

SPIS TREŚCI

NUMERU 6(162)

Wodorki metali <i>prof. dr Bogdan Baranowski</i>	str. 1
O wyznaczaniu orbit <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 3
Rogata sfera Alexandra <i>dr Krzysztof Ciesielski, dr Zdzisław Pogoda</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Ile jest liczb pierwszych?	str. 7
Mała Delta	str. 8
Powierzchnia krzemu 7×7 <i>dr Andrzej Hennel</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 12
Szczególny przypadek	str. 13
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16

W następnym numerze:
 Tomografia komputerowa

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichoński
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tomasz Hofmókl — v-przewodniczący
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Płochocki
 dr Jan Rempala
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz SitarSKI
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stepień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wołska
 prof. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Zakowski —
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska
 mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 4211/12/87. K-23.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnego,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Z przyszłościowych nośników energii wodór wydaje się być jednym z najbardziej obiecujących. Synteza wody z wodoru i tlenu jest reakcją wysoce energetyczną, wykorzystywaną zresztą wspólnie do napędu niektórych rakiet. Inną zaletą wodoru jako paliwa jest nieszkodliwość produktu spalania (wody) dla otoczenia oraz łatwa dostępność naturalnych zasobów wody jako źródła jego otrzymywania. Powstaje przy tym problem magazynowania i transportu wodoru.

Wodorki metali w technologii wodorowej

Kontakt wielu metali z gazowym wodorem prowadzi do powstania połączeń zwanych wodorkami metali. Reakcję taką możemy zapisać schematycznie wzorem:



gdzie Me symbolizuje atom reagującego metalu, H_2 cząsteczkę gazowego wodoru, x i y oznaczają współczynniki stechiometryczne, czyli ilości cząsteczek biorących udział w elementarnej reakcji. Strzałki oznaczają możliwość prowadzenia powyższej reakcji w obu kierunkach. Inaczej mówiąc — gazowy wodór możemy związać chemicznie z metalem, ale i odwrotnie — z wodorku metalu możemy otrzymać gazowy wodór i czysty metal. Tworzenie lub rozkład wodorku metalu zależy od temperatury oraz ciśnienia gazowego wodoru. Obukierunkowość reakcji (1) jest podstawą do wykorzystywania wodorków metali do magazynowania i przenoszenia wodoru. Sposób taki ma w porównaniu z tradycyjnymi metodami, tj. butlami stalowymi z gazowym wodorem czy zbiornikami z ciekłym wodorem, szereg zalet. Po pierwsze, na jednostkę objętości przypada w wodorkach metali dużo większa ilość wodoru, niż ma to miejsce nawet w ciekłym stanie tego pierwiastka. I tak ciekły wodór zawiera w normalnym ciśnieniu około 0,07 g w cm^3 , natomiast wodorek o składzie $\text{TiFeH}_{1,93}$ aż 5,5 g w tej samej objętości, a więc około 80 razy więcej. Ponadto przechowywanie i przenoszenie wodoru w formie wodorków metalicznych jest dużo bezpieczniejsze. Niewątpliwym ograniczeniem jest natomiast duży ciężar metalu pochłaniającego wodór. Wymieniony wyżej wodorek tytanowo-żelazawy zawiera wagowo jedynie 1,8 % wodoru. Niemniej jednak ten właśnie wodorek służy za podstawę opracowanych już technologii wykorzystywania wodoru do napędu samochodów. Nie wymaga to zmian konstrukcyjnych w silniku. Zasadniczą modyfikacją jest zastąpienie gaźnika urządzeniem mieszającym wodór z powietrzem. Jedną ze znanych firm samochodowych przygotowanych do przejścia na napęd wodorowy jest Mercedes-Benz w RFN. Druga już generacja tych rozwiązań oparta jest o kombinowany napęd benzynowo-wodorowy. Przy małych mocach i szybkościach, stosowanych w ruchu miejskim, silnik pracuje na czystym wodorze. Jest to wtedy związane z minimalnym zanieczyszczeniem środowiska, ponieważ prawie wyłącznym produktem pracy takiego silnika jest para wodna. W miarę natomiast wzrostu mocy, a więc i większych szybkości ruchu, wzbogaca się stopniowo mieszanek wybuchową w benzynę, aby ostatecznie przejść na nią całkowicie w czasie jazdy na drogach szybkiego ruchu. Ten kombinowany napęd daje przede wszystkim większy zasięg jednorazowego „tankowania” wodorem, który przy braku udziału benzyny nie przekraczał około 300 km. „Wodorowy” samochód wymaga dodatkowego obciążenia metalicznym stopem pochłaniającym i wydzielającym wodór. Jest to objętościowo niewielki element o wadze około 200 kg. Przy obecnych niskich cenach ropy naftowej na rynkach światowych wprowadzanie napędu wodorowego nie jest realne, zwłaszcza na większą skalę. Niemniej Mercedes-Benz jest przygotowany do wprowadzenia paliwa wodorowego w samochodach, jeżeli tylko będzie to ekonomicznie uzasadnione.

Napęd w pojazdach mechanicznych jest jednym z wielu możliwych zastosowań wodorków metalicznych w tzw. technologii wodorowej. Optymiści utrzymują, że potencjalnych zastosowań jest ponad dwadzieścia. Wspomnijmy tutaj o jednym z nich, rozważanym już obecnie na większą skalę. Mianowicie: wodorki metaliczne mogą być wykorzystane do magazynowania wodoru, otrzymywanego np. na drodze elektrolizy wody w elektrowniach w czasie małego obciążenia. Rozważane są już obecnie projekty budowy wielotonowych zasobników metalicznych do takich właśnie celów. Innym atrakcyjnym przykładem jest zastosowanie wodorków metalicznych w zamrażarkach, w których wydzielenie ciepła w jednej części jest sprzężone z jego pochłanianiem w innej części. Absorpcja wodoru w metalach jest bowiem z reguły związana z wydzieleniem ciepła — natomiast jego desorpcja ze stałego metalu pochłania ciepło z otoczenia. Sterowanie tą wymianą ciepła stwarza w urządzeniach o większej skali poważne problemy inżynierskie.

Związki stechiometryczne to takie, które podlegają prawom: stałości składu (prawo Daltona) i stałych stosunków (prawo Prousta). W artykule jest także mowa o związkach niestechiometrycznych, tj. nie podlegających tym prawom, których skład może się zmieniać. Prosty przykładem takiego związku jest występujący w przyrodzie minerał — tlenek tytanu $\text{TiO}_{1,7-1,8}$ (gdymy obowiązywało prawo stosunków stałych, jego skład należałoby wyrazić wzorem TiO_2).



Rozwiązanie zadania F 222. Oznaczmy przez $E_p(H_p)$, $E_{odb}(H_{odb})$, $E_{prz}(H_{prz})$ pola elektryczne (magnetyczne) odpowiednio: fali padającej, odbitej i przechodzącej (rysunek). Z warunków ciągłości na granicy ośrodków wynika:

$$E_p + E_{odb} = E_{prz},$$

$$H_p - H_{odb} = H_{prz}.$$

Ponieważ dla płaskiej fali monochromatycznej zachodzi związek $H = \sqrt{\epsilon/\mu}E$, gdzie ϵ (μ) jest przenikalnością dielektryczną (magnetyczną) ośrodka, otrzymujemy stąd:

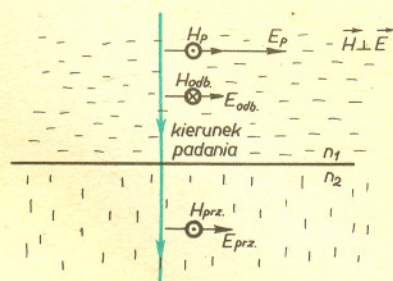
$$\frac{H_p}{E_p} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} = \frac{H_{odb}}{E_{odb}} + \frac{H_{prz}}{E_{prz}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}.$$

Korzystając z faktu, iż $n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}$ i $n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}$, łatwo wyznaczyć stosunek natężenia fali odbitej do padającej:

$$r_{12} = \frac{E_{odb}}{E_p} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Mamy więc $r_{12} = -r_{21}$. Ponieważ energia fali jest proporcjonalna do E^2 , współczynnik odbicia

$$k = r_{12}^2 = (-r_{21})^2.$$



Wodorki metali jako obiekt badawczy

Układy metal-wodór stanowią w badaniach podstawowych przedmiot szerokiego zainteresowania. Z ogólnego punktu widzenia chodzi tutaj o połączenia metali z najlżejszym pierwiastkiem, wykazującym najprostszą strukturę elektronową. Zdziawiająca jest przy tym różnorodność właściwości, jakie obserwujemy. I tak wodorki metali alkalicznych i ziem alkalicznych mają charakter związków ściśle stechiometrycznych, w których wodór występuje w postaci anionów. Metale przejściowe, np. tytan i cyrkon i metale ziem rzadkich tworzą natomiast — obok wielu ściśle stechiometrycznych wodorków — połączenia o zmiennym składzie, tzw. wodorki niestechiometryczne, których własności zmieniają się często w funkcji stężenia wodoru. I tak np. wodorek cezu ze wzrostem stężenia wodoru zmienia charakter z metalicznego na półprzewodnikowy, a następnie staje się nawet izolatorem. Wprowadzenie wodoru do metalu może spowodować powstanie ferromagnetyzmu, jak to ma miejsce w wodorkach uranu, ale i odwrotnie, może redukować ferromagnetyzm, co obserwujemy w wodorku niklu. Również i w odniesieniu do nadprzewodnictwa tworzeniu wodorku metalicznego może towarzyszyć obniżenie temperatury krytycznej, do całkowitego zaniku włącznie, jak to stwierdzono w większości wodorków metali przejściowych. Natomiast w wodorku palladu, od pewnego stężenia wodoru począwszy, występuje nadprzewodnictwo, przy czym temperatura krytyczna jest (w pewnym zakresie stężeń) wyraźnie wzrastającą funkcją stężenia wodoru.

Dużą zaletą wielu wodorków jest łatwość ich otrzymywania oraz możliwość odwracalnych zmian składu przez odpowiedni kontakt z gazowym wodorem. W sieci metalicznej wodór może występować albo w postaci anionowej — jak we wspomnianych wyżej metalach alkalicznych — albo też w postaci w różnym stopniu ekranowanego protonu, jak ma to miejsce w metalach przejściowych. Jest sprawą dyskusyjną, w jakim stopniu wodór taki można uważać za składnik metaliczny otrzymanego „stopu”.

W sieci przestrzennej metalu cząstki wodoru zajmują określone położenie. Zmiany stężenia mogą tutaj prowadzić do wymuszania różnych typów symetrii sieci krystalograficznej. Zmiany takie towarzyszą przejściom fazowym w układach metal-wodór, które często przypominają swoim charakterem przejścia gaz-ciecz lub ciecz-ciało stałe w układach jednoskładnikowych. Ta analogia skłania często do rozpatrywania wodoru w metalach jako gazu sieciowego, który może wykazywać przejścia fazowe charakterystyczne dla tego modelu.

Wysokie ciśnienia w wodorkach metali

Chłonność poszczególnych metali na wodór jest bardzo zróżnicowana. Często nawet podobne, wydawałoby się, metale zachowują się odrębnie. I tak dla otrzymania wodorku palladu o składzie PdH_{0,6} wystarczy w temperaturze pokojowej ciśnienie gazowego wodoru rzędu kilkunastu mm Hg. Natomiast należące do tej samej co pallad podgrupy w układzie periodycznym metale nikiel i platyna absorbują w takich samych warunkach zanedbywalnie małe ilości wodoru. Jeżeli gazowy wodór o ciśnieniu około 6 tys. atm (0,6 GPa) działa na metaliczny nikiel w temperaturze pokojowej, to otrzymujemy metaliczny wodorek niklu o składzie NiH. To samo ciśnienie natomiast nie powoduje znaczącej absorpcji wodoru w platynie. Niemniej przykład wodorku niklu wykazuje, że działanie wysokim ciśnieniem gazowego wodoru na metale może umożliwić syntezę wodorków dotychczas nieznanych. Tezę tę sprawdzono na wielu przykładach w Instytucie Chemii Fizycznej PAN w Warszawie. Np. otrzymano w ten sposób nieznaną dotychczas wodorek manganu, jak również na drodze bezpośredniej syntezy z pierwiastków wodorki chromu i glinu, znane jedynie z pośrednich metod otrzymywania. Warto wspomnieć, że wykrycie nadprzewodnictwa wodorku palladu ma swoją genezę również w metodyce wysokociśnieniowej gazowego wodoru. Technika ta została zastosowana i rozwinięta po naszych doświadczeniach w Instytucie Fizyki Ciała Stałego AN ZSRR w Czernogolowce.

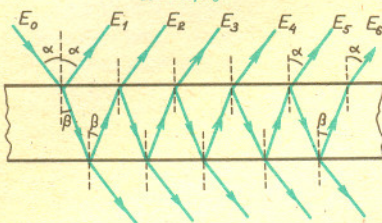
Wysokie ciśnienie może wywołać w wodorkach metali szereg istotnych zmian. Należą do nich zmiany symetrii sieci krystalicznej, występujące w określonych ciśnieniach jako nieciągłe przejścia fazowe. Jest znanym faktem, że różnorodność faz jest w odniesieniu do zmian ciśnienia dużo większa niż w odniesieniu do zmian temperatury. Zmniejszenie wzajemnych odległości elementów sieci krystalograficznej pod wpływem wzrostu ciśnienia wymusza często reorganizację symetrii przestrzennej. Takie skokowe zmiany zachodzą również w krystalicznych wodorkach metali poddawanych działaniu wysokiego ciśnienia. Ogólnie rzecz ujmując obserwuje się ten sam typ zmian, co w innych fazach krystalicznych, mianowicie: wysokie ciśnienie preferuje bardziej objętościowo zwarte fazy w porównaniu z ciśnieniem normalnym. Obok krystalicznych wodorków metali bada się ostatnio amorficzne stany metaliczne (tzw. szkła metaliczne) naścane wodorem. Otrzymywanie amorficznych metali wymaga w wielu przypadkach dodatków, np. krzemu, boru czy fosforu, które znacznie obniżają pochłanianie wodoru. Zastosowanie wysokich ciśnień wodoru polepsza znakomicie jego absorpcję. A zatem jeżeli jesteśmy zainteresowani wysokimi stężeniami wodoru w niektórych amorficznych metalach, to nieodzowne staje się wykorzystanie techniki wysokociśnieniowej.

