jeżeli ktoś akurat opracowuje teorię bąka, to nie ma lepszego doświadczenia niż opisana powyżej zabawa. Mam nadzieję, że i Czytelnicy *Delty* będą mogli podobne zabawy przenieść w świat swych zajęć zawodowych!

Dalej w teorii mamy już tylko proste rachunki (hm, trzeba być Fellow of the Royal Society, by tak twierdzić...). Bondi rozwija równania ruchu w szeregi Taylora i opuszcza wszystkie człony rzędu trzeciego i wyższych w rozwinięciach pochodnych czasowych  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ . Na pięciu stronach przechodzi do kolejnych warunków na parametry równania ruchu układu. Wprowadzając liczne parametry pomocnicze uzyskuje podział płaszczyzny parametrów ruchu na kilka odrębnych obszarów (zainteresowanych Czytelników odsyłamy do stron 267—272 tomu A 405 *Proceedings of the Royal Society*). W każdym z nich ruch bryły odbywa się inaczej. Przejście od jednego do drugiego obszaru może m.in. prowadzić do zmiany kierunku obrotów. Dla tych Czytelników, którym nie chciało się zrobić własnych modeli zabawki, podajemy przybliżony opis tego ruchu: w zależności od prędkości zakręcenia zabawka może obracać się, jednocześnie wykonując ruchy kolebiące, by w końcu zmienić kierunek obrotu. Może też, przy zbyt wolnym zakręceniu, stosunkowo szybko zatrzymać się — istotne jest kolebanie się zabawki, gdyż to ono właśnie powoduje zmianę kierunku obrotu!

Z teorii wynika więc, że obserwowane zjawisko jest skutkiem ruchu obrotowego bryły, połączonego z toceniem. Warunkiem koniecznym odwracania kierunku wirowania jest brak symetrii momentu bezwładności wokół pionowej osi obrotu (warunek  $A > B$ ) oraz niepokrywanie się elipsoidy, przybliżającej powierzchnię bryły w miejscu styku, z elipsoidą momentu bezwładności (warunek  $q \neq 0$ ). W praktyce nie są ważne wartości asymetrii — dlatego też stosunkowo łatwo jest zrobić odpowiednią zabawkę, o ile wie się, że jest to możliwe. Jak przekonali się Czytelnicy, o wiele ważniejszy jest kształt powierzchni styku niż rozkład momentu bezwładności w bryle. Przy zbyt małej krzywiznie powierzchni zawsze otrzymamy niestabilności kręcenia się bryły w obu kierunkach. Jednocześnie przy właściwej prędkości zakręcenia bryłą jeden kierunek ruchu będzie stabilny, drugi zaś nie, co wynika wprost z teorii. Istotny jest też właściwy współczynnik tarcia między zabawką a podłożem: gdy powierzchnia zabawki jest zbyt chropowata, to zabawka zatrzyma się bez zmiany kierunku obrotu, niezależnie od początkowej prędkości obrotowej. Zbyt mały współczynnik tarcia też nigdy nie pozwoli na zmianę kierunku obrotu — nie sądzę jednak, by zabawki wykonywane w warunkach domowych były tak dobrze wypolerowane.

Na koniec uwaga dla prawdziwie ambitnych: ciągle jeszcze nie opracowano teorii ruchu brył, których główna oś momentu bezwładności w stanie spoczynku nie jest pionowa. Może ktoś z Czytelników ...



# delta mała delta

## Przypływy i odpływy

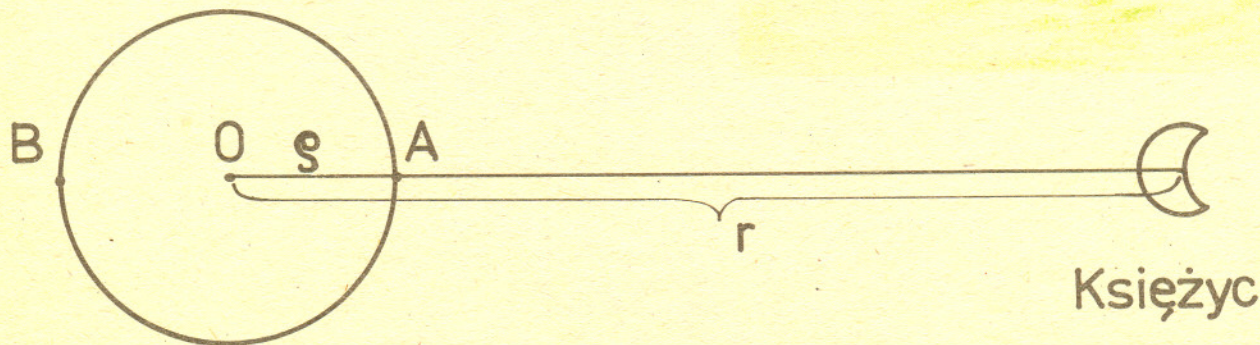
Według newtonowskiego prawa grawitacji przyspieszenie  $a$ , wywierane przez masę  $m$  w odległości  $r$ , wyraża się wzorem

$$a = \frac{Gm}{r^2},$$

gdzie  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$  jest stałą grawitacji. Odwrotna proporcjonalność do kwadratu odległości jest charakterystyczna dla grawitacji oraz oddziaływań elektro- i magnetostatycznych. Nikt dobrze nie wie, dlaczego tak różne oddziaływania podlegają dokładnie takiemu samemu prawu.

Oddziaływanie grawitacyjne Księżyca wywołuje na Ziemi przypływy i odpływy mórz — zaraz się zresztą sami przekonamy, że rzeczywiście głównie Księżyc jest ich przyczyną. Zjawisko polega na tym, że w punkcie  $A$  (patrz rysunek) przyspieszenie grawitacyjne ze strony Księżyca jest silniejsze niż w punkcie  $O$  z prostego powodu, że  $A$  jest bliżej Księżyca. Analogicznie w punkcie  $B$  „przyspieszenie księżycowe” jest słabsze niż w  $O$ , gdyż  $B$  jest dalej. Jest to więc — jak to się mówi — efekt różnicowy, skutek nierówności przyspieszeń w różnych punktach globu ziemskiego. W rezultacie, jak widać z rysunku, Księżyc usiłuje rozciągnąć powierzchnię oceanów (samą skorupę ziemską zresztą też) wzdłuż linii łączącej go ze środkiem Ziemi. Ruch wirowy Ziemi powoduje, że wybrzuszenia przypływowe nie leżą dokładnie na tej linii, a w każdym miejscu, gdzie pływy są odczuwalne, mamy dwa przypływy i dwa odpływy w ciągu doby.

Ziemia





Przyspieszenie w punkcie  $O$  wynosi  $a_O = Gm_k/r_k^2$ , gdzie  $m_k$  jest masą Księżyca, a  $r_k$  — jego odległością od Ziemi.

