



Zorza polarna
— Alaska
(zob. artykuł
na str. 6)

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(163)

O tomografii komputerowej <i>prof. dr Przemysław Wojtaszczyk</i>	str. 1
Czytelnicy piszą	str. 3
Falowe własności ruchu elektronów w przewodnikach <i>dr Mikołaj Sawicki</i>	str. 4
Minimum Maundera <i>mgr Krzysztof Jahn</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
O pewnym problemie Stanisława Mazura <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str. 10
Zadania	str. 11
Zadanie Kwanta	str. 11
Dziwny wieczór <i>Ian Stewart</i>	str. 12
Rysujemy okręgi	str. 13
Klub 44	str. 14
Patrz w niebo	str. 15
Drobiazgi	str. 16

W następnym numerze:
Dysk akrecyjny

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmoki — v-przewodniczącą
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochowski
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczącą

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

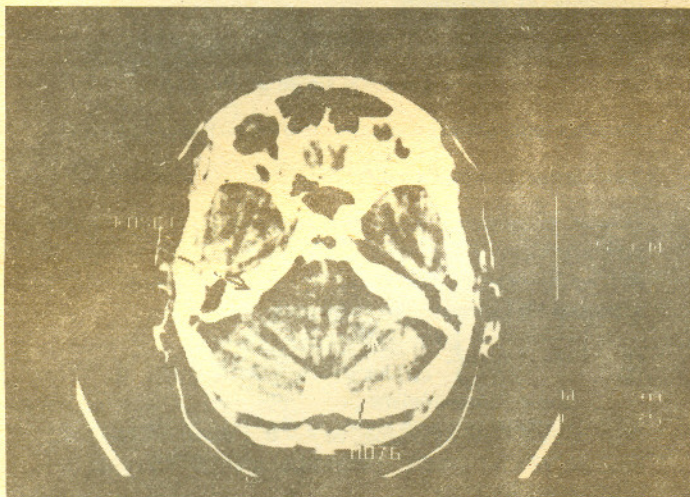
Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr inż. arch. Mariola Łotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

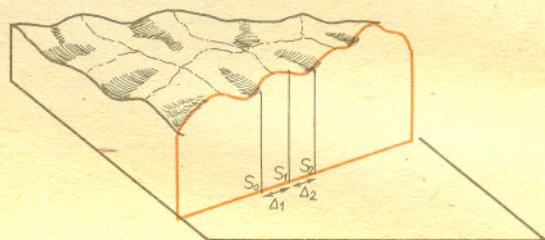
Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 4362/12/87. K-23.



są organy, przez które przechodzi, więc porównanie x_1 z x_0 daje nam ich sumaryczną gęstość. To, co nas natomiast interesuje, to rozkład gęstości wewnątrz ciała. Naturalnym pomysłem jest robienie zdjęć z różnych stron i porównywanie ich ze sobą. Na tej zasadzie właśnie działa tomograf. Praktycznie daje on obrazy przekrojów ciała pacjenta. W wybranej płaszczyźnie przekroju wysyłamy w różnych kierunkach liniowe wiązki promieni Roentgena o ustalonym natężeniu początkowym x_0 i mierzymy natężenie końcowe x_1 . A teraz zacznijmy tłumaczyć to na język matematyki.



Na płaszczyźnie dana jest nieujemna funkcja f , reprezentująca gęstość rentgenowską. Wzdłuż prostej L biegnie promień rentgenowski, który jest pochłaniany proporcjonalnie do gęstości f i do długości przebytej drogi. Jeżeli gęstość jest stała i równa c , to promień o natężeniu początkowym x_0 po przebyciu drogi Δ będzie miał natężenie $x_0 \exp(-c\Delta)$ (exp oznacza funkcję wykładniczą o podstawie e). Jeśli gęstość f nie jest stała, to bierzemy punkty s_0, s_1, \dots, s_n jak na rysunku, i przyjmujemy $\Delta_i = d(s_i, s_{i-1})$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Jeżeli Δ_i jest małe, to funkcja f jest w przybliżeniu stała na odcinku $[s_0, s_1]$, a więc natężenie promieniowania w punkcie s_1 równe jest w przybliżeniu $x_0 \exp(-f(s_1) \cdot \Delta_1)$. Analogicznie w punkcie s_2 jest ono równe w przybliżeniu $x_0 \exp(-f(s_1)\Delta_1) \cdot \exp(-f(s_2)\Delta_2) = x_0 \cdot \exp[-(f(s_1)\Delta_1 + f(s_2)\Delta_2)]$. Stąd widać, że natężenie wyjściowe x_1 będzie równe w przybliżeniu $x_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta_i\right)$, a więc, że po przejściu granicznym (np. dla ciągłej funkcji f) mamy

$$x_1 = x_0 \exp\left(-\int_L f(s) ds\right), \quad \text{czyli} \quad \log(x_0/x_1) = \int_L f(s) ds.$$

Mamy następujący problem matematyczny:

Dla funkcji f , określonej na płaszczyźnie, znamy $\int_L f(s) ds = F_L$ dla każdej prostej L . Znaleźć funkcję f .

Trochę historii. Problem matematyczny omówiony tutaj został postawiony i całkowicie rozwiązany przez Johanna Radona w pracy opublikowanej w roku 1917. Podobne problemy pojawiały się w fizyce, matematyce i astronomii zarówno nieco wcześniej od pracy Radona, jak i dużo później i były wielokrotnie i niezależnie rozwiązywane różnymi metodami. Wydaje się, że pierwszym zastosowaniem transformaty Radona do obróbki danych doświadczalnych była praca radzieckiego astronoma W. A. Ambarcumiana, który w roku 1936 badał rozkład prędkości ruchu gwiazd względem Ziemi. Tomografię komputerową jako metodę diagnostyki medycznej opracowali w latach sześćdziesiątych Allan M. Cormack i Godfrey N. Hounsfield. Do praktyki klinicznej została ona wprowadzona w roku 1973. W roku 1979 jej twórcy otrzymali nagrodę Nobla w dziedzinie medycyny.

Podziękowanie. Chciałbym podziękować mgr Beacie Toczyłowskiej i dr Renacie Szamowskiej z Zakładu Radiologii Akademii Medycznej w Warszawie za wiele cennych informacji i przygotowanie zdjęć.

Każdy z nas miał zapewne robione zdjęcie rentgenowskie. Jest to obecnie niezastąpiona metoda diagnostyki medycznej. Nie jest to jednak metoda doskonała. Na przykład: na podstawie zwykłego zdjęcia klatki piersiowej nie można stwierdzić, czy łopátka jest z przodu, czy z tyłu. Oczywiście i bez zdjęcia każdy wie, gdzie ona jest, ale bywają bardziej złożone sytuacje, kiedy odpowiedź nie jest tak oczywista. Wtedy prostym i szeroko w medycynie stosowanym wyjściem jest zrobienie zdjęcia z boku. Ale wyobraźmy sobie, że chcemy zobaczyć coś (np. guz) w mózgu. Na zdjęciu wyraźnie widać kości, ale zupełnie nie wiadomo, czy ledwo, ledwo widoczna różnica w jasności zdjęcia to przypadkowy efekt niedoskonałości aparatury lub kliszy, minimalna różnica w grubości czaszki czy też istotna zmiana w tkance samego mózgu.

Czytelnik dziwi się zapewne, skąd nagle w *Delcie* o medycynie. Otóż odpowiedź jest prosta. Od kilkunastu lat można za pomocą promieni Roentgena otrzymywać bardzo dokładne obrazy wnętrza organizmu. Umożliwia to tomograf komputerowy. Celem tego artykułu jest wyjaśnienie matematycznych zasad działania tego urządzenia. Zastanówmy się, co dzieje się w czasie zdjęcia rentgenowskiego. Wiązka promieni Roentgena o znanym natężeniu początkowym x_0 przechodzi przez ciało pacjenta, gdzie jest pochłaniana, a natężenie końcowe x_1 jest rejestrowane na kliszy. Ponieważ promieniowanie rentgenowskie pochłaniane jest tym silniej, im gęstsze (w sensie rentgenowskim)

(1) Nasuwa się pytanie: po pierwsze, czy to się w ogóle daje zrobić, po drugie — jeśli się daje, to jak?

W dalszym ciągu tego artykułu pokażemy, że odpowiedź na pytanie pierwsze jest pozytywna oraz naszkicujemy jedną z odpowiedzi na pytanie drugie.

W dalszych naszych rozważaniach przyjmujemy, że funkcja f bardzo szybko maleje w nieskończoności, tak, że wszystkie potrzebne nam całki będą zbieżne. W szczególności F_L będą dobrze określone i skończone dla wszystkich prostych L .

Opiszemy teraz transformatę Radona. Prostą L na płaszczyźnie możemy określić dwiema liczbami $p \in \mathbb{R}$ oraz $\varphi \in (0, 2\pi]$. Wtedy $L_{p,\varphi} = \{(x, y) : x \cos \varphi + y \sin \varphi = p\}$. Tę samą prostą przedstawiamy w postaci parametrycznej jako $(x, y) = A + t v$, gdzie A jest punktem na płaszczyźnie, a v jest wektorem o długości 1. Dla funkcji f , określonej na płaszczyźnie, definiujemy jej transformatę Radona Rf jako funkcję określoną wzorem

$$Rf(p, \varphi) = \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(A + t v) dt.$$

Aby odpowiedzieć na pytanie (1), pokażemy, że R jest różnowartościowe, tzn. jeżeli f i g są różnymi funkcjami, to $Rf \neq Rg$, oraz podamy pewne wskazówki, jak znajdować f znając Rf .

Zdefiniujemy wielomiany Hermite'a $H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2}$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Łatwo zobaczyć, że $\frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2}$ jest wielomianem

stopnia k pomnożonym przez e^{-t^2} , a stąd $H_k(t)$ to wielomian stopnia k . Mamy również następującą relację, zwaną relacją ortogonalności

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_s(t) H_k(t) e^{-t^2} dt = 0 \quad \text{dla } s \neq k, \quad s, k = 0, 1, 2, \dots$$

Za pomocą wielomianów Hermite'a określamy funkcje dwóch zmiennych $\psi_{k,l}(x, y) = H_k(x) H_l(y) e^{-x^2 - y^2}$. Jest faktem, który podamy bez dowodu, że każda interesująca nas funkcja f daje się zapisać jako

$$(3) \quad f(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} \psi_{k,l}(x, y).$$

Mając ten fakt łatwo uwierzyć, że

$$Rf(p, \varphi) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} R\psi_{k,l}(p, \varphi).$$

Widać więc, że aby dokładnie zbadać transformatę Radona, należy obliczyć $R\psi_{k,l}$. Niech $\partial_x f$ (odpowiednio $\partial_y f$) oznacza pochodną cząstkową względem x (lub y) funkcji $f(x, y)$. Mamy

$$\begin{aligned} R(\partial_x f)(p, \varphi) &= R\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right)_{(p,\varphi)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \left[\int_{L_{p,\varphi}} f(x+h, y) - \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \left[\int_{L_{p+h \cos \varphi, \varphi}} f(x, y) - \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h [Rf(p+h \cos \varphi, \varphi) - Rf(p, \varphi)] = \\ &= \cos \varphi \partial_p (Rf)(p, \varphi). \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy $R(\partial_y f)(p, \varphi) = \sin \varphi \partial_p (Rf)(p, \varphi)$. Korzystając z definicji wielomianów Hermite'a możemy napisać $\psi_{k,l}(x, y) = (-1)^{k+l} \partial_x^k \partial_y^l e^{-x^2 - y^2}$, a więc powyższe wzory dają

$$(4) \quad R(\psi_{k,l})(p, \varphi) = (-1)^{k+l} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \partial_p^{k+l} [R(e^{-x^2 - y^2})](p, \varphi).$$

Aby obliczyć $R(e^{-x^2 - y^2})$, zauważmy, że obrót dookoła zera nie zmienia wartości funkcji $e^{-x^2 - y^2}$, zatem $R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi)$ zależy tylko od odległości prostej $L_{p,\varphi}$ od zera, a więc od p . Mamy więc

$$R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 - y^2} dy = e^{-p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

O tej ostatniej całce wiadomo, że równa się ona $\sqrt{\pi}$, więc ostatecznie $R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$. Podstawiając to do równania (4), otrzymamy

$$(5) \quad R(\psi_{k,l})(p, \varphi) = (-1)^{k+l} \sqrt{\pi} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \partial_p^{k+l} (e^{-p^2}) = \sqrt{\pi} \cos^k \varphi \sin^l \varphi e^{-p^2} H_{k+l}(p).$$

Jesteśmy teraz gotowi dać odpowiedź na pierwsze z pytań (1).

Twierdzenie. Transformata Radona R jest różnowartościowa.

Dowód. Przypuśćmy, że dla dwóch funkcji f_1, f_2 i dla każdej pary p, φ mamy $Rf_1(p, \varphi) = Rf_2(p, \varphi)$. Stąd łatwo wynika, że $R(f_1 - f_2)(p, \varphi) = 0$. Oznaczając $f = f_1 - f_2$ oraz pisząc f w postaci (3) i stosując (5) otrzymamy

$$(6) \quad \sqrt{\pi} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} \cos^k \varphi \sin^l \varphi e^{-p^2} H_{k+l}(p) = 0.$$

Naszym celem jest wykazanie, że $f = 0$, a do tego wystarczy pokazać, że z (6) wynika, iż wszystkie $a_{k,l} = 0$. Równość (6) przepisujemy jako

$$\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^n a_{s,n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] H_n(p) e^{-p^2} = 0$$

Mnożąc tę równość przez $H_m(p)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, i całkując otrzymamy

$$0 = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^n a_{s,n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(p) H_m(p) e^{-p^2} dp.$$

Z warunków ortogonalności (2) wynika, że suma ta redukuje się do m -tego składnika, a więc

$$\sum_{s=0}^m a_{s,m-s} \cos^s \varphi \sin^{m-s} \varphi = 0 \quad \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots$$

oraz $\varphi \in (0, 2\pi]$.

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $a_{k,l} = 0$ dla $k, l = 0, 1, 2, \dots$. Otrzymaliśmy więc różnowartościowość R .

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć f znając Rf . Tak naprawdę to będziemy obliczali współczynniki $a_{k,l}$ w (3).

Jak już wiemy,

$$Rf(p, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left[\sum_{s=0}^n a_{s,n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] H_n(p) e^{-p^2}.$$

Używając relacji ortogonalności, analogicznie jak poprzednio, otrzymamy

$$\sum_{s=0}^n a_{s,n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi = B_n \int_{-\infty}^{+\infty} Rf(p, \varphi) H_n(p) dp,$$

gdzie $B_n = \left[\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(p) e^{-p^2} dp \right]^{-1}$.