Rozwiązanie zadania F 223. Na rysunku przedstawiono schematycznie kolejne odbicia i załamania w płycie. Całkowita energia odbitego światła jest równa

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

Jeśli przez E_0 oznaczymy energię światła padającego, współczynnik odbicia będzie równy

$$R = E/E_0.$$



Energia pierwszego odbitego promienia, który uległ jednokrotnemu odbiciu od płytki, wynosi $E_1 = kE_0$. Drugi odbity promień dwa razy przechodzi przez granicę ośrodków i raz odbija się od dolnej powierzchni (rysunek). Jego energia wynosi $E_2 = k(1-k)^2E_0$. Trzeci promień przechodzi również dwa razy przez granicę ośrodków, ale ulega trzykrotnemu odbiciu. Stąd jego energia jest równa $E_3 = k^3(1-k)^2E_0$. Podobnie mamy dla E_4 itd. Na tej podstawie otrzymujemy

$$R = k + k(1-k)^2 + k^3(1-k)^2 + \dots = k + k(1-k)^2 \cdot [1 + k^2 + k^4 + \dots].$$

Suma nieskończonego, malejącego ($k^2 < 1$) szeregu geometrycznego w nawiasie kwadratowym jest równa $1/(1-k^2)$. A zatem współczynnik odbicia

$$R = \frac{2k}{1+k}.$$

Rozwiązanie zadania M 472. Oznaczmy przez n liczbę wierzchołków wielokąta wypukłego i niech $n \geq 4$. Każde cztery wierzchołki wielokąta są wierzchołkami czworokąta wypukłego, który ma dwie przecinające się przekątne. Ponadto, jeśli dane są dwie przecinające się przekątne, wyznaczają one pewien czworokąt. Wobec tego liczba punktów przecięcia przekątnych nie przekracza $\binom{n}{4}$ i jest równa tej liczbie, gdy wszystkie punkty przecięcia są różne.

Rozwiązanie zadania M 473. Równanie okręgu można napisać w postaci

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Środek okręgu ma wtedy współrzędne

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right).$$

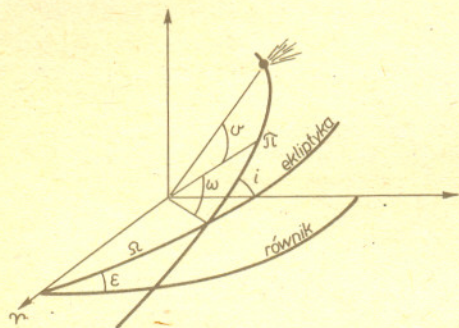
Przyjmijmy teraz, że na okręgu istnieją trzy punkty o wymiernych współrzędnych. Po podstawieniu współrzędnych tych punktów do równania okręgu otrzymujemy układ równań liniowych (z niewiadomymi A, B, C) o wymiernych współczynnikach. W takim razie A, B, C są wymierne, zatem środek okręgu ma obie współrzędne wymierne — sprzeczność kończy dowód.

O wyznaczaniu orbit

Dr Tomasz KWAST

Ruch — powiedzmy — komety wokół Słońca jest w pełni określony przez podanie jej trzech współrzędnych położenia (x_0, y_0, z_0) oraz trzech współrzędnych prędkości ($\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$) w dowolnej chwili. Znajomość tych sześciu parametrów jest równoważna znajomości całego „mechanicznego” życia komety, bowiem parametry te są konieczne i wystarczają do jednoznacznego rozwiązania równań ruchu komety.

Parametry te nie są jednak najwygodniejsze w użyciu chociażby z tego powodu, że nieskończenie wiele ich zestawów może odpowiadać temu samemu obiektowi. Dlatego w astronomii za „znaki szczególne” obiektów obiegających Słońce uważa się sześć innych wielkości zwanych elementami orbity, które mają bardzo naturalną interpretację geometryczną i stanowią w rezultacie „paszport” danego obiektu. Przedstawiliśmy je w *Delcie* 12/1986, chyba jednak nie będzie źle, jeśli je teraz przypomnimy (rys. 1).

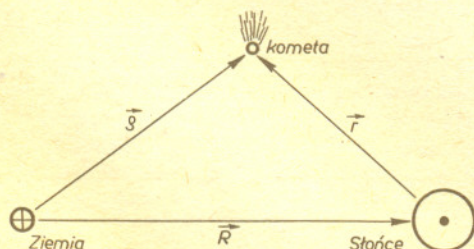


Rys. 1

Położenie płaszczyzny orbity względem ekliptyki (uwaga: ekliptyki!) opisują dwa kąty: Ω — długość ekliptyczna węzła wstępującego orbity, i — nachylenie. Położenie orbity już w jej płaszczyźnie opisuje kąt ω — tzw. argument szerokości perihelium, rozmiary orbity określa jej wielka półoś a , kształt — mimośród e , wreszcie pozostaje T jako moment przejścia obiektu przez perihelium. Kąt ϵ między płaszczyznami równika i ekliptyki jest, oczywiście, stałą przyrody, a nie „elementem orbity”.

Narzuca się pytanie: jak (na podstawie obserwacji prowadzonych z Ziemi) wyznaczyć elementy nowo odkrytej komety? Problem ten był naczelnym w mechanice nieba do XIX w. Rozwiązał go ostatecznie Carl Friedrich Gauss i opublikował w 1809 r. w dziele *Theoria motus corporum coelestium*. Nie przedstawimy tu kompletnej metody obliczania $a, e, i, \omega, \Omega, T$ — jest to zagadnienie zbyt skomplikowane rachunkowo; pokażemy tylko ideę metody.

Trzy ciała — Ziemia, Słońce i kometa — tworzą w każdej chwili t trójkąt o bokach oznaczonych jak na rysunku 2.



Rys. 2

Współrzędne geocentryczne komety (w układzie współrzędnych z rysunku 1) tworzą wektor $\rho = [\xi, \eta, \zeta]$, jej współrzędne heliocentryczne wektor $r = [x, y, z]$, a współrzędne Słońca względem Ziemi $R = [X, Y, Z]$ i uważamy je za znane skądinąd — można je obliczyć z góry lub znaleźć w rocznikach astronomicznych. Między współrzędnymi tych wektorów zachodzą oczywiste związki:

$$\xi = \rho \cos \delta \cos \alpha = x + X,$$

$$\eta = \rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y,$$

$$\zeta = \rho \sin \delta = z + Z,$$

gdzie α i δ oznaczają rektascensję i deklinację komety, x, y, z zaś wyrażają się w mocno skomplikowany sposób przez $a, e, i, \omega, \Omega, T$. Te właśnie wielkości musimy wyznaczyć, jasne jednak, że jest to na razie niewykonalne, skoro mamy mniej równań niż niewiadomych.

I tak dochodzimy do najważniejszego punktu całego zagadnienia. Zwiększenie liczby równań uzyskuje się wykonując dalsze obserwacje. Nie zapominajmy jednak, że przy każdej obserwacji oprócz sześciu elementów mamy dodatkową niewiadomą — odległość komety od Ziemi ρ , bowiem obserwacja, czyli pomiar rektascensji i deklinacji, daje tylko kierunek do komety. Dlatego właściwą liczbę równań osiągnie się dopiero po trzech obserwacjach — wtedy dopiero będzie 9 równań na tyleż niewiadomych:

$a, e, i, \omega, \Omega, T, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

Od tej chwili problem przestaje być astronomiczny, a staje się czysto rachunkowy: jak rozwiązać, przynajmniej — dość skomplikowany — układ równań? Jest to rzeczywiście pracochłonne nawet z użyciem kalkulatora. Aby nie być gołosłownym, przedstawiamy komplet niezbędnych formuł. Wprowadźmy oznaczenia:

$$P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$P_y = (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \sin \omega \sin i \sin \epsilon,$$

$$Q_y = (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \cos \omega \sin i \sin \epsilon,$$

$$P_z = (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \sin \omega \sin i \cos \epsilon,$$

$$Q_z = (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \cos \omega \sin i \cos \epsilon.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x &= P_x x_0 + Q_x y_0, \\ y &= P_y x_0 + Q_y y_0, \\ z &= P_z x_0 + Q_z y_0, \end{aligned}$$

gdzie $x_0 = r \cos v$, $y_0 = r \sin v$ (v jest tzw. anomalią prawdziwą komety i jest zaznaczona na rysunku 1). Ponadto

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}$$

i np. jeżeli $e < 1$ (kometa porusza się po elipsie), to pomocnicza zmienna E (zwana anomalią mimośródową) wiąże się z anomalią prawdziwą v zależnością $\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$.

Na koniec E wiąże się z T poprzez tzw. równanie Keplera

$$E - e \sin E = k a^{-3/2} (t - T),$$

gdzie $k = 0,017202099$. Wszystkie odległości (r, ρ, a) są tu liczone w jednostkach astronomicznych, czas zaś — w dniach.

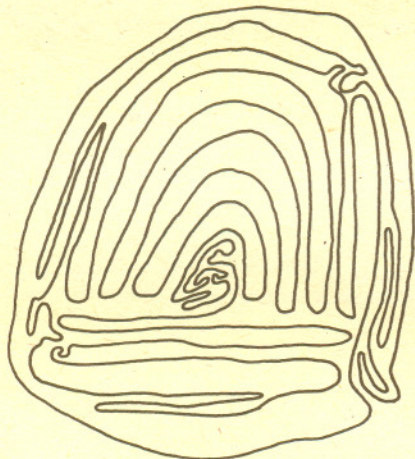
Problem odwrotny, czyli obliczenie położenia komety w zadanej chwili przy znajomości elementów jej orbity, jest dużo prostszy. Obliczenia takiej — jak mówimy — efemerydy można dokonać już na podstawie przytoczonych tu wzorów.

Dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Matematyka, w przeciwieństwie do wielu innych gałęzi nauki, jest dyscypliną bardzo konkretną. Nie zdarzy się tu wypadek, że teoria, radośnie rozgłaszana przez wielu entuzjastów, po paru latach ulegnie zmianie pod wpływem nowej mody czy innych zewnętrznych czynników. Po latach może się jedynie zmienić waga rezultatów; można też wiele uprościć. Ale jeżeli wynik nie zawierał błędów, to pozostaje prawdziwy. Niemniej jednak matematyków często czekają inne niespodzianki.

Wiele twierdzeń, z pozoru bardzo skomplikowanych, po bliższym zbadaniu okazuje się być prostymi. Ale zdarza się, i to nad wyraz często, coś wręcz przeciwnego. Fakt, pozornie bardzo prosty i oczywisty, długo opiera się wszelkim próbom dowodu. Banalny, wydawałoby się, rezultat jest w istocie trudny. Klasycznym przykładem, często cytowanym, jest twierdzenie Jordana.

Najpierw podamy dwie definicje. Krzywa Jordana jest to zbiór homeomorficzny z okręgiem (homeomorfizm to „bijekcja w obie strony ciągła”). Mówiąc potocznie, krzywą Jordana na płaszczyźnie tworzymy wyginając okrąg na wszelkie możliwe sposoby. Nie wolno nam jednak niczego rozrywać ani kleić. Natomiast obszarem w \mathbb{R}^n nazywamy zbiór otwarty, w którym dwa dowolne punkty możemy połączyć linią zawartą w tym zbiorze. Twierdzenie Jordana, do którego zmierzaliśmy, mówi, że każda krzywa Jordana na płaszczyźnie rozcina ją na dwa obszary (jeden ograniczony, drugi nie) i jest ich wspólnym brzegiem. Oczywiście? A nad poprawnym dowodem można się bardzo długo męczyć. Twierdzenie pochodzi z końca XIX wieku. Tym, którzy sądzą, że tu nie ma nic do dowodzenia, radzimy obejrzeć załączony rysunek krzywej.



Na początku XX wieku A. Schönflies udowodnił piękne twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia Jordana. Twierdzenie Schönfliesa brzmi: dowolny homeomorfizm krzywej Jordana (zawartej w płaszczyźnie), na okrąg możemy rozszerzyć do homeomorfizmu płaszczyzny na siebie. Oznacza to, że mając powyginany (nawet bardzo fantazyjnie) okrąg na płaszczyźnie możemy tak deformować płaszczyznę (homeomorficznie, bez rozrywania i sklejanja), by po owej deformacji okrąg przeszedł właśnie na naszą krzywą. Z tego rezultatu twierdzenia Jordana wynika w sposób prosty. Jak? Zauważmy, że okrąg rozcina płaszczyznę na dwa obszary.

To rozumiacie; można je nawet opisać analitycznie: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y): x^2 + y^2 > 1\}$. A teraz wystarczy wykazać, że w homeomorfizmie obrazem obszaru jest obszar, obrazem brzegu figury jest brzeg figury, oraz że figura domknięta i ograniczona (u nas — koło domknięte) przejdzie w figurę domkniętą i ograniczoną. To jednak nie sprawia wielkich trudności.

Twierdzenie Schönfliesa można sformułować także w innej wersji. Rozważmy krzywą Jordana na płaszczyźnie. Zgodnie z twierdzeniem Jordana wycina ona z płaszczyzny dwa obszary, z których jeden jest ograniczony. Twierdzenie Schönfliesa mówi, że ów obszar ograniczony wraz z krzywą, przez którą został wycięty, jest zbiorem homeomorficznym z kołem domkniętym.

