

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5 (161)

Paradoksalny rozkład kuli <i>doc. dr Wojciech Guzicki, dr Piotr Zakrzewski</i>	str. 1
Utrata masy przez gwiazdy <i>dr Hugh Deasy</i>	str. 4
Fizyka komputerowa <i>dr Marek Kalinowski</i>	str. 6
Patrz w niebo	str. 7
Mała Delta	str. 8
Zadanie o turnieju tenisowym <i>dr Lech Banachowski</i>	str. 10
Laser na swobodnych elektronach	str. 11
Wycieczka do najsilniejszego magnesu świata ... <i>dr Andrzej Hennel</i>	str. 12
Zadania	str. 13
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16

W następnym numerze:  
 Rogata sfera Aleksandra

#### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc. dr Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc. dr Tomasz Hofmokl — v-przewodniczący  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc. dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 dr Zbigniew Płochocki  
 dr Jan Rempala  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Grzegorz SitarSKI  
 prof. dr Józef I. Smak  
 prof. dr Kazimierz Stępień  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Aniela Wojska  
 prof. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Zakowski —  
 przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następný,  
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

#### Redaguje kolegium w składzie:

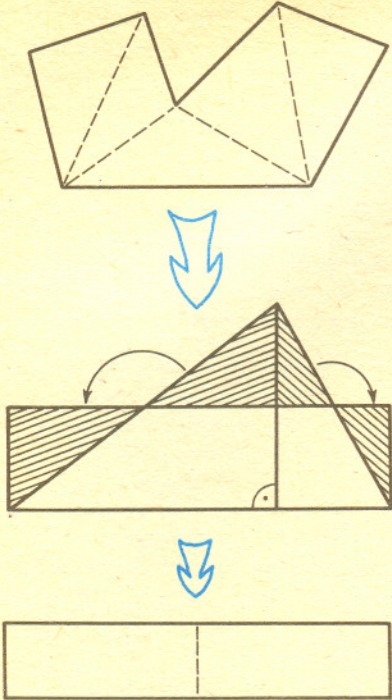
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. naczk.  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos — red. naczk.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczk.  
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
 dr Andrzej Majhofer  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska  
 mgr Jan Zalewski

#### Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa  
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. centr. 25-72-91 do 93  
 Biuro Reklam i Propagandy  
 tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 4141/12/87. K-23.



## Paradoksalny rozkład kuli

Doc. dr Wojciech GUZICKI, dr Piotr ZAKRZEWSKI

Każdy z Was na pewno kiedyś bawił się tangramem, kwadratem pociętym na kawałki, z których można złożyć ogromną ilość różnych figur geometrycznych, często o ciekawych kształtach. Spotyka się również inne podobne łamigłówki. Często w kącikach rozrywkowych różnych czasopism formuluje się wprost następujące zadanie: pociąć narysowany wielokąt na kawałki w taki sposób, by złożyć z nich kwadrat, trójkąt, krzyż czy jakąś inną figurę geometryczną. Czasami stawia się ograniczenia na linie podziału, najczęściej żądając, by były one prostymi. Zastanówmy się jednak, czy tak postawione zadanie o wielokątach ma zawsze rozwiązanie.

Zadanie: Na płaszczyźnie dane są dwa wielokąty  $A$  i  $B$ . Rozłożyć wielokąt  $A$  na mniejsze wielokąty tak, aby można było z nich złożyć wielokąt  $B$ .

Każdy natychmiast dostrzega warunek konieczny istnienia takiego rozkładu: pola wielokątów  $A$  i  $B$  muszą być takie same. Pole wielokąta będzie bowiem sumą pól wielokątów, na które go podzieliliśmy (część wspólna dowolnych dwóch wielokątów podziału jest sumą odcinków — ma więc zerowe pole) i pole nie zmienia się przy przekładaniu wielokąta z jednego miejsca na inne. Ten warunek konieczny jest również wystarczający. Proponujemy Czytelnikowi samodzielne odtworzenie na podstawie rysunków na marginesie dowodu tego twierdzenia, udowodnionego przez Bolyaia i Gerwiena.

Teraz spróbujemy rozwiązać trudniejsze zadanie. Rozkładajmy dowolne zbiory  $A$  i  $B$  na sumy dowolnych innych zbiorów, byle odpowiednio przystających (zbiory przystające to takie, które można nałożyć przez izometrię, czyli przekształcenie nie zmieniające odległości). Będziemy zakładać, że zbiory, na które dzielimy, są rozłączne, nie ograniczamy się natomiast do podzbiorów płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ .

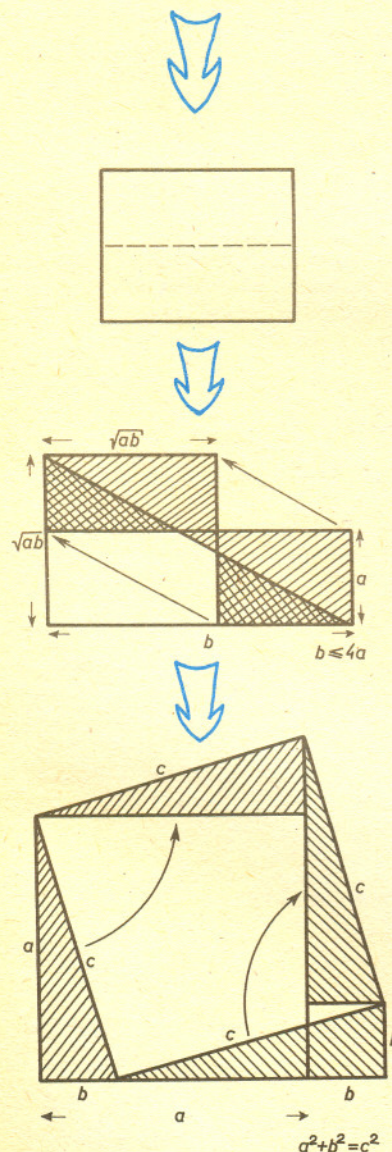
Definicja. Dwa zbiory  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) są równoważne przez rozkład skończony, jeśli istnieją zbiory  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$  takie, że

- $A = A_1 \cup \dots \cup A_m, B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ ;
- $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j, \quad \text{o ile } i \neq j$ ;
- zbiory  $A_i$  i  $B_i$  są przystające dla  $i = 1, \dots, m$ .

Podkreślmy, że kawałki, na które rozkładamy zbiory  $A$  i  $B$ , mogą być zupełnie dowolne i dalekie od jakiegokolwiek geometrycznej regularności — pojęcie równoważności przez rozkład skończony ma więc wyraźnie teoriomnościowy charakter.

Problemem, jakie zbiory są równoważne przez rozkład skończony, zajmowali się w latach dwudziestych Stefan Banach i Alfred Tarski, dowodząc twierdzenia znanego pod nazwą twierdzenia o paradoksalnym rozkładzie kuli.

Twierdzenie: Każde dwa ograniczone zbiory  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  o niepustych wnętrzach są równoważne przez rozkład skończony. W szczególności dowolna kula jest równoważna kuli o dwukrotnie większym promieniu.





**Rozwiązanie zadania F 221.** Z rozwiązania zadania F 220 wynika, że średnia droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia. Wewnątrz bańki termosu  $\lambda \approx 1$  cm. Oznacza to, że cząsteczki praktycznie nie zderzają się między sobą, a jedynie ze ściankami bańki. Przy zderzeniu z zewnętrzną ścianką cząsteczki uzyskują średnio energię kinetyczną odpowiadającą temperaturze pokojowej  $T_0 = 293$  K. Załóżmy, że przy zderzeniu ze ścianką wewnętrzną uzyskiwana energia odpowiada średniej temperaturze tej ścianki w ciągu stygnięcia, tj.  $T = (T_1 + T_2)/2 = 353$  K. Energia przenoszona przez jedną cząsteczkę jest równa

$$w = \frac{c_v}{N_A} (T - T_0),$$

gdzie dla gazu doskonałego, złożonego

z molekuł dwuatomowych  $c_v = \frac{5}{2} R$

( $R$  — stała gazowa,  $N_A$  — liczba Avogadra).

Liczba cząsteczek zderzających się w jednostce czasu z jednostką powierzchni wynosi

$$z = \frac{2n v_{\text{sr}}}{6} \approx \frac{P N_A}{3RT_0} \sqrt{\frac{3RT}{\mu N_A}},$$

gdzie  $v_{\text{sr}}$  jest średnią prędkością cząsteczek,  $\mu$  — masą 1 mola powietrza. Ilość traconego w jednostce czasu ciepła jest więc równa

$$q = z w S = \frac{5}{2\sqrt{3}} P \sqrt{\frac{RT}{\mu N_A}} \frac{(T - T_0) \cdot S}{T_0} \approx 1,85 \text{ J/s}.$$

Stąd czas stygnięcia

$$t = \frac{m c_w (T_1 - T_2)}{q} \approx 4,5 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 12,5 \text{ h},$$

gdzie  $c_w$  jest ciepłem właściwym wody.

Zastanówmy się, na czym polega paradoksalność twierdzenia Banacha—Tarskiego. Jego sprzeczność z intuicją związana jest chyba z naszymi wyobrażeniami o masie czy w przypadku brył jednorodnych — objętości. Czy możliwe byłoby rozłożenie kulki ze złota na kawałki tak, aby z nich można było złożyć kulkę dwa razy większą, a więc osiem razy cięższą?! To przecież lepiej niż zamiana ołowiu w złoto za pomocą kamienia filozoficznego — nie potrzebujemy nawet ołowiu!

Wyjaśnienie paradoksalności tej interpretacji jest proste — kulka składa się ze skończonej liczby niepodzielnych cząstek (wyrażony jest tu pogląd jednego z autorów, drugi, którego ojciec jest fizykiem, woli nie wypowiadać się na ten temat), nie można więc dzielić jej na dowolne zbiory tak, jak możemy dzielić istniejące tylko w naszej wyobraźni idealne podzbiory przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Z tej strony średniowiecznym alchemikom nie grozi więc na razie konkurencja.

Nie wyjaśnia to jednak, w jaki sposób możliwe jest powiększenie objętości bryły tylko w wyniku rozkładania jej na mniejsze i składania w inny sposób. Musimy więc dokładniej prześledzić rozumowanie przeprowadzone poprzednio dla wielokątów i zobaczyć, czy przenosi się ono na przypadek dowolnych zbiorów. Powtarzając to rozumowanie powiedzielibyśmy: zbiór  $A$  rozkładamy na sumę rozłącznych zbiorów  $A_1, \dots, A_n$  przystających odpowiednio do rozłącznych zbiorów  $B_1, \dots, B_n$ , z których składa się zbiór  $B$ . Objętość zbioru  $A$  jest zatem sumą objętości zbiorów  $A_1, \dots, A_n$ , te z kolei mają te same objętości, co  $B_1, \dots, B_n$  (bo zbiory przystające mają te same objętości), których suma jest objętością zbioru  $B$ . Zgadza się, prawda? W tym rozumowaniu założyliśmy milcząco, że każdy zbiór w przestrzeni ma objętość, tzn. że istnieje funkcja  $m$  przyporządkowująca każdemu zbiorowi  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  liczbę  $m(A)$  w taki sposób, że

(1) (addytywność) jeśli  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  i zbiory  $A_1, \dots, A_n$  są parami rozłączne, to  $m(A) = m(A_1) + \dots + m(A_n)$ ,

(2) (niezmienniczość) jeśli zbiory  $A$  i  $B$  są przystające, to  $m(A) = m(B)$ .

Każda taka funkcja  $m$  nazywa się uniwersalną, niezmienniczą ze względu na izometrie miarą skończenie addytywną.

Teraz sytuacja powoli staje się jasna. Założyliśmy milcząco, że taka miara istnieje. Czy jednak potrafimy tego dowiedzieć? Otóż twierdzenie Banacha—Tarskiego pokazuje właśnie, że takich miar w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nie ma. Paradoksalne jest więc nie to, że z kuli można zrobić dwa razy większą, ale to, iż myślimy, że umiemy zmierzyć objętość każdego zbioru w przestrzeni.

Inaczej mówiąc, jeśli chcemy określić niezmienniczą miarę skończenie addytywną w  $\mathbb{R}^3$ , to musimy zrezygnować z jej uniwersalności — zawsze będą istniały zbiory niemierzalne. Oczywiście rodzina zbiorów mierzalnych, tzn. tych, na których miara jest określona, musi spełniać następujące warunki:

(1) jeśli  $A, B$  są mierzalne, to  $A \cup B, A \cap B, A' \cup B'$  też są mierzalne,

(2) jeśli zbiór  $B$  jest izometrycznym obrazem zbioru mierzalnego  $A$ , to zbiór  $B$  jest mierzalny.

Takie rodziny zbiorów nazywamy niezmienniczymi (ze względu na izometrie) ciałami zbiorów. Przykładem miary określonej na takim ciele zbiorów jest miara Jordana. Opiszemy ją w przypadku płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , uogólnienie na przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  będzie łatwym ćwiczeniem dla Czytelnika.

Chcąc zmierzyć pole zbioru  $A$  pokrywamy go siatką kwadratów o boku  $\varepsilon$  i obliczamy dwie liczby:

$N(\varepsilon)$  = liczba kwadratów przecinających zbiór  $A$ ,

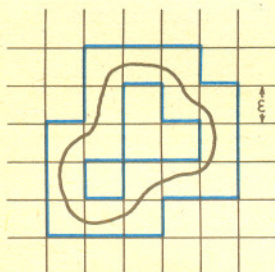
$n(\varepsilon)$  = liczba kwadratów zawartych w zbiorze  $A$ .

Następnie przechodzimy do granicy dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  i kładziemy

$$m(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \cdot N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \cdot n(\varepsilon), \text{ o ile obie granice istnieją i są równe.}$$

Dowodzi się, że tak zdefiniowana miara Jordana jest niezmiennicza ze względu na izometrie. Miara Jordana odpowiada pojęciu długości (w  $\mathbb{R}$ ), pola (w  $\mathbb{R}^2$ ) czy objętości (w  $\mathbb{R}^3$ ). Np. dwuwymiarowa miara Jordana prostokąta jest iloczynem jednowymiarowych miar jego boków.