Przyspieszenie w punkcie  $A$  wynosi  $a_A = \frac{Gm_k}{(r_k - \varrho)^2}$ , gdzie  $\varrho$  jest promieniem Ziemi. Różnica tych przyspieszeń wynosi

$$\Delta a_k = a_A - a_O = \frac{Gm_k}{r_k^2} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho}{r_k}\right)^2} - 1 \right] = \frac{Gm_k}{r_k^2} \frac{2\frac{\varrho}{r_k} - \frac{\varrho^2}{r_k^2}}{1 - 2\frac{\varrho}{r_k} + \frac{\varrho^2}{r_k^2}}$$

Ale jeśli  $\frac{\varrho}{r_k} \ll 1$ , to cały drugi ułamek jest równy w przybliżeniu  $2\frac{\varrho}{r_k}$ , zatem  $\Delta a_k = \frac{2Gm_k\varrho}{r_k^3}$ .

Czytelnik łatwo sprawdzi, że wynik jest taki sam dla  $a_O - a_B$ . Tak więc różnica przyspieszeń odpowiedzialna za pływy na Ziemi jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości ciała powodującego pływy, tu — Księżyca, a wybrzuszenie oceanów jest (w tym przybliżeniu) symetryczne po obu stronach Ziemi.

A jakie jest pływowe działanie Słońca? Jeżeli przez  $m_s$  i  $r_s$  oznaczyć odpowiednio jego masę i odległość, to oczywiście

$$\Delta a_s = \frac{2Gm_s\varrho}{r_s^3},$$

stosunek  $\Delta a_k/\Delta a_s$  jest więc równy

$$\frac{\Delta a_k}{\Delta a_s} = \frac{m_k}{m_s} \left( \frac{r_s}{r_k} \right)^3.$$

W licznych tablicach każdy może znaleźć niezbędne dane. Słońce jest  $2,7 \times 10^7$  razy masywniejsze od Księżyca i znajduje się 390 razy dalej. Zatem

$$\frac{\Delta a_k}{\Delta a_s} = 2,18.$$

Tak więc Słońce wywiera na Ziemi dwukrotnie słabsze działanie pływowe niż Księżyc!

Niepodobna zaobserwować osobno pływów księżycowych i osobno słonecznych — możemy obserwować jedynie ich nakładanie się. Znajac mechanizm zjawiska łatwo teraz przewidzieć, że gdy Słońce, Ziemia i Księżyc znajdują się na jednej prostej (obojętne w jakiej kolejności), to pływy będą silniejsze. Mianowicie podczas nowiu i pełni pływy powinny być

$$\frac{2,18+1}{2,18-1} = 2,7$$

razy silniejsze niż podczas kwadr. W rzeczywistości nie jest tak dokładnie, gdyż ogromne znaczenie ma tu chociażby ukształtowanie dna morskiego. Dlatego maksymalna amplituda pływów na Ziemi sięga 20 m, co jest znacznie więcej niż wartość wynikająca z teorii. W Polsce, tzn. na Bałtyku pływy są właściwie niewyczuwalne, gdyż Bałtyk jest morzem niemal odcięty od oceanu światowego.

A co będzie, jeżeli pływy księżycowo-słoneczne zostaną wzmacnione przez planetarne? Biorąc z tablic masy i odległości planet każdy bez trudu obliczy, że ich działanie jest całkiem znikome w porównaniu z działaniem Księżyca. Tak więc budzące niekiedy obawy „ustawienie się planet na jednej prostej” poza ładnym widokiem na niebie nie ma szans wywrzeć znaczącego wpływu na Ziemi.



Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA, członek korespondent PAN



O związku matematyki z fizyką można nieskończenie... Zagadnienie to było od stuleci przedmiotem dociekań wybitnych matematyków, fizyków i filozofów. Teksty napisane na ten temat wypełniłyby kilka grubych tomów. Wydaje się, że wszystko na ten temat zostało już powiedziane i napisane, co wcale nie oznacza, że panuje w tej dziedzinie pełna zgodność poglądów. Bą, wręcz przeciwnie, można znaleźć poglądy krańcowo różne: od twierdzenia, że czysta matematyka, nie oparta na rzeczywistości, wręcz nie ma sensu (Engels), do twierdzenia, że świat rzeczywisty jest jedynie odbiciem świata bytów matematycznych (Kepler). Przekorny Czytelnik może uznać zresztą, że obie te tezy są właściwie równoważne.

Moim zdaniem zagadnienie związku fizyki z matematyką ma charakter filozoficzny i nie można go, w związku z tym, rozstrzygnąć ani na gruncie matematyki, ani na gruncie fizyki i każdy ma pełne prawo do stworzenia własnego, odrębnego poglądu na to zagadnienie. Aby ułatwić Czytelnikowi to zadanie, podam tutaj wybór wypowiedzi uczonych na ten temat, ograniczając do minimum-swoj komentarz.

Zacznę od oczywistego dosyć stwierdzenia, iż na to, by rozważać zagadnienie związku matematyki i fizyki, trzeba najpierw możliwie precyzyjnie określić, co to jest matematyka i co to jest fizyka. Czasami już w samych tych definicjach tkwi istotna informacja na temat owego związku. I tak na przykład **Albert Einstein** tak zdefiniował fizykę w swoim artykule o podstawach fizyki teoretycznej:

*To, co nazywamy fizyką, stanowi tę grupę nauk przyrodniczych, których pojęcia oparte są na pomiarach i które to pojęcia oraz twierdzenia dają się sformułować matematycznie. Zgodnie z tym, zakres fizyki jest zdefiniowany jako ta część naszej pełnej wiedzy, która jest możliwa do wyrażania w matematycznej postaci.*

Takie określenie fizyki wyznacza, w znacznej mierze, związek matematyki z fizyką, pod warunkiem, oczywiście, że wiemy już skądinąd, co to jest matematyka. Na ten temat też występują różnice zdań. Skrajny pogląd głosił wspomniany wyżej **Fryderyk Engels**, który uważał, że matematyka traci cały sens, gdy odrywa się od fizycznej rzeczywistości. W *Dialektyce Przyrody* tak, na przykład, pisał on o matematyce i o ... matematykach:

*Gdy jednak matematycy zamykają się w swej niedostępnej twierdzy abstrakcji, w tak zwanej matematyce czystej, zapominają o tych wszystkich analogiach (chodzi tu o analogie z fizyką, przyp. mój); nieskończoność staje się czymś zgoła tajemniczym, a sposób, w jaki się nią operuje w analizie, wydaje się czymś zupełnie niepojętym, sprzecznym z wszelkim doświadczeniem i sensem...*

*Nieskończoność matematyczna została zapożyczona z rzeczywistości chociaż nieświadomie — i dlatego może być wytłumaczona tylko na podstawie rzeczywistości, a nie sama przez się, nie przez abstrakcję matematyczną.*

Engels nie neguje jednak znaczenia i wagi matematyki w badaniach przyrodniczych, a jedynie gani tych, którzy zapominają, że cała tak zwana matematyka czysta zajmuje się abstrakcjami, że wszystkie jej wielkości są, ściśle biorąc, wielkościami wymyślnymi i że wszystkie abstrakcje doprowadzone do skrajności zamieniają się w absurd lub w swe przeciwieństwo.