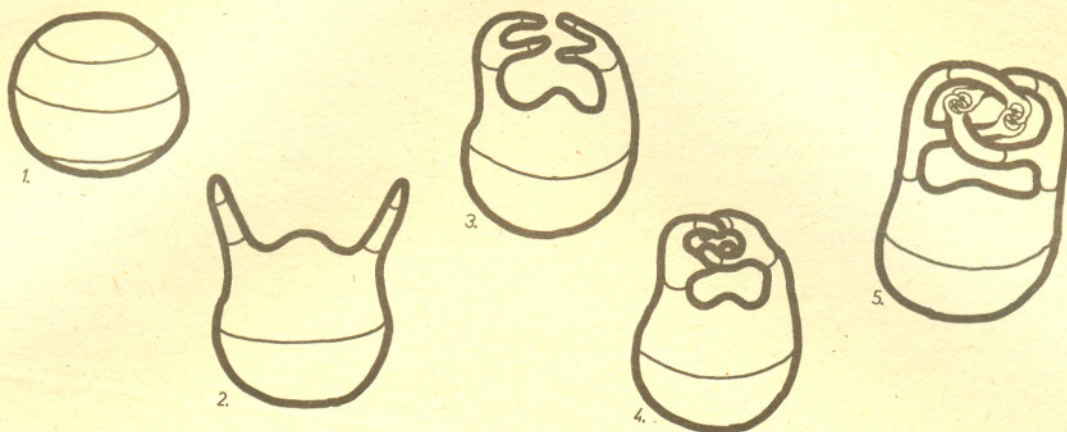
Analitycznie opisujemy: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$, $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Geometrycznie wyobrażamy sobie \mathbb{R}^2 jako płaszczyznę, \mathbb{R}^3 jako przestrzeń. Zbiór S^n nazywamy sferą n -wymiarową (zawartą w \mathbb{R}^{n+1}). Sfera jednowymiarowa to po prostu okrąg jednostkowy, dwuwymiarowa — znana nam sfera. Twierdzenie Jordana jest prawdziwe dla \mathbb{R}^n ; zbiór homeomorficzny ze sferą $(n-1)$ -wymiarową rozcina \mathbb{R}^n (n -wymiarową przestrzeń) na dwa obszary (jeden ograniczony) i jest ich wspólnym brzegiem. My skoncentrujemy swoją uwagę na przypadku trójwymiarowym ($S^2 \subset \mathbb{R}^3$).

Wydawać by się mogło, że i twierdzenie Schönfliesa można przenieść na wyższe wymiary. Niestety, przestrzeń n -wymiarowa (dla $n \geq 3$) nie zachowuje się tak dobrze jak płaszczyzna. W wielu wypadkach już przestrzeń trójwymiarowa płata matematikom figle. Tak było i w tym przypadku. W 1924 roku J. W. Alexander podał przykład dziwnego zbioru (nazywanego obecnie rogatą sferą Alexandra). Przykład ten wykazuje, że twierdzenia Schönfliesa nie można uogólnić już na przypadek \mathbb{R}^3 . Innymi słowy, istnieje w przestrzeni zbiór homeomorficzny ze sferą (dwuwymiarową) taki, że homeomorfizmu nie da się rozszerzyć do homeomorfizmu \mathbb{R}^3 na siebie.

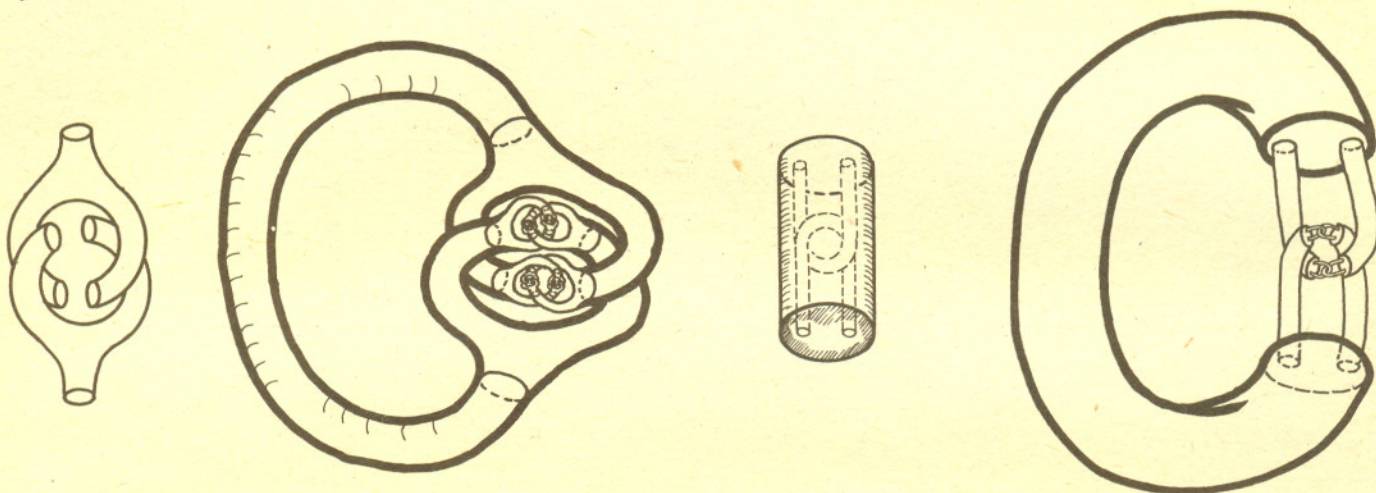
Przypomnijmy sobie drugą wersję twierdzenia Schönfliesa. W tym wypadku otrzymany efekt w \mathbb{R}^3 wydaje się jeszcze bardziej paradoksalny. Bo coż on oznacza? Ni mniej, ni więcej, tylko, że zbiór homeomorficzny ze sferą wraz z wyciętym przezeń z przestrzeni obszarem ograniczonym wcale nie musi być homeomorficzny z kulą! Innymi słowy: „sfera” wraz ze swoją „zawartością, wnętrzem” — „kulą” być nie musi. Twierdzenie Schönfliesa wydawało się prawdziwe dla $n = 3$; można zatem spodziewać się, że przykład nie okaże się wyjątkowo prosty. Tak jest w istocie. Konstrukcja sfery rogatej (albo, jak się także często mówi — dzikiej) jest nieco skomplikowana.

Weźmy zwykłą sferę i pociągnijmy ją z dwóch boków tak, by wyciągnąć z niej dwie wypustki — jakby macki, rączki. Rączki ciągniemy do góry i skręcamy do środka. Teraz każdą z rączek rozszczepiamy na dwie (powstają jakby obcegi) i powstałe odgałęzienia przeplatamy ze sobą. W tej chwili mamy już cztery rączki, ale cieńsze niż dwie poprzednie — zaplecione ze sobą. Tę konstrukcję kontynuujemy indukcyjnie. Mając w n -tym kroku 2^n rączek każdą rozszczepiamy i konstruujemy 2^{n+1} obejmujących się odgałęzień.

To jest idea, według której tworzymy nasz zbiór, dokładniej myśl konstrukcji pokazują rysunki. Precyzyjnie sferę rogatą konstruuje się jako granicę odpowiedniego ciągu zbiorów.



Dziką sferę Alexandra można otrzymać wieloma sposobami. Sugestię dwóch innych konstrukcji (za pomocą torusów) przedstawiają rysunki.



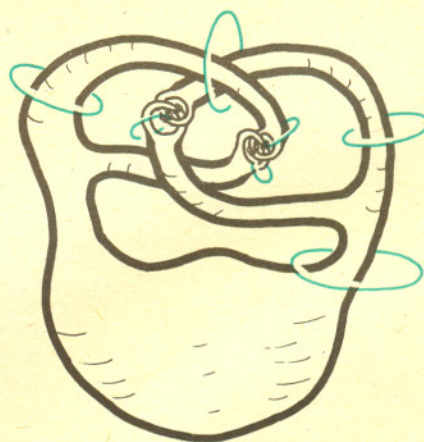
Sfera Alexandra jest homeomorficzna ze zwykłą; dowód tego nie jest zbyt trudny. Pokażemy (opiszemy ideę rozumowania), że homeomorfizmu jednej sfery na drugą nie można rozszerzyć do całej przestrzeni.

Rozważmy zbiór A zawarty w \mathbb{R}^3 i dwa okręgi rozłączne z nim. Przypuśćmy, że jeden okrąg można przesunąć (ewentualnie rozciągając lub ściągając) na drugi nie zahaczając po drodze o zbiór A . Powiemy w takim wypadku, że para okręgów ma „własność przesunięcia obok A ”. Spróbujmy bardziej formalnie: okręgi γ_0 i γ_1 mają własność przesunięcia obok A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja ciągła $F: [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $F(0, S^1) = \gamma_0$, $F(1, S^1) = \gamma_1$, $F([0, 1] \times S^1) \cap A = \emptyset$. Teraz przekształćmy \mathbb{R}^3 homeomorficznie na siebie. Oczywiście para okręgów ma wprowadzoną własność wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy mają własność przesunięcia obok obrazu A .

Teraz rozważmy sferę „normalną”. Łatwo widać, że wszystkie okręgi, które nie mają z nią punktów wspólnych, możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory — „wewnątrz” sfery i „na zewnątrz”. Dowolne dwa okręgi z tej samej grupy mają własność przesunięcia obok sfery. Gdyby homeomorfizm przekształcający sferę na sferę rogatą dawał się rozszerzyć na \mathbb{R}^3 , wszystkie okręgi rozłączne ze sferą Alexandra też dałyby się tak pogrupować. To jednak nie zachodzi! Weźmy jeden okrąg wewnątrz sfery Alexandra, drugi zaś na zewnątrz, pod sferą. Ta para okręgów, oczywiście, własności przesunięcia nie spełnia.

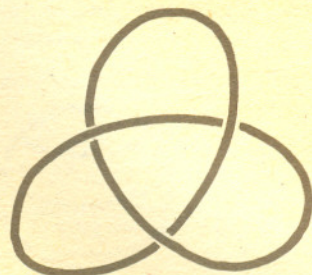
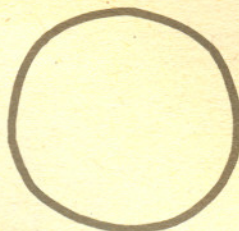
Pokażemy trzeci okrąg, który nie spełnia tej własności z żadnym z wymienionych dwóch. Zakończy to dowód, gdyż zaprzeczy możliwości podziału zbioru okręgów na dwie klasy.

Wskazać szukany okrąg jest bardzo łatwo. Na przykład — niech nim będzie okrąg otaczający pierwszą rączkę rozważaną przy konstrukcji sfery. Do wnętrza go, oczywiście, nie wprowadzimy — a do okręgu na dole, na zewnątrz, też bez zahaczania o sferę nie dojdziemy. Na marginesie zauważmy, że rozłącznych klas okręgów parami nieprzesuwalnych można bez trudu skonstruować nieskończenie wiele (należy zaczepiać okręgi o różne rozgałęzienia).



Przykładów zbiorów położonych „dziko”, osobliwie, jest więcej; rogata sfera nie jest unikatem. Na nieco innej konstrukcji oparty jest zbiór mający podobne własności, mianowicie sfera Antoine'a. My nie będziemy w tej chwili poświęcać mu uwagi, zajmiemy się tym innym razem.

Wiemy, że w topologii zbiory homeomorficzne uznawane są za nierozróżnialne. Przykład rogatej sfery pokazuje, że na tym poprzestać nie można. Dwa zbiory są homeomorficzne, ale mają istotnie różne własności. Można też znaleźć prostszy przykład: okrąg w \mathbb{R}^3 (nie na płaszczyźnie!) homeomorficzny z zawężoną pętlą. Sugeruje to wprowadzenie następującej definicji: dwa zbiory są jednakowo położone w \mathbb{R}^n , jeśli istnieje homeomorfizm \mathbb{R}^n na siebie, przekształcający jeden zbiór na drugi. Przykład sfery Alexandra dowodzi, że nie wszystkie „sfery dwuwymiarowe” są jednakowo położone w \mathbb{R}^3 . Natomiast — jest to praktycznie



inne sformułowanie twierdzenia Schönfliesa — każde dwie krzywe Jordana są jednakowo położone na płaszczyźnie. Takimi problemami zajmuje się jeden z działów topologii, teoria położenia. Ale to już inna historia, choć związana z przed chwilą przedstawionym zagadnieniem.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 472. Znaleźć maksymalną liczbę punktów przecięcia przekątnych wielokąta wypukłego.
Rozwiązanie na str. 2

M 473. Udowodnić, że jeśli co najmniej jedna współrzędna środka okręgu jest niewymierna, to na okręgu istnieją co najwyżej dwa punkty o współrzędnych wymiernych.
Rozwiązanie na str. 2

M 474. Znaleźć taką podstawę r ($r < 100$) systemu pozycyjnego, by liczba (2101), była pełnym kwadratem.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 222. Na płaską granicę dwóch ośrodków o współczynnikach załamania n_1 i n_2 i jednakowych współczynnikach przenikalności magnetycznej μ_0 pada prostopadle płaska, monochromatyczna fala elektromagnetyczna o jednostkowej amplitudzie. Wykazać, że współczynnik odbicia, tj. stosunek energii światła odbitego do energii światła padającego, nie zależy od tego, czy światło pada od strony ośrodka o większym współczynniku załamania, czy od strony przeciwnej.
Rozwiązanie na str. 1

F 223. Wiązka światła pada na szklaną płytkę płasko-równoległą. Uwzględniając wielokrotne odbicie w płytce znaleźć współczynnik odbicia światła od płytki. Zaniedbać pochłanianie światła w płytce. Założyć, że kąt padania wiązki jest niewielki, a współczynnik odbicia przy jednokrotnym odbiciu od granicy powietrze-szkło wynosi k .
Rozwiązanie na str. 2



Ile jest liczb pierwszych?

Już Euklides wiedział, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, jednak pierwsze twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych zostało udowodnione w 1850 roku przez rosyjskiego matematyka Czebyszewa. Podał on oszacowanie liczby liczb pierwszych wśród liczb $1, 2, \dots, n$. Tę liczbę oznacza się przez $\pi(n)$. Czebyszew udowodnił, że

$$0,92 \frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1,06 \frac{n}{\ln n},$$

dla dostatecznie dużych n .

