

SPIS TREŚCI

NUMERU 4 (160)

Mikroskop wykorzystujący zjawisko tunelowe <i>doc. dr Tomasz Hofmokl</i>	str. 1
Zadania	str. 2
Patrz w niebo	str. 3
Naprawdę zabił można dopiero w przestrzeni trójwymiarowej	str. 4
Czy gwiazdy się zderzają? <i>mgr Mirosław Giersz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Proste, szkolne zadanie <i>doc. dr Andrzej Szymacha</i>	str. 10
Klub 44	str. 14
Drobniaki	str. 16

**W następnym numerze:
Paradoksalny rozkład kuli**

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmokl — v-przewodniczący
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Makowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr inż. arch. Mariola Łotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 4014/12/87. K-4.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

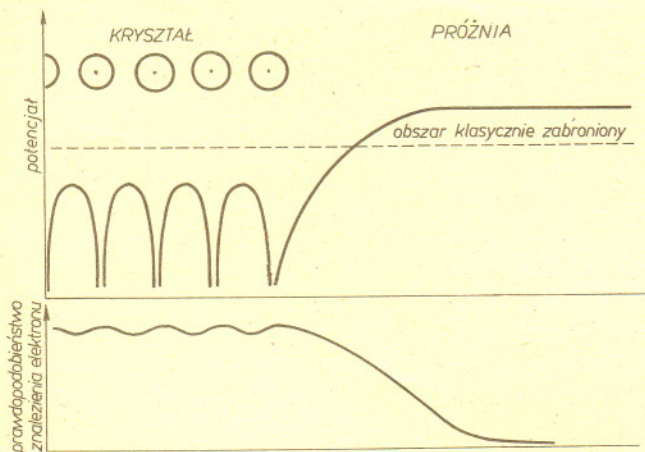
Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Mikroskop wykorzystujący zjawisko tunelowe

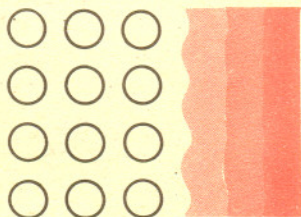
Doc. dr Tomasz HOFMOKL

Możemy dzięki niemu sporządzać mapy rzeźby badanej powierzchni z nieprawdopodobną zdolnością rozdzielczą $0,1 \text{ \AA}$ (10^{-11} m) w głąb i 2 \AA ($2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) równoległe do powierzchni. Oznacza to, że można uzyskać topografię powierzchni z precyzją pozwalającą nie tylko rozróżniać pojedyncze atomy leżące obok siebie, ale także wyznaczać różnice wysokości położenia atomów z dokładnością do małego ułamka ich średnicy. Nieprawdopodobne, a jednak prawdziwe! Mikroskop ten działa wykorzystując zjawisko tunelowe przewidziane przez mechanikę kwantową w roku 1927 i nie mające odpowiednika w mechanice klasycznej.

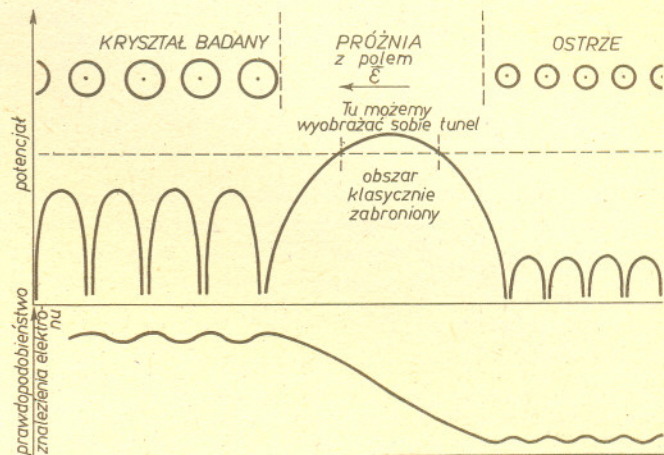
Wyobraźmy sobie płytkę z substancji przewodzącej, a blisko niej ostrych elektrody. Dla uproszczenia umieścimy wszystko w próżni i przyłożymy między elektrodę i płytkę niewielką różnicę potencjałów. Na tyle niewielką, aby elektrony nie mogły być wyrwane z płytki. Co przewiduje w tym przypadku fizyka klasyczna? Ruch swobodnych elektronów w przewodniku ograniczony jest tylko do przewodnika. Przy niewielkiej różnicy potencjałów elektrony nie mogą nabrać dostatecznej energii, aby wyrwać się z metalu. Prąd nie popłynie. Mechanika kwantowa twierdzi coś przeciwnego. Nie możemy zlokalizować elektronu tak, jak zwykłej piłki. Jego zachowanie opisuje funkcja falowa, która pozwala obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w określonym punkcie przestrzeni. Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu poza płytką jest małe, ale różne od zera i maleje bardzo szybko z odległością. Zbliżenie ostrza modyfikuje rozkład potencjału. Między ostrzem i płytką powstaje bariera potencjału. Na zdrowy rozsądek w opisanych warunkach elektron nie ma prawa przejść do ostrza, bo nie ma dostatecznej energii, aby pokonać tę barierę. Mechanika kwantowa twierdzi, że prawdopodobieństwo przeniknięcia elektronu przez barierę jest różne od zera. Zasada zachowania energii nie sprzeciwia się temu, ale też nie tłumaczy, jak to się może stać.