Jeszcze bardziej skrajne stanowisko zajął **Antonin Iwanowski**, którego poglądy mogłem poznać z wydanej w Warszawie w 1922 roku w niewielkim nakładzie książki *Podstawowe zagadnienia fizyki w filozoficznym oświeceniu*. Pisał on tam między innymi:

*Każdego badacza, zglębającego nie jakieś poszczególne gałęzie fizyki, lecz pragnącego ogarnąć ogólny zarys tej najważniejszej z ludzkich umiejętności, uderza niepewność i chwiejność podstaw, na których fizyka swój olbrzymi gmach buduje, razi brak skoordynowania i uzgodnienia poszczególnych skrzydeł i przybudówek owego gmachu, a już wprost oszalamiają sprzeczności w punktach wyjścia, z których wywodzą swój rodowód poszczególne gałęzie fizyki. Pojedyncze — niestety bardzo nieliczne — pawilony lub skrzydła służą ludzkości i przynoszą pożytek, ale całość gmachu fizyki tylko zasłania widok i przeszkadza oku ogarnąć szersze horyzonty.*

*A pracownicy nauki z gorączkowym pośpiechem wciąż zwożą i znoszą potworne ilości nowych materiałów, wciąż coś burzą lub przebudowują...*

*Zaś czynią to nie tylko bez planu, lecz nawet bez jakiegokolwiek ogólnej dyrektywy, jakby kłeczenie coraz to nowych, chaotycznie nagromadzonych ubikacji, samo sobie miało być celem...*

*Prócz głównego źródła zła, to jest prócz braku skoordynowania punktów wyjścia fizyki, dostrzegam groźne błędy metodyczne, które mszczą się dotkliwie i nieraz piękne zawiązki najgłębszych idei niweczą i wypaczają.*

**Albert Einstein** (1879—1955). Najsłynniejszy fizyk wszystkich czasów. Odkrył, że  $E = mc^2$  i że przestrzeń jest zakrzywiona.

**Fryderyk Engels** (1829—1895). Znany z portretów pierwszomajowych filozof. Przyjaciel i współpracownik Marksa.

**Antonin Iwanowski** (?—?). Nie ma go w encyklopedii. Nic o nim nie wiem.



$$2m_0c^2 = 2h\nu$$

$\sqrt{127}$

$$\sum_{k=2}^n \beta_k \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

670,3

Najpierwszym i najpowszechniejszym błędem metodycznym w fizyce jest przedwczesne stosowanie matematyki. Powodem tego błędu jest przecenianie (i to bardzo znaczne!) samej wartości matematyki i niewłaściwy pogląd na wywody matematyczne, jako na coś nie podlegającego wątpliwości...

Że zaś nie tylko sama technika naszych środków matematycznych ma olbrzymie braki i luki, lecz, że — co gorsza — ubóstwo tych środków stoi w rażącym przeciwieństwie do bogactwa zjawisk, więc po zamknięciu takiej nowej myśli w nazbyt sztywnym pancerzu matematycznym, myśl ta, czy idea traci wszelką giętkość i żywość, staje się nieruchawą, martwieje, rychło schnie i wreszcie zamiera przed wydaniem owocu, który mógłby się stać nasieniem jakiejś nowej, jeszcze doskonalszej myśli lub i całej teorii...

Jakież to szczęście dla ludzkości, że nie wszystkie nauki stosują matematykę!

W tym duchu napisana jest cała rozprawa Iwanowskiego. Ale jako odtrutkę na takie krańcowe poglądy można z kolei przytoczyć słowa **Johannesa Keplera**:

*Bóg był zbyt wielki, by pozostawać beczynnym; zaczął uprawiać grę symboli, a świat stał się odbiciem tej gry. Podejrzewam, że cała przyroda wraz z pełnym wdzięku niebem wywodzą się z geometrii,*

czy też słowa **Gustawa Hertza**:

*Nie można oprzeć się wrażeniu, że te formuły matematyczne mają niezależny od nas byt i inteligencję, że są mądrzejsze niż my sami, nawet mądrzejsze niż ich odkrywcy, i że możemy wywnioskować z nich więcej niż poprzednio w nich zawarto.*

Podobnie **James Jeans** pisał:

*Cytuje się Kroneckera, który miał powiedzieć, że w arytmetyce Bóg stworzył liczby całkowite, a wszystko pozostałe jest dziełem człowieka. W tym samym duchu możemy prawdopodobnie powiedzieć, że w fizyce Bóg stworzył matematykę, zaś cała reszta jest dziełem człowieka.*

Są to poglądy dokładnie przeciwstawne tym, które z taką swadą przedstawił w swoim filozoficznym traktacie nasz rodak Iwanowski, ale chciałbym zwrócić uwagę na to, że ogłoszony przez niego antymatematyczny pogląd na fizykę wcale nie jest całkowicie odosobniony. Podobny pogląd jest współcześnie głoszony przez uczonych wyznających filozofię tak zwanej **nowej gnozy z Princeton**. Uczeni ci uważają, że matematyczny opis charakteryzujący *starą metodą badawczą* powinien być zastąpiony przez o wiele doskonalszą metodę polegającą na bezpośrednim kontakcie wewnętrznym ze *świadomością Wszechświata*, gdyż teorie typu matematycznego nie mogą tego kontaktu zapewnić.

Oczywiście ogromna większość fizyków wyznaje poglądy umiarkowane, które można chyba dobrze wyrazić słowami **Richarda Feynmana**:

*Jest rzeczą w pełni oczywistą, że rozumowania matematyczne, które zostały rozwinięte, mają wielką moc i użyteczność dla fizyków. Z drugiej strony, czasami rozumowania fizyków są użyteczne dla matematyków.*

Trzeba jednak przyznać, że tak skromne i wyważone sformułowanie pozostawia uczucie niedosytu. Czyżby było to rzeczywiście wszystko, co na pewno można o związku między matematyką i fizyką powiedzieć? Czyżby nie tkwiła w tym zagadnieniu żadna głęboka tajemnica? Tajemnicę taką wy dobył na światło dzienne i przeanalizował **Eugene Wigner** w fascynującym artykule zatytułowanym *O niepojętej efektywności matematyki w naukach przyrodniczych*. Już sam tytuł artykułu Wignera zawiera, moim zdaniem, bardzo trafne wskazanie najciekawszego problemu, przed którym stoimy analizując związki matematyki z fizyką. Artykuł zaczyna się od zabawnej, ale też i doskonale ilustrującej problem, anegdoty. Dwaj koledzy z ławy szkolnej spotykają się po latach i rozmowa schodzi na ich pracę. Jeden z nich został statystykiem i zajmuje się badaniem zmian populacji. W odbicie swojego artykułu, którą pokazuje swojemu dawnemu koledze, już na początku pojawia się rozkład Gaussa. W trakcie wyjaśnień, co oznaczają różne symbole, kolega humanista zaczyna podejrzewać, że statystyk postanowił zakpić z jego matematycznej ignorancji. Ujrawszy w pewnym momencie mgliście kojarzący mu się ze szkołą symbol  $\pi$  pyta. No a to, co u ciebie oznacza? Nie pamiętasz? — odpowiada statystyk. To jest przecież stosunek obwodu koła do jego średnicy. Teraz to już wiem na pewno, że robisz ze mnie balona — woła humanista. Co ma ludność do obwodu!