Obecnie znane są znacznie lepsze oszacowania, np.

$$\frac{n}{\ln n + 2} < \pi(n) < \frac{n}{\ln n - 4} \quad \text{dla } n \geq 55,$$

ale dowód Czebyszewa wart jest przytoczenia w *Delcie*.

Udowodnimy słabsze oszacowania

$$(*) \pi(n) < 2 \cdot \frac{n}{\ln n},$$

$$(**) 0,6 \frac{n}{\ln n} < \pi(n) \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Dowód nierówności (*) jest indukcyjny. Najpierw bezpośrednio sprawdzamy dla $n \leq 200$.

Oto liczby pierwsze nie większe od 200:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Krok indukcyjny jest nieco nietypowy.

Zakładamy, że nierówność (*) jest prawdziwa dla $n = k$, gdzie $k \geq 100$ i dowodzimy, że jest prawdziwa dla $n = 2k$ i $n = 2k + 1$.

Mamy

$$\binom{2k}{k} = \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 1}{(k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1)^2}.$$

Każda liczba pierwsza p , spełniająca nierówność $k < p < 2k$, jest dzielnikiem licznika tego ułamka, a nie dzieli mianownika.

Tak więc dzieli ona $\binom{2k}{k}$. Iloczyn wszystkich takich liczb też

dzieli $\binom{2k}{k}$. Ponieważ jest w nim $\pi(2k) - \pi(k)$ czynników,

z których każdy jest większy niż k , więc otrzymujemy

$$k^{\pi(2k) - \pi(k)} < \binom{2k}{k} < \binom{2k}{0} + \binom{2k}{1} + \dots + \binom{2k}{2k} = (1+1)^{2k} = 2^{2k}$$

i logarytmując

$$\pi(2k) - \pi(k) < \frac{2k \ln 2}{\ln k} < 1,4 \frac{k}{\ln k}.$$

Z założenia indukcyjnego $\pi(k) < 2 \frac{k}{\ln k}$. Dodając obie

nierówności mamy

$$\pi(2k) < 3,4 \frac{k}{\ln k}.$$

Zauważmy, że dla $k \geq 100$

$$\ln(2k) = \ln 2 + \ln k = \ln k \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln k}\right) \leq \ln k \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 100}\right) < < 1,16 \ln k.$$

Tak więc

$$\pi(2k) < \frac{3,4}{2} 1,16 \frac{2k}{\ln(2k)} = 2 \frac{2k}{\ln(2k)} - 0,028 \frac{2k}{\ln(2k)}.$$

Mamy zatem

$$\pi(2k) \leq 2 \frac{2k}{\ln(2k)}$$

oraz

$$\begin{aligned} \pi(2k+1) &\leq \pi(2k) + 1 < 2 \frac{2k}{\ln(2k)} + \left(1 - 0,028 \frac{2k}{\ln(2k)}\right) \leq \\ &\leq 2 \frac{2k+1}{\ln(2k+1)} + \left(1 - 0,028 \frac{200}{\ln 200}\right) < 2 \frac{2k+1}{\ln(2k+1)}. \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu z tego, że ciąg $\left(\frac{n}{\ln n}\right)_{n=3}^{\infty}$ jest rosnący.

Dla udowodnienia (**) zauważmy najpierw, że wykładnik największej potęgi p (p — liczba pierwsza) dzielącej $n!$ jest

równy $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$ (Suma jest skończona, gdyż dla

$i > \frac{\ln n}{\ln p}$ mamy $\frac{n}{p^i} < 1$.) Wśród liczb $1, \dots, n$ jest bowiem

dokładnie $\left[\frac{n}{p}\right]$ liczb podzielnych przez p i $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ podzielnych

przez p^2 , itd. Tak więc wykładnik największej potęgi p dzielącej

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jest równy.

$$\left(\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{n-k}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{k}{p^2}\right] - \left[\frac{n-k}{p^2}\right]\right) + \dots$$

Każdy składnik tej sumy może być równy 0 lub 1

(bo $[a] + [b] \leq [a+b] \leq [a] + [b] + 1$) i jest ich nie więcej niż

$\frac{\ln n}{\ln p}$. A zatem jeśli p^r dzieli $\binom{n}{k}$, to $p^r \leq n$. Rozkładając

liczbę $\binom{n}{k}$ na czynniki pierwsze otrzymujemy

$$\binom{n}{k} = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot \dots \cdot p_j^{r_j} \leq n^i,$$

gdzie j jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż n , a więc $i = \pi(n)$. Zatem

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} \leq (n+1)n^{\pi(n)}$$

i po logarytmowaniu

$$\pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n} - \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > 0,6 \frac{n}{\ln n} \quad \text{dla } n \geq 40.$$

Dla $3 \leq n < 40$ sprawdzamy bezpośrednio prawdziwość nierówności (**).

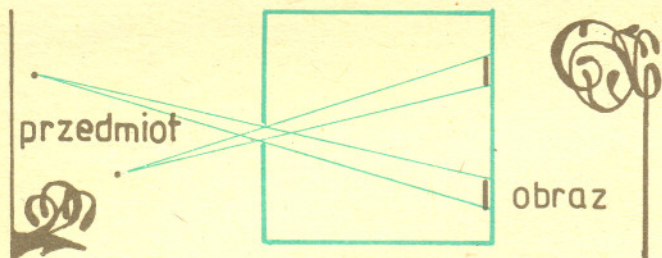
Opracował J. R.



delta mała delta

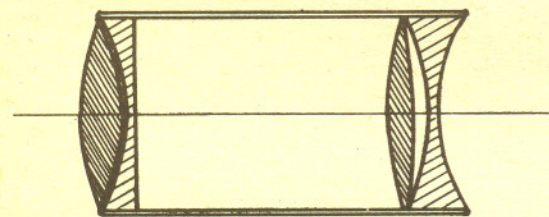
Krzywe lustra w astronomii

Najprymitywniejszym „przyrządem” umożliwiającym utrwalenie np. na jakimś materiale światłoczułym obrazu otaczającego nas świata jest tzw. *camera obscura*. Jest to skrzynka z małym otworkiem w jednej ze ścian (rys. 1). Widać, że jest to przyrząd bardzo niedoskonały, bowiem każdy punkt oglądanego przedmiotu zostaje odwzorowany na plamkę większą od otworka. Aby dostać obraz „ostry”, należałoby zrobić otworek „nieskończenie mały”, tylko że wtedy obraz byłby oświetlony „nieskończenie słabo”.



Rys. 1. *Camera obscura*.

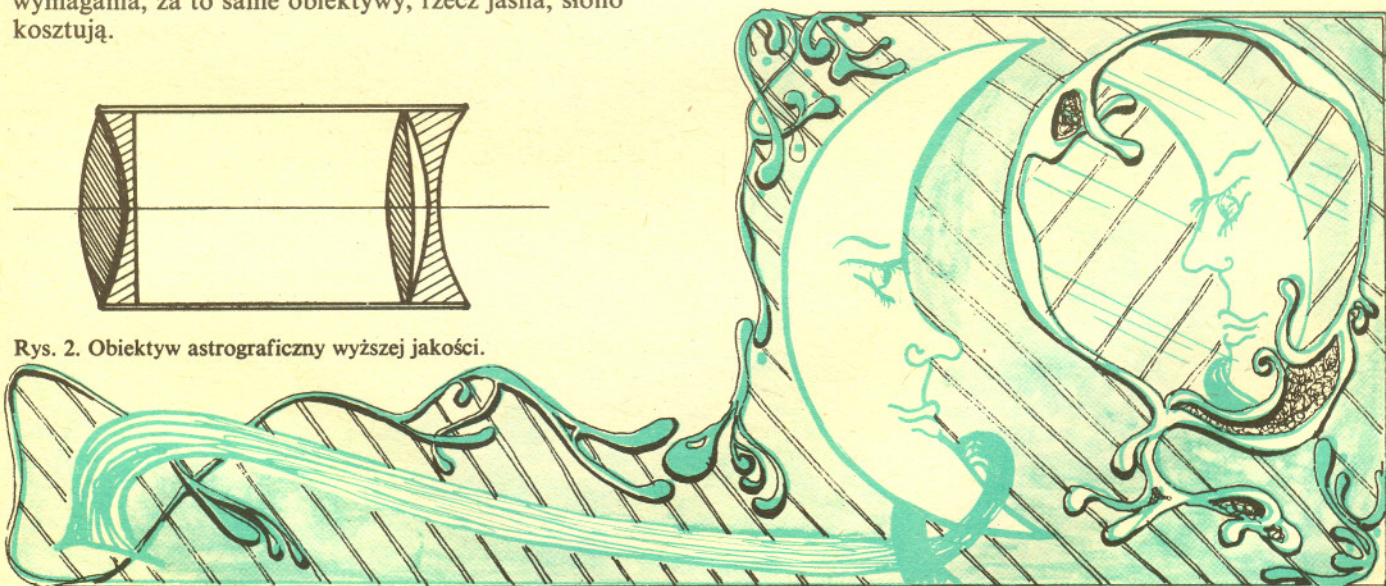
Chodzi więc w gruncie rzeczy przynajmniej o to, by układ optyczny odwzorowywał punkt na punkt i zarazem przepuszczał rozsądnie wiele światła. Taki układ jest najczęściej nazywany obiektywem. W najprostszym przypadku teoretycznie może nim być pojedyncza soczewka skupiająca, jednak w praktyce jakość obrazu danego przez taki obiektyw jest wysoce niezadowalająca. Dlatego obiektywy konstruuje się z wielu soczewek (rys. 2) — dawane przez nie obrazy spełniają nawet bardzo wygórowane wymagania, za to same obiektywy, rzecz jasna, słono kosztują.



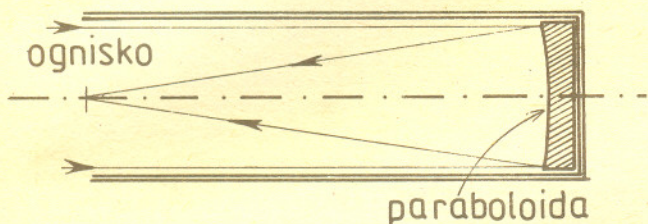
Rys. 2. Obiektyw astrograficzny wyższej jakości.

Okazuje się, że dobre odwzorowanie przedmiotu na jego obraz można również uzyskać stosując lustro o odpowiednim kształcie. Ma to ogromne znaczenie w astronomii, bowiem właśnie przy obserwacjach nieba szczególnie istotne jest, by skupić w obrazie jak najwięcej światła pochodzącego od obiektów z natury rzeczy bardzo słabych, zazwyczaj niewidocznych gołym okiem. Duży obiektyw wielosoczewkowy byłby bardzo drogi, bardzo nieporęczny, gruba warstwa szkła powodowałaby ogromne straty światła, a gięcie się soczewek pod własnym ciężarem niweczyłoby jakość najlepszego układu. Tymczasem dobre odwzorowanie nieba daje jedno lustro paraboloidalne, które ma tylko jedną powierzchnię czynną optycznie, nie daje takich strat światła ani go nie rozszczepia (bo tylko odbija), a jego gięciu można zapobiec podpierając z tyłu w tyłu punktach, ile trzeba — same więc zalety.

Lustra stosowane w optyce astronomicznej mają podstawową wspólną własność: ich powierzchnie opisywane są równaniami stopnia drugiego (w przekroju dają więc krzywe stopnia drugiego — stożkowe). Wykorzystuje się tu inną ich wspólną cechę: światło wysłane z punkтового źródła umieszczonego w jednym ognisku po odbiciu się od takiego lustra skupi się w drugim ognisku (ewentualnie dotyczy to przedłużeń promieni świetlnych).

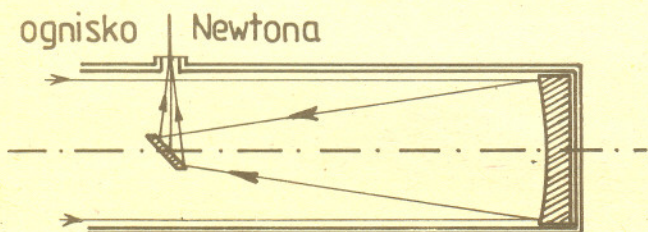


Tak więc obiektywem teleskopu jest zawsze wklęsłe lustro paraboloidalne (rys. 3). Punktowe źródło (gwiazda) umieszczone na osi lustra w nieskończoności (tam leży jedno ognisko paraboloidy) zostaje skupione w punkcie zwanym po prostu ogniskiem. Źródła położone poza osią nie są już odwzorowywane na punkt, dlatego teleskop z paraboloidalnym lustrem ma dość ograniczone użyteczne pole widzenia. W ognisku umieszcza się odbiornik światła (np. kasetę z kliszą fotograficzną), a w wielkich teleskopach wręcz całą kabinę dla obserwatora.



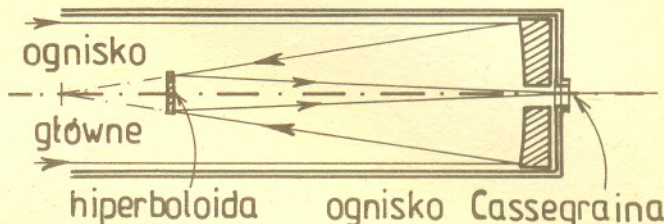
Rys. 3. Podstawowy schemat teleskopu lustrzanego—reflektora.

Nie można jednak tak robić w teleskopach małych. W nich trzeba ognisko wyprowadzić poza tubus teleskopu (zresztą i w wielkich teleskopach jest to z różnych powodów korzystne). Najprościej jest przed ogniskiem umieścić lustro płaskie pod kątem 45° do osi (rys. 4). Ognisko znajdzie się wtedy z boku tubusa, a układ taki nazywa się teleskopem Newtona. Jest to układ najchętniej budowany przez amatorów.