Schematycznie zaznaczony rozkład prawdopodobieństwa znalezienia swobodnego elektronu w pobliżu powierzchni metalu — maleniu prawdopodobieństwa odpowiada wzrost zaczernienia.



Jeżeli musimy już sobie to wyobrazić modelowo, co wcale nie jest konieczne, to można powiedzieć, że elektron w takim przypadku wymknie się tunelem w barierze. Stąd powstała nazwa — zjawisko tunelowe.



Nasz obraz elektronów w płytce w mechanice kwantowej będzie inny. Możemy je sobie wyobrazić jako chmurki sięgające poza powierzchnię płytki. Poza płytką na odległości kilku angstromów też napotykamy elektrony. Ich liczba spada wykładniczo w miarę oddalania się od powierzchni płytki. A więc w obwodzie popłynie prąd malejący wykładniczo w miarę oddalania się ostrza od powierzchni płytki. Prąd w obwodzie jest więc niezwykle czułym wskaźnikiem odległości ostrza od powierzchni płytki. Mamy więc sposób, aby niezwykle precyzyjnie prowadzić ostrze czujnika tuż nad płytką stale w tej samej od niej odległości. Wystarczy teraz rejestrować położenie czujnika, aby odtworzyć topografię badanej powierzchni. Słowo „wystarczy” kryje w sobie cały ogrom problemów. Przede wszystkim trzeba sobie zdać sprawę, jaki jest rząd wielkości przesunięć w płaszczyźnie równoległej do powierzchni i w kierunku do niej prostopadłym.

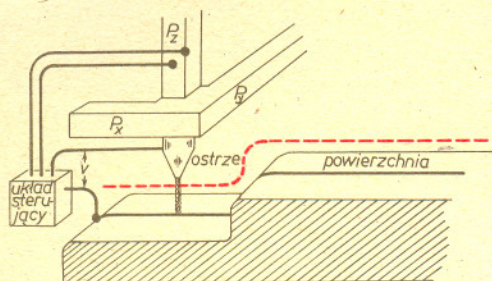
Pierwsze próby zbudowania przyrządu opartego na opisanej zasadzie sięgają roku 1971. R. Young, J. Ward i F. Scire zbudowali wtedy w National Bureau of Standards w Waszyngtonie urządzenie nazwane „topografierem”. Przodek mikroskopu (nazwijmy go w skrócie mikroskopem tunelowym) nie był zbyt udany. Zdolność rozdzielcza w płaszczyźnie równoległej do badanej powierzchni nie schodziła poniżej tysiąca angstromów. Dopiero w 1981 r. G. Binnig i H. Rohrer z laboratorium IBM w Zurichu zbudowali prototyp urządzenia, które obecnie osiąga wspomnianą na wstępie zdolność rozdzielczą $0,1 \text{ \AA}$ w kierunku prostopadłym do badanej powierzchni i 2 \AA w kierunku równoległym. Wyniki te uzyskano rozwiązując cały szereg problemów technicznych.

Ostrze musi być rzeczywiście bardzo ostre, promień jego krzywizny powinien być rzędu kilku angstromów. Hans Werner Fink, pracujący w tym samym laboratorium IBM, opracował technologię sporządzania ostrza z monokryształu wolframu z trzema tylko atomami na końcu. Atomy te tworzą trójkąt, w którego środku można umieścić pojedynczy atom. Układ taki jest trwały przez dziesiątki godzin. Można więc mieć ostrze z jednym atomem na czubku.