No właśnie! Co ma ludność do obwodu, co ma fizyka do matematyki.

Zagadkę tę czyni Wigner jeszcze bardziej bulwersującą przez zwrócenie uwagi na następujące elementy twórczości matematyków. Parafrazując użytą kiedyś żartobliwą **definicję filozofii** Wigner określa matematykę jako naukę o biegłym posługiwaniu się pojęciami i regułami wynalezionymi właśnie do tego celu. Pojęcia matematyczne — twierdzi Wigner — wprowadzane są po to, by można było o nich dowodzić ciekawych twierdzeń. Najlepszym przykładem są liczby zespolone. Nic, co postrzegamy, nie sugeruje wprowadzenia takich obiektów. Gdyby spytać matematyka, po co właściwie zajmuje się teorią liczb zespolonych, wskazałby z oburzeniem na wiele pięknych twierdzeń z tej dziedziny. A jednak obiekty te wprowadzone do matematyki wyłącznie ze względu na — jak pisze Wigner — *ich przydatność do ciekawych przekształceń i ich rolę w uderzających, błyskotliwych rozumowaniach*, okazały się konieczne do sformułowania praw mechaniki kwantowej.

**Johannes Kepler** (1571—1630). Niemiecki astronom. Odkrywcą trzech praw ruchu planet. Ostatnie lata swego życia spędził w Żaganii jako nadworny astrolog księcia Wallensteina.

**Gustaw Hertz** (1887—1975). Niemiecki fizyk. Laureat nagrody Nobla za odkrycie (wraz z Franckiem) praw rządzących zderzeniami elektronów z atomami.

**James Jeans** (1877—1946). Angielski fizyk i astrofizyk. Autor hipotezy kosmogonicznej głoszącej, iż nasz układ planetarny powstał w wyniku przejścia innej gwiazdy w pobliżu Słońca.

O gnozie z Princeton i innych ciekawych rzeczach z filozofii fizyki można przeczytać w książce Michała Tempczyka *Fizyka a świat realny*, PWN, Warszawa 1986.

**Richard Feynman** (ur. 1918). Amerykański fizyk-teoretyk. Laureat nagrody Nobla (wspólnie ze Schwingerem i Tomonagą) za sformułowanie współczesnej wersji elektrodynamiki kwantowej.

**Eugene Wigner** (ur. 1902). Amerykański fizyk-teoretyk, urodzony w Budapeszcie. Laureat nagrody Nobla za wyjaśnienie wielu własności atomów i jąder za pomocą teorii grup.

Filozofia jest to nadużywanie terminologii wymyślonej właśnie w tym celu.

Czyż nie jest piękne twierdzenie o funkcjach analitycznych, które głosi, że funkcja taka jest już jednoznacznie wyznaczona wszędzie, jeżeli tylko określiliśmy ją w dowolnie małym obszarze.



Można to próbować tłumaczyć brakiem wyobraźni u fizyków. Gdy fizyk dostrzeże związek między dwiema wielkościami, który kojarzy mu się z czymś znanym już z matematyki, to wyciąga z tego natychmiast wnioski, że **związek ten jest dokładnie tym, co opisuje matematyka**. Tłumaczenie to nie może wyjaśnić jednak, dlaczego powstała w ten sposób koncepcja przekracza bardzo często wszelkie narzucone początkowo granice stosowności i prowadzi do nowych, zaskakujących wniosków przy opisie zjawisk, o których nie śniło się twórcom teorii. Doskonałym przykładem owego wychodzenia teorii fizycznej poza wszelkie początkowo pomyślane ramy jest wspomniana już mechanika kwantowa. Cele, jakie stawiali sobie jej twórcy, były początkowo dość ograniczone, a mimo to sformułowana przez nich teoria przekroczyła ich najśmielsze oczekiwania. Nie może być mowy o prymitywnym dopasowywaniu teorii do danych, gdy doświadczenia nie zostały jeszcze przeprowadzone i ich wyniki nie są znane przy formułowaniu teorii lub znane jedynie w grubym przybliżeniu. Newton podał prawo powszechnego ciążenia dysponując danymi doświadczalnymi obciążonymi około czteroprocentowym błędem. Późniejsze obserwacje potwierdziły jego teorię z dokładnością do dziesięciotysięcznej części procenta. Elektrodynamika kwantowa, która właściwie została stworzona wyłącznie na zasadzie analogii z mechaniką kwantową, tam gdzie można ją w pełni wykorzystać, daje zgodność z doświadczeniem z dokładnością do stutysięcznej części procenta. Kilka prostych nieraz obserwacji zamienionych na sformułowane matematycznie prawo fizyczne tworzy podstawę teorii, którą dzięki stosowaniu matematycznych metod wnioskowania udaje się rozszerzać na ogromne obszary zjawisk. Dlaczego tak jest? Nikt nie wie, ale myśleć o tym warto!

Napisałem na początku, że związek fizyki i matematyki to zagadnienie z dziedziny filozofii i starałem się utrzymać ten artykuł w konwencji eseju filozoficznego, stąd liczne przypisy.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 487.** W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe półproste, wychodzące z jednego punktu. Udowodnić, że dowolny trójkąt ostrokątny można umieścić tak, by każdy jego wierzchołek leżał na innej półprostej.

Rozwiązanie na str. 6

**M 488.** Niech  $S_n(t) = \sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt$ . Udowodnić, że dla każdego  $t$  ciąg  $\{S_n(t)\}$  jest ograniczony.

Rozwiązanie na str. 6

**M 489.** Wykazać, że średnia wartość minimum  $k$ -elementowego podzbioru zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$

wynosi  $\frac{n+1}{k+1}$ .

Rozwiązanie na str. 6

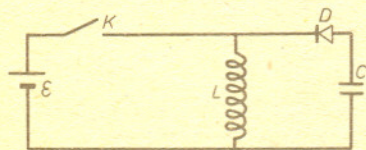
Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 232.** Obwód elektryczny składający się z cewki o indukcyjności  $L$ , kondensatora o pojemności  $C$  i diody  $D$  (patrz rys. 1) jest podłączany za pomocą klucza  $K$  przez czas  $\tau$  do baterii o SEM  $\mathcal{E}$ , a następnie odłączany. Znaleźć zależność napięcia na kondensatorze od czasu po wyłączeniu obwodu. Opór wewnętrzny baterii i opór omowy cewki można zaniedbać.

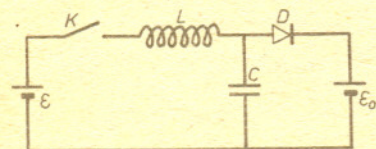
Rozwiązanie na str. 7

**F 233.** W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 składającym się z dwóch baterii, diody, kondensatora o pojemności  $C$  i cewki o indukcyjności  $L$ , SEM  $\mathcal{E}_0$  baterii pierwszej jest większa niż SEM  $\mathcal{E}$  drugiej. Należy określić ładunek, który przepłynie przez baterię o SEM  $\mathcal{E}_0$  przy zamykaniu klucza  $K$ . Opór wewnętrzny obu baterii można zaniedbać. Kondensator do momentu zamknięcia klucza był nie naładowany.