Ciało zbiorów mierzalnych w sensie Jordana jest dość obszerne. W szczególności wielokąty na płaszczyźnie są mierzalne względem miary Jordana. Z łatwością dowodzimy teraz konieczności warunku równości pól w twierdzeniu Bolyaia—Gerwienna. Wystarczy powtórzyć przeprowadzone na początku rozumowanie traktując pole wielokąta jako jego miarę Jordana i korzystając z jej addytywności i niezmienniczości.



$$N(\varepsilon) = 20$$

$$n(\varepsilon) = 4$$

Widać też od razu, że w twierdzeniu Banacha—Tarskiego zbiory, na które rozkładamy kulę, muszą być niemierzalne nie tylko względem miary Jordana, ale także względem każdej innej miary niezmienniczej, względem której obie kule były mierzalne.

Pojawia się naturalne pytanie, czy paradoks Banacha—Tarskiego można powtórzyć na płaszczyźnie. Czy istnieją np. dwa wielokąty o różnych polach równoważne przez rozkład skończony. Nadzieje na to przekreśla następujące twierdzenie Banacha:

**Twierdzenie.** Na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  istnieje uniwersalna, niezmiennicza ze względu na izometrię miara skończenie adytywna, rozszerzająca miarę Jordana.

Z twierdzenia Banacha wynika natychmiast, że jeśli dwa mierzalne w sensie Jordana podzbiory płaszczyzny są równoważne przez rozkład skończony, to mają tę samą miarę Jordana.

Sytuacja na płaszczyźnie jest zatem całkowicie odmienna od sytuacji w przestrzeni trójwymiarowej. Skąd bierze się ta zasadnicza różnica? Okazuje się, że powody leżą w algebraicznej strukturze grup izometrii. Podstawowym krokiem w dowodzie twierdzenia Banacha—Tarskiego jest znalezienie dwóch izometrii  $\varphi$  i  $\psi$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  (w istocie są to obroty wokół dwóch różnych osi przechodzących przez początek układu współrzędnych) o tej własności, że równość

$$\varphi^{k_1} \circ \psi^{l_1} \circ \dots \circ \varphi^{k_n} \circ \psi^{l_n} = \text{id}$$

nie zachodzi dla żadnych, różnych od zera, liczb całkowitych  $k_i, l_i$ . Oznacza to, że grupa  $G_{\varphi, \psi}$  złożona ze wszystkich izometrii postaci

$$\varphi^{k_1} \circ \psi^{l_1} \circ \dots \circ \varphi^{k_n} \circ \psi^{l_n}$$

jest tzw. grupą wolną o dwóch generatorach  $\varphi$  i  $\psi$ . Analiza dowodu twierdzenia Banacha—Tarskiego pokazuje, że właśnie obecność wolnej podgrupy  $G_{\varphi, \psi}$  w grupie izometrii  $\mathbb{R}^3$  umożliwia swobodę w manipulowaniu punktami niezbędną do uzyskania paradoksalnego rozkładu.

Argumentu powyższego nie da się zastosować w przypadku płaszczyzny. „Łatwo” bowiem wykazać, że jeśli  $\varphi$  i  $\psi$  są dowolnymi izometriami płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , to

$$\varphi^2 \circ \psi^2 \circ \varphi^{-2} \circ \psi^{-2} \circ \varphi^{-2} \circ \psi^2 \circ \varphi^4 \circ \psi^{-2} \circ \varphi^{-2} \circ \psi^2 \circ \varphi^{-2} \circ \psi^{-2} \circ \varphi^2 = \text{id},$$

co dowodzi, że  $G_{\varphi, \psi}$  nie jest grupą wolną o generatorach  $\varphi$  i  $\psi$ .

Istnienie miary, o której mówi twierdzenie Banacha, zagwarantowane jest przez tzw. rozwiązalność grupy izometrii płaszczyzny.

Przyjrzyjmy się temu pojęciu.

Jeśli  $G$  jest dowolną grupą przekształceń, to przez  $[G, G]$  oznaczamy zbiór złożony ze wszystkich przekształceń postaci  $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ , gdzie  $f, g \in G$ . Okazuje się, że zbiór  $[G, G]$  jest podgrupą grupy  $G$ .

Przez indukcję definiujemy zstępujący ciąg podgrup grupy  $G$ :

$$G_0 = G, \quad G_{n+1} = [G_n, G_n].$$

Jeśli zdarzy się, że dla pewnej liczby  $n$  grupa  $G_n$  jest trywialna:  $G_n = \{\text{id}\}$ , to mówimy, że grupa  $G$  jest rozwiązalna.

Zauważmy, że grupa  $G$  jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy  $G_1 = [G, G] = \{\text{id}\}$ . Każda grupa przemienna jest więc rozwiązalna. Nietrudno sprawdzić, że grupa  $G$  izometrii płaszczyzny jest też rozwiązalna ( $G_3 = \{\text{id}\}$ ), wystarczy pokazać, że  $G_2$  jest grupą przesunięć.

Prawdziwa jest następująca ogólniejsza wersja twierdzenia Banacha:

**Twierdzenie.** Jeśli  $G$  jest rozwiązalną podgrupą grupy izometrii przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), to w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  istnieje skończenie adytywna miara uniwersalna rozszerzająca miarę Jordana i niezmiennicza ze względu na izometrię należące do grupy  $G$ .

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że paradoksalnego rozkładu kuli nie udałoby się uzyskać używając wyłącznie przesunięć i obrotów względem osi o ustalonym kierunku (dlaczego?).

Warto podkreślić, że dowód twierdzenia Banacha najłatwiej przeprowadza się metodami analizy funkcjonalnej. Jest to więc kolejna, obok geometrii, algebry, teorii miary i teorii mnogości dyscyplina matematyczna „zaangażowana” w te zagadnienia. Między innymi dzięki tej różnorodności używanych technik problematyka ta stanowi interesujące pole badań.

Na zakończenie przypomnijmy otwarty dotychczas problem sformułowany przez A. Tarskiego w 1924 roku: czy koło i kwadrat o tych samych polach są równoważne przez rozkład skończony? Tę nową wersję kwadratury koła pozostawimy Czytelnikowi jako zadanie na długie zimowe wieczory (najbliższych, oby tylko kilku, zim).

Zbiór przekształceń, który wraz z dwoma przekształceniami zawiera ich złożenie oraz przekształcenia odwrotne do każdego z nich i jest niepusty, nazywamy grupą przekształceń.

Każdy zbiór przekształceń wzajemnie jednoznacznych określony przez warunek postaci: „wszystkie przekształcenia, które zachowują ...” tworzy grupę. W szczególności grupę tworzą izometrie.



**Rozwiązanie zadania M 469.** Oznaczmy przez  $X$  liczbę rzutów. Wtedy  $P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$ , gdzie  $q = 1 - p$ , co wynika z niezależności rezultatów kolejnych rzutów. Obliczmy  $EX$ .

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-q) \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot q^m - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot q^m + \sum_{m=0}^{\infty} q^m - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$



**Rozwiązanie zadania M 470.** Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. W pierwszym rzucie otrzymujemy pewien wynik. Teraz prawdopodobieństwo uzyskania innego

wyniku w pojedynczym rzucie wynosi  $\frac{5}{6}$ , zatem średni czas oczekiwania jest równy  $\frac{6}{5}$ .

Podobnie, średnie czasy oczekiwania na kolejne „brakujące” liczby oczek wynoszą  $\frac{6}{4}, \frac{6}{3}, \frac{6}{2}$  i  $\frac{6}{1}$ , sumując je otrzymujemy

$$6 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 14,7.$$

# Utrata masy przez gwiazdy

Dr Hugh DEASY (Irlandia)

tlum. T. KWAST

## Opis zjawiska

Gwiazdy nie są biernymi świetlnymi kulami. Wszystkie zmieniają się, niektóre bardzo szybko, inne bardzo powoli. Ich jasności, rozmiary i temperatury ulegają w trakcie ewolucji znacznym zmianom w zakresie wielu rzędów wielkości. Nawet masa poważnie się zmienia. Rzeczywiście, skoro typowa gwiazda ma stać się białym karłem lub gwiazdą neutronową (które stanowią ostatnie stadia życia gwiazd), to musi utracić wielką ilość swojej początkowej masy, ponieważ oba te typy gwiazd należą do mało masywnych. Najbardziej namacalnym skutkiem tej utraty masy jest samo istnienie Czytelników tego artykułu. Nasze ciała zbudowane są wszak z „odpadów” wyrzuczonych przez stare gwiazdy w przestrzeń międzygwiazdową. W ten sposób gaz, z którego powstało Słońce i jego planety, wzbogacony został w ciężkie pierwiastki, jak węgiel, tlen, żelazo itd., powstałe w wyniku reakcji jądrowych zachodzących we wnętrzu jakichś, dzisiaj przegasyłych już lub martwych gwiazd.

Supernowe są najdrastyczniejszym przykładem wyrzucania materii przez gwiazdy. Jednak zjawisko utraty masy nie ogranicza się do tak katastroficznych wydarzeń i może występować — jak w przypadku Słońca — w postaci tzw. wiatru gwiazdowego. Gdybyśmy śledzili zjawisko utraty masy w trakcie ewolucji gwiazdy, stwierdzilibyśmy, że w jej początkowej fazie utrata masy jest ujemna, czyli masa gwiazdy początkowo rośnie — w miarę formowania się jej z rozproszonego gazu międzygwiazdowego. Na tym wczesnym etapie życia głównym źródłem energii gwiazdy jest zamiana energii grawitacyjnej kolapsującego gazu na ciepło. Gdy protogwiazda zapada się, prawo zachowania momentu pędu wymusza jej rotację. W wyniku tego materia zostaje skierowana ku równikowemu obszarowi protogwiazdy tworząc po drodze dysk. Na tym etapie życia gwiazdy utrata masy może zachodzić tylko z obszarów biegunowych, ponieważ akrecja powstrzymuje jakkolwiek wypływ z pobliza równika. I rzeczywiście, u niektórych bardzo młodych gwiazd, zwanych gwiazdami typu T *Tauri*, taki biegunowy wypływ został zaobserwowany w postaci dwóch stożków materii wyrzuczanych z obu obszarów biegunowych.

Akrecja jest to spadek materii na ciało centralne (np. gwiazdę) pod wpływem jego pola grawitacyjnego. W zależności od tego, czy materia spadająca ma moment pędu czy nie, rozróżniamy akrecję przez dysk lub akrecję sferyczną.

Niekiedy akrecja zostaje powstrzymana. Wtedy ciśnienie promieniowania gwiazdy rozprasza większość gazu i pyłu w płaszczyźnie równika. W niektórych przypadkach część materii dysku może skupić się w większe masy, które ewentualnie ulegną skondensowaniu w planety, jak stało się to w przypadku naszego Układu Słonecznego.

Następna faza życia gwiazdy jest stosunkowo spokojna. Ewolucja postępuje powoli w czasie wielu milionów lat (miliardów w przypadku normalnej gwiazdy, jak nasze Słońce). Gwiazdy na tym etapie ewolucji tracą masę w tempie stosunkowo wolnym, z natężeniem zbliżonym do natężenia wiatru słonecznego. Słońce traci  $10^{-13}$  swojej masy rocznie wskutek tego wiatru, co jest znacznie mniej niż masa zużyta w reakcjach termojądrowych we wnętrzu Słońca. Czasami w okresie maksimum aktywności większa porcja jonów w postaci pochodni i protuberancji bywa wyrzucana wraz z wiatrem słonecznym, co powoduje zaburzenia w ziemskiej jonosferze i pasach Van Allena. Skutki tego zjawiska są odczuwane jako zakłócenia odbioru radiowego lub pojawianie się zórz polarnych.

Ziemia jest otoczona pasami radiacyjnymi (Van Allena), czyli obszarem, w którym gwałtownie wzrasta koncentracja naładowanych cząstek. Cząstki te są uwięzione w polu magnetycznym Ziemi, poruszają się między biegunami magnetycznymi, najbardziej skoncentrowane są w pobliżu równika magnetycznego Ziemi.

D. Reimers, niemiecki astrofizyk z Kilonii, zauważył, że istnieje wyraźna korelacja między tempem utraty masy (obliczonym dla wielu rozmaitych gwiazd) a jasnością  $L$ , przyspieszeniem grawitacyjnym na powierzchni  $g$  i promieniem  $R$ . Związek ten może być zapisany w postaci

$$\dot{M} \approx 10^{-13} \frac{L}{gR} \approx 10^{-13} \frac{LR}{M},$$

gdzie  $M$  i  $\dot{M}$  oznaczają odpowiednio masę gwiazdy i tempo utraty masy. Wielkości  $L$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $M$  są wyrażone w jednostkach słonecznych, a  $\dot{M}$  w masach Słońca na rok. Zależność ta dowodzi, że w miarę ewoluowania gwiazdy poza ciąg główny (jest to obszar na wykresie zależności między jasnością i temperaturą zajmowany przez gwiazdy znajdujące się w stabilnej fazie swojego życia), ku większym jasnościom, tempo utraty masy rośnie. Zatem na etapie czerwonego olbrzyma lub nadolbrzyma (o masie początkowej równej kilku masom Słońca) tempo utraty masy jest już całkiem pokaźne. Czerwone nadolbrzymy (gwiazdy typu M) tracą masę przeciętnie w tempie  $10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$ . Zakończeniu fazy czerwonego olbrzyma towarzyszy gwałtowna utrata masy pociągająca za sobą utworzenie mgławicy planetarnej lub wybuch supernowej.