Bardzo wiele trudu włożono w pozbycie się wpływu drgań przypadkowych. Osiągnięto to poprzez sztywną konstrukcję mechaniczną o odpowiednio dobranych drganiach własnych, które można potem rozpoznać elektronicznie i wyeliminować z analizy. Obecna wersja mikroskopu pozwoliła rozwiązać ten problem.

System przesuwu: składa się on z przesuwu zgrubnego, sterowanego silnikiem krokowym, który pozwala zbliżyć próbkę do ostrza na odległość około 1 mikrona, czyli 10 tysięcy angstromów. Dalej operuje się już samym ostrzem. Jest ono osadzone na trzech wzajemnie prostopadłych ceramicznych beleczkach piezoelektrycznych. Przypomnijmy tutaj, że w anizotropowych ośrodkach dielektrycznych, mających określoną strukturę krystalograficzną, występuje zjawisko piezoelektryczne, polegające na tym, że płasko-równoległa płytka o określonej orientacji osi krystalograficznych, umieszczona w zewnętrznym polu elektrycznym, ulega deformacji, rozciąganiu lub ścisłaniu.

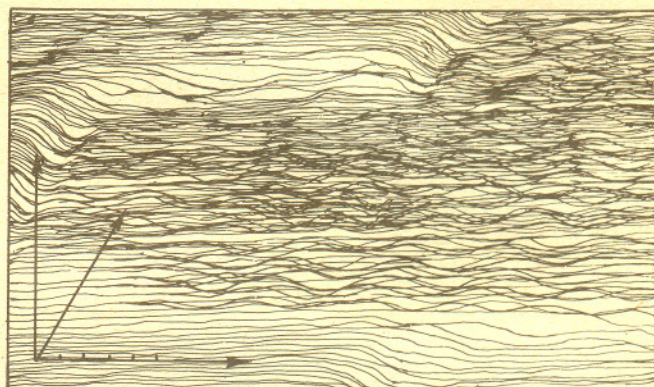
Przyłożenie do beleczek odpowiedniego napięcia powoduje przesuwanie się ostrza. Beleczki P_x i P_y służą do przesuwania ostrza równoległe do badanej powierzchni. Belka P_z kontroluje ruch prostopadły. Jest ona sprzężona z układem sterującym, który ustala tak położenie ostrza, aby prąd tunelowy pomiędzy badaną powierzchnią a ostrzem miał stałą wartość. Znając napięcia przyłożone do trzech belek piezoelektrycznych znamy współrzędne ostrza x, y, z . „Zamiatając” ostrzem całą badaną powierzchnię możemy odtworzyć jej profil.



W opisanym sposobie pomiaru topografii powierzchni nie wykorzystano wszystkich dostępnych potencjalnie informacji. Ostrze sondy prowadzono tak, aby zachować stały prąd tunelowy. A gdyby badać w każdym punkcie powierzchni rozkład natężenia prądu w zależności od energii elektronów? Można by wtedy znaleźć nie tylko rozkład atomów na powierzchni, lecz również rozkład elektronów na danym poziomie energetycznym, a to pozwala z kolei na identyfikację atomów i molekuł. Otwiera to możliwości „spektroskopii tunelowej”.

Mikroskop tunelowy może więc dostarczyć nie tylko danych topograficznych o powierzchni, ale również informacji o naturze tej powierzchni. Trudno przecenić praktyczne znaczenie tego urządzenia, zarówno w badaniach podstawowych, jak i w zastosowaniach.

Za osiągnięcia w budowie mikroskopu tunelowego G. Binnig i H. Rohrer otrzymali w 1986 roku nagrodę Nobla z fizyki.



Oto przykład powierzchni złota widzianej przez mikroskop tunelowy. Widzimy wyraźnie uskoki o wymiarach jednego atomu. Jedna podziałka na rysunku odpowiada 5 angstromom. Skala w kierunku prostopadłym jest bardziej rozciągnięta.



Zadania *Redaguje dr Rafał SZTENCEL*

M 466. Udowodnić, że każdy wielokąt o obwodzie $2a$ można nakryć kołem o średnicy a . Ponadto dla każdego $d < a$ istnieje wielokąt o obwodzie $2a$, który nie da się nakryć kołem o średnicy d .

Rozwiązanie na str. 13

M 467. Dwóch graczy gra w „orla i reszkę”. Kapitały początkowe graczy wynoszą m i n złotych, stawka – 1 złoty. Gra kończy się w chwili, gdy jeden z graczy zostanie zrujnowany. Znaleźć średnią długość gry.