Pisząc $\sum_{s=0}^m a_{s,m-s} \cos^s \varphi \sin^{m-s} \varphi = \sin^m \varphi \sum_{s=0}^m a_{s,m-s} \operatorname{ctg}^s \varphi$

widzimy, że $\frac{B_n}{\sin^n \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} Rf(p, \varphi) H_n(p) dp$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n zmiennej $\operatorname{ctg} \varphi$. Znając ten wielomian

możemy obliczyć jego współczynniki $a_{s, n-s}$, a czyniąc to dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ otrzymamy wszystkie współczynniki $a_{k, l}$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$. To zaś daje możliwość odtworzenia funkcji $f(x, y)$.

Jest to jednak tylko schemat teoretyczny. W praktycznym badaniu tomograficznym nie możemy poznać $Rf(p, \varphi)$ dla wszystkich wartości $p \in \mathbf{R}$ i $\varphi \in (0, 2\pi)$, a tylko dla pewnego skończonego zbioru prostych (p, φ) . Ponadto otrzymane wartości $Rf(p, \varphi)$ zawsze obarczone są pewnym błędem. Należy więc znaleźć efektywne metody przybliżonych obliczeń oraz sposoby sprawnej ich realizacji na komputerze. Wymaga to dalszych, trudnych badań matematycznych oraz opracowania bardzo skomplikowanych programów komputerowych. Przedstawienie tych zagadnień wyraźnie jednak wykracza poza ramy tego artykułu i wiedzę autora.

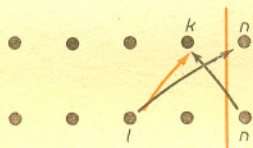
Ostateczny wynik, czyli nowoczesny tomograf komputerowy, który miałem przyjemność oglądać w Zakładzie Radiologii Akademii Medycznej w Warszawie, jest urządzeniem naprawdę imponującym. W celu zrobienia jednego takiego zdjęcia, jak na okładce, czy na początku artykułu (a badanie jednego pacjenta to kilkanaście do kilkudziesięciu takich zdjęć), tomograf wykonuje pół miliona oddzielnych pomiarów, czyli

mierzy $\int_L f(x, y) ds$ dla ponad pół miliona prostych L . W kilka sekund daje on na monitorze obraz całego przekroju lub powiększenie wybranej jego części. Tomograf pamięta wszystkie przekroje dla danego pacjenta i w razie potrzeby potrafi je przetworzyć na przekrój inną płaszczyzną. Używając dużo mniejszej liczby prostych może dać bardzo szybką serię zdjęć (oczywiście, mniej dokładnych), co pozwala zobaczyć ruch pewnych organów albo przepływ wprowadzonego do organizmu kontrastu. Ma jeszcze wiele innych możliwości. Oczywiście dla medycyny to wszystko to dopiero początek, trzeba dużej wiedzy i doświadczenia, aby wiedzieć, jaką chorobę na takich obrazkach widać.

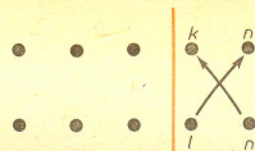
Transformata Radona ma, oczywiście, naturalne uogólnienia. Wiele z nich jest użytecznych zarówno w matematyce, jak i w zastosowaniach. Można np. rozważać funkcje trzech zmiennych i całki po wszystkich płaszczyznach w przestrzeni. Zasadnicze wyniki matematyczne są tu podobne (choć nieco bardziej skomplikowane) do przedstawionych powyżej. Ta matematyczna teoria jest podstawą jeszcze nowszej techniki diagnostyki medycznej, opartej na zjawisku magnetycznego rezonansu jądrowego (nazywanego często angielskim skrótem NMR).



Rozwiązanie zadania M 476. Wszystkie funkcje $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, spełniające warunki zadania, możemy podzielić na dwie klasy. Do pierwszej zaliczymy te, dla których $f(n) = k \neq l = f^{-1}(n)$.



Ustalmy teraz l . Funkcji f możemy wtedy przyporządkować funkcję $g: \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$ określoną tak: $g(i) = f(i)$ dla $i \neq l$, $g(l) = k$. W ten sposób otrzymamy wszystkie funkcje określone na $\{1, 2, \dots, n-1\}$ i spełniające warunki zadania. Ponadto powyższe przyporządkowanie, przy ustalonym l , jest różnowartościowe. Jednak l może przyjmować $n-1$ wartości, zatem pierwsza klasa liczy $(n-1) \cdot P_{n-1}$ funkcji. Do drugiej klasy zaliczymy funkcje, dla których $f(n) = f^{-1}(n) = l$.



Ustalając l , przyporządkujemy funkcji f funkcję g , będącą jej obcięciem do zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{l\}$. Podobnie jak poprzednio, widzimy, że druga klasa liczy $(n-1) \cdot P_{n-2}$ funkcji. Ostatecznie $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$ (przyjmujemy $P_0 = 1$).

Czytelnicy piszą

Pan Ryszard Bublewicz z Jeleniej Góry zauważył, że:

wycinając z kuli walec obrotowy o osi przechodzącej przez środek kuli otrzymamy „pierścień kulisty” o objętości $\frac{1}{6} \pi d^3$, gdzie d to długość zawartego wewnątrz kuli odcinka tworzącej walca.

A zatem

objętość „pierścienia kulistego” zależy tylko od jego wysokości — w szczególności nie zależy od promienia kuli, z której został wycięty.

A oto dowód. Przyjmując oznaczenia z rysunku i sięgając (do głowy lub tablic) po stosowne wzory mamy:

$$\text{objętość kuli to } \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$\text{objętość walca to } \pi q^2 d = 2\pi(r^2 - h^2)h,$$

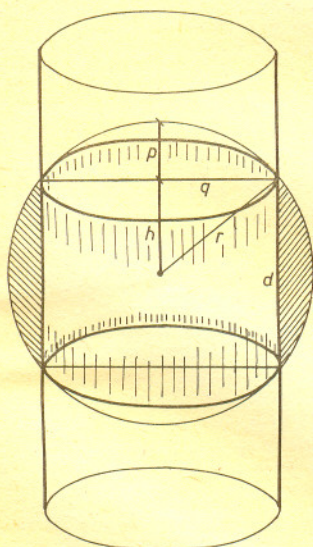
$$\text{objętość czaszy to } \frac{1}{2} \pi q^2 p + \frac{1}{6} \pi p^3 = \frac{1}{3} \pi(r-h)^2(2r+h).$$

Ponieważ wycinamy walec i dwie czasze, więc objętość części wyciętej wyniesie

$$2\pi(r^2 - h^2)h + \frac{2}{3} \pi(r-h)^2(2r+h) = \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3)$$

i rzeczywiście objętość pierścienia będzie

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3) = \frac{4}{3} \pi h^3 = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

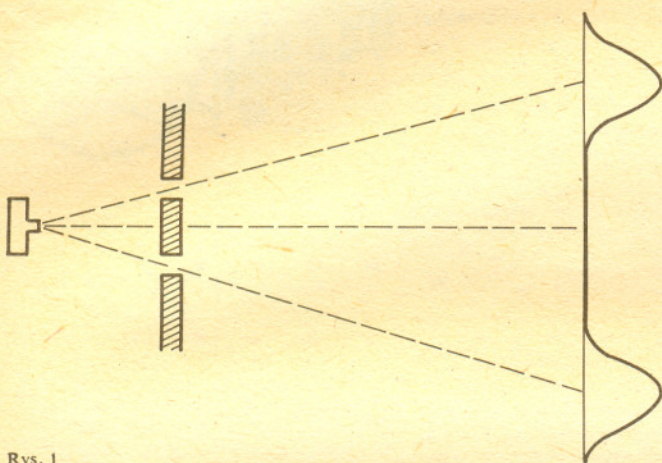


Falowe własności ruchu elektronów w przewodnikach

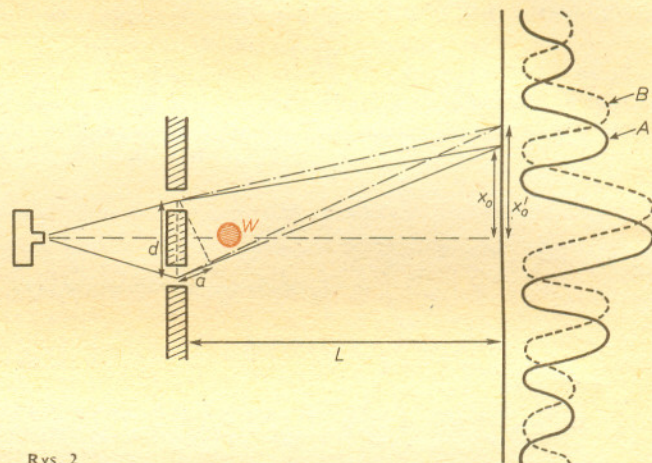
Dr Mikołaj SAWICKI

64 lata temu Louis de Broglie doszedł do wniosku, że materia powinna z natury rzeczy mieć także własności falowe, a 60 lat temu hipoteza ta została doświadczalnie potwierdzona we wspólnym doświadczeniu C. R. Davisona i L. H. Germera, w którym wiązka elektronów odbita od kryształów niklu utworzyła obraz dyfrakcyjny.

Te wydarzenia, a także szereg im współczesnych, uświadomiły fizykom, że materia oglądana w skali atomowej (na przykład pojedyncze atomy czy elektrony) zachowuje się zupełnie inaczej niż objekty, z którymi mamy zwykle do czynienia. Nasze intuicje ukształtowane są w wyniku doświadczeń codziennego życia z udziałem obiektów o rozmiarach makroskopowych, czyli nie mniejszych niż, powiedzmy, 10^{-4} m – 10^{-3} m. Ruch przedmiotów makroskopowych opisywany jest mechaniką klasyczną, opartą o zasady dynamiki Newtona i nasze intuicje są w naturalny sposób odzwierciedleniem praw mechaniki newtonowskiej. Intuicje te zawodzą całkowicie i stają się zupełnie bezużyteczne w przypadku atomów, czyli obiektów o rozmiarach rzędu 10^{-10} m, typowych dla tak zwanej skali mikroskopowej. Zachowanie się materii w skali mikroskopowej opisywane jest przez mechanikę kwantową, mechanika newtonowska jest tylko granicznym przybliżeniem mechaniki kwantowej przy przejściu do obiektów o rozmiarach makroskopowych. Nic dziwnego, że nasze codzienne, makroskopowe wyobrażenia zawodzą w skali mikroskopowej.



Rys. 1



Rys. 2

Długości dróg przebytych przez falę przechodzącą przez szczelinę 1 i szczelinę 2 są różne, a więc również fazy Φ_1 i Φ_2 będą różne. W wyniku tego prawdopodobieństwo zarejestrowania elektronu w punkcie x_0 ekranu ma postać $|C_1 e^{i\Phi_1} + C_2 e^{i\Phi_2}|^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2 C_1 C_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2)$. Różnica faz $\delta = \Phi_2 - \Phi_1$ wyznacza obraz interferencyjny. Skoro obydwie fale spotykają się w chwili t_0 w tym samym punkcie ekranu, a droga od działa przez szczelinę 2 do punktu x_0 jest o a dłuższa od drogi przez szczelinę 1, to z falą, która przebyła szczelinę 1, interferuje ta fala przechodząca przez szczelinę 2, która opuściła działło o $\Delta t = a/v$ wcześniej. Różnica faz wynosi więc $\delta = E \cdot \Delta t / \hbar$, a ponieważ fala płaska porusza się z prędkością $v = E/p$, więc $\Delta t = a/v$ i ostatecznie $\delta = a \cdot p / \hbar = 2 \pi a / \lambda$. Kiedy przesunięcie fazowe δ jest parzystą wielokrotnością π , przyczynki od obydwu szczelin wzmacniają się najbardziej, kiedy zaś δ jest nieparzystą wielokrotnością π , to osłabiają się wzajemnie. Dla punktu leżącego na osi symetrii ($x_0 = 0$) mamy $a = 0$ i jest to maksimum prawdopodobieństwa. Następne maksimum pojawia się dla $\delta = \pm 2 \pi$, czyli dla $a = \pm \lambda$. Biorąc pod uwagę, że odległość d między szczelinami jest rzędu 10^{-6} m, a odległość L ekranu od przesłony rzędu 10^{-1} m, można przyjąć, że zachodzi relacja $a/d = x_0/L$, z czego wynika, że maksimum to pojawia się w punktach o współrzędnych $x_0 = \pm \lambda \cdot L/d$.

W roku 1985 zaobserwowano po raz pierwszy pewne zjawisko kwantowe w metalach, przy czym charakterystyczne rozmiary próbek sięgnęły 1 mikrona ($1 \mu\text{m} = 10^{-6}$ m), a więc skali pośredniej między zjawiskami mikro- i makroświata. Tak pojawiła się nowa, „mezoskopowa” skala wielkości charakterystycznych. Zjawisko, o którym mowa, to efekty interferencyjne typu Aharonova — Bohma w prądzie elektrycznym płynącym w metalowych pierścieniach. Przedstawię poniżej, jak zjawisko to związane jest z podstawowymi ideami mechaniki kwantowej.

Rozważmy na wstępie tak zwane doświadczenie z dwiema szczelinami. Zaznaczam od razu, że doświadczenie to w formie przedstawionej poniżej nie zostało nigdy wykonane — opisuję tu więc pewne „doświadczenie myślowe”, które w najprostszym i najdobitniejszym sposobie ilustruje wnioski wynikające z wielu trudnych, rzeczywiście przeprowadzonych eksperymentów. Schemat naszego doświadczenia myślowego przedstawia rysunek 1. Działło elektronowe umieszczone przed przesłoną wyrzela elektrony o jednakowej energii. W przesłonie znajdują się dwie szczeliny, a za przesłoną umieszczony jest ekran. Wyobraźmy sobie, że ekran jest pokryty układem mikroskopowych detektorów pozwalających ustalić, w który punkt ekranu trafił zarejestrowany przez nie elektron. Wyobraźmy sobie także, że działło wysyła elektrony na tyle rzadko, iż w każdej chwili od źródła do ekranu porusza się nie więcej niż jeden elektron. Do których obszarów ekranu dociera najwięcej elektronów? Lub nieco inaczej — jakie jest prawdopodobieństwo zarejestrowania elektronu w poszczególnych punktach ekranu?