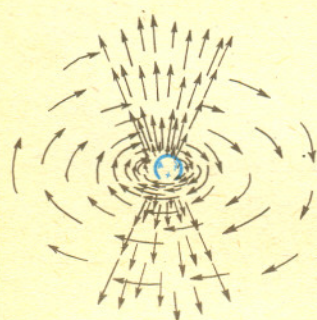
Zjawisko supernowej jest stosunkowo rzadkie, dotyczy tylko gwiazd o masie początkowej bardzo dużej ( $> 10 M_{\odot}$ ) lub bardzo małej ( $< 0,5 M_{\odot}$ ). Gdy gwiazda jest składnikiem dostatecznie ciasnego układu podwójnego, przepływ masy między składnikami może nieco zmienić sytuację.



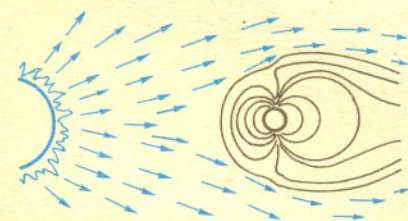
Mgławica Krab powstała w wyniku wybuchu supernowej w 1054 roku.



Mgławica planetarna NGC 7293 w Wodniku.



Wpływ materii z okolic biegunowych powstającej gwiazdy.



Wiatr słoneczny powoduje zniekształcenia magnetosfery Ziemi.

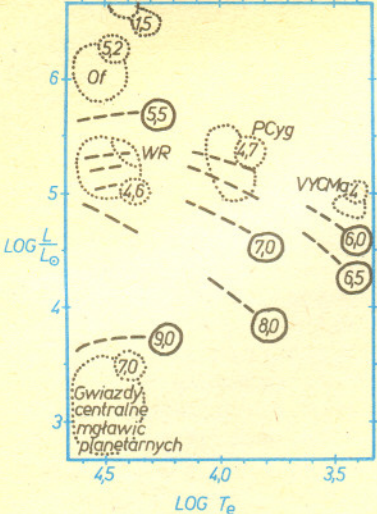
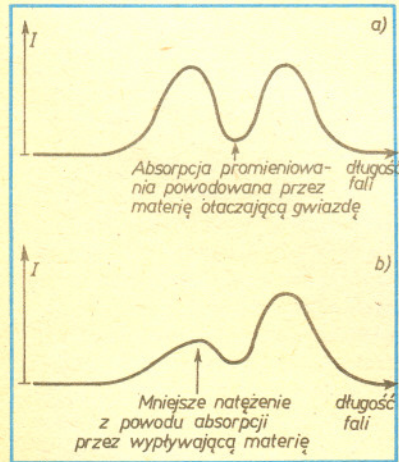


Diagram HR z zaznaczonymi obszarami o stałym tempie wypływu masy z gwiazd (w kółkach podane jest  $\log(\dot{M}/(M_{\odot}/\text{rok}))$ ). Najbardziej znane typy gwiazd o silnym wietrze zaznaczone są w owalach (Of — jasne, bardzo gorące gwiazdy typu widmowego O; WR — gwiazdy Wolfa-Rayeta).



Zachowanie zewnętrznych warstw gwiazdy w czasie pulsacji; najbardziej zewnętrzne części gwiazdy oddalają się coraz bardziej w ciągu każdego cyklu pulsacji.



Widmo gwiazdy  
a) bez wiatru,  
b) o silnym wietrze.

Z kolei wytworzenie mgławicy planetarnej zachodzi częściej i jest wynikiem wyrzucenia kilku dziesiątych masy Słońca, przy czym reszta gwiazdy staje się czasem białym karłem. Taki jest los większości pojedynczych gwiazd o masach od jednej do kilku mas Słońca. Natomiast gwiazdy masywne, które mają zarazem duże jasności (ponad 10 000 jasności Słońca) stają się gorącymi nadolbrzymiami o temperaturze powierzchniowej rzędu 10 000 K. Ciśnienie promieniowania w atmosferach tych gwiazd jest czynnikiem znaczącym i u gwiazd typu P Cygni czy Wolfa-Rayeta powoduje utrzymujące się przez długi czas wysokie tempo utraty masy ( $> 10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$ ).

Tzw. gwiazdy Be są gorącymi, jasnymi gwiazdami typu widmowego B i według wszelkich oznak otoczone przez dysk materii wyrzuconej prawdopodobnie głównie z obszarów równikowych. Dysk może również powstać wokół głównego składnika w ciasnym układzie podwójnym jako wynik utraty masy przez wtórny olbrzym. W tym więc przypadku utratę masy powoduje rozpraszanie materii składnika wtórnego. Dodatkowo może nastąpić wypływ masy (z dysku akrecyjnego lub z powierzchni któregośkolwiek składnika gwiazdy podwójnej) całkiem poza układ, w przestrzeń międzygwiazdową.

## Mechanizmy

Jest ich kilka. Jakikolwiek z nich, aby być dostatecznie wydajny, musi zapewnić dostarczenie gazowi energii w ilości umożliwiającej ucieczkę z pola grawitacyjnego gwiazdy. Ważne jest też miejsce w atmosferze gwiazdy, gdzie taki mechanizm zaczyna działać, ponieważ gęstość materii w tym miejscu określa ilość utraconej masy, a zatem wydajność mechanizmu.

Najwydajniejszym sposobem odrzucania masy jest wybuch, jak w przypadku supernowych. W sytuacjach bardziej zwyczajnych istotne są inne mechanizmy, np. ciśnienie promieniowania lub ruchy falowe, wliczając w to fale uderzeniowe oraz fale z udziałem pola magnetycznego, zwane falami Alfvena. W przypadku ciśnienia promieniowania fotony pochodzące z gwiazdy dostarczają pęd i energię wypływającej materii. Mechanizm ten jest znacznie wydajniejszy, gdy materia jest w postaci pyłu, ponieważ ziarna pyłu mają duży przekrój czynny i dlatego łatwiej absorbują pęd fotonów niż cząstki gazu.

Wiatr słoneczny również jest napędzany ciśnieniem promieniowania, chociaż atmosfera Słońca jest zbyt gorąca, by mogły w niej powstać ziarna pyłu. Dlatego też wiatr słoneczny jest względnie słaby. Istnieje graniczne tempo utraty masy, gdy jego przyczyną jest wyłącznie ciśnienie promieniowania. Granica ta zostaje osiągnięta, gdy fotony opuszczające gwiazdę przekazują cały pęd wypływającej materii. Spełniony jest wtedy związek

$$L/c = \dot{M}v_{\infty}$$

gdzie  $L$  oznacza jasność gwiazdy,  $\dot{M}$  tempo utraty masy, zaś  $c$  i  $v_{\infty}$  to prędkość światła i wypływającej materii (w dużej odległości od gwiazdy). Można pokazać, że tempo utraty masy może osiągnąć jedynie drobny ułamek wartości granicznej, jeżeli promieniowanie dostarcza energii strumieniowi materii poniżej pewnej krytycznej powierzchni w atmosferze gwiazdy, zwanej „punktem Parkera”. Jest nią powierzchnia, na której prędkość dźwięku jest równa prędkości wiatru — w przypadku przepływu stacjonarnego. Muszą więc istnieć jeszcze inne, efektywne mechanizmy przyspieszające wypływającą materię. Mogą to być rozmaite ruchy falowe. Np. energia powierzchniowego pola magnetycznego może zostać przekazana wiatrowi gwiazdowemu za pośrednictwem fal hydromagnetycznych. Mechanizm ten może być szczególnie wydajny u gwiazd chłodniejszych o słabej grawitacji (tj. dużym, przy określonej masie, promieniu). Fale związane z pulsacjami gwiazdy mogą również przekazywać energię wiatrowi. W przypadku pulsacji czysto radialnych utrata masy jest jednakowa we wszystkich kierunkach. Oczywiście nie jest tak przy pulsacjach nieradialnych. Np. wydaje się, że gwiazdy Be mogą odrzucać dysk właśnie wskutek nieradialnych pulsacji o dużej amplitudzie w pobliżu równika.

## Obserwacje

Skąd wiemy, że i obecnie dokonuje się utrata masy przez gwiazdy? Otóż po pierwsze, jak już wspomnieliśmy, typowa gwiazda musi utracić znaczną część swojej początkowej masy, ponieważ ma stać się białym karłem lub gwiazdą neutronową, a obie mają masę stosunkowo małą (prawdopodobnie gwiazda taka może również stać się czarną dziurą, lecz przypadek taki uznajemy za bardzo rzadki). Mamy również znaczną ilość dowodów obserwacyjnych. Supernowe zostawiają bardzo wyraźne ślady gwałtownej utraty masy. Są nimi również mgławice planetarne. U niektórych gwiazd można też zaobserwować wypływ biegunowy. Wraz z wprowadzeniem nowoczesnych detektorów optycznych (np. Charge Coupled Device, czyli CCD) liczba takich, znanych obecnie, obiektów ogromnie wzrosła. W przypadku mniej spektakularnej utraty masy musimy polegać na dowodach spektroskopowych: wypływający gaz może pochłaniać światło gwiazdy o długościach fal odpowiadających znanym przejściom atomowym lub cząsteczkowym, lecz przesunięty względem wartości laboratoryjnych o wielkość wskazującą na prędkości zbliżone do prędkości ucieczki z gwiazdy.

Inną oznaką utraty masy jest emisja w podczerwieni silniejsza niż oczekiwana dla samej gwiazdy. W tym przypadku często można wydedukować obecność materii otaczającej gwiazdę. Np. ziarna pyłu, które mogą powstawać w wietrze niektórych gwiazd, mogą być przyczyną nadwyżki podczerwieni. Ostatnio satelita IRAS dostarczył dowodów istnienia pyłu wokół wielu gwiazd. W szczególności czerwone nadolbrzymy wykazują obecność takiej ilości pyłu, że dowodzi to utraty masy w tempie ponad  $10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$ .

Wiatr gwiazdowy jest zjawiskiem powszechnym i może nim być łagodny „powiew” — jak wiatr słoneczny, lub straszliwy „huragan” — jak w przypadku supernowej. Gdyby kiedykolwiek miało dojść do podróży międzygwiazdowych, najprostszym napędem mogłaby być siła tych wiatrów. Ale dziś cieszymy się raczej z tego, że Słońce zachowuje się tak powściągliwie.

Dr Marek KALINOWSKI

Na pograniczu fizyki, informatyki, inżynierii komputerowej i elektroniki powstała niedawno nowa dziedzina zwana fizyką komputerową. Czym ona się zajmuje?

Obszar zainteresowań fizyki komputerowej możemy podzielić na dwie wyraźnie odróżniające się części, tak jak i samą naukę o komputerach (tzw. *computer science* w języku angielskim). Podział ten, jak prawdopodobnie każdy zgadnie, związany jest z podziałem na „hardware” i „software”, czyli na konstrukcję komputera i jego oprogramowanie.

Zajmijmy się najpierw tą częścią fizyki komputerowej, która dotyczy „hardware”. Realizacja procesu obliczeniowego jest procesem fizycznym, wymagającym energii, zachodzącym w czasie rzeczywistym i w związku z tym podlegającym prawom fizyki. Dlatego też fizyka bada wydajność energetyczną procesu obliczeniowego i daje wskazówki projektantom, jak obniżyć wydatek energii związany np. z elementarnym dodawaniem czy mnożeniem. Jest to bardzo ważne, bo energia ta ulega dyssypacji na ciepło i może stać się przyczyną zaburzeń prowadzących nawet do zniszczenia układu wykonującego obliczenia. Innym istotnym problemem jest badanie fizycznych granic szybkości obliczeń wynikających ze skończonej prędkości przesyłania informacji (prędkość światła) i zasady nieoznaczoności Heisenberga. Centralny zegar komputera wyznacza nam cykl pracy całego procesora. W zależności od jego „tik-tak” zmieniają się zawartości rejestrów, przerzutników i elementów pamięci. Zatem każde „tik” lub „tak” musi dojść do każdej części procesora jednocześnie. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy rozmiar procesora jest mały w porównaniu z odległością, jaką przechodzi sygnał świetlny w czasie pojedynczego cyklu zegara. Dla czasu rzędu nanosekund ( $10^{-9}$  s) odległość ta jest już względnie mała i wynosi tylko 30 cm. Zatem procesor o częstotliwości 1 GHz musi już być bardzo mały. Zmusza to konstruktorów do miniaturyzacji i gęstego upakowania wszystkich elementów hardware. Gęste upakowanie powoduje zwiększone wydzielanie mocy (dyssypacja energii) na jednostkę objętości, tak, że w pewnym momencie procesor może zostać zniszczony. Należy więc dążyć do obniżania poboru mocy i obniżenia temperatury procesora, np. umieszczając go w ciekłym azocie lub helu.