Rozwiązanie na str. 14



Rys. 1



Rys. 2



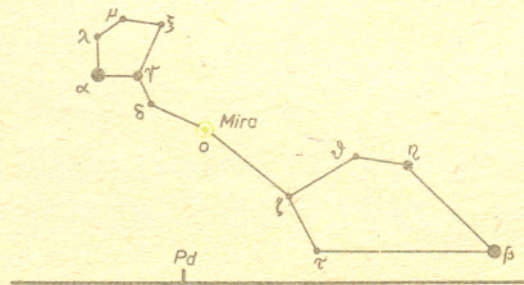
Nadeszła pora roku, w której warto zwrócić uwagę na najjaśniejszą długookresową gwiazdę zmienną, nie bez powodu zwaną Cudowną. W rzeczywistości była ona pierwszą odkrytą gwiazdą zmienną, choć o jej zmienności nie od razu się przekonano. Odkrył ją 13 sierpnia 1596 roku holenderski pastor David Fabricius, uznając za gwiazdę nową trzeciej wielkości. Wkrótce została oznaczona symbolem  $\sigma$  Ceti w atlasie nieba sporządzonym przez niemieckiego astronoma Johanna Bayera. Przez blisko 40 lat nikt się nią nie zajmował i nie zauważano, że jest ona gwiazdą zmienną. Dopiero w 1638 roku Phocylides Holwarda stwierdził, że blask jej zmienia się regularnie, a około 1660 roku ustalono, że okres tych zmian jest równy 11 miesięcy. W 1662 roku Jan Heweliusz poświęcił jej rozprawę zatytułowaną *Historiola Mirae Stellae* i w ten sposób nazwa Mira (Cudowna) przylgnęła do tej gwiazdy.

Dla stwierdzenia, w jakim czasie odbywa się pełny cykl zmian blasku Miry, potrzebna jest rzeczywistość wyjątkowa wytrwałość. Szczególnie, że przez większą część tego długiego okresu jest ona słabą gwiazdką dziewiątej wielkości, dostrzegalną wyłącznie przez dość silne teleskopy. Zaledwie przez kilka tygodni w roku widać ją dobrze gołym okiem. W maksimum blasku, następującym po czterech miesiącach od początku rozjaśniania, może świecić jako jasna gwiazda drugiej wielkości. Ilość światła, która emitowana jest wtedy z jej powierzchni, kilkaset razy przewyższa ilość światła emitowaną podczas minimum blasku.

Mira jest gwiazdą-olbrzymem o objętości 30 milionów razy większej od objętości Słońca, za to znacznie od niego rzadszą i chłodniejszą. Ma bliskiego towarzysza — białego karła i razem stanowią jakby „złe dobraną parę”, jeśli wziąć pod uwagę dysproporcje w ich budowie fizycznej. Choć więc jest to układ podwójny, nie może być obserwowany jako gwiazda zaćmieniowa, bowiem udział białego karła w całkowitej jasności tej pary jest zaniedbywalny. Zmiany blasku Cudownej Wieloryba tłumaczy się w inny sposób.

Jest ona typową przedstawicielką, a nawet prototypem, klasy gwiazd zmiennych długookresowych. Wydaje się, że zasadniczą przyczyną zmienności tych gwiazd są pulsacje, choć zadowalająca teoria jeszcze nie istnieje. W dużym uproszczeniu można powiedzieć, że na skutek okresowych zmian objętości zmienia się ich temperatura i jasność powierzchniowa. Zmiany blasku tych gwiazd odbywają się zwykle niezbyt regularnie. Na przykład w przypadku Miry zarówno okres zmienności ulega wahaniom, odchylając się do 15 dni od wartości średniej, jak również wielkości gwiazdowe w minimum i maksimum blasku przyjmują odmienne wartości w różnych cyklach zmienności. Zwykle uważa się, że w maksimum powinna być ona gwiazdą drugiej wielkości, choć w 1779 roku William Herschel zaobserwował ją, gdy była prawie tak jasna jak Aldebaran, kędy indziej z kolei bywa w maksimum ledwie dostrzegalna gołym okiem. Gwiazdy zmienne długookresowe charakteryzują się bardzo niskimi temperaturami powierzchniowymi. Mira w maksimum blasku ma temperaturę 2600 K, a w minimum 1900 K. W związku z tym maksimum energii wysyłanej w dowolnej fazie przypada daleko w podczerwieni, a obserwacje wizualne tych obiektów dotyczą zawsze obszarów położonych daleko od maksimum energii po krótkofalowej jego stronie.

Systematyczne obserwacje, dokonywane choćby gołym okiem, zimą tego roku; pozwolą przekonać się o zmienności Cudownej Wieloryba. Podczas tegorocznego maksimum, które nastąpi najprawdopodobniej na przełomie grudnia i stycznia, Wieloryb wschodzi przed zapadnięciem zmroku i góruje tuż po zachodzie Słońca. Choć jest to czwarty co do wielkości (pod względem zajmowanej powierzchni) gwiazdozbiór na niebie, nie zawiera wielu jasnych gwiazd — zaledwie dwie drugiej wielkości i dziewięć wielkości trzeciej i czwartej. Zidentyfikowanie jasnej Miry nie powinno więc stanowić istotnego problemu. Leży ona niemal dokładnie w środku odcinka wyznaczonego przez gwiazdy  $\delta$  i  $\zeta$  Wieloryba (obydwie czwartej wielkości) tworząc wraz z nimi jego szyję.



Mirę widać na południu 25 grudnia około godziny 20<sup>00</sup>.

Tym, którzy nie będą mieli okazji zaobserwować tegorocznego maksimum Miry, proponujemy powrót do tego zagadnienia za 11 miesięcy.