Nasza intuicja (oparta, jak pamiętamy, na mechanice newtonowskiej) podpowiada, że elektron, wobec braku sił nań działających, porusza się ruchem prostoliniowym, a do ekranu dotrą tylko te elektrony, które trafiły w jedną albo drugą szczelinę. Wobec tego z największym prawdopodobieństwem elektrony trafiać będą do tych punktów ekranu, które leżą na prostych poprowadzonych od działa przez każdą z dwóch szczelin, a rozkład prawdopodobieństwa powinien wyglądać jak gładka krzywa na rysunku 1. Te intuicyjne oczekiwania zawodzą jednak całkowicie, a rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa wygląda jak krzywa A na rysunku 2. Ten nieoczekiwany wynik jest manifestacją falowych własności elektronów. Zgodnie z mechaniką kwantową elektron o pędzie p i energii E należy opisywać jako pakiet (wiązkę) fal o średniej długości $\lambda = h/p$ i częstotliwości kołowej $\omega = E/\hbar$, gdzie h jest stałą Plancka, oraz $\hbar = h/2\pi$. W naszych rozważaniach będziemy posługiwać się funkcjami falowymi w postaci fal płaskich $\psi(r, t) = e^{i(pr - Et)/\hbar}$. Elektron trafia do poszczególnych punktów ekranu „w całości”, ale prawdopodobieństwo trafienia do punktu r_0 w chwili t_0 jest proporcjonalne do kwadratu modułu jego funkcji falowej, tzn. do $|\psi(r_0, t_0)|^2$. Na całkowitą funkcję falową elektronu w dowolnym punkcie ekranu składają się przyczynki falowe od obydwu szczelin. Przyczynki te mają postać $C_1 e^{i\Phi_1}$ i $C_2 e^{i\Phi_2}$, gdzie Φ_1 i Φ_2 są fazami fal przybywających do punktu x_0 w chwili t_0 od szczelin 1 i 2. Maksima prawdopodobieństwa będą wypadać w punktach $x_0 = \pm n \cdot \lambda \cdot L/d$.

Skoro wyrażenia na pęd i energię ulegają modyfikacji, to faza funkcji falowej, liczona wzdłuż trajektorii (j) od działka przez szczelinę numer j do punktu r_0 ekranu powinna modyfikować się w następujący sposób:

$$\langle pr_0 - Et \rangle / \hbar \rightarrow \langle pr_0 - e \int A dr - Et + e \int \varphi dr \rangle / \hbar.$$

j -ta zmiana fazy powinna być widoczna w rozkładzie prawdopodobieństwa zarejestrowania elektronu w danym punkcie ekranu x_0 . Zauważmy, że gdy nie ma pola elektrycznego ($E = 0, B \neq 0$), to na zmianę fazy wpływa tylko człon $\int A dr$. Mówimy wtedy o magnetostatycznym efekcie Aharonova-Bohma. Podobnie gdy $B = 0, E \neq 0$, to zmiana fazy pochodzi od członu $\int \varphi dr$ i mówimy o efekcie elektrostatycznym. W dalszym ciągu będziemy zajmować się wyłącznie efektem magnetostatycznym. Niech różnica faz $\delta(B)$ w punkcie x_0 w nieobecności pola B wynosi $\delta(0)$. Włączamy teraz pole B prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Faza wzdłuż trajektorii 1 zmienia się o $-\frac{e}{\hbar} \int A dr$;

podobnie faza wzdłuż trajektorii 2 zmienia się o $-\frac{e}{\hbar} \int A dr$. W takim razie różnica faz wynosi teraz

$$\delta(B) = \delta(0) + \left(-\frac{e}{\hbar} \int A dr + \frac{e}{\hbar} \int A dr \right).$$

Zauważmy, że skoro każdą całkę obliczamy od działka do ekranu, to ich różnica jest całką po zamkniętej krzywej C od działka przez szczelinę 1 do ekranu i z powrotem przez szczelinę 2 do działka, co zapisujemy

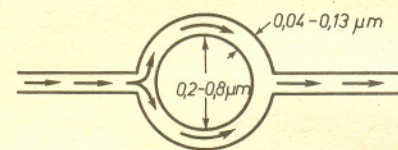
$$\int A dr - \int A dr = \oint A dr. \text{ Ale taką całkę}$$

wzdłuż krzywej zamkniętej można zamienić na całkę po powierzchni S ograniczonej tą krzywą

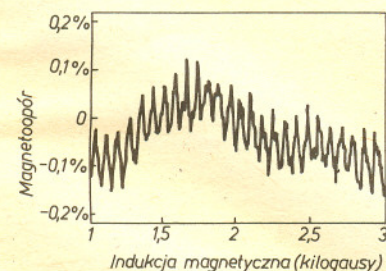
$$\oint A dr = \int_S (\text{rot } A) n d\sigma.$$

Wektor n jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni S i w naszym przypadku skierowanym poza płaszczyznę rysunku 2. Pamiętając, że $\text{rot } A = B$ widzimy, że całka ta jest po prostu całkowitym strumieniem Φ pola B przez powierzchnię S

$$\Phi = \int_S B n d\sigma.$$



Rys. 3



Rys. 4

($n = 0, 1, 2, \dots$). Powtórzmy jeszcze raz — elektron trafia w rozmaite punkty ekranu, ale prawdopodobieństwo trafienia w punkt o współrzędnej x_0 jest proporcjonalne do wartości $|\psi(r_0, t_0)|^2$, którą ilustruje krzywa A . Co dzieje się, gdy elektron o ładunku $-e$ porusza się z prędkością v w zewnętrznym, nie zależącym od czasu polach elektrycznym E i magnetycznym B ? Z punktu widzenia mechaniki klasycznej działa nań siła Lorentza $F = -e(E + v \times B)$. Od lat trzydziestych wiadomo było, że opis takiego ruchu w mechanice kwantowej wymaga zmodyfikowania wyrażen na pęd i energię elektronu: $p \rightarrow p - eA$, $E \rightarrow E - e\varphi$, gdzie związek potencjału skalarnego φ i potencjału wektorowego A ze stałymi w czasie polami E i B dany jest przez $E = -\text{grad } \varphi$, $B = \text{rot } A$. Jednak dopiero w roku 1959 Y. Aharonov i D. Bohm wskazali na jej nieoczekiwane skutki w eksperymencie z dwiema szczelinami. Gdy między działem elektronowym i ekranem znajduje się obszar, w którym $B = 0$, to różnica faz między drogami 1 i 2 dana jest wyrażeniem

$$\delta(B) = \delta(0) + \frac{e}{\hbar} \Phi,$$

gdzie Φ jest całkowitym strumieniem pola B przez powierzchnię, której brzeg stanowią odcinki dróg 1 i 2. Obraz interferencyjny przesuwają się, maksima i minima pojawiają się w nowych położeniach wyznaczonych przez całkowite przesunięcie fazowe. Przykładowo: pierwsze maksimum, które w nieobecności pola B przypadało w punkcie x_0 takim, że $\delta(0) = 2\pi$, czyli $a/\lambda = 1$, $x_0 = \lambda L/d$, teraz przesuwają się do punktu x'_0 takiego, że $a/\lambda + e\Phi/\hbar = 1$, czyli $x'_0 = \lambda(1 - e\Phi/\hbar) \frac{L}{d}$. Nowy rozkład wygląda więc tak jak krzywa B na rysunku 2. (Czytelnik

zechce sprawdzić, czy pole B skierowane było od nas za płaszczyznę rysunku, czy odwrotnie?) Zauważmy, że tym, co decyduje o przesunięciu się obrazu interferencyjnego, jest strumień ograniczony krzywą C (wyznaczoną przez trajektorie 1 i 2), bez względu na to, od jakiego pola B pochodzi. W szczególności pole B może być zlokalizowane tylko w pewnym niewielkim obszarze oznaczonym literą W na rysunku 2. Pole to jest równe zeru zarówno wzdłuż trajektorii 1, jak i na trajektorii 2, czyli z punktu widzenia mechaniki klasycznej na elektron poruszający się wzdłuż tych trajektorii nie działa żadna siła! Natomiast mechanika kwantowa przewiduje, że ruch elektronu będzie zmodyfikowany tak, jak przedstawiliśmy to powyżej.

Doświadczalne potwierdzenie przewidywań Aharonova i Bohma przyniósł eksperyment R. G. Chambersa, wykonany w 1960 roku. Było to trudne doświadczenie, ponieważ ze względu na niewielką długość fali elektronu szczeliny musiały być bardzo blisko siebie — w odległości rzędu 10^{-6} m. Pole magnetyczne, zlokalizowane w obszarze W , uzyskano umieszczając za szczelinami namagnesowane długie włókno żelazne o średnicy mniejszej niż 10^{-6} m, tzw. wąs.

Zwróćmy uwagę, że w miarę wzrostu strumienia Φ krzywa B przesuwają się coraz bardziej w stosunku do krzywej A . Jeżeli przyjrzymy się punktowi, w którym wypada na przykład n -te maksimum wyjściowej krzywej A , to stwierdzimy, że po zwiększeniu strumienia od wartości 0 do wartości \hbar/e do punktu tego przesunie się pierwotne $(n-1)$ -sze maksimum tej krzywej. Tak więc dla dowolnego punktu ekranu maksima i minima pojawiają się z „okresem” \hbar/e .

Wyniki Chambersa zostały po roku 1960 wielokrotnie potwierdzone w wielu laboratoriach. Zawsze jednak były to doświadczenia próżniowe — elektrony poruszały się od źródła do ekranu przez próżnię. W naturalny sposób pojawiło się pytanie, czy podobne efekty mogą wystąpić w przypadku elektronów poruszających się w zwykłych przewodnikach. Odpowiedź przyniosło doświadczenie wykonane w 1985 roku przez R. Webba i współpracowników w Centrum Badań IBM. Osiągnięty w ostatnich latach postęp w dziedzinie mikrotechnologii umożliwił wykonanie ze złotych drutów o średnicach od 0,04 do 0,13 mikrona pierścieni o średnicy od 0,2 do 0,8 mikrona. Do każdego z pierścieni przyłączono po przeciwnych stronach równie cienkie druczki służące jako doprowadzenie i odprowadzenie prądu (rysunek 3). Całość ochłodzono do temperatury poniżej 1 K — przy tej temperaturze nieelastyczne zderzenia elektronu z drgającą siecią atomów złota, niszczące fazę fali elektronowej, są na tyle rzadkie, że elektron może pokonać drogę rzędu rozmiarów pierścienia bez przypadkowych zakłóceń tej fazy. Następnie do obydwu przewodów przyłożono stałą różnicę potencjałów, pierścień umieszczono w polu magnetycznym skierowanym prostopadłe do jego płaszczyzny i mierzono natężenie prądu w obwodzie w zależności od pola magnetycznego, czyli innymi słowy — magnetoopór obwodu. Wyniki okazały się rewelacyjne — zaobserwowano ponad 1000 oscylacji magnetooporu przy zwiększaniu wartości pola od 0 do 80 kilogausów. Na rysunku 4 pokazujemy te oscylacje dla wartości pola w zakresie od 1 do 3 kilogausów. Okazuje się, że poszczególne maksima powtarzają się z „okresem” 76 gaussów. W świetle naszej dyskusji eksperymentu z dwiema szczelinami wyjaśnienie jest natychmiastowe — zmiana pola o 76 gaussów powoduje, że strumień ograniczony pierścieniem zmienia się o $\Delta\Phi = \hbar/e$ i różnica faz liczonych wzdłuż górnej i dolnej połowy pierścienia zmienia się dokładnie o 2π . Bliższe przyjrzenie się wykresowi na rysunku 4 pozwala zauważyć, że oprócz oscylacji z „okresem” 76 gaussów widoczne są szersze oscylacje z okresem około 1000 gaussów — związane są one z faktem, że pole magnetyczne wnika także w metal, a więc fazy liczone na przykład w górnej połowie pierścienia wzdłuż wewnętrznego i zewnętrznego półobwodu nie są jednakowe. Ponieważ powierzchnia ograniczona tymi dwoma półokręgami jest mała w porównaniu z powierzchnią rozpiętą na całym pierścieniu, trzeba dużej zmiany pola, by różnica obydwu faz osiągnęła 2π . Szczegółowa analiza ujawnia także istnienie oscylacji z „okresem” 38 gaussów — Czytelnik proszony jest o wskazanie, jakim parom trajektorii odpowiadają te oscylacje.

Wkrótce po ogłoszeniu wyników doświadczenia Webba podobny efekt został zaobserwowany w pierścieniach wykonanych ze srebra, a także w heterostrukturze arsenku galu. Wyniki te mają konsekwencje technologiczne — można oczekiwać podobnych efektów interferencyjnych w stosunkowo dużych elementach półprzewodnikowych. Czy będzie miało to wpływ na przykład na funkcjonowanie komputerów nowych generacji?

Mechanika kwantowa ujawniła się w skali mezoskopowej i tradycyjny podział na mikro- i makroświat przestaje być aktualny.

Mgr Krzysztof JAHN

Jedenastoletni cykl słoneczny nie jest niezmienną cechą naszej gwiazdy. Istnieją obecnie przekonujące argumenty za tym, że Słońce niejednokrotnie przechodziło okresy praktycznego zaniku aktywności. Ostatni miał miejsce na przełomie XVII i XVIII wieku.

Cofnijmy się o około sto lat, do odkrycia, które podważyło przekonanie o niezmiennym cyklu aktywności Słońca, a które musiało jednak czekać ponad osiemdziesiąt lat na powszechną akceptację. Pod koniec XIX wieku dobrze już znano jedenastoletni cykl słoneczny. Podczas maksimum obserwowano sto plam miesięcznie, a w minimum co najmniej kilka. Rzadkością był miesiąc, w ciągu którego nie pojawiały się żadna plama (zresztą, obecnie również). Sięgając do wcześniejszych czasopism i raportów obserwacyjnych odtwarzano cykl aktywności Słońca od roku 1700.

W tym okresie, w 1893 roku, Edward W. Maunder, astronom Królewskiego Obserwatorium w Greenwich zauważył zastanawiający fakt: liczba plam zaobserwowanych w ciągu siedemdziesięciu lat, od 1645 do 1715 roku, była mniejsza od liczby plam, które pojawiły się w ciągu jednego tylko roku we współczesnych mu czasach. Swoje spostrzeżenie, wraz z hipotezą o zaniku aktywności plamotwórczej Słońca w XVII wieku, opublikował po raz pierwszy w roku 1894 i ponownie w 1922. Obie publikacje nie zwróciły większej uwagi.

Dopiero w 1976 r. John E. Eddy na innej drodze nie tylko udokumentował odkrycie Maundera, ale również wskazał na istnienie podobnych minimów pojawiających się co kilkaset lat. Przedstawione przez Eddy'ego argumenty były różnorodne. Zaczijmy od tych, które oparte są na historycznych zapiskach. Eddy przekonująco wykazał, że w tym przypadku brak relacji o plamach jest rzeczywiście odzwierciedleniem braku aktywności Słońca. Pojawienie się plamy w owym czasie było czymś niezwykłym. Świadczy o tym zamieszczony w jednym z czasopism astronomicznych opis tego zjawiska, który miał przypomnieć czytelnikom, jak ono wygląda. Było to w 1671 roku, po zaobserwowaniu przez Cassiniego plamy na tarczy Słońca. Sam Cassini pisał wówczas: „Mija już około dwudziestu lat, odkąd po raz ostatni widziano plamę na Słońcu...”. Tego nie można by napisać podczas normalnego (takiego, jak dzisiaj) zachowania się Słońca. Popatrzmy zresztą sami na fotografię przedstawiającą Słońce w stanie aktywnym.