Pojedyncze składniki procesora stają się coraz mniejsze i zaczynają zbliżać się do rozmiarów molekularnych. Pojawiają się ograniczenia wynikające z praw mechaniki kwantowej — zaczyna odgrywać rolę zasada nieoznaczoności. Czas przerzutu, to jest zmiany stanu przerzutnika np. z logicznego 1 do logicznego 0, nie może być mniejszy niż stała Plancka dzielona przez nieoznaczoność energii. Niech stanowi logicznemu 0 odpowiada stan podstawowy układu kwantowego, a stanowi 1 stan wzbudzony i niech różnica energii między tymi poziomami wynosi  $\Delta E$ . Różnicę energii stanów możemy określić (rozpoznać) z dokładnością  $\Gamma$ . Mamy ograniczenie  $\Gamma < \Delta E/2$ , w przeciwnym razie nie będziemy mieli dostatecznie ostrej różnicy między logicznym 0 i 1. Z drugiej strony wiemy, że czas przeskoku do stanu podstawowego  $\Delta t$  i dokładność wyznaczenia energii  $\Gamma$  spełniają nierówność (zasada nieoznaczoności)

$$\Delta t \cdot \Gamma \geq \hbar.$$

Otrzymujemy więc ograniczenie na  $\Delta t$  — czas przełączania układu logicznego

$$\Delta t \geq \Delta t_{min} = \frac{2\hbar}{\Delta E}.$$

Biorąc  $\Delta E$  rzędu elektronowolta — odpowiadającą procesom molekularnym — otrzymujemy  $\Delta t_{min}$  rzędu  $10^{-15}$  s, zaś dla energii charakterystycznych dla oddziaływań jądrowych ( $\sim 1$  MeV) otrzymujemy  $10^{-21}$  s. Mamy więc drugie ograniczenie na szybkość działania komputera. Ciekawe, że dzięki bardzo szybkiemu postępowi technologii zbliżamy się już do tych ograniczeń. Niedługo już będziemy budować komputery o częstotliwości zegara  $10^3$  GHz i czasie przełączania bramek logicznych wynoszącym ułamki pikosekund. W tym momencie będziemy zmuszeni zmienić zasady projektowania hardware i zacząć używać przy tym formalizmu mechaniki kwantowej. Tego zdania jest wielu wybitnych fizyków, m.in. R. Feynman, który poczynił już pierwsze kroki w tym kierunku tworząc zaczątki teorii kwantowo-mechanicznego hardware, używającej formalizmu tzw. drugiej kwantyzacji. Również wielu fizyków z ośrodków badawczych firmy IBM pracuje nad tym problemem. Czasy przełączania pojedynczych bramek w tego typu procesorze będą rzędu  $10^{-15}$  —  $10^{-14}$  s. Będzie to możliwe dzięki wykorzystaniu zjawiska Josephsona, a nawet, co jest bardziej prawdopodobne, zjawiska fal spinowych w magnetykach.

Do fizyki komputerowej zalicza się również metody numeryczne wypracowane przez fizyków wykorzystujących komputery np. do rozwiązywania równań ruchu punktów materialnych, ciał sztywnych czy też płynów. Zadając postać równań możemy symulować w komputerze realny świat fizyczny, czyli niejako wykonywać doświadczenia w komputerze. Jest to bardzo wygodne, ponieważ często nie jesteśmy w stanie zrealizować w laboratorium ekstremalnych stanów materii lub z powodu zbyt długiego czasu czekać końca doświadczenia. Dotyczy to np. procesów ewolucji gwiazd, powstawania galaktyk lub ewolucji Wszechświata jako całości. Dzięki dużej mocy obliczeniowej komputera można prześledzić w kilka minut proces fizyczny zachodzący normalnie w czasie milionów lat. W ten sposób jesteśmy w stanie porównać konsekwencje założeń naszych modeli z danymi obserwacyjnymi. Jeżeli nie są one zgodne z tym, co rzeczywiście obserwujemy, to możemy je zmienić i sprawdzić jeszcze raz. W przypadku ewolucji gwiazd zmieniając parametry protogwiazdy (to jest masę i skład chemiczny) możemy prześledzić drogę ewolucji każdego typu gwiazdy obserwowanej na niebie. Nieocenioną pomocą jest taka symulacja w przypadku wczesnych stadiów ewolucji Wszechświata. Sprawdzamy wtedy, czy otrzymany w wyniku symulacji rozkład galaktyk i gromad galaktyk odpowiada temu, co rzeczywiście widzimy na niebie. Bardzo pomocny jest również komputer w badaniu własności skomplikowanych molekuł chemicznych. Dzięki wykonanej symulacji możemy prześledzić ewolucję molekuly i jej zachowanie, a potem porównać to z wynikami np. analizy za pomocą promieni Roentgena. Przeprowadzone porównanie pozwoli nam zrozumieć, co zaszło w molekule, jak grupy atomów ewoluowały w czasie. Symulacje tego typu, nieocenione w biologii molekularnej, wykonuje się używając metody zwanej metodą dynamiki molekularnej.

W obu przypadkach (obliczeń astronomicznych i chemicznych) do komputera wprowadzamy informacje o znanych nam prawach fizycznych, dane liczbowe określające występujące wielkości oraz nasze założenia dotyczące badanego procesu. Komputer pozwala nam sprawdzić, jak wyglądałby proces zachodzący zgodnie z podanymi informacjami. Takie postępowanie nie może, oczywiście, zastąpić prawdziwego doświadczenia fizycznego. Często jednak wykonana symulacja pozwala ograniczyć liczbę doświadczeń, które rzeczywiście należy przeprowadzić, eliminując hipotezy błędne, których sprawdzenie na drodze eksperymentalnej byłoby kosztowne i czasochłonne.

Komputer jest używany również jako narzędzie symulacji dla problemów opisywanych przez układy nieliniowych równań

różniczkowych, np. w hydrodynamice lub aerodynamice. Równania te, najczęściej bardzo skomplikowane, rzadko potrafimy rozwiązać ściśle w postaci analitycznej. Jedyną możliwością jest wówczas znalezienie dużej liczby rozwiązań numerycznych i próba wyciągania wniosków o charakterze analitycznym. Czasami się to udaje i można pokusić się o znalezienie rozwiązania analitycznego lub analitycznego przybliżonego. W innych przypadkach komputer może przyjść z pomocą pokazując załamanie się naszego zdroworozsądkowego rozumowania, które często zawodzi w dziedzinie zjawisk nieliniowych. Koronnym przykładem jest tak zwany problem Fermiego-Pasty-Ulana. Polegał on na rozwiązaniu równań ruchu 32 punktów materialnych połączonych nieliniowymi sprężynkami (takimi, których wychylenie nie jest proporcjonalne do siły) i ograniczonych ściankami, od których mogły się odbijać. Punkty te wychyleno i badano ich ruch (w komputerze oczywiście). Zdrowy rozsądek fizyka przewidywał, że po dostatecznie długim czasie nastąpi równomierny rozkład energii na wszystkie stopnie swobody (zasada ekwipartycji). Nastąpi on zawsze, gdy sprężynki są liniowe i będzie tym lepiej obserwowany, im więcej mamy punktów materialnych (32 to już dostatecznie dużo).

Doświadczenie przyniosło jednak zupełnie inny wynik. Po 30 000 cykli układ wrócił do położenia pierwotnego. Warto zauważyć, że ten problem był jednym z pierwszych problemów fizyki komputerowej. Rachunki zostały wykonane na komputerze MANIAC w Los Alamos w USA, a sam Stanisław Ulam, jeden z autorów problemu, polski matematyk ze szkoły lwowskiej, jest uważany za ojca *computer science*.

Warto wspomnieć, że komputer sprawdził się również jako „numeryczny tunel aerodynamiczny”, testujący nowe typy skrzydeł i samolotów. (Oczywiście przed zabraniami pasażerów samoloty były sprawdzane w lotach próbnych.)

Komputer jest dziś narzędziem fizyka tak, jak akcelerator, teleskop, mikroskop czy detektor promieniowania i tak też należy go traktować. Na zakończenie warto wspomnieć, że nowe metody informatyki, takie jak: sztuczna inteligencja i systemy eksperckie znalazły już zastosowanie w fizyce komputerowej. Służą one jako narzędzia do sterowania eksperymentem fizycznym oraz do automatycznej analizy danych, np. z akceleratora. Grafika komputerowa, a szczególnie animowane filmy komputerowe, są znakomitą metodą wyprowadzania wyników obliczeń. Fizyka komputerowa jest już dobrze wyodrębnioną dziedziną fizyki.

## Patrz w niebo

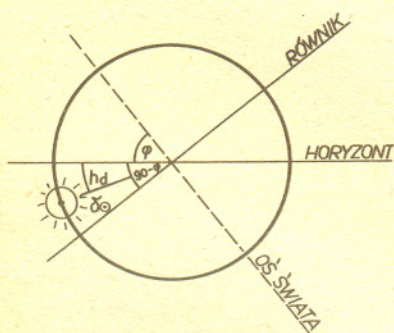
Pogodne noce w czerwcu czy lipcu wcale nie są odpowiednim czasem do przeprowadzania optycznych obserwacji astronomicznych. Przede wszystkim są one krótkie — znacznie krótsze (o około 10 godzin) od nocy zimowych. Ponadto nie są dostatecznie ciemne na to, aby można dostrzec słabsze obiekty niebieskie. Można powiedzieć, że w obserwacjach przeszkadza wtedy ... Słońce. Jest ono w tym czasie na tyle płytko schowane pod horyzontem, że rozproszone w atmosferze ziemskiej promieniowanie znacznie rozjaśnia nocne niebo.

Prawdziwą długość dnia określa się pojawianiem i znikaniem górnego brzegu tarczy słonecznej za horyzontem. Nie tak proste jest określenie nocy, gdyż między dniem a nocą trwa krótszy lub dłuższy zmierzch i brzask. Długość trwania zmierzchu zależy od szerokości geograficznej miejsca obserwacji i od deklinacji Słońca. W życiu codziennym koniec zmierzchu (tzw. zmierzchu cywilnego) określa się koniecznością zapalenia sztucznego oświetlenia dla bezpieczeństwa ruchu ulicznego. Słońce znajduje się wtedy 6° pod horyzontem. Jest to, oczywiście, określenie teoretyczne, bowiem w praktyce nierzadko podczas złych warunków atmosferycznych sztuczne oświetlenie jest włączane znacznie wcześniej.

Jeśli na danym obszarze Słońce przez całą noc nie schodzi głębiej niż 6° pod horyzont, tj. — gdy na obszarze tym przez całą noc panuje co najwyżej zmierzch cywilny — mówimy, że występują tam „białe noce”. Warunek występowania „białych nocy” jest więc następujący:  $h_a \geq -6^\circ$ , gdzie  $h_a$  jest wysokością dołowania Słońca, tj. jego najniższego położenia w ciągu doby. Ponieważ  $|h_a| = 90^\circ - \varphi - \delta_\odot$ , gdzie  $\delta_\odot$  — deklinacja Słońca,  $\varphi$  — szerokość geograficzna miejsca obserwacji (patrz rysunek), graniczna wartość szerokości geograficznej, w której występują „białe noce”, określona jest przez warunek:  $\varphi \geq 84^\circ - \delta_\odot$ . Rzecz jasna, najdogodniejszym momentem na półkuli północnej jest przesilenie letnie — wtedy bowiem deklinacja Słońca osiąga największą wartość:  $23^\circ 27'$ . Dla tej maksymalnej wartości  $\delta_\odot$  otrzymujemy  $\varphi_{min} = 60^\circ 33'$ . Analogicznie, graniczna szerokość geograficzna, w której mogą występować „białe noce” na półkuli południowej, ma wartość  $\varphi_{max} = -60^\circ 33'$ .

Wysunięte najbardziej na północ obszary Polski leżą poniżej równoleżnika  $55^\circ$  szerokości geograficznej północnej. Wobec tego nawet tam nie mogą występować „białe noce”. Jednak w okolicach przesilenia letniego, przy dobrej pogodzie, nad morzem przez całą noc widać jasną poświatę nad północnym widnokregiem świadcząca o stosunkowo małej głębokości Słońca pod horyzontem. W wyjątkowo sprzyjających warunkach atmosferycznych poświatę taką widać nawet w środkowej Polsce.

Inaczej definiuje się koniec zmierzchu astronomicznego — następuje on, gdy Słońce obniży się o  $18^\circ$  pod horyzont. Moment ten charakteryzuje się szybkim zwiększeniem widzialności słabych gwiazd. Obliczenia analogiczne jak dla zmierzchu cywilnego prowadzą do następującego wyniku na graniczną wartość szerokości geograficznej, przy której w momencie przesilenia letniego zmierzch astronomiczny trwa przez całą noc:  $\varphi_{min} = 48^\circ 33'$ . Widać stąd, że na obszarze Polski w tym czasie przez całą noc trwa zmierzch astronomiczny i przez to warunki obserwacyjne nie są zbyt dobre. Od początku czerwca do połowy lipca w naszych szerokościach geograficznych Słońce nie schodzi głębiej niż  $18^\circ$  pod horyzont, a więc obserwacji astronomicznych lepiej dokonywać, o ile to możliwe, w innym terminie.

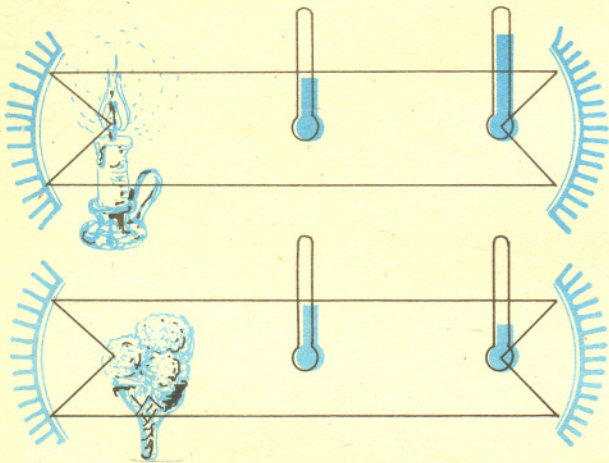




# delta mata delta

## Niewidzialne fale ciepła

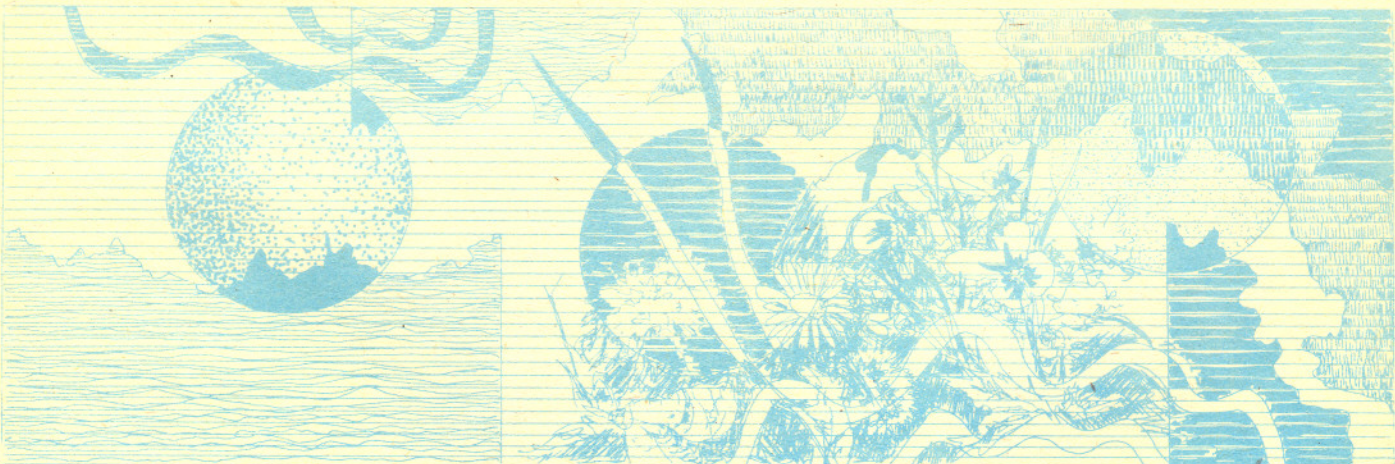
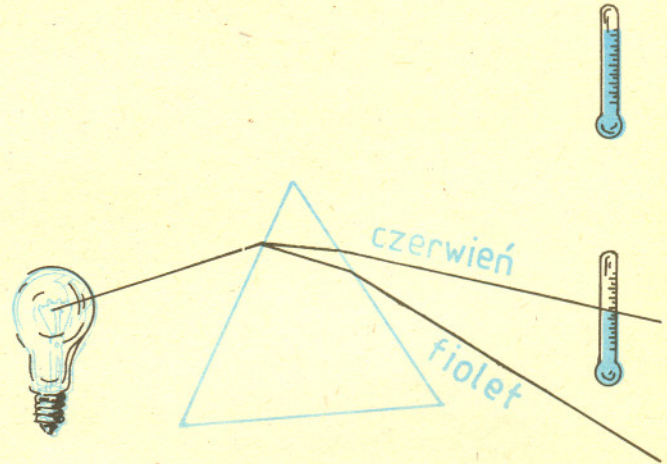
### „Promienie zimna”