mgr Joanna UDALSKA

## FIZYCZNE NOWINKI

### NADPRZEWODNICTWO W WYSOKICH TEMPERATURACH

Ogłoszenie przez J. G. Bednorza i K. A. Müllera z laboratorium IBM w Zurychu o odkryciu nowego typu materiałów przechodzących w stan nadprzewodzący w temperaturze  $T_c \sim 30\text{K}$  (wrzesień 1986) rozpoczęło wyścig laboratoriów do uzyskania coraz wyższych wartości  $T_c$ . Dziś (sierpień 1987) najwyższa zmierzona temperatura  $T_c$  wynosi 292 K. Niestety okazało się, że badana próbka była w stanie nietrwałym i podczas badań, po jej kilkakrotnym ogrzaniu i ochłodzeniu nie obserwowano już znikania oporu w tak wysokiej temperaturze. Systematycznie produkowane są i intensywnie badane materiały o niższym  $T_c$ . Najczęściej są to  $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ ,  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  o  $x \sim 0,15$  i  $T_c = 30\text{--}40\text{ K}$  oraz  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ,  $\text{EuBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  o  $T_c \sim 90\text{ K}$  (jeszcze rok temu rekordowa wartość  $T_c$  wynosiła 23 K!). Są to materiały ceramiczne otrzymane przez spiekanie i wyżarzanie mieszaniny sproszkowanych tlenków metali. Ze względu na sposób produkcji materiały są niejednorodne, a własności próbek nie są powtarzalne. Badania rentgenowskie pozwoliły ustalić strukturę krystaliczną fazy nadprzewodzącej; ustalono też, że nośnikami prądu są dziury. Otrzymano również niewielki ( $\sim 3\text{ mm}$ ) monokryształ  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Wiele własności różni nowe materiały od znanych wcześniej nadprzewodników. Część z nich trudno pogodzić z dotychczasową teorią (teoria BCS). W związku z tym teoretycy szukają nowych mechanizmów tłumaczących powstawanie stanu nadprzewodzącego. Trwa również wyścig technologów: firmy japońskie oferują cewki nadprzewodzące z nowych materiałów, a firma Bell podobno produkuje już z nich giętki drut.

A. M.



## Jak znaleźć granicę?

Oto zadanie, które kilkanaście lat temu krążyło po Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego: znaleźć granicę ciągu

$$\sqrt[n]{n \cdot \sin \dots \sin 1}.$$

Jakiś czas zadanie nie poddawało się, potem znane były długie i niezbyt zgrabne rozwiązania. Kilka lat temu okazało się, że istnieje naprawdę elegancka metoda.

Potrzebne nam będzie kilka faktów.

1° Twierdzenie o ciągu średnich arytmetycznych:

Jeśli ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny, to ciąg  $\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$  też jest zbieżny i to do tej samej granicy.

2° Ze wzoru Taylora dla funkcji sinus wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} \cdot \left(\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right) = 0.$$

3° Ciąg  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  określony wzorem rekurencyjnym  $b_1 = \sin 1$ ,  $b_{n+1} = \sin b_n$  dla  $n = 1, 2, \dots$  jest zbieżny do zera.

Mamy znaleźć granicę ciągu  $(b_n \cdot \sqrt[n]{n})_{n=1}^{\infty}$ . Zamiast tego będziemy szukać granicy ciągu

$\left(\frac{1}{b_n^2 \cdot n}\right)_{n=1}^{\infty}$ . Na mocy 1° wystarczy znaleźć granicę ciągu  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ , gdzie  $c_1 = \frac{1}{b_1^2}$ ,

$c_n = \frac{1}{b_n^2} - \frac{1}{b_{n-1}^2}$  dla  $n = 2, 3, \dots$ . Ale

$$c_n = \frac{1}{b_n^2} - \frac{1}{b_{n-1}^2} = \frac{1}{\sin^2 b_{n-1}} - \frac{1}{b_{n-1}^2} = \frac{b_{n-1}^2 - \sin^2 b_{n-1}}{b_{n-1}^2 \cdot \sin^2 b_{n-1}}$$

i (na mocy 3°)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2 - \sin^2 b_n}{b_n^2 \cdot \sin^2 b_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin x + x - \frac{x^3}{3!}}{x^3} + \frac{x^3}{3! \cdot x^3} \right). \end{aligned}$$

Pierwsza z granic po ostatniej równości jest równa 1, druga 2, a trzecia (na mocy 2°)  $\frac{1}{6}$ . Mamy

więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot b_n^2} = \frac{1}{3}, \quad \text{czyli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot b_n = \sqrt[3]{3}.$$

Warto udowodnić twierdzenie o granicy ciągu średnich arytmetycznych, bywa ono — jak widać z powyższego przykładu — bardzo przydatne.

Niech  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ . Załóżmy, że  $|g| < \infty$ . Weźmy dowolne  $\varepsilon > 0$  i wybierzmy taką liczbę  $k$ , że

dla  $n > k$  mamy  $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Oszacujmy różnicę  $\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - g \right|$ . Otóż

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_n - ng}{n} \right| &\leq \frac{|a_1 + \dots + a_k - kg|}{n} + \frac{|a_{k+1} - g|}{n} + \dots + \\ &+ \frac{|a_n - g|}{n} \leq \frac{|a_1 + \dots + a_k - kg|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

czyli dla takiego  $n$ , że  $n > \frac{2}{\varepsilon} \cdot |a_1 + \dots + a_k - kg|$  i  $n > k$  mamy  $\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - g \right| < \varepsilon$ , co

kończy dowód.

Przypadek, gdy  $g = \pm \infty$ , pozostawiamy Czytelnikowi.

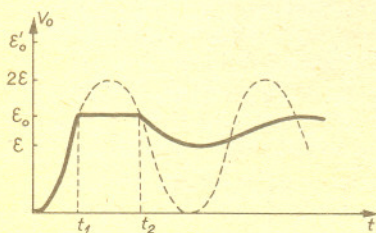
Czasem przy obliczaniu granic przydaje się twierdzenie Stolza, będące uogólnieniem powyższego twierdzenia:

Jeśli ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  jest rosnący i nieograniczony, to ze zbieżności ciągu  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$  wynika zbieżność

ciągu  $\frac{x_n}{y_n}$ , przy czym obie granice są równe.



**Rozwiązanie zadania F 233.** W momencie zamykania klucza w obwodzie LC powstają drgania. Stanowi równowagi odpowiada napięcie na kondensatorze  $V_c = \mathcal{E}$ . Ponieważ w chwili początkowej  $V_c = 0$ , więc amplituda napięcia jest równa  $\mathcal{E}$ , a maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi  $2\mathcal{E}$ .



Jeśli  $2\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$  (patrz rysunek), dioda przestaje przewodzić i w obwodzie zachodzą drgania harmoniczne (linia przerywana na rysunku). Wtedy ładunek nie przepływa przez baterię z SEM  $\mathcal{E}_0$ . Jeśli natomiast  $2\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ , to dioda w pewnej chwili  $t_1$ , kiedy  $V_c = \mathcal{E}_0$ , przewodzi i przez baterię o SEM  $\mathcal{E}_0$  popłynie prąd.

Ponieważ opór diody w momencie przewodzenia jest (w przybliżeniu) równy zeru, więc nie występuje na niej spadek napięcia i w ciągu całego czasu przepływu prądu przez baterię I napięcie na kondensatorze jest równe  $\mathcal{E}_0$  (ciągła linia na rysunku).

Odpowiednio, do chwili  $t_2$ , kiedy dioda przestaje przewodzić, ładunek na kondensatorze wynosi  $C\mathcal{E}_0$ . Jeśli przy tym przez baterię I przepływał ładunek  $q_0$ , to bateria II musiała oddać do obwodu ładunek  $q = q_0 + C\mathcal{E}_0$ . Praca baterii II poszła na dostarczenie energii do kondensatora i na pracę przeciwko SEM baterii I. Do momentu zatkania diody prąd przez cewkę przepływał z lewej na prawą stronę (porównaj rysunek w treści zadania). Po zamknięciu diody rozpoczyna się rozładowywanie kondensatora i prąd przez cewkę przechodzi w przeciwnym kierunku, tzn. w chwili  $t_2$  prąd przez cewkę zmienia znak, czyli jest równy zeru. Równa zeru jest też energia zgromadzona w indukcyjności L. Zasada zachowania energii w chwili  $t_2$  będzie miała postać:  $q\mathcal{E} = q_0\mathcal{E}_0 + C\mathcal{E}_0^2/2$ .