Kolejnego argumentu dostarczają opisy zaćmień Słońca pochodzące z tego okresu. W ciągu siedemdziesięciu lat odpowiadających zanikowi aktywności aż 63 razy wystąpiło zjawisko zaćmienia. Kilka z nich obserwowano w Europie. Wprawdzie korona słoneczna nie była wówczas głównym przedmiotem zainteresowania astronomów, jednak jej opisy znajdujemy w obszernych relacjach z obserwacji. W relacjach tych nie ma żadnych rozbieżności między obserwatorami. Wszyscy opisują koronę jako wąską, równej szerokości czerwony pierścień wokół Księżyca. Jest to obraz nieznamy nam dzisiaj nawet z obserwacji podczas minimum aktywności. Żaden z obserwatorów nie opisał białawej struktury strug koronalnych, tak charakterystycznych dla znanego obecnie Słońca. Kształt korony zależy silnie od pola magnetycznego. Toteż zanik korony może odpowiadać tylko brakowi aktywności magnetycznej. Dodajmy jeszcze, że w kronikach z okresu od 1645 do 1715 roku nie ma żadnej wzmianki o zauważeniu zorzy polarnej — zjawiska występującego w atmosferze Ziemi podczas wzmożonej aktywności Słońca. W normalnych warunkach, w ciągu siedemdziesięciu lat obserwuje się w Europie od 500 do 1000 przypadków tego zjawiska.

Przytoczmy jeszcze jeden argument oparty na relacjach historycznych. W 1933 roku japoński astronom Siguru Kanda zebrał wszystkie dostępne zapiski dotyczące obserwacji plam, prowadzonych na terenie Chin, Japonii i Korei w ciągu blisko dwóch tysięcy lat. Opracowując ten obfity materiał obserwacyjny zauważył, że relacje o pojawianiu się plam były w pewnych okresach radsze, w innych zaś częstsze. Istniały też między nimi dłuższe, kilkudziesięcioletnie przerwy. Jedna z nich, od 1584 do 1770 roku, pokrywa się z minimum, na które zwrócił uwagę Maunder.

Spójrzmy na rysunek I, na którym zaznaczona została liczba plam pojawiających się na Słońcu w ciągu każdego roku od czasu skonstruowania teleskopu. Na osi pionowej odłożona jest tzw. średnia roczna liczba Wolfa (miara liczby plam). Sporadyczne obserwacje w przeszłości sprawiają, że krzywą z pierwszej połowy XVII wieku możemy odtworzyć tylko fragmentarycznie. Mimo to można zauważyć spadek liczby Wolfa w drugiej połowie XVII wieku. Wiedział o tym Maunder, lecz rysunek taki był, jak się okazało, mało przekonujący. Dlatego też Eddy do potwierdzenia odkrycia Maundera przeprowadził zupełnie niezależny dowód świadczący

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

REKORDOWE CIŚNIENIE. WYŻSZE NIŻ W ŚRODKU ZIEMI

W laboratorium geofizycznym należącym do Carnegie Institution w Waszyngtonie osiągnięto ostatnio rekordowo wielkie ciśnienie w kowadłach diamentowych, a mianowicie **0,55 Terapaskala** ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, T(tera) = 10^{12}), czyli około 5½ milionów atmosfer. Wynik ten przewyższa trzykrotnie poprzedni rekordowy wynik (0,17 TPa) otrzymany w 1979 roku w tym samym laboratorium, a ponadto jest to pierwsze w historii przekroczenie wartości ciśnienia w środku kuli ziemskiej, które wynosi około 0,35 TPa. Osiągnięcie nowego rekordowego rezultatu umożliwiły komputerowe obliczenia idealnego kształtu diamentów, których krawędzie muszą być styczne do kierunków naprężeń. Ponadto udało się pokonać problem kalibracji ciśnienia, który limitował poprzedni rekordowy rezultat. Najlepszym znanym sposobem pomiaru wartości ciśnienia w kowadłach jest przesunięcie linii luminescencyjnej 0,69 μm rubinu. Przy ciśnieniu około 0,17 TPa luminescencja samych diamentów "przesłaniała" widmo świecenia małych okruchów rubinowych umieszczonych w kowadłach i uniemożliwiała dalsze pomiary ilościowe. W eksperymentach przeprowadzonych w Carnegie Institution okazało się, że kowadłka "reperują się" same przy ciśnieniu około 0,28 TPa, gdyż luminescencja rubinu pojawia się na nowo. Fakt ten umożliwił dokonanie pomiaru ilościowego rekordowego rezultatu. Pierwsiastkiem, który ma być jako pierwszy przebadany przez fizyków z Waszyngtonu w nowych kowadłach, jest żelazo, ze względu na fakt, że jądro Ziemi zbudowane jest z metali ciężkich, głównie z żelaza. W dalszych planach przewidywane jest poszukiwanie metalicznego wodoru. Należy jeszcze nadmienić, iż teoretycy ostatnio obliczyli, że kowadła diamentowe mogą teoretycznie działać do wartości ciśnienia 1,2 TPa, przy którym nastąpić ma przemiana fazowa diamentu w inną strukturę krystalograficzną węgla.



Rozwiązanie zadania F 224. W momencie zderzenia z szalką energia kinetyczna kulki będzie równa

$$(1) \quad \frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Rozważmy przypadek, gdy $m \gg M$ i zaniedbajmy masę szalki. Wtedy po zderzeniu szalka i kulka będą miały ten sam pęd i energię kinetyczną co kulka przed zderzeniem. Z zasady zachowania energii otrzymujemy

$$(2) \quad x_0^2 - \frac{2mg}{k}x_0 - \frac{2mgh}{k} = 0,$$

gdzie x_0 jest największym wychyleniem sprężyny z położenia równowagi. Rozwiązanie (2) ma postać

$$x_0 = \frac{mg}{k} \pm \left(\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k} \right)^{1/2};$$

znak „+” odpowiada wychyleniu w dół, a „-” w górę. Tak więc waga będzie wykonywać drgania o amplitudzie

$$A = \left(\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k} \right)^{1/2}.$$

Jeśli chcemy uwzględnić masę szalki M , wówczas musimy z zasady zachowania pędu obliczyć prędkość v , z jaką szalka wychyla się w dół; jest ona równa $V = m(2gh)^{1/2}/(M+m)$. W tym przypadku równanie analogiczne do (2) ma postać

$$x_0^2 - \frac{2(M+m)g}{k}x_0 - \frac{2m^2gh}{(M+m)k} + \frac{M(M+2m)g^2}{k^2} = 0.$$

Stąd otrzymujemy maksymalne wychylenie równe

$$(3) \quad x_0 = \frac{M+m}{k}g \pm \left[\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k} \right]^{1/2}.$$

Nowym położeniem równowagi jest $x_0 = (M+m)g/k$, co daje amplitudę wahań

$$(4) \quad A = \left(\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k} \right)^{1/2}.$$

Jaki będzie wynik w przypadku zderzenia sprężystego?



Rozwiązanie zadania M 477. Współczynniki Newtona będą nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy ich ilorazy: $\binom{n}{k+1} / \binom{n}{k}$, które

wynoszą kolejno $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-k}{k+1}, \dots, \frac{1}{n}$, napisane w postaci nieskracalnej, będą miały nieparzyste liczniki i mianowniki. To z kolei ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^m - 1$.

Istotnie, zauważmy, że n musi być nieparzyste. Jeśli więc $n = 2^m \cdot p - 1$, gdzie p jest nieparzyste, to $(2^m + 1)$ -szy współczynnik podzielony przez poprzedni daje liczbę parzystą:

$$\frac{n - (2^m - 1)}{2^m} = \frac{2^m(p - 1)}{2^m} = p - 1,$$

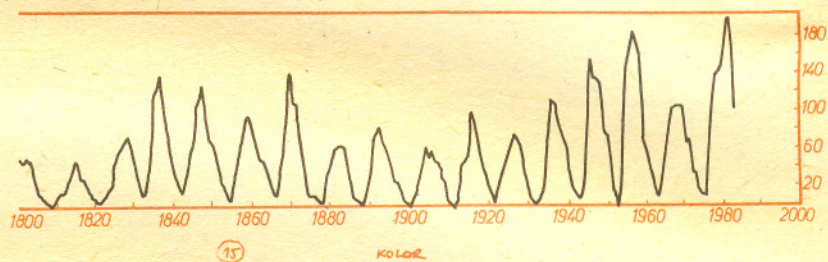
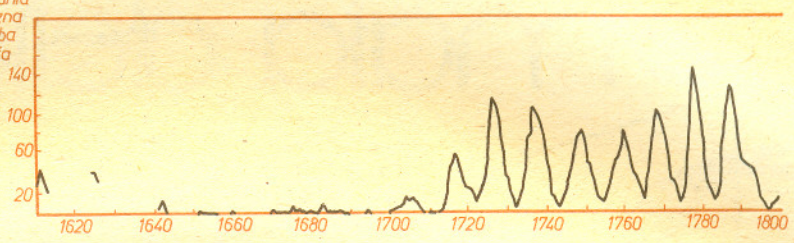
o ile $p > 1$. Gdy $p = 1$, $(2^m + 1)$ -szego współczynnika po prostu nie ma. Odwrotnie, niech $n = 2^m - 1$, $k + 1 = 2^q \cdot r$, r — nieparzyste.

Mamy

$$\frac{n - k}{k + 1} = \frac{2^m - 2^q \cdot r}{2^q \cdot r} = \frac{2^{m-q} - r}{r};$$

ten ułamek jest nieskracalny i ma nieparzysty licznik i mianownik.

Srednia roczna liczba Wolfe

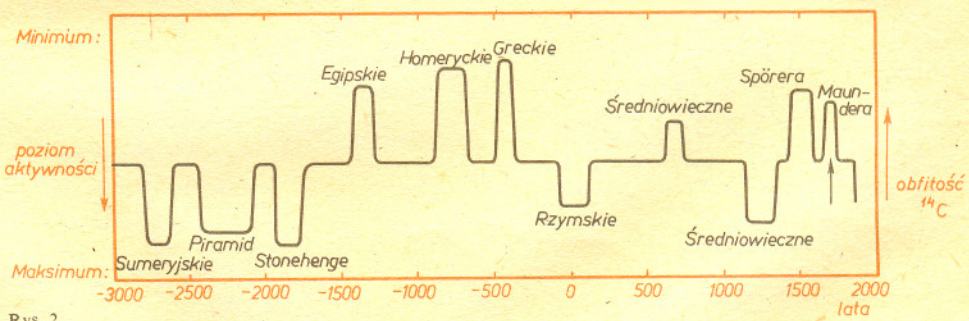


Rys. 1

o różnym poziomie aktywności Słońca w przeszłości, oparty o pomiar obfitości radioaktywnego izotopu węgla 14 (^{14}C), odkładającego się w rocznych przyrostach wszystkich dłużej żyjących roślin.

W przypadku bardzo starych drzew można sięgnąć daleko w przeszłość przy określaniu ilości ^{14}C w każdym słoju. Każdy słoju to roczny przyrost pnia, a więc dość dokładna data. Skorzystał z tego Eddy wiedząc, że ilość izotopu węgla w atmosferze Ziemi, a więc i w odpowiednich słojach drzew, jest ściśle skorelowana z aktywnością Słońca. Węgiel ^{14}C powstaje bowiem w górnych warstwach atmosfery w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z głównym składnikiem atmosfery, jakim jest azot 14 (^{14}N). Wielkość strumienia promieniowania kosmicznego na Ziemi jest regulowana zasięgiem i natężeniem słonecznego pola magnetycznego. W okresie silnej aktywności Słońca jego pole osłania Ziemię przed promieniowaniem kosmicznym. Strumień promieniowania jest wówczas zredukowany. W tym okresie na Ziemi powstaje mniej ^{14}C . Odwrotnie jest podczas minimum aktywności.

Dzięki metodzie pomiaru zawartości ^{14}C w długowiecznych drzewach udało się przy określaniu średniego poziomu aktywności Słońca sięgnąć w przeszłość do około 3000 r. p.n.e. Na rysunku 2 przedstawiającym zawartość ^{14}C w słojach najstarszych drzew możemy zobaczyć nie tylko minimum Maundera (zaznaczone strzałką), ale i inne okresy zaniku bądź wzrostu aktywności Słońca (pamiętajmy: minimum aktywności odpowiada dużej zawartości ^{14}C). Wszystkie okresy otrzymały nazwy, których autorem jest Eddy. Niedługo przed ostatnim minimum (Maundera) Słońce przechodziło w XV wieku okres jeszcze niższej aktywności, tzw. minimum Spörera, nazwane tak na cześć niemieckiego astronoma, którego publikacja z 1890 roku zwróciła uwagę Maundera na problem „braku plam”. Dalej (w przeszłości) mamy Średniowieczne Maksimum i Minimum, Rzymskie Maksimum na przełomie er i kolejne zaniki aktywności: Greckie, Homeryckie i Egipskie. Około 2000 lat p.n.e. widzimy znów maksima: Stonehenge, Piramid i Sumerijskie.