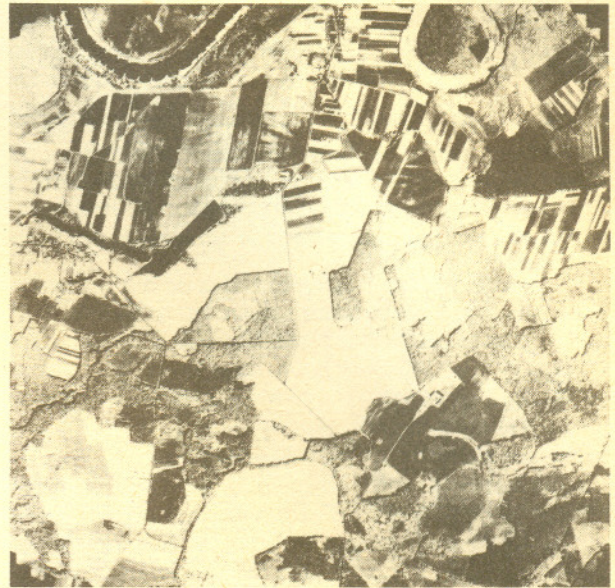


Warto dwa doświadczenia. W pierwszym termometr umieszczony w ognisku zwierciadła parabolicznego wskazuje wyższą temperaturę niż poza nim, w drugim — niższą. W wieku XVII uzasadniano wyniki takich doświadczeń następująco: „promienie ciepła” świeczki (w pierwszym przypadku) i „promienie zimna” lodu (w drugim przypadku) skupiają się w ognisku i to właśnie powoduje zmianę wskazań termometru. Dziś wiemy, że „promieni zimna” nie ma. Jak więc uzasadnić wyniki doświadczenia?

### Promieniowanie podczerwone

Rozszczepiając za pomocą pryzmatu światło słoneczne możemy stwierdzić, że ponad czerwoną barwą tęczy biegają też jakieś niewidoczne promienie. Wystarczy umieścić w takim miejscu termometr, by zaobserwować wyraźny wzrost temperatury. Nie nazywamy tych promieni „promieniami ciepła”, tylko podczerwonymi. Ich długość fali jest większa od długości fal promieniowania widzialnego (od 360 nm dla fioletu do 780 nm dla czerwieni).





Oto fotografia powierzchni ziemi w świetle słonecznym i w podczerwini. Bo dziś umiemy zarówno fotografować w podczerwonym zakresie widma, jak też oglądać takie obrazy „na bieżąco” za pomocą urządzeń zwanych noktowizorami. Prowadzi się też obserwacje nieba w tym zakresie fal.

Promieniowanie podczerwone, jako mające większą długość fal, ulega mniejszemu rozproszeniu w atmosferze i (dzięki temu) fotografie (nawet na kliszach czułych również na światło widzialne) dają nam obraz dużo ostrzejszy od zwykłej fotografii. Pozwala to np. uzyskać ostre i wyraźne obrazy łańcuchów górskich z odległości ponad 150 km.

## Effekt cieplarniany

Oczywiście promieniowanie podczerwone też składa się z fal o różnej długości (w różnych niewidzialnych kolorach — jak to określali fizycy XVII stulecia). Fale wysyłane przez ciała o wyższej temperaturze są krótsze. Szkło spośród promieni podczerwonych lepiej przepuszcza krótsze. Wobec tego promienie podczerwone ze Słońca (temperatura  $6000^{\circ}\text{C}$ ) łatwo przedostają się przez dach szklarni. Ogrzewają tam to, co znajdują: powietrze, ziemię, rośliny. Ogrzane w ten sposób obiekty też promieniują w zakresie podczerwonym, ale wysyłają znacznie dłuższe fale (temperatura około  $20^{\circ}\text{C}$ ). I fale te (jako dłuższe od słonecznych) mają poważne trudności z wydostaniem się przez szkło na zewnątrz. Dlatego w szklarni panuje wyższa temperatura niż na zewnątrz.

Podobny efekt powodują chmury (para wodna). Dlatego pochmurne noce są zdecydowanie cieplejsze od bezchmurnych.



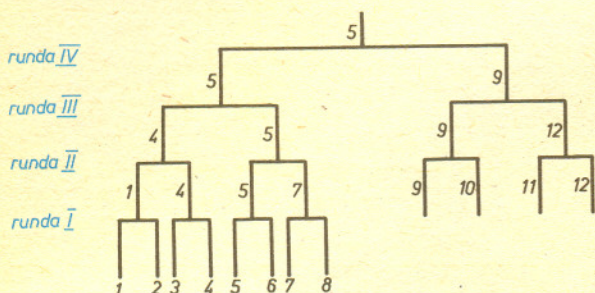
Wyjaśnienie doświadczenia z „promieniami zimna”  
W doświadczeniu przedstawionym na górnym rysunku szklanka ogrzewa termometr, bo jest cieplejsza i wysyła więcej promieniowania podczerwonego od termometru. W drugim doświadczeniu termometr wysyła więcej promieniowania, bo tym razem on jest cieplejszy. A wysyłając więcej promieniowania niż otrzymuje — oziębia się.

Małą Deltę przygotowali: Krzysztof BIESAGA i Maciej JĘDRZEJCZAK

# Zadanie o turnieju tenisowym

Dr Lech BANACHOWSKI

W rozgrywkach sportowych w rodzaju turnieju tenisowego mamy do czynienia z niesprawiedliwym rozdziałem nagród dla najlepszych. Rozważmy typowy pucharowy turniej tenisowy między dwunastoma graczami i przedstawmy jego wyniki za pomocą następującego diagramu:



W finale gracz 5 wygrywa z graczem 9. Nie ma, oczywiście, wątpliwości, że gracz 5 jest najlepszy ze wszystkich i rzeczywiście zasłużył na pierwszej nagrodę. Niesprawiedliwość wiąże się natomiast z przydzieleniem drugiej nagrody graczowi 9, bo nie ma pewności, że jest on faktycznie drugim najlepszym zawodnikiem turnieju. Jeżeli w turnieju bierze udział  $n = 2^k$  graczy, to z prawdopodobieństwem  $\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1} \approx \frac{1}{2}$  drugą nagrodę otrzymuje niewłaściwa osoba!

Przyjmuje się, że relacja „gracz  $A$  jest lepszy od gracza  $B$ ” ustala liniowy porządek w zbiorze graczy. Oznacza to, że relacja ta jest przechodnia i antysymetryczna.

Problemem sprawiedliwego rozdziału nagród zajął się w roku 1883 Charles Lutwidge Dodgson, znany powszechnie pod pseudonimem Lewis Carroll, i sam zaprojektował procedurę turniejową, która prowadzi do prawidłowego przyznania pierwszej, drugiej i trzeciej nagrody. Jego procedura pozwala przegrywającym kontynuować rozgrywanie meczów, dopóki nie przegrają trzech pojedynków. System Carrolla, chociaż poprawny, okazał się nieoptymalny pod względem liczby rozgrywanych meczów. Problem zaprojektowania optymalnej procedury turniejowej prowadzącej do wyznaczenia dwóch najlepszych graczy postawił Hugo Steinhaus w trakcie seminarium, które odbywało się w latach 1929–30. Turniej taki po raz pierwszy został zaprojektowany w roku 1932 przez Józefa Schreiera. Jednakże załączony przez niego dowód optymalności okazał się niepoprawny. Następny dowód optymalności procedury turniejowej Schreiera, podany w 1951 roku przez Jerzego Słupeckiego, też był niepoprawny. Dopiero w 1964 roku matematykowi radzieckiemu Siergiejowi S. Kislicynowi udało się udowodnić optymalność procedury turniejowej Schreiera. Poniżej przytoczymy ten dowód.

Zauważmy najpierw, że procedura pucharowa jest optymalna, gdy mamy wyłowić tylko najlepszego zawodnika. Przy  $n$  uczestnikach rozgrywa się, jak łatwo obliczyć,  $n-1$  meczów i jest to ich najmniejsza możliwa liczba. Przy dowolnym wyborze procedury turniejowej każdy, z wyjątkiem gracza, który zostaje zwycięzcą turnieju, musi przegrać co najmniej jeden mecz.

Procedura Schreiera jest prosta. Najpierw systemem pucharowym wyznacza się najlepszego gracza, a następnie dla graczy, którzy przegrali bezpośrednio ze zwycięzcą, organizuje się dodatkowy turniej pucharowy. Zwycięzca dogrywki jest, oczywiście, drugim najlepszym zawodnikiem turnieju. Jeśli przez  $k$  oznaczymy liczbę naturalną, dla której  $2^{k-1} < n \leq 2^k$ , to liczba meczów dla procedury turniejowej Schreiera jest nie większa niż  $(n-1) + (k-1) = n+k-2$ .

Pokażemy, że procedura Schreiera jest optymalna pod względem liczby rozgrywanych meczów, tzn. dla każdej procedury turniejowej istnieje taki układ sił  $n$  graczy, że trzeba wtedy rozegrać co najmniej  $n+k-2$  meczów. W tym celu zrezygnujemy teraz ze „sportu”. Zamiast niego wprowadzimy wyrokowanie, który z graczy wygrywa mecz niezależnie od graczy, a jedynie w zależności od rozstawienia graczy do pojedynków przy danej procedurze turniejowej.

Rozważmy dowolną procedurę turniejową dla  $n$  graczy pozwalającą wyznaczyć gracza najlepszego  $M$  oraz drugiego najlepszego gracza  $S$ .

Pokażemy najpierw, że istnieje turniej skonstruowany zgodnie z tą procedurą, w którym gracz  $M$  rozgrywa co najmniej  $k$  meczów. Użyjemy w tym celu tzw. metody wyroczeni. Procedura turniejowa określa nam kolejny mecz do rozegrania, powiedzmy — między graczami  $i$  oraz  $j$ , a wyrocznia podaje wynik tego meczu w taki sposób, aby zmusić zawodnika najlepszego do rozegrania co najmniej  $k$  meczów.

W każdym momencie rozgrywania turnieju z każdym graczem wiążemy następującą wielkość:

$t_i$  — liczba meczów wygranych przez gracza  $i$  z graczami, których pierwszą porażką w turnieju jest porażka z graczem  $i$ .

Opiszemy teraz, jak działa wyrocznia. Załóżmy, że w danym momencie rozgrywek procedura turniejowa podaje, że ma być rozegrany mecz między graczami  $i$  oraz  $j$  ( $i < j$ ). Jeżeli obaj gracze nie przegrali jeszcze żadnego meczu, to wyrocznia ogłasza zwycięzcą meczu gracza  $i$ , o ile  $t_i \geq t_j$  oraz gracza  $j$ , o ile  $t_j > t_i$ . Jeżeli jeden z graczy nie przegrał jeszcze żadnego meczu, a drugi już poniósł porażkę, to wyrocznia uznaje za zwycięzcę tego gracza, który nie przegrał jeszcze meczu. Wreszcie jeżeli obaj gracze ponieśli już porażki, to wyrocznia ogłasza zwycięzcą dowolnego z nich, ale tak, by tworzony porządek był przechodni i antysymetryczny.

Pokażemy, że

$$(1) \quad t_M \geq k.$$

W tym celu w każdym momencie rozgrywania turnieju z każdym graczem  $i$ , który do tej pory nie poniósł porażki, wiążemy wielkość  $p_i$ . Na początku turnieju  $p_i = 1$  dla  $1 \leq i \leq n$ . Wielkość  $p_i$  ulega zmianie tylko wtedy, gdy gracz  $i$  pokonuje gracza  $j$ , dla którego porażka ta jest pierwszą porażką w turnieju. Wówczas wielkość  $p_i$  ulega zmianie na  $p_i + p_j$  ( $p_j$  przestaje być określone z definicji). Przez indukcję względem liczby rozegranych meczów można łatwo wykazać, że w każdej chwili rozgrywania turnieju:

(2) suma wszystkich wielkości  $p_i$  dla graczy, którzy nie ponieśli jeszcze porażki, równa się  $n$ ;

(3)  $p_i \leq 2^{t_i}$  dla każdego gracza  $i$ , który nie poniósł jeszcze żadnej porażki.