Rozwiązanie na str. 10

M 468. Na dziesięciu drzewach, rozmieszczonych na okręgu, siedzi dziesięć wiewiórek (po jednej na każdym drzewie). Od czasu do czasu dwie wiewiórki przeskakują na sąsiednie drzewa. Czy wiewiórki mogą zebrać się na jednym drzewie?

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 218. Foton – kwant promieniowania elektromagnetycznego o energii $E = h\nu$ pada prostopadle na płaskie, doskonale zwierciadło, poruszające się ze stałą prędkością v znacznie mniejszą od prędkości światła. Korzystając z prawa zachowania energii i pędu obliczyć częstotliwość ν' odbitych fotonów.

Rozwiązanie na str. 3

F 219. Płaska fala elektromagnetyczna pada na poruszającą się z prędkością v płaską metalową płytę ulegając odbiciu. Przyjmując, że fala rozprzestrzenia się wzdłuż osi z prostokątnego układu współrzędnych i jest opisywana równaniami:

$$E_x = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t\right), \quad E_y = 0, \quad E_z = 0,$$

$$H_x = 0, \quad H_y = H_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t\right), \quad H_z = 0,$$

obliczyć częstotliwość ν' fali odbitej, jeśli płyta porusza się prostopadle do osi z z prędkością v ; E_i i H_i ($i = x, y, z$) są składowymi wektorów natężenia pola elektrycznego i magnetycznego fali elektromagnetycznej, ω jej częstością.

Rozwiązanie na str. 13

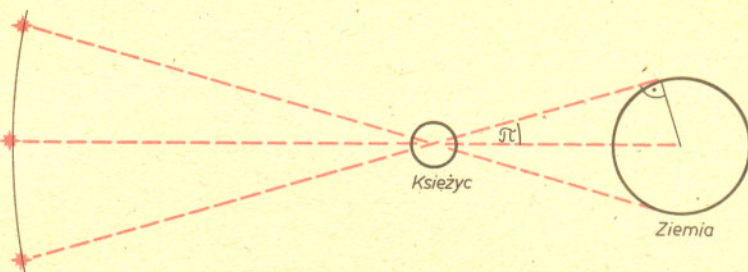




Patrz w niebo

Zakrycia gwiazd przez Księżyc należą do zjawisk typu zaćmieniowego. Zachodzą one wtedy, gdy Księżyc, poruszający się wśród gwiazd z zachodu na wschód ze średnią prędkością $13^{\circ}2$ na dobę, przesłoni dla ziemskiego obserwatora którąś z nich. Szczególnym przypadkiem są zakrycia planet i ich satelitów, jak również zaćmienia Słońca.

Zakryciom podlegają wszystkie gwiazdy znajdujące się na drodze Księżycy, tj. — dla obserwatora w danym miejscu na Ziemi — w pasie o szerokości odpowiadającej średnicy jego tarczy. Zastanówmy się, w jakiej maksymalnej odległości od ekliptyki powinna znajdować się gwiazda, aby mogła zostać przesłonięta przez tarczę naszego satelity. Przyjmijmy na razie (potem uwolnimy się od tego założenia), że Ziemia jest punktem. Gdyby Księżyc poruszał się dokładnie po ekliptyce, gwiazdy zakrywane przez niego leżałyby w odległości nie większej niż promień jego tarczy, po obu stronach ekliptyki. Jednak orbita Księżycy jest nachylona pod kątem $5^{\circ}9'$ do ekliptyki. Nie stanowiłoby to zbyt poważnego utrudnienia, gdyby nie fakt, że punkty przecięcia orbity Księżycy z ekliptyką (węzły), podobnie jak punkty równonocy, nie zajmują stałego położenia wśród gwiazd, ale przemieszczają się w kierunku przeciwnym do ruchu Księżycy. W ciągu 18,6 lat, tj. w czasie gdy węzły Księżycy dokonują pełnego obrotu po ekliptyce, jego tarcza przesłania obszar nieba rozciągający się na $5^{\circ}25'$ ($5^{\circ}9' + 16'$, bo promień Księżycy wynosi $16'$) po obu stronach ekliptyki. Pozbądźmy się teraz upraszczającego założenia, że Ziemia jest punktem. Obserwatorzy w różnych miejscach globu widzą Księżyc w nieco innych położeniach wśród gwiazd na skutek tzw. przesunięcia paralaktycznego (patrz rysunek). Maksymalna wartość paralaksy Księżycy wynosi $63'$ i o tyle zwiększa się obszar zakrywany przez jego tarczę. Ostatecznie otrzymujemy, że zakryciom mogą podlegać wszystkie gwiazdy odległe nie więcej niż $6^{\circ}28'$ na północ i południe od ekliptyki.