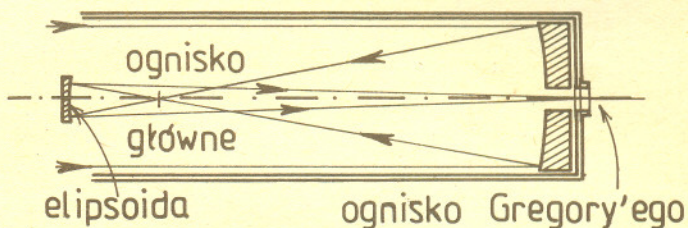
Rys. 4. Teleskop Newtona — najpopularniejszy układ teleskopów mniejszych i amatorskich.

Można też inaczej. Przed ogniskiem (zwanym teraz ogniskiem głównym) umieszcza się małe wypukłe lustro hiperboloidalne tak, by owo ognisko pokrywało się z jednym z ognisk hiperboloidy. Wtedy po odbiciu promienie skupiają się w drugim ognisku hiperboloidy, np. poza otworem w lustrze głównym (rys. 5). Taki układ nazywamy teleskopem Cassegraina. Jest to najbardziej rozpowszechniony system teleskopów profesjonalnych i tak też (a w każdym razie na podobnej zasadzie) konstruowane są duże teleobiektywy lustrzane.



Rys. 5. Teleskop Cassegraina — najpopularniejszy układ teleskopów profesjonalnych.

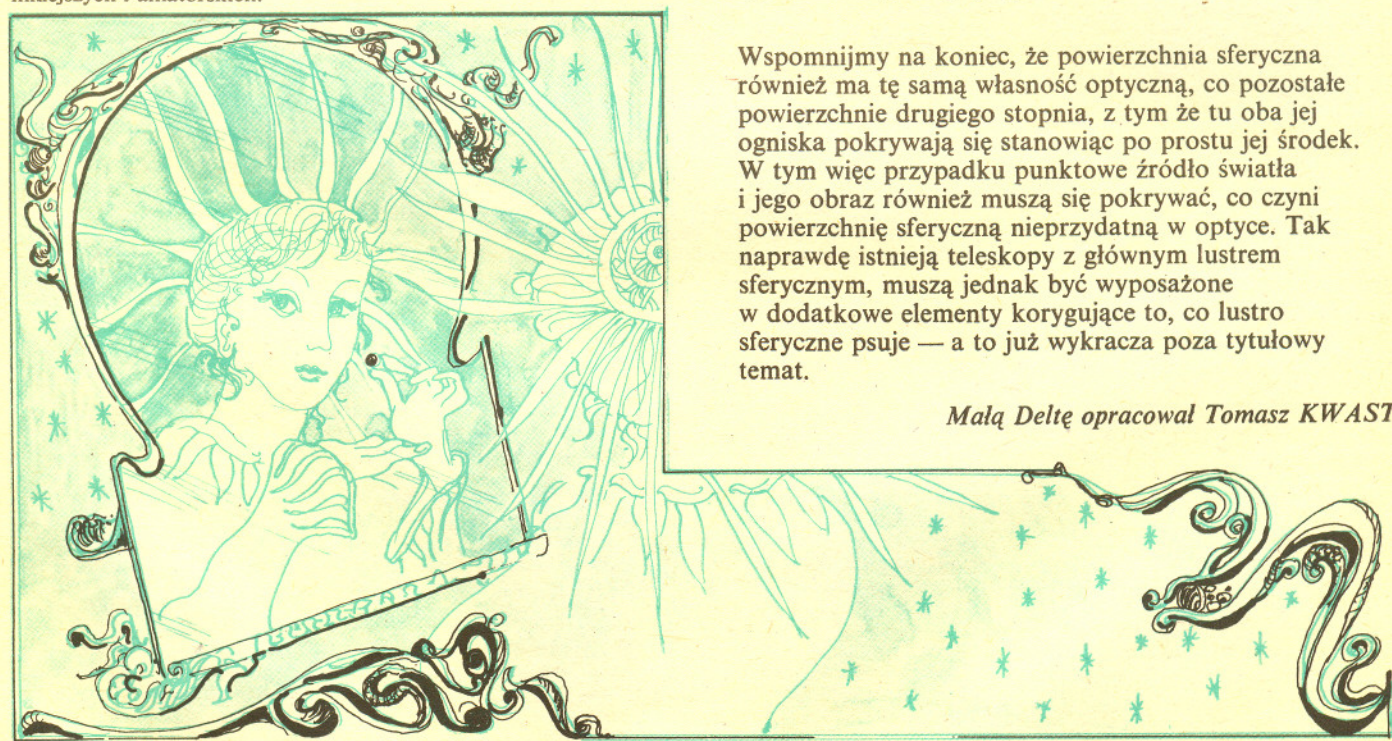
Można jeszcze inaczej. Przed ogniskiem głównym umieszcza się małe wklęsłe lustro elipsoidalne również tak, by to ognisko pokrywało się z jednym z ognisk elipsoidy. Promienie odbite skupiają się podobnie w drugim ognisku elipsoidy (rys. 6). Tak powstaje teleskop Gregory'ego. Jest on najrzadziej budowany i raczej tylko przez amatorów, ponieważ domowymi sposobami łatwiej jest kontrolować kształt lustra wklęsłego niż wypukłego.



Rys. 6. Teleskop Gregory'ego.

Wspomnijmy na koniec, że powierzchnia sferyczna również ma tę samą własność optyczną, co pozostałe powierzchnie drugiego stopnia, z tym że tu oba jej ogniska pokrywają się stanowiąc po prostu jej środek. W tym więc przypadku punktowe źródło światła i jego obraz również muszą się pokrywać, co czyni powierzchnię sferyczną nieprzydatną w optyce. Tak naprawdę istnieją teleskopy z głównym lustrem sferycznym, muszą jednak być wyposażone w dodatkowe elementy korygujące to, co lustro sferyczne psuje — a to już wykracza poza tytułowy temat.

Małą Deltę opracował Tomasz KWAST



Mikroskop tunelowy omówiony w numerze 4/1987 jest przyrządem, który naukowcy zaczynają dopiero stosować i budując kolejne mikroskopy uczą się jednocześnie tego, jak rozumieć rezultaty otrzymane za ich pomocą.

Jednym z zagadnień, które udało się ostatnio rozwiązać za pomocą tego mikroskopu, jest znany od ponad ćwierć wieku problem tzw. rekonstrukcji 7x7 powierzchni krzemu i tej właśnie sprawie chcielibyśmy poświęcić niniejszy artykuł.

Powierzchnia kryształów była zawsze obiektem „kłopotliwym” i niezbyt łatwym do badań. Teorie ciała stałego najchętniej zakładają, że kryształy są nieskończone. Niestety, w praktyce każdy kryształ ma swój koniec, czyli powierzchnię i na powierzchni dzieją się czasem rzeczy dziwne i trudne do zrozumienia. Chwytane są tam na przykład obce atomy lub też macierzyste atomy kryształu dokonują tzw. rekonstrukcji, czyli najkorzystniejszego energetycznie przegrupowania.

Krzem jest, jak dotąd, najważniejszym spośród kryształów półprzewodnikowych i przez to bardzo intensywnie badanym od wielu lat. Kryształy krzemu krystalizują w tzw. strukturze diamentu. Po przełupaniu kryształu krzemu otrzymuje się piękną, lustrzaną powierzchnię utworzoną przez równomiernie ułożone atomy. Taki układ atomów jest periodyczny (patrz *Delta* 8/1986, str. 1) i możemy go sobie wyobrazić jako oddział żołnierzy ustawionych w wielu długich, równo odległych szeregach. Rekonstrukcje powierzchni kryształów polegają na przegrupowaniu owej idealnie uporządkowanej powierzchni, na której tworzą się nowe, wieloatomowe struktury, nie istniejące bezpośrednio po przełupaniu.

Rekonstrukcja 7x7 krzemu została odkryta około 1950 roku w eksperymentach dyfrakcji elektronów na powierzchni krzemu. Stwierdzono wtedy, że atomy jednej z przełupanych powierzchni krzemu (tzw. powierzchni [111]) po kilkuminutowym wygrzaniu w próżni w wysokiej temperaturze ulegają przemieszczeniu tworząc strukturę złożoną z rombów o wymiarach przekątnych 45,56 Å i 26,88 Å. Ponieważ przed tym przemieszczeniem powierzchnie każdego rombu zajmowało 49 (czyli 7x7) atomów krzemu (rys. 1), więc rekonstrukcja ta została nazwana 7x7. Nieznany pozostawał układ i ilość atomów krzemu na powierzchni po wygrzaniu.

Tajemnica rekonstrukcji powierzchni krzemu intrygowała fizyków przez ponad ćwierć wieku. Stosowano różne metody eksperymentalne: mikroskopię elektronową, rozpraszanie jonów, promienie X, opracowano szereg modeli teoretycznych, jednakże zagadka pozostawała wciąż nie rozwiązana. W roku 1982 Gerd Binnig i Heinrich Rohrer (laureaci nagrody Nobla w roku 1986), pracujący w laboratoriach firmy IBM w Zurychu (Szwajcaria), postanowili zastosować swój niedawno zbudowany mikroskop tunelowy do zbadania tego problemu. Już pierwsze pomiary przyniosły bardzo istotne rezultaty. Zdołano bowiem ujrzeć strukturę rombową zrekonstruowanej powierzchni. Każdy z rombów miał dwanaście symetrycznie rozłożonych maksimów i głębokie „dziury” na wierzchołkach. Jeden z oryginalnych wyników pomiarów Binniga i Rohrera przedstawiony jest na rysunku 2.

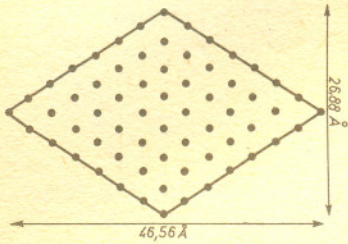
Widoczne dwanaście maksimów zinterpretowano jako 12 atomów krzemu ułożonych na 49 atomach wyznaczających powierzchnię rombu. Na przełupanej powierzchni przed rekonstrukcją znajduje się tyle zerwanych wiązań, ile atomów; dodanie 12 atomów „na wierzchu” zmniejszałoby liczbę zerwanych wiązań w danym rombie z 49 do 25. Każdy nowy atom (krzem jest czwartościowy) zastępowałby bowiem trzy niewyasycone wiązania przez jedno, ustawiając się ponad trójką atomów powierzchni. Niestety, wkrótce okazało się, że ów prosty model nie daje się pogodzić z wynikami innych eksperymentów, a także z rezultatami rachunków teoretycznych. Trzeba było rozważyć „głębszą” rekonstrukcję, obejmującą kilka kolejnych warstw. Pojawiło się wiele nowych modeli teoretycznych, w których liczba zerwanych wiązań po rekonstrukcji wahała się od 19 do 97. Wykonano też wiele nowych pomiarów.

Rozstrzygnięcie zagadki nastąpiło dopiero w roku 1986; dwa wielkie laboratoria firm IBM (Yorktown Heights, New York) i AT&T Bell (Murray Hill, New Jersey), znajdujące się na wschodnim wybrzeżu Stanów Zjednoczonych, podzieliły się tym sukcesem. W obydwóch przypadkach stosowano w badaniach najnowsze modele mikroskopów tunelowych, przy czym mierzono nie tylko położenie igły mikroskopu przy stałym prądzie tunelowym, ale również zależność prądu od przyłożonego napięcia przy stałej odległości igły od próbki. Ta ostatnia metoda okazała się niezwykle istotna, gdyż umożliwiła separację stanów elektronowych o różnych energiach pochodzących z owych zerwanych wiązań.

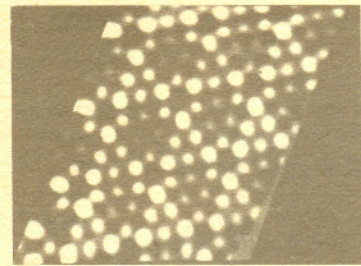
Bardzo interesujący jest również fakt zaobserwowany przez fizyków z laboratorium Bella. Stwierdzono mianowicie, że rekonstrukcja zaczyna się od jednoatomowych progów znajdujących się na powierzchni (rys. 3), czyli że owe progi są jej integralną częścią. Oznacza to możliwość dodawania lub odejmowania atomów z warstwy wyższej od niższej i wyjaśnia problem pojawiania się „dodatkových” atomów wysycających zerwane wiązania.

Spośród wielu możliwych propozycji teoretycznych, uwzględniających nawet rekonstrukcję pięciu kolejnych warstw powierzchniowych, najlepszym, jak dotąd, okazał się model grupy japońskiej profesora Takayanagi z Uniwersytetu w Tokyo. Grupa ta rozważała około stu możliwych modeli, aby ostatecznie wybrać jeden, który, co ciekawe, przewidywał najmniejszą liczbę zerwanych wiązań (19). Model ten jest zgodny ze wszystkimi dostępnymi obecnie rezultatami eksperymentalnymi.

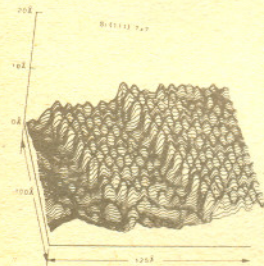
Spróbujmy teraz wyobrazić sobie zrekonstruowaną powierzchnię zgodnie z ideą Takayanagi i jego współpracowników. Zakłada ona rekonstrukcję trzech kolejnych powierzchni atomowych. Pierwsza z nich (czyli najbliższa) zawiera 48 atomów krzemu i przedstawiona jest na rysunku 4.



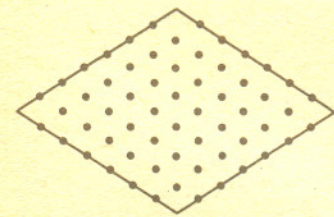
Rys. 1. Wymiary komórki pojawiającej się na powierzchni [111] kryształu krzemu po rekonstrukcji 7x7. Czarne punkty oznaczają położenia atomów krzemu na powierzchni przed wygrzaniem kryształu w próżni (czyli przed zajęciem rekonstrukcji). Atomy brzegowe należą do dwóch sąsiednich rombów, a wierzchołkowe do czterech, dlatego też na rysunku umieszczono w sumie 64 atomy.