Na zakończenie turnieju tylko jeden gracz, mianowicie  $M$ , jest bez porażki. Wobec (2),  $p_M = n$ . Stąd i z (3) wnioskujemy, że  $2^{t_M} \geq n$ , co dowodzi nierówności (1). Ponieważ łączna liczba meczów rozegranych przez gracza  $M$  jest nie mniejsza niż  $t_M$ , więc wykazaliśmy, że gracz  $M$  rozegrał co najmniej  $k$  meczów.

Poniższa tabelka ilustruje działanie wyroczni dla  $n = 5$  (wówczas  $k = 3$ ).

Wektor wielkości ( $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ )	Wektor wielkości ( $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ )	Gracze wystawieni do meczu	Wybór wyroczni
(0, 0, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 1, 1)	1,2	1
(1, 0, 0, 0, 0)	(2, —, 1, 1, 1)	3,4	3
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	2,4	2
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	2,5	5
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	1,5	1
(2, 0, 1, 0, 0)	(3, —, 2, —, —)	3,5	3
(2, 0, 1, 0, 0)	(3, —, 2, —, —)	1,3	1
(3, 0, 1, 0, 0)	(5, —, —, —, —)		

Na zakończenie turnieju skonstruowanego przez wyrocznię  $p_1 = 5$ , a  $t_1 = 3$ . Zwycięzca turnieju — gracz 1 rozegrał  $t_1 = 3$  mecze.

Zauważmy, że każdy zawodnik różny od  $M$  i  $S$  musi zostać pokonany przez gracza różnego od  $M$  — meczów takich musi się odbyć łącznie co najmniej  $n-2$ . Zatem w turnieju będącym wynikiem dialogu wyroczni z procedurą turniejową rozegrano co najmniej  $n+k-2$  meczów.

#### Zadania

1. Podać dowód indukcyjny faktów (2) i (3).
2. Podać konstrukcję procedury pucharowej do wyznaczenia trzech najlepszych graczy w turnieju za pomocą  $n-3 + \lceil \lg_2 n \rceil + \lceil \lg_2(n-1) \rceil$  meczów (zauważmy, że  $k = \lceil \lg_2 n \rceil$ ).
3. Podać konstrukcję procedury pucharowej do wyznaczenia wszystkich  $n$  miejsc w turnieju (w informatyce jest to znany problem sortowania) za pomocą  $\sum_{i=1}^n \lceil \lg_2 i \rceil$  meczów.
4. Zadania wyznaczenia najlepszych zawodników turnieju mają swoje odpowiedniki w problemach informatycznych. W zadaniu rozważanym w artykule pytamy się o element największy i drugi największy w podanym ciągu elementów zbioru liniowo uporządkowanego. Czytelnika znającego programowanie zachęcamy do zapisu metody turniejowej w postaci algorytmu wyznaczającego dwa największe elementy ciągu. Leżąca u podstaw struktura danych pełni ważną rolę przy rozwiązywaniu problemu sortowania zewnętrznego: sortowania zbiorów danych, które się nie mieszczą w dostępnej pamięci wewnętrznej komputera.

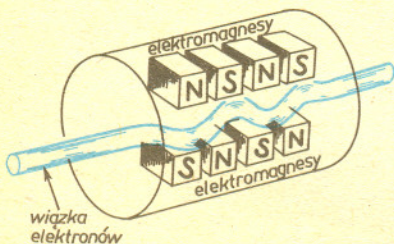
## Lasery na swobodnych elektronach

W zwykłych laserach światło generowane jest dzięki promieniowaniu wysyłanemu przez atomy lub cząsteczki ośrodka. Elektrony związane w atomach (cząsteczce) przechodząc na niższe stany energetyczne wysyłają fotony. Jeżeli przejścia te wymuszone są przez wiązkę światła, to emitowane fotony są identyczne z fotonami padającego promieniowania i powstaje akcja laserowa. Aby proces był możliwy, trzeba odpowiednio przygotować ośrodek (wzbudzić jego atomy) dostarczając mu energię, której niewielką tylko część, sięgającą kilku procent, odzyskujemy w postaci światła laserowego.

Okazuje się, że można osiągnąć o wiele większą sprawność akcji laserowej zmuszając do świecenia elektrony swobodne (nie związane w atomach). Jeżeli wiązkę bardzo szybkich elektronów przepuścimy przez obszar, w którym pole magnetyczne wielokrotnie zmienia swój zwrot (jak na rysunku), to elektrony przyspieszane prostopadłe do kierunku ruchu będą promieniowały. Natężenie promieniowania będzie największe w kierunku zgodnym z ruchem wiązki. Dzięki zjawisku Dopplera częstość promieniowania będzie większa od częstości poprzecznych drgań elektronów. Zaletą lasera na swobodnych elektronach jest możliwość, przez zmianę prędkości wiązki, łatwego przestrajania długości emitowanych fal od podczerwieni do nadfioletu. Konstruktorzy spodziewają się, że niedługo będzie możliwe otrzymanie w ten sposób lasera na promieniu rentgenowskie.

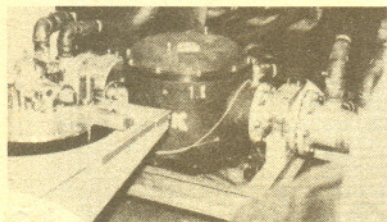
W laserach na swobodnych elektronach osiągnięto już sprawność 42 procent, a za praktyczną granicę uważa się sprawność 70 procent. Jak twierdzi konstruktor pierwszego lasera tego typu, John J. M. Madey (obecnie pracujący w Stanford University), na pomysł urządzenia wpadł jeszcze w 1963 roku, gdy był studentem California Institute of Technology. W pełni działające urządzenie wykorzystujące wiązkę stanfordzkiego liniowego akceleratora elektronów zostało ukończone w 1977 roku. Od tego czasu na świecie zbudowano tylko około dziesięciu laserów tego typu, gdyż mimo licznych zalet są one bardzo drogie (najmniejsze z nich kosztują po kilka milionów dolarów). Zainteresowanie jednak rośnie. Entuzjaści twierdzą, że lasery na swobodnych elektronach znajdą zastosowanie w chirurgii (do niszczenia chorych tkanek), w badaniach półprzewodników, badaniu i kontroli reakcji chemicznych, a także w ramach systemów obronnych będą używane do niszczenia rakiet przeciwnika.

Rozpoczęto już budowę ogromnego lasera w Nowym Meksyku. Po ukończeniu urządzenie będzie miało około 16 km długości i 3 km szerokości (koszty oceniono wstępnie na miliard dolarów) i będzie najpotężniejszym laserem na Ziemi.

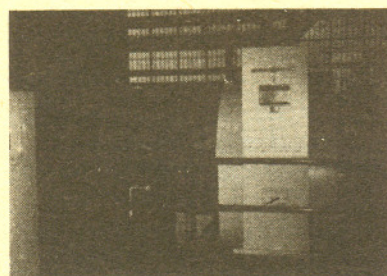


# Wycieczka do najsilniejszego magnesu świata, czyli jak otrzymano pole magnetyczne o indukcji 33,6 tesli

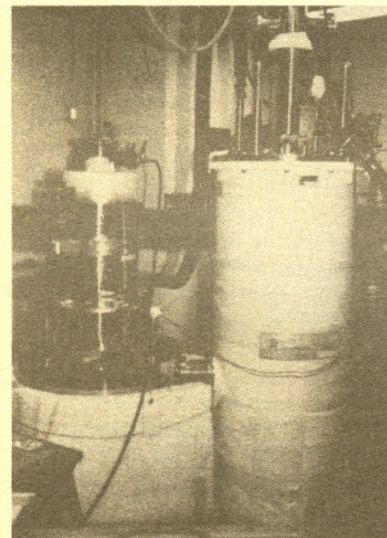
Dr Andrzej HENNEL



Fot. 1



Fot. 2



Fot. 3

Przebywając w Massachusetts Institute of Technology w Cambridge (stan Massachusetts, USA) w bezpośrednim sąsiedztwie najsilniejszego magnesu świata postanowiłem przekazać Czytelnikom *Delta* nieco informacji na jego temat. Wprawdzie zanotowany w słynnej księdze *Guinness Book of World Records* i należący do MIT rekord świata z 1981 roku, wynoszący 30,1 tesli, został w 1985 roku pobity przez magnes zbudowany w Japonii (30,7 tesli), jednakże już w 1986 roku MIT odzyskał światowy prymat rezultatem 33,6 tesli.

Zabrałem ze sobą aparat fotograficzny i poszedłem na małą wycieczkę zarówno do owego „rekordzisty”, jak i innych, mniej sławnych, magnesów zbudowanych w MIT. Wszystkie one znajdują się w Francis Bitter National Magnet Laboratory (Narodowe Laboratorium Magnetyczne imienia Francisca Bittera) należącym do MIT. Laboratorium to założone w 1960 roku pełni rolę międzynarodowego centrum badań bardzo wysokich i bardzo niskich pól magnetycznych. Każdy fizyk, którego projekt eksperymentu zostanie zaakceptowany przez kierownictwo naukowe laboratorium, może za darmo otrzymać prawo korzystania z wybranego magnesu i odpowiedniej aparatury naukowej.

Podstawowym typem magnesów, którymi dysponuje laboratorium, jest tzw. elektromagnes Bittera. Zasada konstrukcji takiego magnesu opisana została w artykule dr. K. Pastora omawiającym laboratorium pól magnetycznych w Grenoble (*Delta* 2/1984), dlatego też ograniczę się tu tylko do krótkiego przypomnienia. Jeden z elektromagnesów Bittera przedstawiony jest na fotografii 1. Stałe, jednorodne pole magnetyczne wytwarzane jest w centralnym otworze magnesu, widocznym u góry na środku, przez stały prąd elektryczny o natężeniu dochodzącym do 40 000 amperów, płynący przez miedziane dyski tworzące elektromagnes. Prąd ten dopływa do magnesu czterema grubymi kablami chłodzonymi wodą, z których jeden widoczny jest po przeciwnej stronie magnesu. Wnętrze magnesu chłodzone jest sześcioma tysiącami litrów wody na minutę, płynącej w poprzek dysków przez specjalne otwory. Woda ta, pod ciśnieniem 14 atmosfer doprowadzana jest rurami znajdującymi się po prawej i lewej stronie magnesu. Ponieważ sam brałem udział w pomiarach prowadzonych w magnesach Bittera, mogę dodać, iż przepływ wody pod takim ciśnieniem powoduje mnóstwo dość przykrego dla ucha hałasu i po trwającej trzy i pół godziny „wachcie” przy magnecie można być niezłe ogłuszonym na resztę dnia.

Magnesy Bittera przy maksymalnym poborze mocy dochodzącym do 10 MW wytwarzają pole magnetyczne o indukcji wynoszącej 24 tesle w otworze centralnym o średnicy 3 cm. Zwiększenie średnicy otworu, oczywiście, zmniejsza możliwe do osiągnięcia pole magnetyczne — przy średnicy 5,5 cm indukcja wynosi 20 T, a przy 15 cm około 10 T. Warto również uzmysłowić sobie, iż pole o indukcji 24 T jest pół miliona razy silniejsze od ziemskiego pola magnetycznego wynoszącego 0,00005 T.

Zasilanie elektromagnesów prowadzone jest przez elektrownię MIT dostarczającą do laboratorium maksymalnie 10 MW. Umożliwia to albo pracę jednego elektromagnesu w zakresie około 20 T, albo dwóch do około 10 T. Układ czterech generatorów dających prąd stały o napięciu 240 V zaopatrzony jest w dwa 84-tonowe koła zamachowe (jedno widoczne jest na fotografii 2) i gwarantuje stabilność pola magnetycznego na poziomie 0,05%. Generatory te mogą być chwilowo przeciążone do 8 MW każdy, czyli impulsowy pobór mocy może wynieść nawet 32 MW. Chłodzenie elektromagnesów zapewnia przepływająca obok laboratorium rzeka Karola (Charles River), z której woda pobierana jest ujęciem o średnicy 120 cm. Konstrukcja elektromagnesów bitterowskich jest stale udoskonalana i jeśli w 1978 roku najlepszy z nich osiągnął 23,8 T zużywając 9,43 MW, co dawało wydajność 60 T<sup>2</sup>/MW, to sześć lat później zbudowano magnes, który osiągnął 23,1 T zużywając 7,45 MW (71,5 T<sup>2</sup>/MW). Poprawiana jest również żywotność elektromagnesów. Do roku 1980 „przeżywały” one kilkadziesiąt godzin pracy. Obecnie przekroczone granicę 100 godzin, a niektóre spośród magnesów „przeszły na zasłużoną emeryturę” po ponad 200 godzinach pracy. Jak potężne są siły dążące do zniszczenia elektromagnesu, może uzmysłowić fakt, iż miedziane dyski nie wytrzymują pól silniejszych niż 45–50 T. W budowanym obecnie magnecie impulsowym, który ma wytwarzać co 10 minut pole o indukcji 50 T na okres jednej sekundy, zastosowane zostały dyski stalowe.

Wróćmy jednak do pól stałych. Jak można przekroczyć granicę trzydziestu tesli? Nie mogą tego, jak dotąd, zrobić magnesy nadprzewodzące, z których jeden, przedstawiony na fotografii 3 po lewej, osiąga pole o indukcji 15 T. Ograniczenie wartości indukcji pola magnetycznego w magnesach nadprzewodzących nie wynika ani z braku mocy, ani z ograniczonych możliwości chłodzenia. Wprost przeciwnie — magnes nadprzewodzący wymaga stosunkowo niewielkiej mocy, a chłodzenie zapewnia mu ciekły hel. Kluczowym natomiast problemem jest istnienie tzw. pola krytycznego, po którego przekroczeniu znika nadprzewodnictwo. Dlatego też intensywnie prowadzone są poszukiwania nadprzewodników o możliwie wysokiej wartości pola krytycznego. Związki, takie jak Nb<sub>3</sub>Sn, Nb<sub>3</sub>Al i V<sub>3</sub>Ga, charakteryzujące się wartością pola krytycznego powyżej 20 T, są obecnie najlepszymi materiałami do wyrobu magnesów nadprzewodzących, poszukiwania wciąż jednak trwają ...