Rozwiązując to wraz z równaniem

$q = q_0 + C\mathcal{E}_0$  otrzymujemy

$$q_0 = C\mathcal{E}_0(2\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)/(2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})).$$

Po zatkaniu diody w obwodzie będą zachodziły drgania z amplitudą  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$ .



## Nierówność

Jak udowodnić, że jeśli liczby  $p, q$  są dodatnie oraz  $p+q=1$ , to dla dowolnych liczb naturalnych  $n, m \geq 2$  zachodzi nierówność

$$(1-p^n)^m + (1-q^m)^n > 1?$$

Wystarczy spojrzeć na tę nierówność oczami probabilisty.

W kłatkach prostokątnej tablicy o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach umieszczamy 1 z prawdopodobieństwem  $p$  i 0 z prawdopodobieństwem  $q$ . Prawdopodobieństwo, że w ustalonym wierszu pojawi się przynajmniej jedna jedynka, jest równe  $1-q^m$ , a że tak się zdarzy we wszystkich wierszach  $(1-q^m)^n$ . Analogicznie, prawdopodobieństwo, iż w każdej kolumnie znajdzie się przynajmniej jedno 0, jest równe  $(1-p^n)^m$ .

Zauważmy teraz, że jeżeli w jakimś wierszu nie ma ani jednej jedynki — są same zera, to w każdej kolumnie jest przynajmniej jedno zero. Tak więc zdarzenie, że każdy wiersz zawiera jedynkę lub każda kolumna zero, jest pewne, czyli

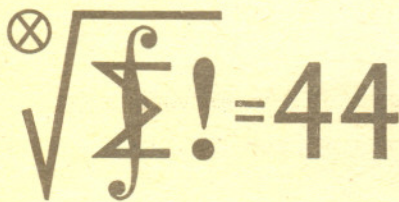
$$(1-p^n)^m + (1-q^m)^n > 1,$$

gdyż  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI

## Klub 44

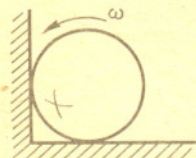
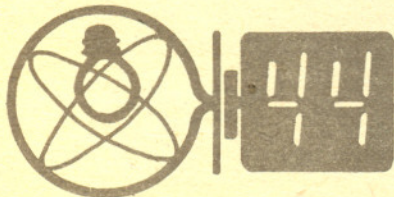
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1988



Czołówka ligi zadaniowej "klub 44 M"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 149 /WT=2,48/ i 150 /NT=1,76/  
z numeru 4/1987

Karol Jachacy	- Tłuszcz	46,21pkt
Krzysztof Zawisławski	- Warszawa	45,70pkt
Dariusz Kurpiel	- Żarszyn	44,90pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,75pkt
Grzegorz Zakrzewski	- Trzcianka	42,44pkt
Sławomir Solecki	- Ostrów Wkp	41,84pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	41,15pkt
Jan Ciach	- Ostrowiec	40,63pkt

Panowie Jachacy i Zawisławski - to nowe twarze w Klubie 44. Pan Kurpiel - już po raz drugi.



## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji Delt

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

### Zadania z matematyki nr 159, 160

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

159. Na płaszczyźnie dany jest zbiór  $Z$  złożony z  $n$  punktów ( $n \geq 3$ ), przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Wykazać, że  $|\angle PQR| \leq 180^\circ/n$  dla pewnej trójki punktów  $P, Q, R \in Z$ .

160. Ciąg nieskończony  $(x_n)$  określony jest wzorem rekurencyjnym  $x_{n+2} = \frac{2}{x_n + x_{n+1}}$ ;  $x_1, x_2$  są danymi liczbami dodatnimi. Udowodnić zbieżność tego ciągu.

Zadanie 160 przysłał pan Dzierżysław Lipniacki z Lublina.

### Zadania z fizyki nr 57, 58

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

57. W narożniku ścian poziomej i pionowej umieszczono jednorodną kulę obracającą się z początkową prędkością kątową  $\omega$  wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do krawędzi narożnika, kierunek obrotów jak na rysunku. Współczynnik tarcia kinetycznego kuli o ściany narożnika wynosi  $f$ . Obliczyć czas, jaki upłynie do zatrzymania ruchu obrotowego kuli oraz kąt, o który się w tym czasie kula obróci.

58. Pionowy cylinder, wypełniony powietrzem o ciśnieniu atmosferycznym  $p_0$  i temperaturze  $T_0$ , zamknięty jest od góry początkowo unieruchomionym tłokiem o masie  $m$ . W połowie wysokości cylindra znajduje się nieruchoma przegroda z małym otworem. W pewnej chwili tłok zostaje zwolniony i opada, dochodząc do przegrody.

Wyznaczyć końcową temperaturę powietrza w cylindrze przy zaniedbaniu tarcia tłoka o ścianki cylindra oraz wymiany ciepła między powietrzem a ściankami cylindra, przegrodą i tłokiem. Jaka byłaby końcowa temperatura powietrza, gdyby otwór w przegrodzie był duży?



# Drobiazgi

Dla dowolnego  $n$ -kąta wypukłego oznaczmy przez  $r$  promień największego koła mieszczącego się w tym wielokącie, a przez  $R$  — promień najmniejszego koła zawierającego ten wielokąt. Wówczas pole  $P$  i obwód  $O$  tego wielokąta spełniają nierówności

$$nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq P \leq \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$2nrtg \frac{\pi}{n} \leq O \leq 2nR \sin \frac{\pi}{n}.$$

Wszystkie te nierówności stają się równościami tylko dla wszystkich wielokątów foremnych. Wynika stąd np., że  $r$  i  $R$  spełniają zawsze nierówność

$$r \leq R \cos \frac{\pi}{n}.$$

Mniej widoczne jest, że można w założeniach (oznaczeniach) opuścić warunki „największego” i „najmniejszego” bez szkody dla żadnej z nierówności, a nawet w pierwszej nierówności zamienić koła na elipsy — wtedy  $r$  i  $R$  nie mają sensu, zamiast

nich trzeba użyć  $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$  i  $\sqrt{\frac{E}{\pi}}$ , gdzie  $e$  i  $E$  to odpowiednio pola elipsy zawartej w wielokącie i zawierającej go. A swoją drogą ciekawe, że dla takich elips mamy

$$e \leq E \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Oczywiście od czasów Keplera wiemy, że orbity planet nie są kołami, lecz elipsami. Wiemy też, że Słońce nie znajduje się w środku elipsy, a w jednym z ognisk. Gdybyśmy jednak narysowali okrąg o promieniu 7 cm (największy, jaki się zmieści na zeszytowej kartce), to odpowiadający mu skalą rysunek orbity Wenus nie odbiegałby od tego okręgu więcej niż na grubość linii ołówkowej, a położenie Słońca należałoby na tym rysunku odsunąć od środka okręgu o niecałe pół milimetra. Wenus ma orbitę najbliższą okręgu, ale dla Neptuna czy Ziemi sytuacja nie różni się istotnie. „Prawdziwe” elipsy zakreślają tylko Merkury i Pluton.