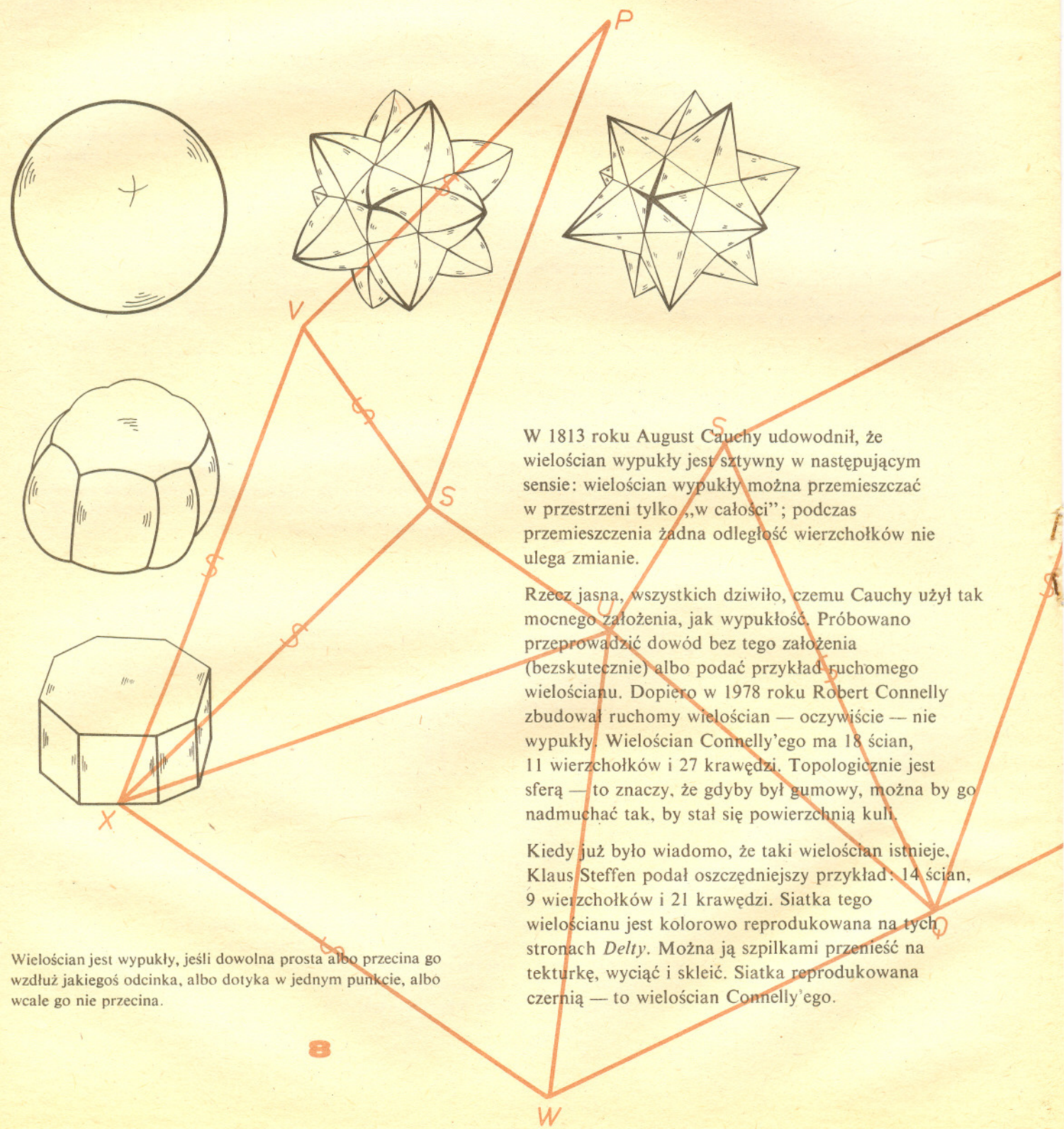


Rys. 2

Obecnie Słońce znajduje się w stanie maksimum aktywności (tej długookresowej, a nie jedenastoletniej). Czy będzie ono silniejsze niż ostatnie, Średniowieczne? Trudno to przewidzieć, natomiast ważne jest to, że odkryte zostały długookresowe zmiany aktywności słonecznej, chociaż nie na podstawie bezpośrednich obserwacji. Byłoby to zresztą niemożliwe w ciągu ostatnich 200—300 lat, a być może także przez najbliższe 100—200 lat.

mata delta

Ruchome wielościany

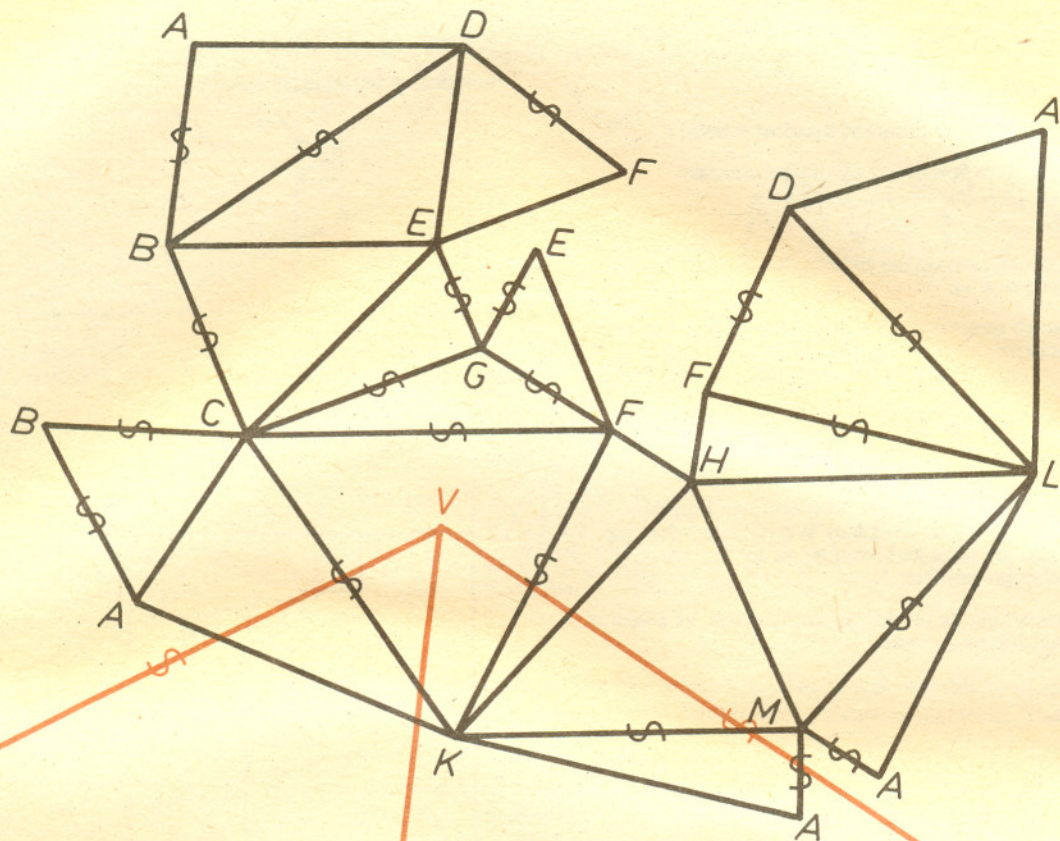


W 1813 roku August Cauchy udowodnił, że wielościan wypukły jest sztywny w następującym sensie: wielościan wypukły można przemieszczać w przestrzeni tylko „w całości”; podczas przemieszczenia żadna odległość wierzchołków nie ulega zmianie.

Rzecz jasna, wszystkich dziwiło, czemu Cauchy użył tak mocnego założenia, jak wypukłość. Próbowano przeprowadzić dowód bez tego założenia (bezsukcesywnie) albo podać przykład ruchomego wielościanu. Dopiero w 1978 roku Robert Connelly zbudował ruchomy wielościan — oczywiście — nie wypukły. Wielościan Connelly’ego ma 18 ścian, 11 wierzchołków i 27 krawędzi. Topologicznie jest sferą — to znaczy, że gdyby był gumowy, można by go nadmuchać tak, by stał się powierzchnią kuli.

Kiedy już było wiadomo, że taki wielościan istnieje, Klaus Steffen podał oszczędniejszy przykład: 14 ścian, 9 wierzchołków i 21 krawędzi. Siatka tego wielościanu jest kolorowo reprodukowana na tych stronach *Delta*. Można ją szpilkami przenieść na tekturkę, wyciąć i skleić. Siatka reprodukowana czernią — to wielościan Connelly’ego.

Wielościan jest wypukły, jeśli dowolna prosta albo przecina go wzdłuż jakiegoś odcinka, albo dotyka w jednym punkcie, albo wcale go nie przecina.



Można, oczywiście, samemu narysować obie siatki w takich rozmiarach, jakie będą wygodne (np. dostosowane do wymiarów posiadanej tekturki). Oto wymiary:

Connelly

$$\begin{aligned}
 AB &= AC = BC = DE = DF = EF = 9a, \\
 AD &= BE = CE = HM = 12a \\
 AK &= AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15a, \\
 AM &= FH = 4a, \\
 BD &= CF = CK = DL = 16a, \\
 CG &= 11a, \\
 EG &= 5a, \\
 FG &= 7a.
 \end{aligned}$$

Steffen

$$\begin{aligned}
 PQ &= 17b, \\
 PR &= QR = PS = QS = TX = UX = VX = WX = 12b, \\
 RT &= SU = RW = SV = 5b, \\
 PT &= QU = PV = QW = RX = SX = 10b, \\
 TV &= UW = 11b.
 \end{aligned}$$

Na naszych rysunkach $a = 3 \text{ mm}$, $b = 8 \text{ mm}$.

Krawędzie przekreślone odpowiadają kątom dwuściennym wypukłym (są „ostrzem” na zewnątrz), a pozostałe wklęsłym.

Można wykonać także krawędziowy model takiego wielościanu. Ponieważ wszystkie ściany są trójkątami, więc ruchomość modelu krawędziowego odpowiada ruchomości modelu ze ścianami. Oczywiście, gdy ściany nie są trójkątami, model krawędziowy może być ruchomy, choć model ze ścianami byłby nieruchomy — np. sześcian.

Krawędziowy model ruchomego wielościanu pozwoli zobaczyć lepiej, dlaczego możliwy jest ruch — w następnym numerze *Delty* zamieścimy na ten temat obszerniejszy artykuł.

Tymczasem życzymy dobrej zabawy.

Małą Deltę przygotowali: Jerzy BEDNARCZUK
i Marek KORDOS

O pewnym problemie Stanisława Mazura

Zacznijmy od pewnych oznaczeń.

Dla $r > 0$ przez Q_r będziemy oznaczać kwadrat o boku r .

Definicja. Mówimy, że w kwadracie Q_r można umieścić wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$), jeżeli:

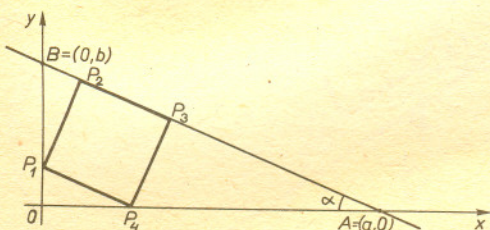
- (1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{1/n} \subset Q_r$,
- (2) kwadraty $Q_{1/n}$ i $Q_{1/m}$ mogą się stykać tylko bokami lub wierzchołkami, o ile $n \neq m$.

Na jednym ze swoich seminariów Stanisław Mazur zadał pytanie: Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q_r , w którym mieszczą się wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$. Przedstawimy tutaj odpowiedź na to

pytanie. Ze względu na rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest ona natychmiastowa.

Lemat. Niech OAB będzie trójkątem prostokątnym i niech kwadrat $P_1P_2P_3P_4$ leży w tym trójkącie. Wówczas kwadrat ten można umieścić tak, aby dwa jego boki leżały na przyprostokątnych tego trójkąta.

Dowód. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że kwadrat $P_1P_2P_3P_4$ leży tak, jak na rysunku,



oraz że bok kwadratu $P_1P_2P_3P_4$ ma długość 1. Wówczas dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mamy

$$a = \cos \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + 1}{\sin \alpha},$$

$$b = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + 1}{\cos \alpha}.$$

Oznaczmy przez p prostą przechodzącą przez punkty A i B . Lemat będzie dowiedziony, jeżeli wykażemy, że punkt $(1,1)$ leży w trójkącie OAB lub inaczej mówiąc, że punkt $(1,1)$ leży po tej samej stronie prostej p co i punkt $(0,0)$. Równanie prostej p ma postać $f(x, y) = 0$, gdzie

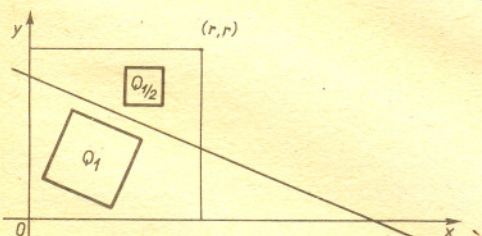
$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = \frac{x \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + 1} + \frac{y \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + 1} - 1.$$

Ale $f(0,0) = -1 < 0$. Musimy więc dowieść, że $f(1,1) \leq 0$. Mamy

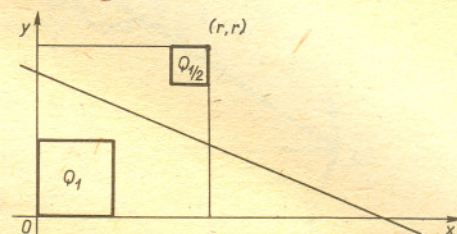
$$f(1, 1) = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + 1} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + 1} - 1.$$

Wystarczy więc wykazać, że $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sin \alpha \cos \alpha + 1$. Ale $0 \leq (1 - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha) = 1 - \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$. Stąd $\sin \alpha + \cos \alpha \leq 1 + \sin \alpha \cos \alpha$, a to kończy dowód lematu.

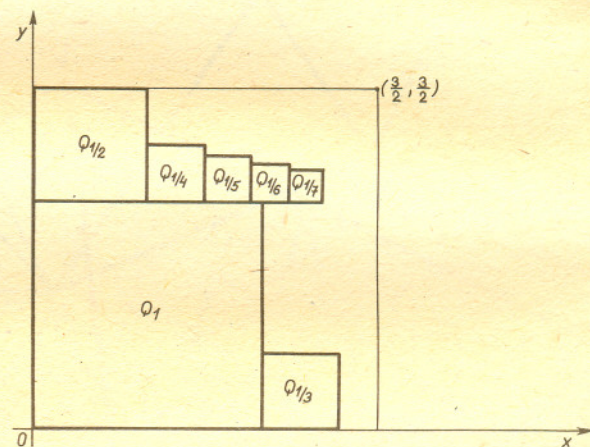
Niech teraz Q_r będzie kwadratem, w którym mieszczą się wszystkie $Q_{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Wówczas istnieje taka prosta p , że kwadraty Q_1 i $Q_{1/2}$ są położone względem niej tak, jak na rysunku.



Z lematu wynika natychmiast, że $r \geq \frac{3}{2}$, gdyż kwadraty te można umieścić w następujący sposób.



Wykażemy wreszcie, że w kwadracie $Q_{3/2}$ można umieścić wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Pokażemy to na rysunku.



Na boku kwadratu Q_1 oprócz kwadratu $Q_{1/2}$ ustawiamy w pierwszym rzędzie kwadraty $Q_{1/4}, Q_{1/5}, Q_{1/6}, Q_{1/7}$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 1$, a więc

mieszczą się one w $Q_{3/2}$.

W drugim rzędzie ustawiamy $Q_{1/8}, Q_{1/9}, \dots, Q_{1/15}$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} < 1$, a więc też się mieszczą w kwadracie $Q_{3/2}$.

Postępowanie to kontynuujemy i w rezultacie na boku kwadratu $Q_{1/2}$ leżą boki kwadratów $Q_{2^{-2}}, Q_{2^{-3}}, \dots, Q_{2^{-n}}, \dots$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots =$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \right) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Wynika z tego, że wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ można umieścić w kwadracie $Q_{3/2}$.

Odpowiedź na pytanie Stanisława Mazura jest więc następująca:

Najmniejszym kwadratem, w którym mieszczą się wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$), jest kwadrat o boku $\frac{3}{2}$.

Problemy

- 1) Niech $p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $\sum_{n=1}^{\infty} p_i^2 < +\infty$. Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q , zawierający wszystkie kwadraty Q_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$)?
- 2) Niech P_n oznacza prostokąt o bokach $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q , zawierający wszystkie prostokąty P_n ($n = 1, 2, \dots$)?

Autorowi nie jest znana pełna odpowiedź na żaden z tych problemów i byłby bardzo wdzięczny Czytelnikom za informowanie go nawet o częściowych rezultatach.



Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 475. Na okręgu o długości 1 wyróżniono punkt Q , a następnie wybrano losowo (czyli tak, że szansa wpadnięcia punktu do łuku jest proporcjonalna do długości łuku) i niezależnie dwa punkty A i B . Dzielą one okrąg na dwa łuki. Jaka jest średnia długość łuku, zawierającego punkt Q ?
Rozwiązanie na str. 13

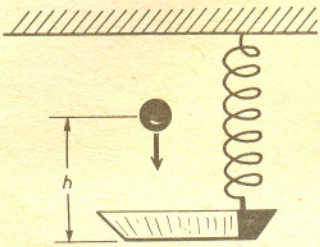
M 476. Oznaczmy przez P_n liczbę funkcji różnowartościowych $f = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, dla których $f(i) \neq i$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Pokazać, że jeśli $n \geq 2$, to P_n dzieli się przez $n-1$.
Rozwiązanie na str. 3

M 477. Dla jakich n współczynniki Newtona $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ są wszystkie nieparzyste?
Rozwiązanie na str. 7

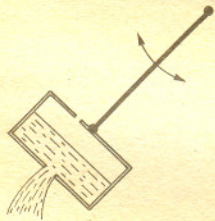
Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 224. Na szalkę o masie M wagi sprężynowej (porównaj rys. 1) spada z wysokości h kulka o masie m . Przyjmując, że sprężyna wagi ma współczynnik sprężystości k , obliczyć amplitudę drgań, które nastąpią po uderzeniu kulki o dno szalki. Zderzenie kulki z dnem szalki jest doskonale niesprężyste, to znaczy, że po zderzeniu kulka pozostaje na dnie szalki. Masa kulki jest znacznie większa od masy szalki ($m \gg M$).
Rozwiązanie na str. 7

F 225. Rozpatrzmy wahadło składające się z pojemnika z piaskiem sztywno zawieszono na długim pręcie. Piasek wysypuje się jednostajnie przez otwór w dnie pojemnika. Zakładając, że amplituda drgań jest mała, określić, jak będzie się zmieniał okres wahań takiego układu.
Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1



Rys. 2



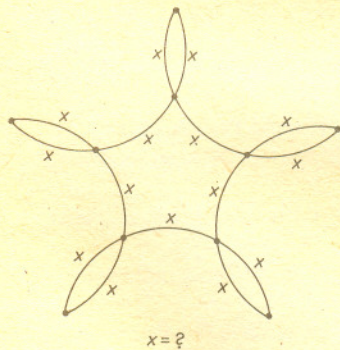
Zadanie Kwanta

Matematyk z radzieckiego miesięcznika *Kwant*, Anatolij P. Sawin na kartce z życzeniami świątecznymi, przesłanej do naszej redakcji, nakreślił taki rysunek, jak obok. Pytanie zrozumieliśmy tak:

Pięć okręgów jednostkowych o środkach w wierzchołkach pięciokąta foremnego przecina się w ten sposób, że wszystkie krótsze łuki są równej długości. Jakiej?

Kąt, pod którym ze środka okręgu O widać odcinek AP (w mierze łukowej), to, oczywiście, nasz szukany x . Zauważmy, że $ABCDE$ też jest pięciokątem foremnym (ma te same symetrie o pięciokąt ze środków) i proste AP, BQ itd. przechodzą przez wspólny środek obu pięciokątów.

$$\text{Zatem } \sphericalangle PAB = \sphericalangle QBA = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}.$$



$x = ?$

Wobec równości łuków $APQB$ jest trapezem równoramiennym i $\sphericalangle AOP = \sphericalangle POQ = \sphericalangle QOB$.

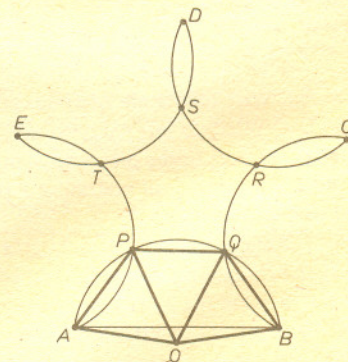
Ponieważ $AB \parallel PQ$, więc $\sphericalangle APO = \frac{1}{2} \sphericalangle APQ = \frac{1}{2} (\pi - \sphericalangle PAB) = \frac{7\pi}{20}$. Stąd, wobec

równoramienności trójkąta AOP , otrzymujemy $\sphericalangle AOP = \pi - 2 \sphericalangle APO = \frac{3\pi}{10}$. I tyle wynosi x .

Nie jest to ładne rozwiązanie. Może ktoś z Czytelników zna ładniejsze? A może inaczej należy sformułować pytanie związane z rysunkiem A. P. Sawina?

Od siebie też mamy pytanie: jak wykreślić pierwszy rysunek? I mamy też wskazówkę:

nakreślić trójkąt o boku 1 i przyległych do niego kątach $\frac{9\pi}{20}$ i $\frac{7\pi}{20}$ (a to jest wykonalne cyrklem i linijką).



Dziwny wieczór (An Odd Evening)

Ian STEWART

Łagodnie, powoli zapada zmierzch. Uroczy faluje przepiękny krajobraz, angielskie łąki, lasy, pola. Uważny obserwator dostrzeże wśród nich naszego bohatera. Aktywnie pracujący naukowo student, Rosen Crantz przedstawia swoje ostatnie pomysły opiekunowi naukowemu. Jest nim profesor Guilden Stern, specjalista w dziedzinie teorii liczb, nie odnoszący jednak zbyt wielu sukcesów.

Crantz: Guilden, mam kłopoty z moim ostatnim problemem.

Stern: Z którym? Liczby pierwsze?

C: Tak. Zamierzałem udowodnić twierdzenie dla każdej liczby pierwszej po kolei, korzystając z pracy Randy'ego i Hartlisnujama ...

S: Masz na myśli „Pełną listę liczb pierwszych” w „Journal of Infinity” — na razie w 173 tomach?

C: Tak, ale oni, jak dotąd, opublikowali tylko parzyste liczby pierwsze. Nie skończyli tego jednak i sądzę, że gdzieś utknęli,

S: Parę tygodni temu dostałem list od Hartlisnujama. Napisał, że wystartowali od 2 — to jest, oczywiście, liczba pierwsza — i zdecydowali przebadać najpierw wszystkie liczby parzyste w nadziei, że znajdą jeszcze jakieś pierwsze. W badaniach doszli już do 1355579014264890988, ale nic nie znaleźli.

C: Może nie ma żadnej innej parzystej liczby pierwszej.

S: Ale wobec tego co z twierdzeniem Dirichleta — wiesz, tym, które mówi, że w każdym ciągu arytmetycznym jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Liczby parzyste tworzą ciąg arytmetyczny, prawda?

C: Tak sądzę. Zapomniałem już wiele z tego, czego uczono mnie w szkole. To naprawdę zastanawiające.

S: Może Dirichlet popełnił błąd? Bo o tym, że zrobił w swojej zasadzie, to wiesz.

C: A nie był to przypadkiem Riemann? W każdym razie brzmi to nieprawdopodobnie. Może potrafilibyśmy dowieść, że istnieje nieskończenie wiele parzystych liczb pierwszych?

S: Modyfikując dowód Euklidesa dla dowolnych liczb pierwszych — to masz na myśli?

C: Dokładnie to. Rozważmy właśnie parzyste liczby pierwsze i zobaczmy, co się stanie. Przypuśćmy, że istnieje ich skończenie wiele ...

S: Możemy pominąć 2, o tym wiemy ...

C: Przypuśćmy więc, że istnieje tylko skończenie wiele parzystych liczb pierwszych, większych niż 2, powiedzmy p_1, p_2, \dots, p_n . Co teraz? Euklides definiuje $P = p_1 \dots p_n + 1$ i ...

S: To nie jest dobrze; to jest nieparzyste.

C: Faktycznie nieparzyste; to faktycznie dziwne.

Nieprzetłumaczalna gra słów; w oryginale „very odd”. W języku angielskim słowo „odd” znaczy zarówno „dziwne”, jak i „nieparzyste”. „Parzyste” to „even”.

S: Ha. Więc czemu nie zdefiniować $P = p_1 \dots p_n + 2$?

C: OK. Wtedy P jest parzyste, więc musi być podzielne przez jakąś parzystą liczbę pierwszą — powiedzmy q . q nie może być żadną z p_i , gdyż jeśli podzielisz P przez którąkolwiek z nich, to dostajesz resztę 2 ...

S: ... I nie może być równe 2, gdyż jeśli 2 dzieli P , to dzieli także $p_1 \dots p_n$ i dzieli którąś z p_i ..., ale p_i jest liczbą pierwszą i jest większe niż 2, więc nie może być podzielne przez 2.

C: Więc q jest parzystą liczbą pierwszą różną od 2, p_1, \dots, p_n ,

S: Sprzeczność z założeniem. Wobec tego musi istnieć

W latach 1968—1980 na Uniwersytecie w Warwick wydawane było czasopismo „Manifold” (początkowo jako pismo studenckie), przedstawiające w sposób popularny fakty z wyższej matematyki. Wydano 20 numerów (każdy liczył około 50 stron). Tekst „An Odd Evening” ukazał się w dwunastym numerze „Manifold”, latem 1972. Przekładu i druku dokonano za zgodą Autora.

Ian Stewart jest autorem kilkudziesięciu książek matematycznych — podręczników, monografii i książek popularyzujących wyższą matematykę. Pracuje na Uniwersytecie w Warwick (Anglia).

nieskończenie wiele parzystych liczb pierwszych.

C: Istotnie, musi tak być. Dirichlet mimo wszystko miał rację.

S: Napiszę o tym do Hartlisnujama.

C: Ale czy to pomoże w rozwiązaniu mojego problemu?

S: Jaki jest twój problem?

C: Och ... Więc ... Myślę, że moja dziewczyna jest ...

S: Twój naukowy problem.

C: Ach, tak. To coś w rodzaju odwrócenia hipotezy Goldbacha.

S: Masz na myśli: „każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych”?

C: Tak. Chciałem udowodnić, że każda liczba pierwsza jest sumą dwóch liczb parzystych. Gdybym mógł to wykazać, to ...

S: Ale to jest fałszywe, nieprawdaż? Bo co z 3? Gdyby 3 było sumą dwóch liczb parzystych, to jedna z nich musiałaby być równa 2 ... Zatem drugą jest 1. Ale to jest nieparzyste.

C: Faktycznie nieparzyste; to dziwne.

S: Ha. Mysz coś jeszcze założyć. Na przykład — że twoja liczba pierwsza jest parzysta?

C: Myślałem o tym. Ale przypuśćmy, że mamy parzystą liczbę pierwszą q i założymy, że $q = x + y$, gdzie x i y są parzyste — powiedzmy $x = 2u$ i $y = 2v$. Wtedy $q = 2(u + v)$, więc 2 dzieli q . Ale q jest liczbą pierwszą — sprzeczność.

S: To obala hipotezę dla parzystych liczb pierwszych.

C: Istotnie? nigdy bym nie przypuszczał ...

S: Oznacza to, że teraz potrzebujesz tylko przebadać nieparzyste liczby pierwsze.

C: Ale nie mogę przecież czekać, aż Randy i Hartlisnujam je wszystkie znajdą ...

S: W porządku. W każdym razie rozpatrzyłeś połowę możliwych przypadków.

C: A także 3 — to twój rezultat.

S: Wobec tego napisz to i opublikuj. Jeśli kiedyś przebadasz nieparzyste — będziesz miał dwie publikacje zamiast jednej.

C: Myślałem, że raczej bierze się pod uwagę wagę publikacji, a nie ich liczbę?

S: Nie, to było, zanim zaczęto wytłaczać Pięcioksiąg na kamiennych tablicach. Pięć publikacji — i jesteś wykładowcą, piętnaście — starszym wyk ...

C: Czekaj! Czekaj! Gdzie w dowodzie założyliśmy, że q jest parzyste?

S: Och, gdzie w ... Nie! Nie założyliśmy! Ten sam dowód idzie dla nieparzystych liczb pierwszych!

C: Widzę to teraz! „Falsity of the Converse Goldbach Conjecture” — napisał R. Crantz —

S: I G. Stern ...

C: Tak. Opublikujemy to w „Notices” ...

S: W „Journal” ...

C: W „Bulletin” ...

S: W „Proceedings” ...

C: W „Transactions” ...

S: W „Annals”!

C: W „Ivanov Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. Fiz.-Mat. Nauki” — *S. (uderzając go po plecach):* Złapał cię jakiś nieprzyjemny kaszel.

C: Cóż za referencje!

S: Sława! W końcu — sława! Czekaj, niech no tylko spotkam Stefka Smale'a ...

Stephen Smale — znakomity matematyk amerykański, ur. 1930 r. Swoje najwybitniejsze rezultaty osiągnął w dziedzinie topologii algebraicznej i teorii gładkich układów dynamicznych. Rozstrzygnął hipotezę Poincarégo dla $n \geq 5$. Laureat Medalu Fieldsa w 1966 r.

C: Możemy to przedstawić na Międzynarodowym Kongresie Matematyków. Moglibyśmy dostać Medal Fieldsa.

S: Dwa Medale Fieldsa.

Medal Fieldsa — najwyższe wyróżnienie w matematyce; odpowiednik nagrody Nobla. Przyznawany raz na cztery lata, przy okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków, dwóm, trzem lub czterem osobom.

C: Zostanę błyskawicznie profesorem. Wiesz, że mianują ich tysiącami? Nieograniczona masowa produkcja profesorów.

S: Nie, naprawdę?

C: I nie musiałbym mieć trzydziestu jeden publikacji i dwóch ...

S: Mógłbym mieć turnee z wykładami po USA! Np. jak

Charles Dickens lub — jak się nazywał ten facet z Ameryki?

C: Twain?

S: Ach, nie; ja wynajęłbym samochód.

C: I mógłbym pojechać do Paryża — obiad na Sorbonie, kolacja w Instytucie — mógłbym nawet spotkać się z Bourbakim! Tak! Tak!

(Nagle przerywa zaskoczony.) Czekaj. Co z 2?

S: 2?

C: 2.

S: Co z tym? No, mów! Szybko!

C: $2 = 0 + 2$.

S: Wspaniale.

C: 2 jest liczbą pierwszą. 0 i 2 są parzyste.

S: A niech to licho!

C: Może udałoby się to jakoś naprawić?

S: Ale gdzie założyliśmy, że one są różne od zera? Nie widzę tego. To dziwne.

C: To faktycznie dziwne.