Najlepszym, jak dotąd, pomysłem okazało się połączenie magnesu nadprzewodzącego i magnesu Bittera w tzw. magnes hybrydowy. Konstrukcja jego wygląda następująco — ogromny magnes nadprzewodzący o średnicy wewnętrznej 35 cm otacza magnes Bittera. Zestaw ten przedstawiony jest na fotografii 4. Magnes nadprzewodzący może zgromadzić energię 3,5 MJ i osiągnąć pole o indukcji około 7,5 T, natomiast magnes bitterowski przy mocy 9 MW osiąga około 22,5 T, co razem dało w 1981 roku rekord świata 30,1 T indukcji stałego pola magnetycznego w otworze o średnicy 3,3 cm. Przez kilka lat wynik ten figurował w księdze rekordów wraz z polem o najsłabszej indukcji 8 · 10<sup>-15</sup> T, również otrzymanym w tym samym laboratorium.



Fot. 4

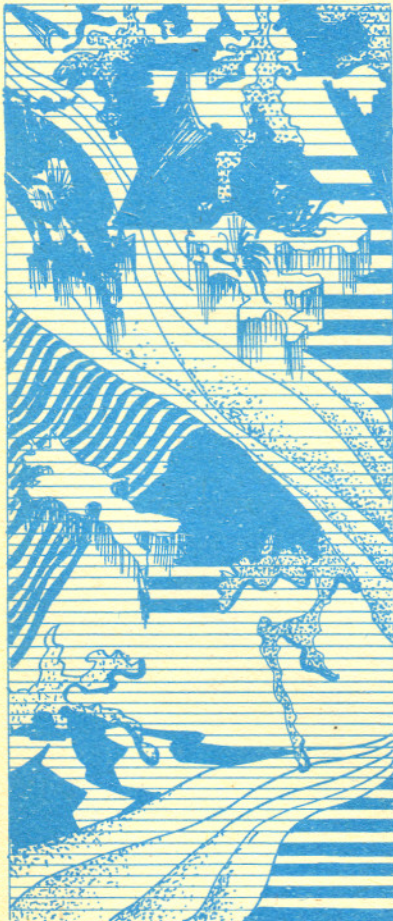
Wynik fizyków japońskich (30,7 T) zdopingował pracowników National Magnet Laboratory do poszukiwania nowych metod otrzymania wyższych wartości pola magnetycznego. Chodziło tu przy tym o osiągnięcie rezultatu wykraczającego w sposób zdecydowany poza granicę błędu pomiaru wartości indukcji pola magnetycznego, co przy tak wysokich polach jest problemem niebagatelnym. Japończycy w ogóle nie podali błędu swojego pomiaru — co jest złamaniem niepisanych reguł, które obowiązują eksperymentatorów.

Lawrence G. Rubin, naczelny inżynier laboratorium od czasów jego powstania, opowiedział mi potem, że szukając nowych koncepcji znalazł opublikowaną w 1984 roku pracę fizyków radzieckich. Otrzymali oni pole o indukcji 17,6 T w zrobionej z dysprozu szczelinie o szerokości 0,9 mm umieszczonej wewnątrz magnesu nadprzewodzącego. Dysproz, należący do pierwiastków grupy ziem rzadkich, jest ferromagnetykiem niemal pięciokrotnie silniejszym od żelaza, niestety, jedynie w temperaturach poniżej 85 K (tyle wynosi dla niego tzw. temperatura Curie określona dla ferromagnetyków, dla żelaza wynosi ona około 770°C). Umieszczenie odpowiednio wyciętych biegunów z dysprozu wewnątrz magnesu wytwarzającego pole o indukcji około 15 T spowodowało skupienie strumienia magnetycznego wewnątrz ferromagnetyka, jakim jest dysproz i w konsekwencji podwyższenie wartości indukcji pola magnetycznego w szczelinie między biegunami.

Rubin rozpoczął więc poszukiwania i wkrótce w National Bureau of Standards w Waszyngtonie udało mu się znaleźć dwa małe cylindry z innego ferromagnetyka — holmu. Holm należy również do ziem rzadkich i ma przenikalność magnetyczną niemal identyczną jak dysproz, jedynym problemem jest jego jeszcze niższa temperatura Curie (20 K). Należało więc wyprofilować z holmu parę biegunów o wymiarach 32 mm × 19 mm i końcówkach o średnicy 12 mm. Między nimi pozostawiono szczelinę o szerokości 2 mm utrzymywaną kołnierzem z brązu. Całość została umieszczona w kriostacie napełnionym ciekłym helem, który z kolei włożono do magnesu hybrydowego.

Następnie rozpoczęto bardzo staranne i wielokrotne pomiary indukcji pola magnetycznego przy użyciu sond półprzewodnikowych, tzw. hallotronów z InSb i InAs. Badano liniowość hallotronów, namagnesowanie holmu w niższych polach, prowadzono porównawcze pomiary zastępując holm przez aluminium, które nie jest ferromagnetykiem. Ostatecznie zmierzono, iż holm przy indukcji pola wynoszącej 30 T zwiększa pole w szczelinie o  $3,5 \pm 0,03$  T. Uwzględniając więc wszystkie możliwe błędy pomiaru L. G. Rubin, B. L. Brandt, R. J. Weggel, S. Foner i E. J. McNiff, Jr. w dniu 20 marca 1986 roku stwierdzili, że osiągnęli stałe pole magnetyczne o indukcji  $33,6 \pm 0,3$  T w szczelinie o szerokości 2 mm. I w ten sposób magnes hybrydowy z MIT powrócił do księgi rekordów.

Co będzie w przyszłości? National Magnet Laboratory ma wiele planów, wśród nich wspomniany magnes impulsowy o indukcji pola rzędu 50 T, do którego zakupiono baterię kondensatorów gromadzącą ćwierć miliona dżuli energii. Dalsze plany przewidują pole impulsowe o indukcji 75 T, a potem pole stałe o tej samej indukcji. Inne laboratoria też pracują nad nowymi magnesami ... Jeżeli więc w tej konkurencji padną nowe rekordy, Czytelnicy *Delty* będą o tym na pewno szybko poinformowani.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 469.** Rzucamy monetą aż do chwili otrzymania orła. Prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie wynosi  $p$  ( $p > 0$ ). Ile średnio rzutów trzeba wykonać?

Rozwiązanie na str. 3

**M 470.** Ile razy średnio trzeba rzucać kostką, aby otrzymać wszystkie możliwe liczby oczek?

Rozwiązanie na str. 3

**M 471.** Niech  $\mathcal{F}$  będzie ciałem podzbiorów zbioru skończonego  $A$ , czyli niepustą rodziną podzbiorów zamkniętą ze względu na działania na zbiorach (tj. suma, iloczyn i dopełnienie elementów  $\mathcal{F}$  są elementami  $\mathcal{F}$ ). Ile elementów może mieć takie ciało?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

**F 220.** Zakładając, że cząsteczki powietrza są kulkami o średnicy  $d = 3,7 \times 10^{-10}$  m ocenić średnią długość drogi między kolejnymi zderzeniami cząsteczki powietrza w warunkach normalnych ( $P_0 = 10^5$  Pa,  $T_0 = 273$  K).

Rozwiązanie na str. 14

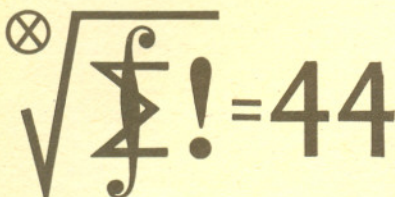
**F 221.** Między ściankami bańki termosu o objętości  $V = 1$  l panuje (w temperaturze pokojowej  $T_0 \approx 20^\circ\text{C}$ ) ciśnienie  $P = 1$  Pa. Jak długo będzie stygł 1 litr wody w tym termosie od temperatury  $T_1 = 90^\circ\text{C}$  do  $T_2 = 70^\circ\text{C}$ ? Pole powierzchni bańki wynosi  $S = 600$  cm<sup>2</sup>. Straty ciepła przez korek zaniedbujemy. Potrzebne dane wziąć z tablic.

Rozwiązanie na str. 2

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 1987

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę cen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.



### Zadania z matematyki nr 151, 152

151. Zaprojektować sieć dróg o minimalnej łącznej długości, łączących cztery miejscowości usytuowane w wierzchołkach kwadratu.

152. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  spełniona jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^3 > 2(n^2 + n - 2).$$

Zadanie 152 przysłał pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1987

Przypominamy treść zadań:

143. Wewnątrz kwadratu umieszczono skończoną liczbę rozłącznych kół domkniętych. Dowieść, że można ten kwadrat podzielić na wielokąt wypukły o rozłącznych wewnątrz, zawierające po jednym z danych kół.

144. Dowieść, że równanie  $1987y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$  nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych  $x, y$ .

143. Oznaczmy dany kwadrat przez  $Q$ , jego wnętrze przez  $Q^0$ , a koła przez  $K_1, \dots, K_n$ . Dla dowolnego punktu  $P$  (w płaszczyźnie kwadratu  $Q$ ) oznaczmy przez  $\varrho_i(P)$  potęgę punktu  $P$  względem okręgu będącego brzegiem koła  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). (Jeśli  $O_i, r_i$  oznaczają środek i promień koła  $K_i$ , to  $\varrho_i(P) = O_iP^2 - r_i^2$ .) Wiadomo, że dla  $i \neq j$  zbiór  $H_{ij} = \{P: \varrho_i(P) \leq \varrho_j(P)\}$  jest półpłaszczyzną domkniętą, a jej wnętrze, czyli półpłaszczyzna otwarta  $H_{ij}^0 = \{P: \varrho_i(P) < \varrho_j(P)\}$ , zawiera koło  $K_i$ . Przyjmijmy

$$W_i = \{P \in Q: \varrho_i(P) = \min_{1 \leq j \leq n} \varrho_j(P)\} = Q \cap \bigcap_{j=1}^n H_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Oczywiście  $\bigcup_{i=1}^n W_i = Q$ . Każdy ze zbiorów  $W_i$  jest wielokątem wypukłym (jako wspólna część kwadratu i skończonej liczby półpłaszczyzn). Wnętrzem wielokąta  $W_i$  jest zbiór

$$W_i^0 = \{P \in Q^0: \varrho_i(P) < \min_{j \neq i} \varrho_j(P)\} = Q^0 \cap \bigcap_{j=1}^n H_{ij}^0.$$

Widać stąd, że wnętrza te są rozłączne (tylko jedna z liczb  $\varrho_1(P), \dots, \varrho_n(P)$  może być minimum właściwym) oraz że  $K_i \subset W_i^0$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

144. Przypuśćmy, że liczby wymierne  $x = a/b$  i  $y = c/d$  spełniają dane równanie, NWD  $(a, b) =$  NWD  $(c, d) = 1$ . Liczbę pierwszą 1987 oznaczmy krótko przez  $p$ . Równanie przybiera postać

$$pc^2b^4 = d^2q,$$

gdzie

$$q = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4, \quad \text{NWD}(b, q) = \text{NWD}(c, d) = 1,$$

a stąd  $d^2 = b^4$  i  $q = pc^2$ . Mnożąc ostatnią równość stronami przez  $a-b$  dostajemy

$$a^5 - b^5 = pc^2(a-b).$$

Dalsze rozważania prowadzimy dla reszt z dzielenia przez 5; wszystkie napisane niżej kongruencje są brane modulo 5. Ponieważ  $p \equiv 2, a^5 \equiv a, b^5 \equiv b$ , więc z otrzymanego równania wynika

$$(a-b)(2c^2-1) \equiv 0.$$

Drugi czynnik nigdy nie jest  $\equiv 0$ . Zatem  $a \equiv b$ , tak, że  $q \equiv 5a^4 \equiv 0$ . Wracamy do równania  $q = pc^2$  i dostajemy  $c \equiv 0$ . A więc  $q$  dzieli się przez  $5^2$ . Stąd i z równości

$$q = (a-b)^4 + 5a^3b - 5a^2b^2 + 5ab^3 = (a-b)^4 + 5ab(a-b)^2 + 5(ab)^2$$

wnosimy, że  $ab \equiv 0$ . W rezultacie  $a \equiv b \equiv 0$ , wbrew temu, że NWD  $(a, b) = 1$ .

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 139 /WT=2,46/ i 140 /WT=2,01/  
z numeru 11/1986

Henryk Mikołajczak - Wałbrzych	45,52pkt
Michał Marczak - Radom	40,38pkt
Zbigniew Zaus - Kraków	39,41pkt
Mirosław Mikucki - Augustów	36,20pkt
Karol Jachacy - Tłuszcz	36,17pkt

Pan Mikołajczak został czterdziestym  
płatym członkiem Klubu 44 M.