Zgodnie z przewidywaniami szczególnej teorii względności energia fotonu ( $\varepsilon$ ) w układzie poruszającym się z prędkością  $v$  względem laboratorium wiąże się w następujący sposób z energią fotonu, mierzoną w laboratorium ( $\varepsilon_0$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \gamma (1 + \beta \cos \theta),$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkiem ruchu fotonu i wektorem prędkości,  $\beta = v/c$  ( $c$  — prędkość światła), a  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . W ubiegłym roku przeprowadzono w Los Alamos (USA) eksperyment mający na celu zweryfikowanie tej relacji. Wiązkę relatywistycznych atomów wodoru wzbudzano światłem lasera. Atomy miały energię kinetyczną równą 800 MeV, co odpowiada prędkości  $v = 0,84 c$ . Laser emitujący fotony o energii  $\varepsilon_0 = 4,66$  eV oświetlał wiązkę atomów pod różnymi kątami  $\theta$ , co pozwalało zmieniać energię fotonów w układzie poruszającym się razem z wiązką od 1,4 eV do 15,8 eV. Wzbudzone atomy były następnie jonizowane i na podstawie liczby protonów wyznaczano wartość  $\varepsilon$ .

Uzyskana wartość stosunku zmierzonej energii do energii wynikającej ze szczególnej teorii względności jest równa 1,00004 z błędem  $\pm 0,00027$ . W najbliższym czasie dokładność pomiarów zostanie zwiększona tysiąc razy.

Revolucja przemysłowa końca XVIII i początku XIX wieku i towarzyszące jej poszukiwania nowych złóż surowców pociągnęły za sobą szybki rozwój badań geologicznych. Próbowano zrozumieć procesy powstawania różnych typów skał oraz poznać skalę czasową ich przebiegu. Badania tempa procesów wietrzenia skał i przyrostu mułów w deltach rzek oraz rozmieszczenia i grubości warstw skał osadowych pozwoliły ustalić, że powstawały one przez ponad 200 mln lat. Dla fizyków był to okres ogromnie długi, nie do pogodzenia z ich ówczesnym stanem wiedzy. William Thomson (lord Kelvin), posługując się wynikami przeprowadzonych w 1858 roku pomiarów temperatury wnętrza Ziemi obliczał, że czas jej stygnięcia od stanu płynnego był krótszy od 200 mln lat (w ostatecznej wersji obliczeń czas ten był krótszy od 40 mln lat). Hermann von Helmholtz założył, że energia wypromieniowana przez Słońce powstaje w procesie jego kurczenia się pod wpływem siły grawitacji i oszacował wiek Słońca na nie więcej niż 30 mln lat. Bardziej wydajne energetycznie procesy nie były wówczas znane. Wobec sprzeczności tych wyników z ocenami geologów Kelvin żądał rewizji geologii i na zebraniu Towarzystwa Geologicznego w Glasgow w 1866 roku stwierdził:

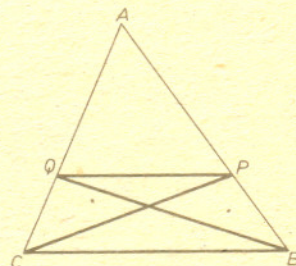
*Wydaje się, że jest niezbędna istotna zmiana geologicznych spekulacji. Brytyjska geologia w chwili obecnej jest w całkowitej sprzeczności z zasadami filozofii natury (tj. fizyki).* Tym razem Kelvin, oczywiście, nie miał racji. Dopiero jednak po odkryciu w 1896 r. przez Becquerela zjawiska promieniotwórczości fizycy poznali procesy, których wydajność energetyczna i skala czasowa pozwoliły pogodzić fizykę i geologię, a prace Hansa Bethego i Carla Friedricha Weizsäckera z lat 1937—38 wyjaśniły procesy produkcji energii we wnętrzu Słońca. Dziś oceniamy wiek Ziemi na 4,5 miliarda lat.

Czy w jakimś miesiącu może nie być ani jednej pełni Księżyca? Oczywiście jedynym możliwym kandydatem jest luty. Miesiąc synodyczny (okres przebiegu pełnego cyklu faz księżycowych) trwa 29,531 dni, a więc dłużej niż luty — nawet jeśli jest to luty roku przestępnego. Lata, w których w lutym nie ma pełni, wypadają bardzo rzadko — zaledwie kilka w stuleciu. Najbliższy luty bez pełni będzie dopiero w 1999 roku. Z tego samego powodu luty jest jedynym miesiącem w roku, w którym nie mogą wystąpić dwie jednakowe fazy Księżyca.

Zrozumiałe jest, że przesunięcie linii widmowych gwiazdy względem ich położenia laboratoryjnych świadczy, że gwiazda porusza się radialnie względem obserwatora (efekt Dopplera). Jeżeli widmo w całości przejawia przesunięcie zmienne, to oznacza, że prędkość radialna gwiazdy zmienia się, gdyż np. gwiazda jest składnikiem układu podwójnego. Bywa jednak i tak, że niektóre linie widma gwiazdy wykazują poczerwienienie, podczas gdy jednocześnie inne linie wykazują poniebieszczenie. Po jakimś czasie przesunięcia tych zespołów linii zmieniają znaki i zjawisko okresowo się powtarza. Tak zachowują się widma gwiazd pulsujących, cefeid. Dzieje się tak, ponieważ jedne linie widmowe powstają wysoko w atmosferze cefeidy, inne w głębszych jej warstwach, warstwy te zaś pulsują nie w fazie. Np. kiedy zewnętrzna atmosfera się zapada, głębsze jej warstwy akurat ekspandują.

Jeśli ktoś zna wzór na pole trójkąta (połowa iloczynu podstawy przez wysokość), to może udowodnić twierdzenie Talesa w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} &= \frac{\text{pole } \triangle APQ}{\text{pole } \triangle PBQ} = \\ &= \frac{\text{pole } \triangle AQP}{\text{pole } \triangle QCP} = \frac{AQ}{QC}. \end{aligned}$$



Pierwsza i trzecia równość wynika z pomnożenia (podzielenia) przez wspólną wysokość trójkątów, a druga — z równoległości  $BC$  i  $PQ$ : wysokości trójkątów  $PBQ$  i  $QCP$  opuszczone na wspólną podstawę  $PQ$  są równej długości.

Euklides znał wzór na pole trójkąta, więc w *Elementach* (300 r. p.n.e.) tak właśnie dowodził twierdzenia Talesa. Ale czyżby autorzy podręczników szkolnych wzoru na pole trójkąta nie znali?



$10^{-26}$

# Najbliższe bogate gromady galaktyk

(w rzucie na płaszczyznę Drogi Mlecznej)