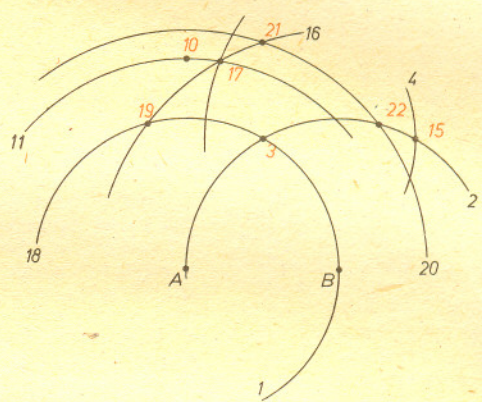
Przekład Krzysztof CIESIELSKI i Zdzisław POGODA



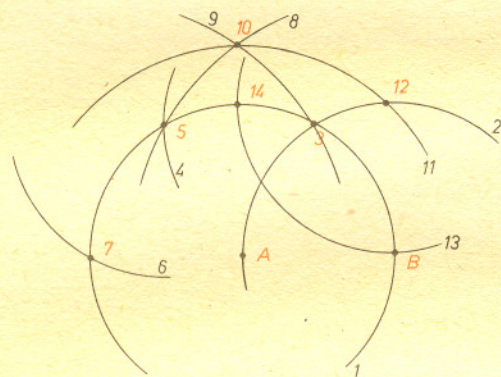
Rozwiązanie zadania M 475. Przypuśćmy, że punkt Q został także wybrany losowo. Punkty A, B i Q dzielą okrąg na trzy łuki i ze względu na symetrię średnia długość każdego z nich wynosi $\frac{1}{3}$. Przez obrót można punkt Q doprowadzić do z góry wybranego położenia. Widać teraz, że średnia długość łuku, wyznaczonego przez punkty A, B i zawierającego Q , wynosi $\frac{2}{3}$.

Uwaga. Wynik może wydać się sprzeczny z intuicją. Zauważmy jednak, że dłuższy łuk ma większe szanse przykrycia punktu Q niż krótszy.

Możemy rysować dalej (na rysunku opuszczono 5-9, 12-14):



Rysujemy okręgi



Ten dziwny rysunek jest rozwiązaniem zadania:

Skonstruować samym cyrklem wierzchołki C i D kwadratu $ABCD$ mając dane punkty A i B .

Robi się to tak: znajdujemy kolejno

- okrąg 1 o środku A przechodzący przez B ,
- okrąg 2 o środku B i tym samym promieniu,
- punkt 2 w przecięciu 1 i 2,
- okrąg 4 o środku 3 i tym samym promieniu,
- punkt 5 w przecięciu 1 i 4,
- okrąg 6 o środku 5 i tym samym promieniu,
- punkt 7 w przecięciu 1 i 6,
- okrąg 8 o środku B przechodzący przez 5,
- okrąg 9 o środku 7 przechodzący przez 3,
- punkt 10 w przecięciu 8 i 9,
- okrąg 11 o środku A przechodzący przez 10,
- punkt 12 w przecięciu 2 i 11,
- okrąg 13 o środku 12 przechodzący przez B ,
- punkt 14 w przecięciu 1 i 13

Mamy $C = 12$ i $D = 14$. Dlaczego? Myślę, że Czytelnik sam potrafi to sprawdzić.

- punkt 15 w przecięciu 2 i 4,
- okrąg 16 o środku 15 i promieniu $A10$,
- punkt 17 w przecięciu 11 i 16,
- okrąg 18 o środku B przechodzący przez 17,
- punkt 19 w przecięciu 1 i 18,
- okrąg 20 o środku A i promieniu $B17$,
- punkt 21 w przecięciu 18 i 20,
- punkt 22 w przecięciu 2 i 20.

Czytelnik zechce sprawdzić, że pięciokąt $ABCDE$, gdzie $C = 22$, $D = 21$ i $E = 19$, jest foremny.

Nasuwa się szereg pytań. Dla skonstruowania kwadratu o danym boku używaliśmy ośmiu okręgów, a dla skonstruowania pięciokąta foremnego o danym boku — dziesięciu (bo nie był potrzebny okrąg 13). Czy liczby te można zmniejszyć? Ja nie wiem.

Skonstruowaliśmy czworokąt foremny (czyli kwadrat), pięciokąt foremny; każdy wie, jak skonstruować sześciokąt foremny. Czy może da się samym cyrklem skonstruować dowolny n -kąt foremny? Nie. Dla $n \leq 20$ np. nie da się skonstruować 7-, 9-, 11-, 13-, 14-, 18- ani 19-tokąta. Bo da się skonstruować te i tylko te wielokąty foremne, które można skonstruować cyrklem i linijką.

Pod koniec XVIII wieku Duńczyk Mohr (czyt. mor) i Włoch Mascheroni (czyt. maskeroni) wykazali, że

samym cyrklem można skonstruować wszystkie te punkty, które można skonstruować cyrklem i linijką.

Czasami nie jest to łatwe. Dlatego sądzę, że konstruowanie samym cyrklem różnych punktów, które wiadomo jak skonstruować cyrklem i linijką, może dostarczyć ciekawej rozrywki.

M. K.

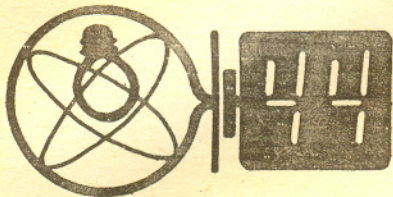
Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 143 /WT=2,86/ i 144 /WT=2,60/
z numeru 1/1987

Michał Marczak	- Radom	44,99pkt
Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	43,84pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	40,94pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	40,82pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	40,61pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	40,12pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	38,54pkt

Pan Marczak wszedł do Klubu 44 z numerem czterdziestym szóstym.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



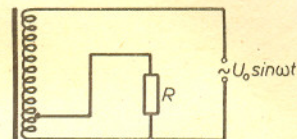
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1987

Przypominamy treść zadań:

45. Rysunek przedstawia obwód autotransformatora o bardzo dużej liczbie zwojów n , w którym opornik o oporze R jest podłączony do jednego zwoju. Obliczyć natężenie prądu płynącego przez opornik przy założeniu, że prąd ten praktycznie nie wpływa na strumień pola magnetycznego w rdzeniu autotransformatora, a opór R jest znacznie większy od oporu jednego zwoju. Jakie jest przesunięcie fazowe prądu płynącego przez opornik w stosunku do prądu płynącego przez autotransformator? Jaka powinna być indukcyjność autotransformatora, aby przyjęte założenie mogło być spełnione?



46. Pod jakim kątem względem poziomu powinien być rzucony woreczek z piaskiem, aby po upadnięciu na lód współczynnik tarcia woreczka o lód wynosił 0,1) dotarł jak najdalej?

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 41 /WT=2,12/ i 42 /WT=2,84/
z numeru 1/1987

Aleksander Surma	- Myszków	42,48pkt
Robert Repucha	- Gołdap	37,24pkt
Piotr Bała	- Toruń	35,97pkt
Anna Gluza	- Toruń	35,71pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	33,53pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	31,32pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	29,46pkt
Piotr Wach	- Katowice	29,18pkt

45. Napięcie na jednym zwoju autotransformatora jest równe $U' = \frac{1}{n} U_0 \sin \omega t$,

wobec tego natężenie prądu płynącego przez opornik wynosi $I_R = \frac{U'}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{nR}$.

Jak widać, jest ono zgodne w fazie z napięciem zasilającym. Natężenie I_A prądu płynącego w uzwojeniu nieobciążonego autotransformatora jest opóźnione w fazie o $\pi/2$ względem napięcia zasilającego. Wobec tego prąd płynący przez opornik wyprzedza w fazie prąd płynący w autotransformatorze o $\pi/2$.

Podane w treści zadania założenie dotyczące wpływu prądu płynącego przez opornik na strumień pola magnetycznego w rdzeniu oznacza spełnienie warunku $I_{R0} \ll n I_{A0}$ (I_{R0} i I_{A0} oznaczają amplitudy odpowiednich prądów), który wobec związku $I_{A0} = \frac{U_0}{L\omega}$ przyjmuje postać

$$L \ll \frac{n^2 R}{\omega}$$

46. Załóżmy, że woreczek o masie m zostaje wyrzucony z prędkością v_0 pod kątem α względem poziomu. Pierwszy etap ruchu to rzut ukośny, a jego zasięg wynosi $z_1 = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$ (g — przyspieszenie ziemskie). Zderzenie woreczka z lodem można uznać za niesprężyste. Pionowa składowa pędu padającego ciała o masie m zostaje w procesie zderzenia zrównoważona przez popęd siły reakcji podłoża $N(t)$ pomniejszonej o ciężar ciała. Stąd mamy

$$(1) \quad mv_0 \sin \alpha = \int_0^{\Delta t} N(t) dt - mg \Delta t,$$

gdzie Δt jest czasem zderzenia (czyli czasem, kiedy $N > mg$). Z drugiej strony zmiana składowej poziomej pędu padającego ciała jest równa popędowi siły tarcia:

$$(2) \quad mv_0 \cos \alpha - mv = \int_0^{\Delta t} fN(t) dt.$$

We wzorze tym f oznacza współczynnik tarcia kinetycznego, v — prędkość (poziomą) ciała bezpośrednio po zderzeniu. Założyliśmy tu, że poziome przesunięcie ciała w czasie zderzenia Δt jest zaniedbywalne. Podobnie zaniedbując człon $mg \Delta t$ po prawej stronie równania (1) (co odpowiada sytuacji, w której czas Δt jest zaniedbywalny wobec czasu ruchu ciała) wyznaczamy na podstawie wzorów (1) i (2) prędkość poślizgu ciała tuż po

upadku:

$$(3) \quad v = v_0 (\cos \alpha - f \sin \alpha).$$

Oczywiście musi zachodzić $f < \operatorname{ctg} \alpha$, w przeciwnym razie ciało w wyniku zderzenia zatrzyma się. Zasięg z_2 poślizgu na lodzie wyznaczamy przyrównując energię kinetyczną $\frac{mv^2}{2}$ do pracy sił tarcia $fmgz_2$:

$$z_2 = \frac{v^2}{2fg} = \frac{v_0^2}{2fg} (\cos \alpha - f \sin \alpha)^2.$$

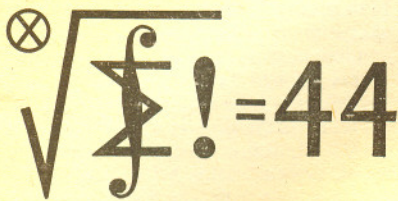
Zasięg całkowity będzie równy

$$z = z_1 + z_2 = \frac{v_0^2}{2fg} (\cos \alpha + f \sin \alpha)^2.$$

Obliczając pochodną $\frac{dz}{d\alpha}$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy wyrażenie na kąt α odpowiadający maksymalnemu zasięgowi:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f.$$

Dla $f = 0,1$ kąt ten wynosi $\alpha \approx 6^\circ$, natomiast zasięg $z \approx 5 \frac{v_0^2}{g}$, czyli jest pięciokrotnie większy od maksymalnego zasięgu rzutu ukośnego z taką samą prędkością.



Przypominamy treść zadań:

147. (x_n) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych; $z_n = \text{NWW}(x_1, \dots, x_n)$. Czy szereg $\sum 1/z_n$ musi być zbieżny?

148. P jest punktem wewnętrznym wielościanu wypukłego W ; z każdego wierzchołka wielościanu W wychodzą 3 krawędzie. W szkielecie każdego ostrosłupa, którego podstawą jest dowolna ściana wielościanu W , a pozostałym wierzchołkiem — punkt P , można wpisać kulę. Dowieść, że w szkielecie wielościanu W można wpisać kulę.

147. Tak. Jeśli a, b są liczbami naturalnymi, $a < b$, to

$$\frac{1}{\text{NWW}(a, b)} = \frac{\text{NWD}(a, b)}{ab} = \frac{\text{NWD}(a, b-a)}{ab} \leq \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Zatem dla $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\text{NWW}(x_1, \dots, x_n)} \leq \frac{1}{\text{NWW}(x_{n-1}, x_n)} \leq \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n},$$

z której dostajemy

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \leq \frac{1}{x_1} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) < \frac{2}{x_1}.$$

148. Ponumerujemy ściany F_1, \dots, F_n wielościanu W w taki sposób, by ściany F_1 i F_2 były przyległe do siebie (miały wspólną

krawędź), oraz by każda kolejna ściana F_k , $3 \leq k \leq n$, przylegała do dwóch ścian o numerach wcześniejszych. Oznaczmy przez W_1 ostrosłup o wierzchołku P i podstawie F_1 , przez K_1 koło wpisane w ścianę F_1 (jego istnienie wynika z założeń), a przez L_1 — prostą prostopadłą do płaszczyzny ściany F_1 , przechodzącą przez środek koła K_1 . Niech \overline{AB} będzie wspólną krawędzią ścian F_1 i F_2 . Kule wpisane w ostrosłupy W_1 i W_2 są styczne do krawędzi \overline{AB} w tym samym punkcie (bo przekrój każdej z tych kul płaszczyzną ABP jest kołem wpisanym w trójkąt ABP). Płaszczyzny wyznaczone przez ten punkt styczności oraz proste L_1 i L_2 są obie prostopadłe do krawędzi \overline{AB} , a więc są identyczne. Wobec tego proste L_1 i L_2 przecinają się. Ściana F_3 przylega do F_1 i F_2 . Zatem także proste L_1 i L_3 przecinają się i podobnie proste L_2 i L_3 przecinają się. Ponieważ proste L_1, L_2, L_3 nie leżą w jednej płaszczyźnie, muszą mieć dokładnie jeden punkt wspólny O . Dalej przez indukcję wnioskujemy, że każda z prostych L_4, \dots, L_n przechodzi przez punkt O . Punkt ten jest więc równo oddalony od wszystkich krawędzi wielościanu W . Stąd i z wypukłości W wynika teza zadania.

Patrz na niebo

mgr Joanna UDALSKA

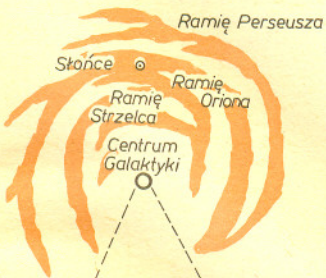


Rozwiązanie zadania F 225. Początkowo środek masy wahał się wyżej niż obniżał. Na skutek tego wzrastać będzie odległość od środka masy do punktu zawieszenia wahała. Ponieważ w przybliżeniu układ taki możemy uważać za wahałko matematyczne, dla którego $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (L — długość wahała), okres wahań będzie się w miarę ubywania piasku wydłużał. Jednakże obniżanie się środka masy pojemnika z piaskiem nie zachodzi jednostajnie. W przypadku, gdy w pojemniku jest mało piasku, środek masy może przesuwać się wyżej, co powoduje skracanie okresu drgań. (Kiedy cały piasek wysypie się ze zbiornika, wtedy środek masy wahałki będzie znajdował się wyżej niż w przypadku, kiedy poziom piasku znajduje się poniżej środka masy samego pojemnika.) Sytuacja niejednostajnej zmiany okresu drgań nie wystąpi w przypadku, gdy środek masy pustego pojemnika będzie znajdował się na jego dnie.