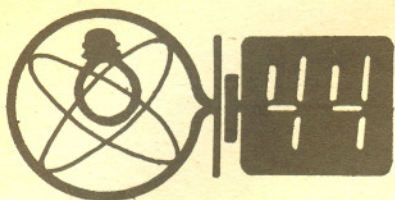
**Rozwiązanie zadania F 220.** Zderzenie cząsteczek powietrza rozpatrywanych jako kulki zajdzie, jeśli odległość między ich środkami będzie mniejsza od średnicy  $d$ . Wybrana cząsteczka zderza się ze wszystkimi cząsteczkami, których środki znajdują się w „łamanym” cylindrze o przekroju  $\pi d^2$  (załamania odpowiadają kolejnym zderzeniom wybranej cząsteczki). Średnia liczba cząsteczek w cylindrze o długości  $l$  wynosi

$$N = n \cdot l \cdot \pi d^2,$$

gdzie  $n$  jest liczbą cząsteczek w jednostce objętości. Średnia droga swobodna jest więc równa

$$\lambda = \frac{l}{n\pi d^2} = \frac{RT_0}{N_A P_0 \pi d^2} \approx 8,75 \times 10^{-8} \text{ m},$$

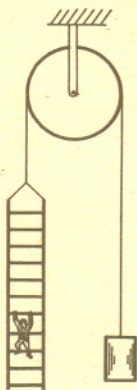
gdzie skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego;  $N_A$  jest liczbą Avogadra, a  $R$  stałą gazową. Względny ruch molekuł prowadzi do zmniejszenia  $\lambda$  o czynnik  $1/\sqrt{2}$ , co daje wynik bliski  $6,2 \times 10^{-8}$  m.



czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 37 / WT=2,35 / 1 38 / WT=1,58 /  
z numeru 11/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	45,66pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	44,61pkt
Aleksander Surma	- Myszków	37,19pkt
Anna Gluza	- Toruń	31,47pkt
Piotr Bała	- Toruń	28,77pkt
Robert Repucha	- Gołdap	26,46pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	26,09pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	24,39pkt

Panowie Rawlik i Lipniacki przekroczyli 44 punkty, zatem Klub 44 P liczy już trzech członków.



Rys. 1

49. Na jednym końcu liny przerzuconej przez blok stały (rysunek 1) zamocowana jest drabinka sznurowa o masie  $m$ , na której znajduje się człowiek o masie  $M$ , na drugim końcu liny wisi przeciwważar o masie  $M+m$ . Układ ten początkowo pozostaje w spoczynku. W pewnym momencie człowiek zaczyna się wspinać po drabince i pokonuje na niej odcinek o długości  $l$ . Obliczyć drogę, jaką przebył człowiek w układzie odniesienia związanym z Ziemią, przy założeniu, że masy bloku i liny są bardzo małe w stosunku do  $M$  i  $m$ , a tarcie jest zaniedbywalne.

50. Pragniemy sfotografować pejzaż w świetle Księżyca tak, aby uzyskane zdjęcie było zbliżone jasnością do zdjęcia wykołanego w warunkach dziennych. Ile, orientacyjnie, razy czas ekspozycji podczas pełni Księżyca, przy bezchmurnym niebie winien być dłuższy od czasu ekspozycji przy bezpośrednim oświetleniu słonecznym? W przybliżonych rachunkach przyjmując, że średnica kątowa tarczy Księżyca wynosi  $0,5^\circ$  oraz że powierzchnia Księżyca odbija około 0,1 padającego promieniowania.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1987

Przypominamy treść zadań:

41. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwległy brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie. W jaki sposób można określić, co jest odbiciem w wodzie, jeśli obie połowy zdjęcia nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?
42. Rysunek 2 przedstawia fragment sieci złożonej z oporów o nie znanych wartościach. W jaki sposób można wyznaczyć wartość oporu  $R_x$  nie przerywając nigdzie sieci, jeśli dysponuje się tylko omiarem i przewodami do połączeń?



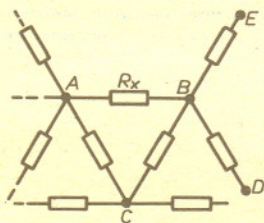
Rozwiązanie zadania M 471. Liczba elementów takiego ciała wynosi  $2^k$ , gdzie  $k \geq 1$ .

Oznaczmy przez  $A_x$  część wspólną wszystkich elementów  $\mathcal{F}$ , do których należy  $x$ . Ponieważ  $\mathcal{F}$  jest skończone,  $A_x \in \mathcal{F}$ . Oczywiście  $x \in A_x$ , ponadto dla dowolnego  $B \in \mathcal{F}$  mamy  $B \cap A_x = \emptyset$  albo  $B \cap A_x = A_x$ . Istotnie, jeśli  $x \in B$ , to  $A_x = A_x \cap B$ , jeśli zaś  $x \notin B$ , to  $A_x = A_x \cap B^c$ , więc  $A_x \cap B = \emptyset$ . W szczególności wynika stąd, że  $A_y \cap A_x = \emptyset$  albo  $A_y = A_x$ . Zbiór  $A$  został zatem rozbitý na skończoną liczbę niepustych i rozłącznych zbiorów  $A_{x_1}, \dots, A_{x_k}$ .

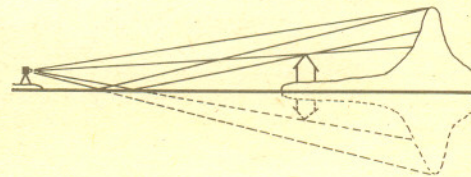
Dla  $B \in \mathcal{F}$  mamy

$$B = (B \cap A_{x_1}) \cup \dots \cup (B \cap A_{x_k}) = A_{x_{i_1}} \cup \dots \cup A_{x_{i_m}}$$

Elementów w  $\mathcal{F}$  jest więc tyle, ile podzbiorów zbioru  $k$ -elementowego, czyli  $2^k$ .  
Uwaga. Analogicznie dowodzi się, że nie może istnieć nieskończone i przeliczalne  $\sigma$ -ciało (czyli rodzina podzbiorów zamknięta ze względu na przeliczalne działania na zbiorach).



Rys. 2



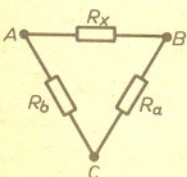
Rys. 3

41. Na podstawie rysunku 3 przedstawiającego bieg promieni bezpośrednich i odbitych od powierzchni jeziora widzimy, że obraz odbity w wodzie stanowi tą połowę zdjęcia, na której przedmioty bliższe (domy i drzewa) usytuowane są wyżej na tle przedmiotów dalszych (góry).
42. Treść zadania dopuszcza zwieranie przewodami poszczególnych węzłów sieci. Doprowadzamy zatem rozpatrywany obwód do postaci przedstawionej na rysunku 4, tak, aby żadne „ścieżki” oporów nie bocznikowały bezpośrednio oporu  $R_x$ . Możemy tego dokonać na przykład przez zwarcie ze sobą punktów  $C, D$  oraz  $E$ . Dalsze postępowanie jest proste. Zwieramy kolejne pary punktów  $B-C, C-A, A-B$  i za każdym razem wyznaczamy wypadkowy opór omiarem (przyrząd ten określa opór na podstawie pomiaru natężenia płynącego w obwodzie prądu przy znanym napięciu zasilającym), jak na rysunku 5 a, b, c. Oznaczając odpowiednie wskazania omiarmy  $R_1, R_2, R_3$ , mamy

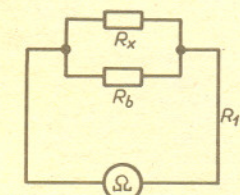
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_b}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_a}, \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$$

Stąd obliczamy

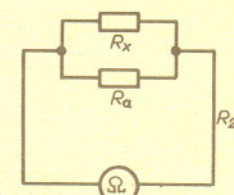
$$R_x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$



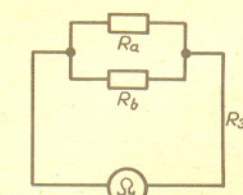
Rys. 4



a)



b)



c)

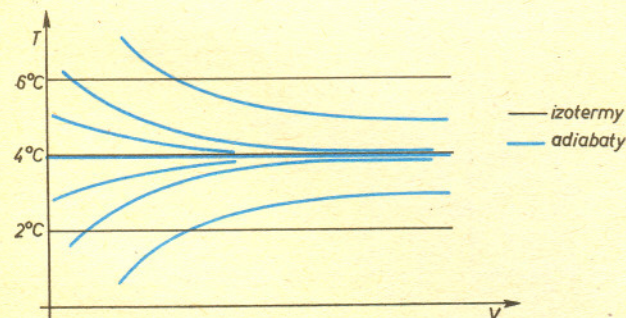




W czasie I wojny światowej, kiedy posługiwano się systemami łączności pracującymi na częstotliwościach około 10 kHz, radiooperatorom zdarzało się słyszeć tzw. świsty, czyli krótkie sygnały o malejącej częstotliwości. Wiązano wówczas to zjawisko z przelotem pocisków artyleryjskich. Poprawne wyjaśnienie zostało podane dopiero w 1953 roku. Uderzający w Ziemię piorun generuje impuls fal elektromagnetycznych. Impuls po dotarciu do plazmy jonosferycznej wzbudza w niej zaburzenia rozchodzące się wzdłuż linii ziemskiego pola magnetycznego. Zaburzenia docierają do punktu na drugiej półkuli, w którym linia pola opuszcza jonosferę, i tu mogą być zarejestrowane jako świsty. Jednocześnie część impulsu ulega odbiciu od granicy jonosfery i rozchodzi się wstecz do punktu startowego, tam znów ulega odbiciu i ponownie pojawia się w rejonie odbiornika. Czasami możliwe jest odebranie czterech do pięciu wistów o coraz mniejszej amplitudzie, wywołanych uderzeniem tego samego pioruna.

Dla punktów  $A$  i  $B$  leżących po jednej stronie prostej  $k$  punktem  $P$  tej prostej, dla którego suma  $AP + PB$  jest najmniejsza, jest punkt przecięcia  $k$  z odcinkiem łączącym  $A$  z obrazem symetrycznym  $B$  względem  $k$ . Punktu prostej  $k$ , dla którego różnica  $|AP - PB|$  jest największa, może nie być. Jeśli prosta  $AB$  przecina prostą  $k$ , to punkt przecięcia realizuje to maksimum.

Woda ma największą gęstość w temperaturze  $4^{\circ}\text{C}$ . Z tego faktu wynika, że zarówno przy izotermicznym sprężaniu w temperaturze  $2^{\circ}\text{C}$ , jak i przy izotermicznym rozprężaniu w  $6^{\circ}\text{C}$  woda pochłania ciepło. Silnik Carnota, z wodą jako substancją roboczą, pracujący między tymi temperaturami nie wymagałby chłodziwy i zamieniałby całe pobrane ciepło na pracę. Czyżby perpetuum mobile II rodzaju? Niestety — w procesie adiabatycznym nie można podgrzać wody o temperaturze poniżej  $4^{\circ}\text{C}$  do temperatury wyższej od  $4^{\circ}\text{C}$ . Izoterma  $4^{\circ}\text{C}$  jest dla wody jednocześnie adiabatą (rysunek), czyli nie można ogrzać wody o tej temperaturze tylko zwiększając ciśnienie.



Za pomocą najpotężniejszych teleskopów nie można dostrzec człowieka na Księżycu — niemniej jednak astronomowie mogą w pewnym sensie „zobaczyć” ziarna pyłu międzygwiazdowego (o rozmiarach rzędu  $0,1 \mu\text{m}$ ) z odległości wielu parseków. Otóż: charakter absorpcji światła przez pył międzygwiazdowy świadczy o takim właśnie rozmiarze ziaren oraz że zbudowane są one głównie z węgla i lodu. Polaryzacja światła gwiazd dowodzi, że ziarna są wydłużone, a kierunek polaryzacji pozwala określić nawet ich orientację.

Dwa okręgi leżące na sferze przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzna jednego z nich przechodzi przez wierzchołek stożka stycznego do sfery wzdłuż drugiego okręgu.

Zjawiska złączenia jasnych gwiazd i planet z sierpem księżycowym zwracają uwagę swym pięknem i niecodziennością. Kilka państw (np. Algieria, Pakistan, Tunezja, Turcja) umieściło na swych sztandarach narodowych sierp Księżyca z gwiazdą pomiędzy jego rogami — jako hołd dla błędnego towarzysza Ziemi. Symbol ten jest jednak niezgodny z rzeczywistością, ponieważ ani gwiazda, ani planeta nie może być widoczna między rogami Księżyca. Błąd ten poprawiono na fladze tureckiej przez odsunięcie gwiazdy poza niewidoczną część tarczy księżycowej.

Friedrich Dürrenmatt pisząc sztukę *Fizycy* zaprosił do siebie kilku wybitnych fizyków. Byli tam m.in. Wolfgang Pauli, Rudolf Mössbauer, Hans Jensen oraz John Bardeen (laureaci nagrody Nobla). *Fizycy* grani są teraz w Teatrze Małym w Warszawie.

Powszechnie wiadomo, że w Drodze Mlecznej galaktyk nie widać, gdyż w jej płaszczyźnie leży warstwa materii międzygwiazdowej. Tymczasem w gwiazdozbiorze Kasjopei (a więc właśnie w Drodze Mlecznej) odkryte zostały w 1968 r. przez włoskiego astronoma Paolo Maffei dwie galaktyki należące najprawdopodobniej do Lokalnej Grupy Galaktyk. Obserwacje prowadzone siłą rzeczy w podczerwieni i w zakresie radiowym sugerują, że jedna z tych galaktyk jest olbrzymią galaktyką eliptyczną, a druga spiralną.

Dla każdej środkowosymetrycznej płaskiej figury wypukłej (takiej, która wraz z dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek) można znaleźć dwie jednokładne elipsy — zawartą w tej figurze i zawierającą ją — o skali jednokładności  $\sqrt{2}$ . Kwadrat pokazuje, że tego twierdzenia poprawić się nie da. Dla środkowosymetrycznych figur (brył) wypukłych  $n$ -wymiarowych również można znaleźć takie dwie jednokładne elipsoidy (powierzchnie  $(n-1)$ -wymiarowe) o skali jednokładności  $\sqrt{n}$ .



$10^{10}$

Średnia odległość między  
jądrami  ${}^4\text{He}$  w typowym  
białym karle



ATOM MIONOWY  
(układ związany  
proton - cząstka  $\mu^-$ )

PIERWSZA ORBITA BOHRA  
W ATOMIE WODORU

Typowa długość fali promieniowania  
uzyskiwanego w lampach rentgenowskich

Jądra atomowe mają, w tej skali średnice setnych części milimetra

$10^{-11}$  m  
0,1 Å

Kometa Halley'a ściśnięta  
do takich rozmiarów stałaby  
się czarną dziurą