Obserwatorzy w różnych punktach na Ziemi widzą Księżyc na tle różnych gwiazd. π — paralaksa Księżycy, czyli kąt, pod jakim z Księżycy widać promień Ziemi.



Rozwiązanie zadania F 218. Niech przed odbiciem od zwierciadła foton ma energię $E = h\nu$ i pęd $p = h\nu/c$, a po odbiciu $E' = h\nu'$ i $p' = h\nu'/c$. Z zasady zachowania pędu otrzymujemy

$$\frac{h\nu}{c} + Mv = -\frac{h\nu'}{c} + Mv',$$

gdzie przez M oznaczyliśmy masę zwierciadła, a przez v' jego prędkość po zderzeniu z fotonem. Prawo zachowania energii daje

$$h\nu + \frac{1}{2}Mv^2 = h\nu' + \frac{1}{2}Mv'^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$(1) \quad h(\nu - \nu') = \frac{M}{2}(\nu'^2 - \nu^2),$$

natomiast z zasady zachowania pędu

$$(2) \quad \frac{h}{c}(\nu + \nu') = M(\nu' - \nu).$$

Wyliczając z równania (1) wielkość $\nu' - \nu$

$$\nu' - \nu = \frac{2h(\nu - \nu')}{M(\nu' + \nu)}$$

i wstawiając do (2) otrzymujemy

$$(3) \quad \frac{\nu + \nu'}{\nu - \nu'} = \frac{2c}{\nu' + \nu}.$$

Interesuje nas przypadek, kiedy zwierciadło nie zmieni swojej prędkości po zderzeniu (tzn. $\nu' = \nu$). Ma to miejsce, gdy masa zwierciadła jest nieskończenie wielka ($M \rightarrow \infty$), co jest w bardzo dobrym przybliżeniu spełnione dla wszystkich makroskopowych zwierciadeł. Wtedy z równania (3) wynika

$$\nu - \nu' = \frac{v}{c}(\nu + \nu'), \quad \text{tzn.} \quad \nu' = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c},$$

co opisuje efekt Dopplera dla promieniowania elektromagnetycznego (w przybliżeniu nierelatywistycznym, gdyż w ten sposób traktowaliśmy energię zwierciadła).

W obszarze tym znajdują się cztery jasne gwiazdy: Aldebaran, Antares, Regulus i Spica, oraz gromady: Hiady i Plejady. Zakrycia tych obiektów przez Księżyc należą do zjawisk szczególnie efektownych i stosunkowo prostych do zaobserwowania. W zasadzie obserwuje się zakrycia gwiazd o jasnościach do 7 mag, gdyż słabsze nikną już w pewnej odległości od Księżycy z powodu jego blasku. Przy jasnym brzegu tarczy można obserwować znikanie gwiazd do czwartej wielkości, natomiast pojawiają się — tylko gwiazd jaśniejszych (zasadniczo pierwszej wielkości). Znacznie łatwiej i dokładniej obserwuje się zakrycia gwiazd przez ciemny brzeg tarczy Księżycy, a więc znikanie między nowiem a pełnią, zaś pojawianie się po pełni.

Znikanie i pojawianie się gwiazdy przy brzegu Księżycy odbywa się nagle, bez stopniowego spadku lub wzrastania blasku. Świadczy to o braku atmosfery na srebrnym globie, jak również o tym, że średnice gwiazd są znikomą małą wobec prędkości ruchu Księżycy względem nich (około $0,6$ na sekundę). Wprawdzie niektórzy obserwatorzy zauważają jakby powtarzające się pojawienie się gwiazdy po zniknięciu na krótki czas, ale być może — jeżeli nie zachodzi tu jakieś zjawisko fizjologiczne — jest to wynikiem nierówności tego fragmentu brzegu Księżycy. Najdłużej (około 1 godziny) trwają tzw. zakrycia centralne, gdy pozorny ruch gwiazdy względem Księżycy odbywa się wzdłuż jego średnicy.