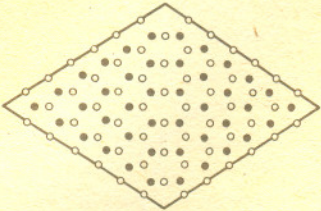
Rys. 2



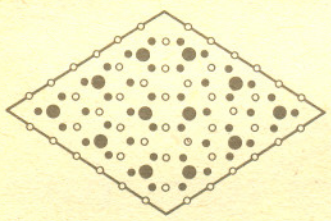
Rys. 3. Rezultaty pomiarów zrekonstruowanej powierzchni krzemu w pobliżu jednoatomowego progów. Widać, że rekonstrukcja dochodzi do progów z obu jego stron.



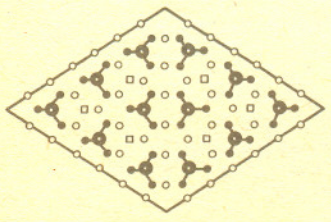
Rys. 4. Pierwsza (najbliższa) warstwa rekonstrukcji krzemu w modelu Takayanagi; jest ona niemal identyczna z warstwą pierwotną (rys. 1), z wyjątkiem brakującego atomu narożnego. Warstwa zawiera więc 48 atomów krzemu, oznaczonych czarnymi punktami.



Rys. 5. Pierwsza (jasne punkty) i druga (czarne punkty) warstwa atomów krzemu w modelu Takayanagi rekonstrukcji 7×7 . Widać wyraźnie, że lewa połowa rombu est zwierciadlanym odbiciem prawej strony. Jeżeli przesuniemy lewą stronę na prawą tak, aby nałożyć jasne punkty na siebie (symetria translacji), to czarne punkty nie będą trafiały na siebie (błąd upakowania). Druga warstwa zbudowana jest z 42 atomów.



Rys. 6. Pierwsza (jasne punkty), druga (małe czarne punkty) i trzecia (duże czarne punkty) warstwa atomów krzemu w modelu Takayanagi.



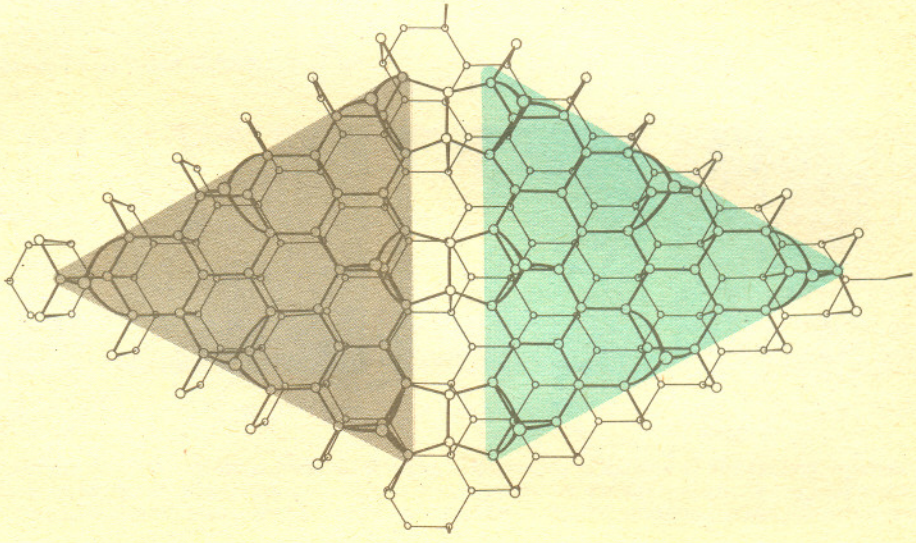
Rys. 7. Wolne wiązania atomów drugiej i trzeciej jwarstwy oznaczone białymi kwadratami. Wiazania między drugą i trzecią warstwą zostały oznaczone kreskami. Nie narysowano wiązań między pierwszą i drugą warstwą, by nie komplikować rysunku.

Druga warstwa (środkowa) jest już znacznie zrekonstruowana, zawiera ona 42 atomy. Połowa spośród nich znajduje się w miejscach normalnie zajmowanych przez atomy krzemu, natomiast druga połowa zajmuje nieprawidłowe miejsca — jest to tak zwany błąd upakowania. Dlatego też powstało wyraźne zaburzenie porządku ułożenia atomów wzdłuż krótszej przekątnej rombu (rys. 5).

Trzecia (powierzchniowa) warstwa, czyli obserwowane za pomocą mikroskopu tunelowego dwanaście dodatkowych atomów, ułożona jest ponad niektórymi atomami pierwszej warstwy tak, aby każdy atom trzeciej warstwy „zajmował się” trzema wolnymi wiązaniami atomów drugiej warstwy (rys. 6).

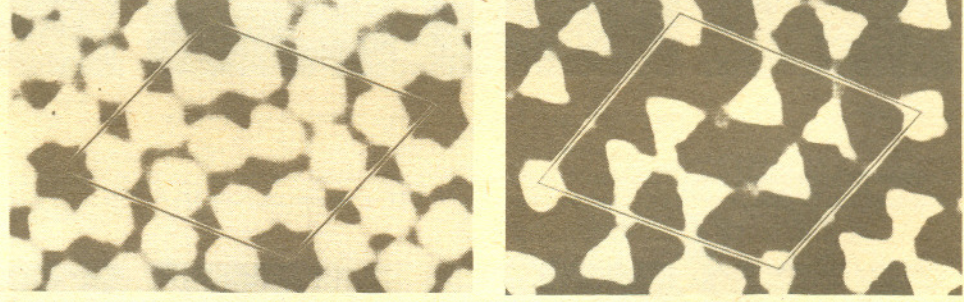
Zastanówmy się teraz, ile niewysyconych wiązań krzemu pojawia się w tym modelu. Przypomnijmy jeszcze raz, że krzem jest czterowartościowy i ma tetraedyczny (czworościenny) układ wiązań. Każdy atom trzeciej warstwy łączy się z trzema atomami drugiej warstwy, czyli ma jedno wolne wiązanie. Spośród 42 atomów drugiej warstwy 6 nie łączy się z trzecią warstwą i ma znów jedno wolne wiązanie. Te wolne 18 wiązań oznaczono na rysunku 7 za pomocą białych kwadratów. I wreszcie trzeba pamiętać o tym, że w pierwszej warstwie brakowało atomów na wierzchołkach rombu, oznacza to jeszcze jedno zerwane wiązanie w warstwie „zerowej” (znajdującej się poniżej pierwszej warstwy).

Fakt, że model Takayanagi ma najmniejszą ze wszystkich modeli liczbę wolnych wiązań, doskonale zgadza się ze „zdrowym rozsądkiem”, czyli z przekonaniem o dążeniu powierzchni do możliwego minimum energii. Ponadto trzeba przyznać, po zapoznaniu się z rysunkami, że wzór stworzony przez Naturę jest bardzo ładny i symetryczny. Na rysunku 8 przedstawiony jest trójwymiarowy model rekonstrukcji 7×7 powierzchni krzemu.



Rys. 8. Trójwymiarowy model rekonstrukcji 7×7 . Kulki tworzące szary trójkąt to atomy drugiej „dobrze” ułożone. Atomy „źle” ułożone tworzą trójkąt kolorowy. Największe kulki to atomy trzeciej warstwy.

Fascynującą własnością mikroskopu tunelowego jest możliwość separacji stanów elektronowych odpowiadających omawianym powyżej wolnym wiązaniam. Na rysunku 9 widzimy w części lewej położenia wolnych stanów elektronowych odpowiadających 12 atomom trzeciej warstwy. Natomiast w części prawej stany sześciu atomów drugiej warstwy oraz wierzchołka rombu. Zdjęcia te, otrzymane po raz pierwszy w 1986 roku, pokazują niezwykle możliwości mikroskopu tunelowego, po którym możemy spodziewać się jeszcze wielu nowych, ciekawych rezultatów.



Rys. 9. Wyniki pomiarów gęstości stanów elektronowych na zrekonstruowanej powierzchni krzemu przeprowadzonych w laboratorium IBM (Yorktown Heights, NY).

Na zakończenie warto wspomnieć, że sprawa rekonstrukcji 7×7 nie jest bynajmniej jeszcze zakończona. Nie potrafimy obecnie odpowiedzieć na pytanie, dlaczego krzem podlega tak złożonej rekonstrukcji. Na dodatek krystalizujący w identycznej strukturze krystalograficznej german podlega zupełnie innej rekonstrukcji, a mianowicie 2×8 . Oznacza to, że na powierzchni przelupanego i wygrzanego germanu powstają równoległoboki, których powierzchnia odpowiada dwóm ośmioatomowym szeregom atomów germanu przed rekonstrukcją. Nie jesteśmy w stanie tej różnicy między krzemem i germanem obecnie wyjaśnić. Być może, dzięki rozwojowi mikroskopii tunelowej za kilka lat będziemy mogli przekazać Czytelnikom *Delta* nowe, pasjonujące wyniki.



Rozwiązanie zadania M 474. Niech r oznacza podstawę układu pozycyjnego. Liczba 2101 to $2r^3 + r^2 + 1 = s \cdot (r+1)$, gdzie $s = 2r^2 - r + 1$. Ponieważ $2r^2 - r + 1 = (2r-3)(r+1) + 4$, największy wspólny dzielnik liczb s i $r+1$ wynosi 1, 2 lub 4. Wtedy jednak s i $r+1$ są bądź pełnymi kwadratami, bądź podwojonymi kwadratami. Dla $r < 100$ można bezpośrednio sprawdzić, że jeśli $r+1 = n^2$, to $n = 2$ lub $n = 3$, a jeśli $r+1 = 2n^2$, to rozwiązanie nie ma. Wobec tego mamy $r = 3$ lub $r = 8$.

W *Delcie* 9/1986 zachęcaliśmy naszych Czytelników do obserwowania zaćmienia Księżyca 17 października ubiegłego roku. Tym razem pogoda dopisała i mamy nadzieję, że wiele osób mogło podziwiać to piękne zjawisko astronomiczne.

Niżej prezentujemy wyniki obserwacji dokonanych przez naszych Czytelników: Krzysztofa Z. Stanka, Janusza Sierokosza i Tomasza Rabędę. Obserwowali oni i fotografowali zjawisko z wierzchołka XIV-wiecznej Bramy Opatowskiej w Sandomierzu.

W pierwszych trzech rzędach mamy serię zdjęć, których autorem jest Janusz Sierokosz. Obejmuje ona niemal całe zaćmienie. Zdjęcia zostały wykonane za pomocą aparatu Pentacon Six z obiektywem SONAR 2,8/180 na błonie HL-FOTOPAN 27 DIN. Podpisy pod każdym ze zdjęć oznaczają: *h* — moment, w którym zostało wykonane, *p* — przesłone, *t* — czas naświetlania.



h-18^h 50^m *p*-5,6 *t*-0,25 s *h*-19^h 00^m *p*-8 *t*-0,5 s *h*-19^h 05^m *p*-8 *t*-1 s *h*-19^h 15^m *p*-8 *t*-1 s *h*-19^h 22^m *p*-3,2 *t*-1,5 s

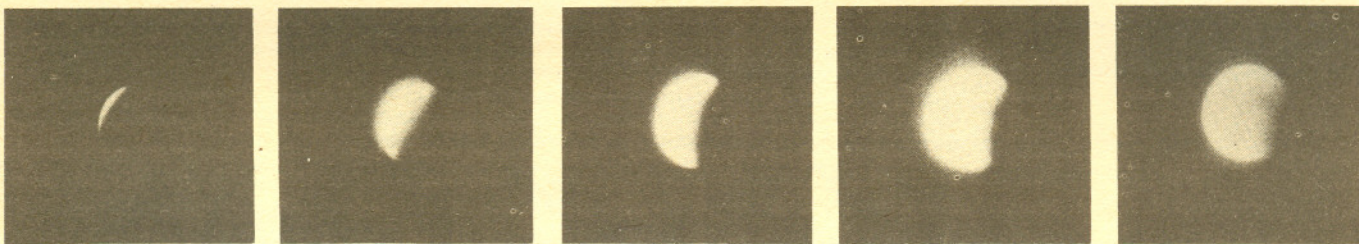
Pierwsze zdjęcie zostało wykonane o godzinie 18^h50^m, a więc w dwadzieścia minut po rozpoczęciu zaćmienia częściowego. Na dalszych Księżyc stopniowo pogrąża się w stożku cienia Ziemi.



h-19^h 35^m *p*-2,8 *t*-1 s *h*-19^h 42^m *p*-2,8 *t*-3 s *h*-19^h 45^m *p*-2,8 *t*-4 s *h*-20^h 20^m *p*-4 *t*-2 s *h*-20^h 35^m *p*-4 *t*-4 s

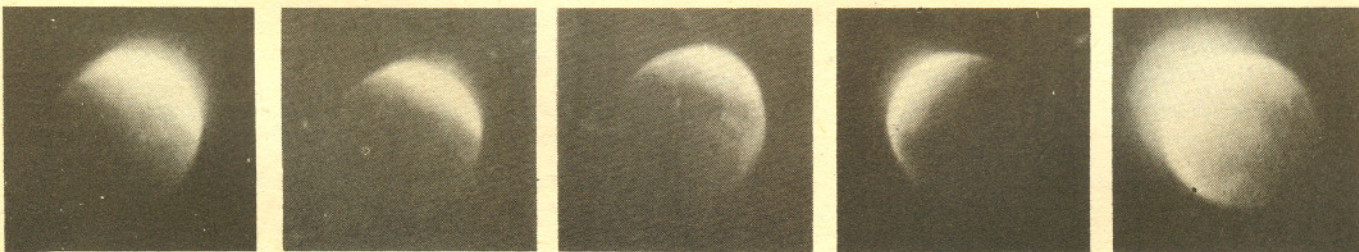
Zdjęcia w tym rzędzie (z wyjątkiem pierwszego) pokazują przebieg zaćmienia całkowitego. Rozpoczęło się ono o godzinie 19^h41^m, drugie zdjęcie wykonano w minutę po wewnętrzznym zetknięciu brzegu tarczy Księżyca ze stożkiem cienia Ziemi. Faza maksimum zaćmienia wypadła o godzinie 20^h18^m — ostatnie dwa zdjęcia odpowiadają czasom zbliżonym do tego momentu.