Patrząc na nocne niebo widzimy obiekty znajdujące się w różnych odległościach od nas. Plan pierwszy stanowią konstelacje złożone z bliskich (w skali astronomicznej), widocznych oddzielnie gwiazd. Obraz nieba uzupełnia Droga Mleczna, stanowiąca tło, utworzone z gwiazd tak odległych, że możemy obserwować je zaledwie w postaci świetlistej smugi. Nie oznacza to, oczywiście, że w odległościach pośrednich nie ma gwiazd. Miliardy spośród nich są niedostępne nieuzbrojonymu oku, jako zbyt odległe, by można dostrzec je w postaci oddzielnych punktów i zarazem zbyt nieliczne, aby mogły utworzyć pozornie ciągłą chmurę świetlną. Bezskizycowe letnie noce są w naszych szerokościach geograficznych najlepszą porą do przeprowadzania obserwacji Drogi Mlecznej. Widać wtedy jej fragmenty przebiegające przez gwiazdozbiory Łabędzia, Orła i Strzelca. Również zimą warunki obserwacji Drogi Mlecznej są korzystne, przy czym widać wtedy najlepiej fragmenty leżące w konstelacjach Kasjopei, Perseusza, Woznicy i Jednorożca. Choć w Strzelcu jasny pas ginie dla naszych oczu za horyzontem, to jednak w rzeczywistości nie kończy się. Przecina dalej niebo południowe i w Jednorożcu znowu ukazuje się na półkuli północnej. Już amatorskie obserwacje Drogi Mlecznej, bez użycia jakichkolwiek przyrządów, mogą dostarczyć ciekawych wrażeń. Wystarczy przez około pół godziny przyzwycząić wzrok do ciemności, by dostrzec wiele zastanawiających szczegółów. Przede wszystkim zauważmy, że jasna, świetlista smuga nie jest jednakowo szeroka w każdym obszarze. Jej granice są trudne do uchwycenia, jednak wyraźnie widać, że nisko nad południowym horyzontem — w okolicach gwiazdozbioru Strzelca (mamy tu na myśli obserwacje przeprowadzane latem) — Droga Mleczna jest znacznie szersza niż w Kasjopei czy Perseuszu. Ponadto nie jest ona jednakowo jasna na całej swej powierzchni — łatwo wyróżnić jaśniejsze i ciemniejsze plamy. Szczególnie efektywnie ciemny obszar rozdziela dwa pasma Drogi Mlecznej w obszarze gwiazdozbioru Łabędzia. Oba pasma znacznie ustępują jasnością rozległemu obszarowi w Strzelcu, a pierwszoplanowe gwiazdy na ich tle widoczne są bardzo wyraźnie, znacznie wyraźniej niż w Strzelcu. Jak wyjaśnić te fakty obserwacyjne?

W tym miejscu musimy odwołać się do dzisiejszej wiedzy na temat budowy naszej Galaktyki, bowiem Droga Mleczna to nic innego, jak widok Galaktyki z jej wnętrza. Wrażenie świetlistej smugi wywołane jest przez słaby blask miliardów odległych gwiazd, co postulował już Demokryt (V w. p.n.e.), a co zostało wykazane przez Galileusza, gdy w 1609 roku skierował swą pierwszą lunetę w ten obszar nieba. Ponad 200 lat temu angielski astronom William Herschel przedstawił model naszej Galaktyki w postaci ogromnego zbiorowiska gwiazd ułożonego w kształt dysku, co przy przyjęciu przez niego założeniu, że Słońce wraz z układem planetarnym znajduje się w środku tego dysku, dobrze odpowiadało obrazowi Drogi Mlecznej opasującej wokół nieba obydwu półkul. Model Herschela poprawiony został w latach dwudziestych naszego wieku, gdy oceniono, że Słońce znajduje się w odległości 30 000 lat świetlnych od centrum Galaktyki. Badania przeprowadzone w latach pięćdziesiątych wykazały, że Galaktyka należy do grupy tzw. galaktyk spiralnych — na gęsty obszar centralny, zwany jądrem, nawijają się ramiona spiralne. Układ Słoneczny znajduje się na brzegu jednego z nich, zwanego ramieniem Oriona.

Patrząc w kierunku konstelacji Oriona widzimy więc przede wszystkim to ramię, w którym sami się znajdujemy. Szczególnie jasne obszary gwiazdozbiorów Strzelca, Skorpiona i Tarczy tworzą ramię Strzelca, bliższe centrum Galaktyki. Prawdopodobnie w kierunku tym leży jeszcze jedno ramię. Mimo że okolice te świecą dla nas jasno, w rzeczywistości znajduje się tam wiele ciemnych mgławic pochłaniających promieniowanie. Przesłaniają nam one centrum Galaktyki, które nie zakryte byłoby tysiące razy jaśniejsze. Po przeciwnej stronie w obszarze konstelacji Perseusza leży ramię Perseusza — jedno z zewnętrznych ramion naszej Galaktyki. Wszystkie ramiona spiralne znajdują się w płaszczyźnie dysku galaktycznego. W kierunkach prostopadłym do dysku i pośrednich widzimy tylko gwiazdy z naszego otoczenia na ciemnym tle międzygalaktycznym.



Schematyczny wygląd dysku galaktycznego widzianego z góry. Nie ma danych dotyczących obszaru zawartego między liniami przerywanymi.

DROBIAZGI

Aby ciecz, po dojściu do temperatury krzepnięcia, zaczęła krystalizować, konieczne jest powstanie w niej tzw. zarodki, czyli niewielkich fragmentów sieci krystalicznej. Zdarza się jednak, że w temperaturze, w której prędkość wzrostu kryształów jest największa, ciało nie krystalizuje, gdyż nie powstają w tej temperaturze zarodki. Na przykład: aby otrzymać związek o nazwie betol w stanie krystalicznym (temperatura krzepnięcia 96°C), należy go przede wszystkim ochłodzić do 16°C dla wytworzenia zarodki, a następnie ogrzać do 75°C, aby otrzymać szybki wzrost kryształów. Do lat pięćdziesiątych nie umiano otrzymać kryształu gliceryny; przy oziębianiu zawsze przechodziła w stan szklisty. Dopiero przypadkowo, w czasie transportu gliceryny przez Syberię, powstały warunki sprzyjające jej krystalizacji. Potem już łatwo można było wywołać krystalizację wprowadzając kryształki gliceryny do przechłodzonej cieczy.

Pierwszym, który stwierdził, że komety poruszają się poza atmosferą ziemską, był duński astronom Tycho Brahe. Zmierzył on paralaksę komety z 1577 roku i stwierdził, że kometa porusza się dalej niż Księżyc. Pierwszym, który zapowiedział powrót komety, był Edmond Halley. W 1705 roku ogłosił, że komety z 1531, 1607 i 1682 roku są tą samą kometa i zapowiedział jej powrót w 1758 roku.

Jak obliczyć sumę wektorów zaczepionych w środku n -kąta foremnego, których końcami są wierzchołki tego wielokąta? Sposobów jest wiele. Można np. wykorzystać znany wzór na sumę ciągi geometrycznego liczb zespolonych $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ albo też wzory

$$1 + \cos \alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha = \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin(n-1)\alpha = \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Można też uzyskać odpowiedź w wyniku rozważań geometrycznych. Najprościej jest jednak zauważyć, że układ wektorów, które sumujemy, nie zmienia się, gdy go obrócimy wokół środka wielokąta o kąt $\frac{2\pi}{n}$. Nasza suma też się więc nie zmieni przy tej operacji, a z tego wynika, że jest ona zerowa.

Powstawaniu pęcherzyków pary podczas gotowania wody towarzyszy charakterystyczny szum. Jak się okazuje, podobny „hałas” można „usłyszeć” również podczas krystalizacji przechłodzonej cieczy. W obszarach cieczy otoczonych przez utworzone już kryształki powstają silne naprężenia rozciągające. Gdy stają się one większe od sił przylegania cząstek cieczy, jej ciągliwość zostaje przerwana (tworzy się pęcherzyk pary) — procesowi temu towarzyszy powstawanie dźwięku. Zjawisko takie zaobserwowano podczas krystalizacji polipropylenu i polietylenu, a emitowane ultradźwięki były tym intensywniejsze, im bardziej ciecz była przechłodzona.

William Thomson (później Lord Kelvin) został przyjęty na Uniwersytet w Glasgow w 1834 roku. Miał wtedy 10 lat. Sześć lat później opublikował swoją pierwszą pracę naukową. Był jednocześnie znakomitym fizykiem eksperymentatorem i wybitnym teoretykiem. Podczas jednego z odczytów (było to pod koniec XIX wieku) stwierdził, iż w jego mniemaniu fizyka jest już zamkniętą dziedziną wiedzy, przynajmniej w ogólnych zarysach. Na horyzoncie, powiedział, można dostrzec jedynie dwie chmurki: negatywny wynik doświadczenia Michelsona, i Morleya oraz katastrofę ultrafioletową w prawie Rayleigha-Jeansa. Próby usunięcia „chmurki” doprowadziły do sformułowania w kilka lat później szczególnej teorii względności i mechaniki kwantowej.

Ciąg

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}, \dots$$

to nic innego jak ciąg $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$. O tym się można łatwo przekonać indukcyjnie. Ale z czego wynika, że iloczyn pierwszych k wyrazów tego ciągu przybliży liczbę $\frac{2}{\pi}$ tym lepiej, im większe jest k i to przybliży dowolnie blisko? Inna wersja tego samego: w okrąg o promieniu 1 wpisujemy kwadrat, w ten kwadrat wpisujemy okrąg, w niego ośmiokąt, w niego okrąg, szesnastokąt, okrąg, trzydziestodwukąt, okrąg itd. W granicy otrzymujemy okrąg o długości 4. Może tak łatwiej? A czy to jest rzeczywiście to samo?

Neptun, odkryty w 1846 roku, został zaznaczony przez Galileusza na mapce przedstawiającej ułożenie satelitów Jowisza 28 grudnia 1612 roku jako słaba gwiazda. O tym, że był to Neptun, dowiedziano się w 1980 roku, gdy testowano program komputerowy wyliczający położenia planet m.in. dla tej daty.

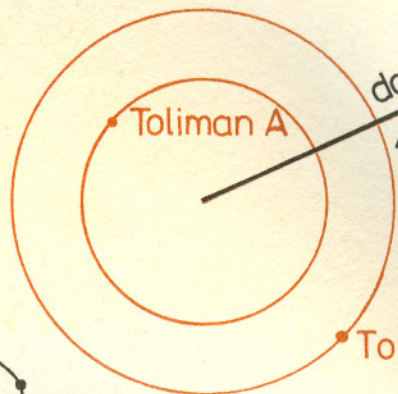
Małe i duże

Jeśli wielkość zbioru $F \subset \mathbb{R}^n$ oceniać według jego n -wymiarowej miary Lebesgue'a, to okaże się, że zbiory małe (miary 0) mogą być bardzo pojemne, duże zaś (miary dodatniej) prawie przezroczyste. Istnieje bowiem zbiór płaski miary 0, który zawiera: kopie wszystkich wielokątów, okręgi o wszystkich promieniach i prostą w każdym kierunku. (Nie wiadomo, czy w małym zbiorze można zmieścić okręgi o wszystkich środkach albo kopie wszystkich elips.) Istnieje również płaski zbiór miary 1 zawarty w kwadracie jednostkowym, taki, że przez każdy jego punkt można poprowadzić nieprzeliczalnie wiele prostych, które nie przetną tego zbioru w żadnym innym punkcie.

Słońce ma, zdawałoby się, wyraźną, określoną powierzchnię, a co za tym idzie — rozmiary. Tymczasem np. na fali 5 m Słońce jest dwa razy większe. Dzieje się tak, ponieważ dla promieniowania optycznego materia słoneczna staje się przezroczysta właśnie na poziomie fotosfery, tj. widocznej „powierzchni” Słońca (stąd zresztą jej nazwa), natomiast dla promieniowania o fali dłuższej atmosfery Słońca jest przezroczysta dopiero od wysokości odpowiednio większej.

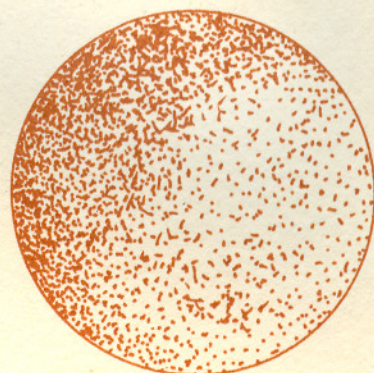
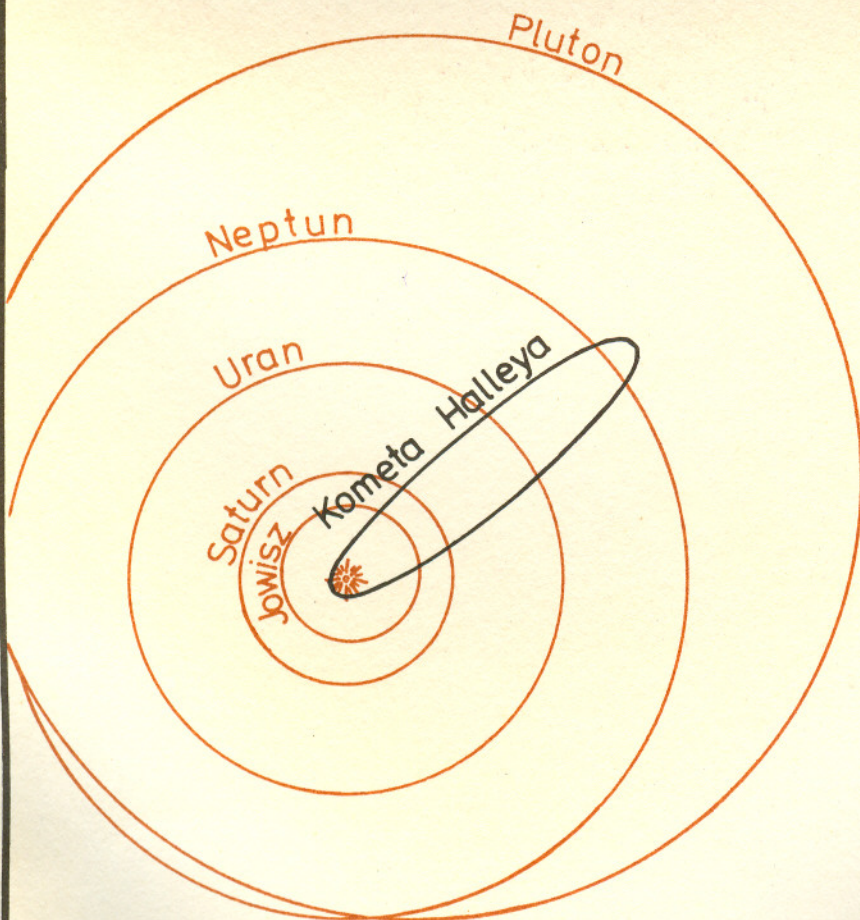
10^{-14}

UKŁAD POTRÓJNY α CENTAURI

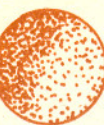


do Proksimy
10 000 a.u.
(w tej skali 15 m)

UKŁAD SYRIUSZA



μ CEPHEI



VV CEPHEI



BETELGEUSE