Mimo wieloletnich obserwacji Księżycy i coraz dokładniejszej teorii jego ruchu dotychczas nie można przewidzieć momentów i trwania zakryć gwiazd przez jego tarczę z taką dokładnością, z jaką przewiduje się wiele innych zjawisk astronomicznych. Z tego powodu obserwacje zakryć mogą dać cenny materiał dla poprawienia ogromnie skomplikowanej teorii ruchu Księżycy. Aby wyniki obserwacji miały wartość naukową, należy dysponować bardzo dobrze urządzonej „służbą czasu” (dokładność wyznaczenia poszczególnych momentów powinna być nie mniejsza niż $0,2$) oraz trzeba znać współrzędne geograficzne miejsca obserwacji z dokładnością przynajmniej $0,1$ w długości i $1'$ w szerokości (około 2 km).

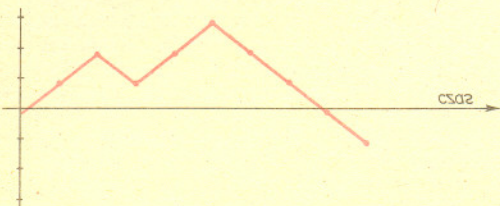
W bieżącym roku możemy obserwować serię zakryć najjaśniejszej gwiazdy konstelacji Panny — Spiki. Pierwsze z nich rozpocznie się 14 kwietnia około godziny 4^h30^m . Niestety, w momencie tym świecący w pełni Księżyc będzie już bardzo nisko nad zachodnim horyzontem. W związku z tym obserwacje mogą być trudne do przeprowadzenia. W znacznie korzystniejszych warunkach nastąpi zakrycie 7 czerwca. Rozpocznie się ono około 23^h35^m i potrwa godzinę. Księżyc w fazie między pierwszą kwadrą a pełnią znajdować się będzie wówczas nad południowo-zachodnim horyzontem. Szczególnie dobrze powinno być widoczne zniknięcie Spiki za ciemnym fragmentem jego tarczy. Ostatnie z serii tegorocznych zakryć Spiki nastąpi 1 sierpnia około godziny 14. Ze względu na porę będzie możliwe do zaobserwowania jedynie za pomocą lunety.

mgr Joanna UDALSKA

Naprawdę zabłądzić można dopiero w przestrzeni trójwymiarowej

Wyobraźmy sobie cząstkę, która może się poruszać tylko po prostej tak, iż w ciągu 1 sekundy ruchem jednostajnym przesuwa się o 1 w lewo lub o 1 w prawo z takim samym

prawdopodobieństwem (równym $\frac{1}{2}$). W chwili 0 cząstka znajdowała się w punkcie zero. W układzie współrzędnych wykresem ruchu cząstki będzie łamana (np. taka, jak na rysunku 1). Taki ruch nazywamy błądzeniem po prostej. Pytanie, na które chcemy znaleźć odpowiedź, brzmi: Jakie jest prawdopodobieństwo powrotu cząstki do punktu zero?



Rys. 1

Oznaczmy przez f_n prawdopodobieństwo powrotu cząstki do zera po raz pierwszy po $2n$ sekundach (powroty są możliwe tylko po parzystej liczbie sekund), przez u_n prawdopodobieństwo tego, że cząstka po $2n$ sekundach znajduje się w zerze. Zauważmy, że przy obliczaniu powyższych prawdopodobieństw możemy się ograniczyć do trajektorii o długości $2n$. Przyjmijmy, iż zdarzenie *cząstka powróci do zera* ma pewne prawdopodobieństwo f . Mamy wtedy

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Zauważmy, że nie interesują nas liczby f_n , chcemy tylko znać ich sumę.

W zbiorze trajektorii o długości $2n$ wyróżnimy trajektorie cząstek wracających po $2n$ sekundach do zera — zbiór A_n — oraz trajektorie cząstek wracających po raz pierwszy do zera po $2k$ sekundach — zbiory B_k ($k = 1, \dots, n$). Zauważmy, że zbiory B_k

są parami rozłączne i $A_n \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$. Tak więc ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P(A_n|B_k).$$

Zauważmy, że $P(A_n|B_k) = P(A_{n-k})$. Jeśli cząstka po $2k$ sekundach znalazła się w zerze, a po $2n$ sekundach ma tam powrócić, to jej trajektoria w czasie ostatnich $2n-2k$ sekund będzie taka jak cząstki startującej z zera i wracającej tam po $2(n-k)$ sekundach. Tak więc

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P(A_{n-k}).$$

Oczywiście $P(A_n) = u_n$ i $P(B_k) = f_k$.