Na zakończenie tej serii — pięć zdjęć prezentujących wylanianie się Księżyca z cienia Ziemi. Ta faza zaćmienia rozpoczęła się o godzinie 20^h55^m i zakończyła się o godzinie 22^h07^m.



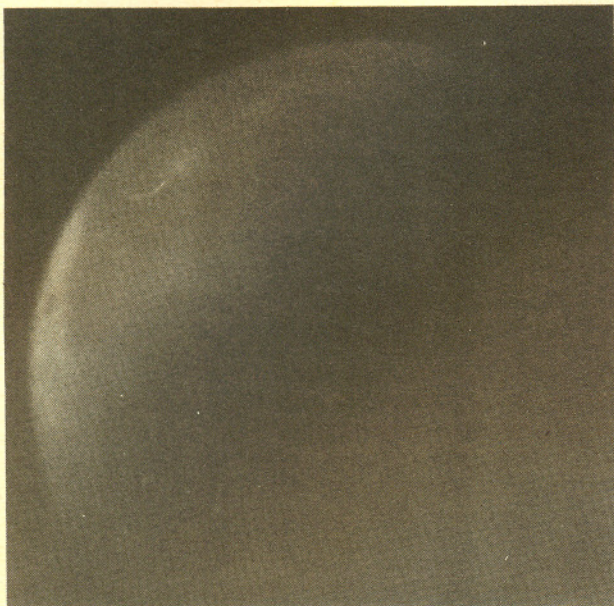
h-21^h 00^m *p*-8 *t*-1 s *h*-21^h 10^m *p*-5,6 *t*-1 s *h*-21^h 30^m *p*-4 *t*-0,125 s *h*-21^h 45^m *p*-4 *t*-0,125 s *h*-21^h 54^m *p*-4 *t*-0,25 s

Tomasz Rabęda przysłał serię zdjęć wykonanych parę minut przed rozpoczęciem zaćmienia całkowitego i parę minut po jego zakończeniu. Wykonywał on zdjęcia aparatem Zenith TTL z obiektywem PENTACON auto 2,8/100 na błonie FOTO 65-20 DIN.

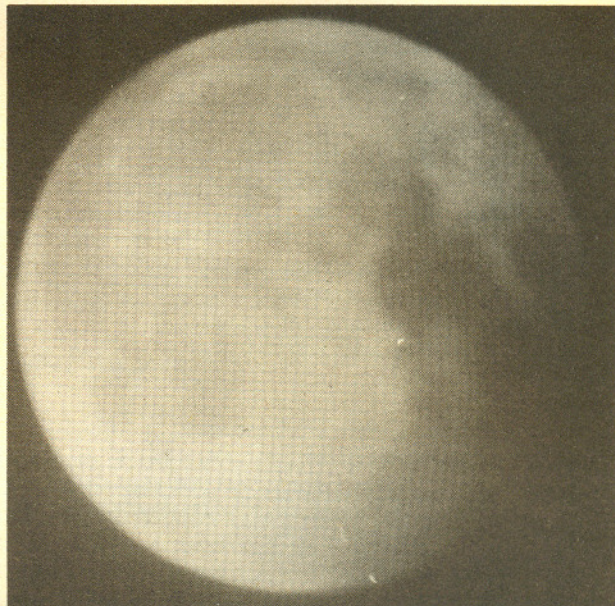


h-19^h 30^m *p*-2,8 *t*-2 s *h*-19^h 32^m *p*-5,6 *t*-2 s *h*-19^h 35^m *p*-2,8 *t*-1 s *h*-21^h 00^m *p*-4 *t*-2 s *h*-21^h 01^m *p*-4 *t*-8 s

Ostatnie dwa zdjęcia wykonane zostały w sprzężeniu z lunetą myśliwską o obiektywie 64 mm i ogniskowej 400 mm. Pierwsze przedstawia fazę wynurzania się ze stożka cienia, drugie wykonano pod koniec zaćmienia.



$h - 21^h 20^m$



$h - 22^h 10^m$

Szczególny przypadek

Stopień komplikacji twierdzenia Herona podającego sposób obliczenia pola trójkąta za pomocą jedynie długości a , b , c jego boków, a mianowicie

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie p to połowa obwodu, nie sugeruje, że jest to szczególny przypadek jakiegoś ogólniejszego wzoru. A jest.

Trójkąt można bowiem potraktować jako szczególny przypadek czworokąta wpisywalnego w okrąg — rzeczywiście, każdy trójkąt w okrąg da się wpisać.

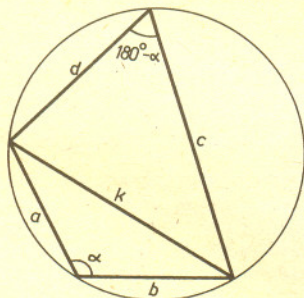
Czworokąt, który można wpisać w okrąg, ma przeciwległe kąty dające w sumie 180° (bo odpowiadające im kąty środkowe łącznie tworzą kąt pełny). Pozwala to na stwierdzenie, że

$$(1) \quad 2(ab+cd)\cos\alpha = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

Istotnie, z twierdzenia kosinusów mamy (patrz rysunek)

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = k^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha),$$

a to właśnie daje nam wzór (1).



Mamy też podobnie (przynajmniej z lewej strony) wyglądający wzór

$$(2) \quad 2(ab+cd)\sin\alpha = 4S.$$

Faktycznie, skoro już podzieliliśmy czworokąt na dwa trójkąty, to skorzystajmy z tego przy obliczaniu pola:

$$S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha + \frac{1}{2} cd\sin(180^\circ - \alpha),$$

czyli dokładnie (2).

Mając sinus i kosinus tego samego kąta pomnożone przez to samo możemy się łatwo obu tych funkcji pozbyć. Wystarczy w tym celu podnieść (1) i (2) do kwadratu i dodać. Otrzymamy

$$4(ab+cd)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2.$$

A teraz pozostały nam tylko rachunki wyuczone u samego zarania nauki algebry (np. $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$) i ważna zasada, że wymnażać wyrażenia algebraiczne należy tylko w ostateczności.

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ab+cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ &= (2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2) = \\ &= ((a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2))((c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)) = \\ &= ((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2) = \\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b) = \\ &= 2(p-d)2(p-c)2(p-b)2(p-a) = \\ &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d). \end{aligned}$$

I tak otrzymaliśmy wzór Brahmagupty na pole czworokąta wpisywalnego w okrąg:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

W szczególnym i na dodatek krańcowym przypadku (gdy jeden z boków ma długość 0) otrzymujemy stąd wzór Herona.

Co ciekawsze — powyższy dowód przenosi się bez zmian (poza $d = 0$) na przypadek trójkąta — wzory (1) i (2) dla $d = 0$ są przecież dobrze znane (a nawet z takiej ich postaci korzystaliśmy wyżej).

Opracował M. K.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3 S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1987

Przypominamy treść zadań:

145. Dać przykład wielokąta (o jak największej liczbie wierzchołków) z bokami i przekątnymi pokolorowanymi trzema kolorami tak, by żadne trzy odcinki (boki lub przekątne) jednego koloru nie tworzyły trójkąta.

146. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych x, y) równanie

$$\frac{(x+y-1)^2+x+y}{(x-y-3)^2+1} + \frac{(x-y-3)^2-1}{(x+y-1)^2-x-y+2} = 0.$$

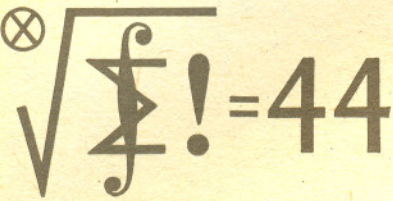
145. Na okładce tego numeru pokazany jest szesnastokąt pokolorowany w żądany sposób. Opis tego rysunku daje następująca tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	B	B	B	B	B	G	G	G	G	G	R	R	R	R	R
15	R	B	B	R	G	G	R	R	G	B	G	B	B	G	
14	B	B	R	G	R	R	R	G	B	G	B	B	G		
13	B	R	G	R	B	R	G	B	G	R	B	G			
12	R	G	R	B	B	G	B	G	R	R	G				
11	G	R	B	B	B	B	G	R	R	G					
10	B	G	G	B	R	B	R	R	B						
9	G	G	B	R	B	R	R	B							
8	G	B	R	B	G	R	B								
7	B	R	B	G	G	B									
6	R	B	G	G	B										
5	R	G	G	R											
4	G	G	R												
3	G	R													
2	R														

Natomiast rysunek obok przedstawia inną realizację tego samego grafu. W przestrzeni trójwymiarowej umieszczamy cztery pięciokąty (np. foremne), jeden nad drugim, przy czym pięciokąty skrajne (górny i dolny) utożsamiamy. Oznaczmy te pięciokąty symbolami P_B, P_G, P_R, P_B ; ich wierzchołki numerujemy od 1 do 15, jak na rysunku (numery wierzchołków w jednym pionie przystają modulo 5). Kolorem B malujemy: boki P_G , przekątne P_R , krawędzie boczne graniastosłupa $P_G P_R$, przekątne ścian bocznych graniastosłupa $P_B P_G$, przekątne wewnętrzne graniastosłupa $P_R P_B$. (Wszystkie te odcinki zostały zaznaczone na rysunku; żadne trzy z nich nie tworzą trójkąta.) Przenosimy teraz całą tę konfigurację odcinków o jeden poziom w górę (cyklicznie: $P_B \rightarrow P_G \rightarrow P_R \rightarrow P_B$) i wszystkie otrzymane w ten sposób odcinki malujemy kolorem G . Idziemy jeszcze o jedno piętro w górę i malujemy kolorem R . W ten sposób mamy pokolorowany graf pełny o 15 wierzchołkach. Możemy jeszcze dołączyć szesnasty wierzchołek (np. gdzieś z boku lub w czwartym wymiarze) i połączyć go kolorem X z wierzchołkami pięciokąta $P_X (X = B, G, R)$; nadal nie będzie jednobarwnego trójkąta. (Na rysunku zaznaczono tylko po sześć odcinków kolorów G i R .) Przenosząc wszystko na płaszczyznę dostajemy rysunek z okładki.

Dalej pójść się nie da. W rozwiązaniu zadania 137 (*Delta* 2/1987) udowodniony został lemat, który sformułowany w języku grafów brzmi następująco: niech $n_1 = 2, n_k = kn_{k-1} + 1$ ($k = 2, 3, \dots$); przy dowolnym pokolorowaniu k kolorami krawędzi grafu pełnego mającego więcej niż n_k wierzchołków musi powstać trójkąt jednobarwny. Dla $k = 3$ mamy $n_3 = 16$. Nie istnieje więc siedemnastokąt dopuszczający pokolorowanie, o jakim mowa w zadaniu.

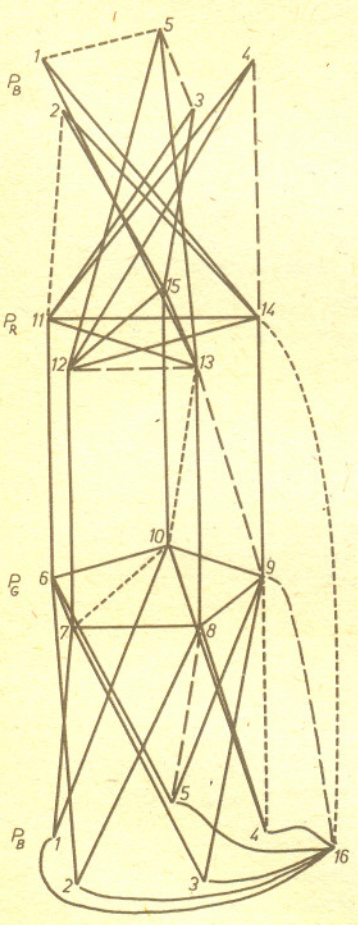
146. Przy oznaczeniach $u = (x+y-1)^2, v = (x-y-3)^2, s = x+y$ równanie przybiera postać: $\frac{u+s}{v+1} + \frac{v-1}{u-s+2} = 0$, a po krótkich przekształceniach: $u^2 + v^2 + 2u = (s-1)^2$, czyli $u^2 + v^2 + u = 0$. Stąd $u = v = 0$, czyli $x = 2, y = -1$. Przez podstawienie sprawdzamy, że te liczby spełniają równanie.



Redaguje
dr Marcin E. KUCZMA

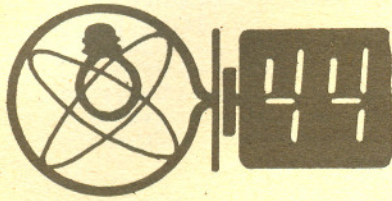
Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 141 /WT=1,79/ i 142 /WT=2,99/
z numeru 12/1986

Michał Marczak	- Radom	42,65pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	40,61pkt
Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	38,38pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	38,24pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	37,99pkt
Karol Jachacy	- Łuszcza	37,96pkt
Sławomir Solecki	- Ostrów Wkp.	37,60pkt



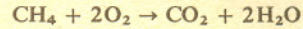
— kolor B
- - - - - kolor G
... .. kolor R

Przypominamy treść zadań:



43. Bombę kalorymetryczną napełniono w temperaturze 18°C mieszaniną tlenu i metanu pod ciśnieniem 1 MPa, przy czym ciśnienia cząstkowe obu gazów były jednakowe. Po szczelnym zamknięciu bomby wywołano w niej reakcję spalania metanu. Jakie ciśnienie będzie panowało w bombie po jej ostygnięciu do pierwotnej temperatury?
44. Wiadomo, że hamowanie przez górne warstwy atmosfery wpływa na tory sztucznych satelitów powodując ich stopniowe przybliżanie się do powierzchni Ziemi, czemu — paradoksalnie — towarzyszy wzrost prędkości. Przyjmując, że tor satelity ma kształt spirali o stałym kącie pochylenia θ , wykazać, że między składową przyspieszenia w kierunku ruchu a_r , a siłą oporów F zachodzi związek $ma_r = -F$ (m — masa satelity). Wyjaśnić pozorną sprzeczność z drugą zasadą dynamiki.