Otrzymaliśmy ważny dla dalszych rozważań wzór

$$(*) \quad u_n = \sum_{k=1}^n f_k \cdot u_{n-k} \quad (n \geq 1).$$

Okazuje się, że między sumami $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ i $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ zachodzi związek:

$f < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u < +\infty$. Ponadto wtedy

$$f = 1 - \frac{1}{u}.$$

Oto dowód: Pomnożmy $\sum_{k=1}^n f_k$ przez $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ i zgrupujmy razem iloczyny, w których suma wskaźników jest taka sama

$$(f_1 + \dots + f_n)(u_0 + \dots + u_{n-1}) = [f_1 \cdot u_0 + (f_1 \cdot u_1 + f_2 \cdot u_0) + (f_1 \cdot u_2 + f_2 \cdot u_1 + f_3 \cdot u_0) + \dots + (f_1 \cdot u_{n-1} + \dots + f_n \cdot u_0)] + \dots + f_n \cdot u_{n-1}.$$

Zastępując wyrażenia w nawiasach okrągłych zgodnie z (*), pomijając wyrazy poza nawiasem kwadratowym i pamiętając, że $u_0 = 1$ mamy

$$\sum_{k=1}^n f_k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geq \sum_{k=1}^n f_k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geq \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k - 1.$$

A zatem, jeśli $f < 1$ (a więc i $\sum_{k=1}^n f_k < 1$), to

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n f_k}.$$

Ciąg po prawej stronie jest zbieżny, a ciąg po lewej jest niemalejący, a więc musi być też zbieżny, czyli $u < +\infty$.

Jeśli $u < +\infty$, to zsumujmy wyrażenia (*). Z lewej strony otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - 1 = u - 1,$$

a z prawej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_k \cdot u_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n = f \cdot u.$$

(Taka zmiana kolejności sumowania jest dozwolona, gdyż wszystkie wyrazy są nieujemne.) Tak więc

$$f \cdot u = u - 1, \quad \text{czyli} \quad f = 1 - \frac{1}{u}.$$

W szczególności więc $f < 1$.

Prawdopodobieństwo u_n obliczyć jest łatwo. Aby cząstka po $2n$ sekundach znalazła się w zerze, musi wykonać n ruchów w lewo i tyleż w prawo — rozłożonych dowolnie w czasie. Tak więc

$u_n = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n}$. Skorzystajmy teraz ze wzoru Stirlinga podającego przybliżoną wartość $n!$ i obliczmy przybliżoną wartość u_n

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

$$u_n = 2^{-2n} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx 2^{-2n} \cdot \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot 2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Dokładniej mamy:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}, \quad \text{gdzie } 0 \leq \theta_n \leq 1.$$

$$\text{A zatem } u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{\theta_{2n} - 4\theta_n}{24n}}, \quad \text{czyli } \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{1}{6n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{1}{24n}}.$$

$$\text{Tak więc } \frac{u_n - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Będziemy dalej oznaczać $a_n \approx n^s$, gdy mamy $\frac{a_n - n^s}{n^s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Można sprawdzić, że gdy $a_n \approx n^s$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s < \infty.$$

Trzeba jeszcze wiedzieć, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = +\infty$, by stwierdzić, iż $f = 1$, czyli że z prawdopodobieństwem 1 cząstka wróci do zera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} \geq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^n} = +\infty$$

Inną sprawą jest, jak długo, średnio oczywiście, trzeba czekać na taki powrót. W tym celu trzeba by obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot f_n.$$

Otóż można obliczyć, iż $f_n \approx \frac{1}{2n\sqrt{n\pi}}$, tak więc średni czas powrotu wynosi ... $+\infty!$.

W pewnym fantastyczno-naukowym opowiadaniu autor opisuje następujący sposób podróżowania w Kosmosie. Planety połączone są bramami (pod- czy nad- przestrzennymi — nie pamiętam dokładnie) w łańcuch tak, że wchodząc w bramę możemy z prawdopodobieństwem 1/2 znaleźć się na jednej z dwóch sąsiednich planet. Początkowo ludzie zupełnie nie wiedzą, jak sobie poradzić z takim systemem, jak wrócić, ale ktoś przypomina sobie o stwierdzeniu, iż cząstka błądząca przypadkowo po prostej z prawdopodobieństwem 1 wraca do punktu wyjścia i podróżnicy wchodzą w bramy tak długo, aż znajdują się znów w punkcie startowym. Autor wiedział, że dzwonią, ale ... średnio podróżnicy wracaliby po nieskończonym czasie.