43. Bomba kalorymetryczna jest to urządzenie do badania reakcji chemicznych, zachowuje ono stałą objętość. Wobec jednakowych ciśnień cząstkowych, równych 0,5 MPa, w bombie znajdują się początkowo takie same liczby moli metanu i tlenu — oznaczmy je przez n . Można przyjąć, że reakcja spalania metanu



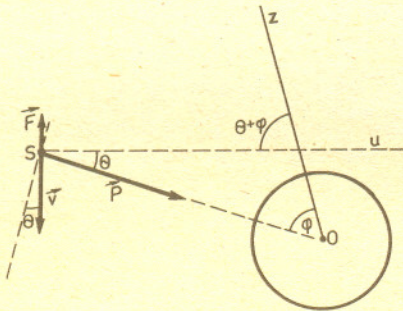
zachodzi do całkowitego wyczerpania tlenu. W takim razie końcowa mieszanina będzie zawierała $n/2$ moli metanu, $n/2$ moli dwutlenku węgla oraz n moli wody. Jak wynika z prawa Clapeyrona, ciśnienie cząstkowe gazu zawartego w stałej objętości (i w stałej temperaturze) jest proporcjonalne do liczby moli tego gazu. Zatem końcowe ciśnienia cząstkowe metanu i dwutlenku węgla będą wynosić 0,25 MPa. Woda natomiast ulegnie skropleniu — ciśnienie jej pary nasyconej w temperaturze 18°C wynosi zaledwie 2 kPa. Wobec tego końcowe ciśnienie w bombie będzie równe $2 \cdot 0,25 \text{ MPa} = 0,5 \text{ MPa}$. Wpływ ciśnienia pary wodnej, a także — jak można obliczyć — objętości zajmowanej przez skroploną wodę, jest niewielki: w sumie poniżej jednego procenta (oba te czynniki wpływają na pewien wzrost całkowitego ciśnienia końcowego, z drugiej natomiast strony rozpuszczanie się gazów w wodzie może to ciśnienie nieco obniżyć).

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 39 /WT=2,01/ 1 40 /WT=2,88/
z numeru 12/1986

Aleksander Surma	- Myszków	38,65pkt
Anna Gluza	- Toruń	34,23pkt
Piotr Bała	- Toruń	32,22pkt
Robert Repucha	- Gołdap	31,15pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	28,85pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	27,26pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	24,61pkt
Piotr Wach	- Katowice	24,22pkt

44. Na rysunku S oznacza satelitę, O — środek Ziemi, v — prędkość satelity, F — siłę oporów, P — siłę przyciągania Ziemi, θ — kąt pochylenia toru względem orbity kołowej, φ — kąt między promieniem wodzącym OS a ustaloną półprostą Oz leżącą w płaszczyźnie orbity, Su — półprostą w płaszczyźnie orbity prostopadłą do v .



Wprowadzamy ponadto oznaczenia: M — masa Ziemi, m — masa satelity, G — stała grawitacji, $r = OS$ — odległość satelity od środka Ziemi, a_a — przyspieszenie dośrodkowe satelity, a_r — przyspieszenie w kierunku ruchu. Siła grawitacji ma wartość

$$(1) \quad P = \frac{GMm}{r^2}$$

Przyspieszenie dośrodkowe, skierowane wzdłuż półprostą Su , jest więc równe

$$(2) \quad a_a = \frac{P \cos \theta}{m} = \frac{GM}{r^2} \cos \theta$$

Z drugiej strony $a_a = v\omega$, gdzie $\omega = \frac{d(\theta + \varphi)}{dt}$ (pochodna względem czasu).

W związku z przyjętym założeniem, że $\theta = \text{const}$, mamy zatem

$$(3) \quad a_a = v \frac{d\varphi}{dt}$$

Pochodną $\frac{d\varphi}{dt}$ wyznaczamy z zależności

$$(4) \quad r \frac{d\varphi}{dt} = v \cos \theta$$

i w rezultacie ze związków (2), (3), (4) otrzymujemy wyrażenie na prędkość satelity:

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Prędkość ta jest taka sama, jak na orbicie kołowej o promieniu r . Składowa przyspieszenia w kierunku ruchu jest równa

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}, \text{ przy czym } \frac{dr}{dt} = -v \sin \theta$$

Ze wzoru (5) znajdujemy

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2r} \sqrt{\frac{GM}{r}} = -\frac{1}{2} \frac{v}{r}$$

Wobec tego

$$(6) \quad a_r = \frac{1}{2} \frac{v^2 \sin \theta}{r}$$

Z drugiej strony wypisujemy równanie ruchu

$$ma_r = P \sin \theta - F$$

Po skorzystaniu ze wzorów (1) i (5) otrzymujemy

$$(7) \quad a_r = \frac{v^2 \sin \theta}{r} - \frac{F}{m}$$

Z przyrównania wyrażeń (6) i (7) wynika wzór

$$F = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{r} \sin \theta$$

który po uwzględnieniu związków (1) i (5) przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{2} P \sin \theta$$

Wnioskujemy stąd, iż kąt θ przyjmuje taką wartość, że składowa siły przyciągania ziemskiego w kierunku ruchu dwukrotnie przewyższa siłę oporów, mając przeciwny do niej zwrot. Dlatego wynikający ze wzorów (6) i (7) związek $F = -ma_r$ nie jest sprzeczny z drugą zasadą dynamiki: działająca na satelitę wypadkowa siła w kierunku ruchu jest równa co do wartości sile F , lecz ma przeciwny do niej zwrot. Identyczne wnioski otrzymuje się również przy słabszym założeniu co do kąta pochylenia orbity θ : wystarczy tylko, aby kąt ten zmieniał się odpowiednio wolno.

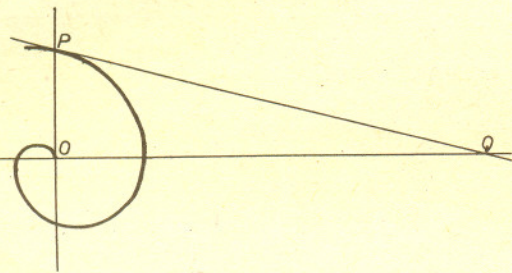
DRABIAZEJ

Ucząc się obcego języka przy pomocy znających tylko własne narzędzie tubylców najpierw poznajemy pojedyncze słowa, łącząc je z ich znaczeniem dzięki uniwersalnemu dla ludzi językowi gestów i mimiki. Potem, korzystając z tak zdobytego zapasu słów stopniowo pogłębiając swoją wiedzę, posługując się na kolejnym etapie słownictwem wyuczonym poprzednio. Podobną metodę stosują programiści przy pisaniu translatorów, czyli programów tłumaczących języki wyższego rzędu — wygodne dla człowieka, na język wewnętrzny komputera — zrozumiały dla niego, lecz niezwykle niewygodny w użyciu. Najpierw pisze się (niestety w języku wewnętrznym) minitranslator, tłumaczący ledwie mały podzbiór języka wyższego rzędu. Potem w tak okrojonym języku, który choć ubogi, ma przecież dwie zalety:

1. dzięki minitranslatorowi jest „zrozumiały” dla komputera,
2. jest językiem wyższego rzędu,

pisze się kolejną wersję translatora — tym razem tłumaczącą już znacznie więcej. Tę nową wersję wykorzystuje się w następnym kroku, kolejną w następnym itd. Amerykanie metodę tę nazywają *bootstrapping* — ponoć dlatego, że przywodzi im na myśl podnoszenie się samemu za własne sznurowadła.

Spirala Archimedesowa (tor punktu jednostajnie oddalającego się od środka O wzdłuż jednostajnie obracającej się wokół O i przechodzącej przez O prostej) daje możliwość wskazania odcinka o długości π (rektyfikacja okręgu). Jeśli bowiem w punkcie P , odpowiadającym kątowi pełnemu, poprowadzimy styczną do spirali Archimedesowej, to przetnie ona prostą odpowiadającą kątowi 270° w takim punkcie Q , że $OQ = \pi OP$.



Najsilniejszymi liniami w widzialnej części widma Słońca są dwie linie zjonizowanego wapnia. Z tego jednakże nie wynika, że Słońce składa się głównie ze zjonizowanego wapnia. Na natężenie linii składają się poza obfitością danego pierwiastka „wrodzone” własności poziomów energetycznych i temperatura. Na powierzchni Słońca cały ten zespół warunków jest akurat najbardziej sprzyjający dla zjonizowanego wapnia.

Oto jeden ze sposobów wyznaczenia wszystkich liczb pierwszych. Tworzymy ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k=0}^{\infty}$, gdzie $n_0 = 2$, a n_{k+1} powstaje z n_k w sposób następujący: Spośród iloczynów $a_i \cdot n_k$ ($i = 1, \dots, 14$), gdzie ciąg

$$(a_i)_{i=1}^{14} \text{ to } \left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{29}{29}, \frac{77}{23}, \frac{95}{19}, \frac{77}{17}, \frac{1}{13}, \frac{11}{11}, \frac{13}{14}, \frac{15}{2}, 55 \right),$$

wyberamy jako n_{k+1} ten, który jest liczbą naturalną i ma najmniejszy wskaźnik i . Z ciągu $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg złożony ze wszystkich liczb postaci 2^i . W podciągu tym wykładniki tworzą ciąg liczb pierwszych, wzięty w naturalnym porządku. Pierwsze wyrazy tego podciągu to $n_{19} = 4$, $n_{69} = 8$, $n_{280} = 32$.

Każda data „przebywa” na Ziemi przez 48 godzin. Na przykład 1 stycznia „wchodzi” na Ziemię 31 grudnia o godzinie 13 C.S.E. (Czasu Środkowo Europejskiego) i „opuszcza” ją 2 stycznia również o godzinie 13 C.S.E. Amatorzy sylwestrowych zabaw mogą świętować rozpoczęcie Nowego Roku 24 razy, poczynając od godziny 13 C.S.E. 31 grudnia, a kończąc 1 stycznia o tej samej porze. Należy w tym celu 31 grudnia o godzinie 13 C.S.E. rozpocząć podróż na linii zmiany daty, przechodzącej przez ocean wzdłuż południka 180° i poruszać się przez całą dobę ze wschodu na zachód tak, aby pokonywać 15° długości geograficznej w ciągu godziny.

Biorąc dowolne dodatnie liczby p i q możemy skonstruować za ich pomocą pewne rozwiązanie równania

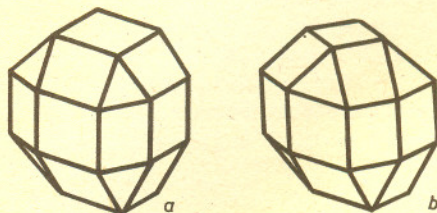
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Mianowicie $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$. Gdy liczby te są naturalne i $p > q$, otrzymujemy stąd tzw. trójkę pitagorską, a więc trzy liczby naturalne będące długościami boków pewnego trójkąta prostokątnego.

Wielkim osiągnięciem Lwa Landaua było wykształcenie wielu wybitnych fizyków teoretyków. Jego dziesięciotomowy kurs fizyki teoretycznej, napisany we współpracy z Lifszycem, do dziś jest podstawowym podręcznikiem na świecie. Na prowadzonym przez Landaua seminarium dochodziło często do ostrych sporów, a w swych komentarzach Landau bywał brutalny, gdy uważał, że mówca nie ma racji. Na zarzut, że jego uwagi w stosunku do Kapicy są znacznie łagodniejsze, Landau odpowiedział: „Nie mogę zapomnieć, że zawdzięczam mu życie”. W 1938 roku aresztowano Landaua pod zarzutem celowego obniżania poziomu swojej pracy. W tym czasie pracował on nad teorią zjawisk magnetycznych w metalach, jednym z głównych swych osiągnięć obok teorii cieczy kwantowych, za którą dostał nagrodę Nobla w 1962 roku. Interwencja Piotra Kapicy spowodowała uwolnienie Landaua.

Jedną z metod wyznaczania odległości galaktyk polega na porównaniu jasności obserwowanej i absolutnej najjaśniejszych gwiazd w galaktyce. W latach sześćdziesiątych amerykański astronom Alan Sandage pokazał jednak, że domniemane najjaśniejsze gwiazdy są w rzeczywistości znacznie intensywniej świecącymi obłokami zjonizowanego wodoru. Okazało się tym samym, że odległości galaktyk były dotychczas znacznie zaniżane. Była to jedna z poważniejszych rewizji skali odległości pozagalaktycznych.

Wielościany, których wszystkie ściany są wielokątami foremnymi, a wszystkie ich naroża są nieodróżnialne, nazywają się archimedesowe. Jest (z dokładnością do długości krawędzi) czternaście takich wielościanów plus dwie nieskończone serie. Serie te to archimedesowe graniastosłupy (dwa n -kąty połączone paskiem kwadratów) i archimedesowe antygraniastosłupy (dwa n -kąty połączone paskiem z trójkątów równobocznych). Najprościej opisać rodzaj wielościanu archimedesowego podając jak wygląda jego naroże. Okazuje się jednak, że metoda ta w jednym przypadku zawodzi: są dwa różne wielościany archimedesowe, których naroża składają się z trzech kwadratów i jednego trójkąta równobocznego. Nie odróżnia tych wielościanów również sumaryczna liczba ścian: 18 kwadratów i 8 trójkątów. Ciekawe, że aż do lat pięćdziesiątych naszego stulecia sądzono, że wielościanów archimedesowych (poza seriami) jest trzynaście — ten z rysunku b ukrywał się więc ponad 2 tysiące lat.



10^{12}

dlugość fali promieniowania γ
gigantycznych rezonansów jądrowych