Zamiast ruchu cząstki na prostej można rozpatrywać ruch na płaszczyźnie (rys. 2) lub w przestrzeni (rys. 3). Cząstka startuje wtedy z punktu (0,0) lub (0, 0, 0). W ciągu sekundy przesuwa się z jednakowym prawdopodobieństwem (równym dla płaszczyzny

$\frac{1}{4}$, a dla przestrzeni $\frac{1}{6}$) w lewo, w prawo, w przód lub w tył

(w przestrzeni dochodzi jeszcze w górę lub w dół) o 1. Tak więc z punktu (x, y) może przejść do punktów (x-1, y), (x+1, y), (x, y+1), (x, y-1) (a z punktu (x, y, z) do (x±1, y, z), (x, y±1, z), (x, y, z±1)). Zadajemy to samo pytanie co poprzednio: Z jakim prawdopodobieństwem cząstka powróci do początku układu?

Zauważmy, że jeśli f_n i u_n zdefiniujemy tak jak uprzednio, to wzór (*) pozostanie prawdziwy i dla płaszczyzny, i dla przestrzeni. Tak więc trzeba obliczyć u_n . Zaczniemy od płaszczyzny. Liczba trajektorii długości 2n jest równa 4^{2n} . Aby cząstka znalazła się w zerze po 2n sekundach, musi wykonać tyle ruchów w lewo, ile w prawo i tyle w przód, ile w tył. Jeśli więc ruszyła się w lewo k razy, to w prawo też k, w przód (i w tył) n-k razy. Ruchy te mogła wykonać w dowolnej kolejności, więc liczba takich trajektorii jest równa

$$\frac{(2n)!}{(k!)^2 \cdot ((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{k}^2.$$

Ale k może przybierać wartości 0, 1, ..., n, a więc

$$u_n = 4^{-2n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{k}^2 = 4^{-2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = 4^{-2n} \cdot \binom{2n}{n}^2.$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot a^k b^{2n-k} = (a+b)^{2n} = [(a+b)^n]^2 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k} \right)^2$$

Współczynnik przy $a^n b^n$ po prawej stronie równości

$$\text{wynosi } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga mamy, iż $u_n \approx \frac{1}{\pi n}$ i znów

z uwagi na rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$ mamy $f = 1$.

A jak jest w przestrzeni? Wyliczamy u_n analogicznie jak poprzednio i otrzymujemy

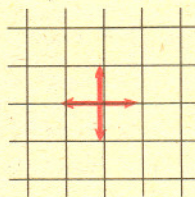
$$u_n = 6^{-2n} \cdot \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{(2n)!}{(i!)^2 (j!)^2 ((n-i-j)!)^2} = 2^{-2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{0 \leq i+j \leq n} \left[3^{-n} \cdot \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} \right]^2.$$

Wyrażenia $C_{ij}^n = \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!}$ są współczynnikami w rozwinięciu $(a+b+c)^n$, tj.

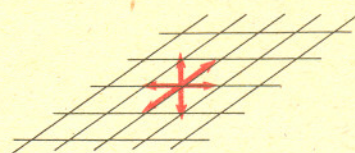
$$(a+b+c)^n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} C_{ij}^n a^i b^j c^{n-i-j}.$$

(Można to sprawdzić podobnie jak dla zwykłych współczynników Newtona w rozwinięciu $(a+b)^n$). Podstawiając $a = b = c = 1$ mamy

$$1 = \sum_{0 \leq i+j \leq n} 3^{-n} C_{ij}^n.$$



Rys. 2



Rys. 3

Tak więc

$$\sum_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_{ij}^n]^2 \leq \max_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_{ij}^n].$$

Można sprawdzić, że największą wartość C_{ij}^n przyjmuje:

dla $i = j = \frac{n}{3}$ przy n podzielnym przez 3,

dla $i = j = \frac{n-1}{3}$ przy n-1 podzielnym przez 3,

dla $i = j = \frac{n+1}{3}$ przy n+1 podzielnym przez 3.

Za każdym razem mamy (znów ze wzoru Stirlinga)

$$\max_{0 \leq i+j \leq n} C_{ij}^n \cdot 3^{-n} \approx \frac{c}{n},$$

gdzie c jest stałą. Tak więc (c, jest znów stałą)

$$u_n \leq \frac{c_1}{n \cdot \sqrt{n}}.$$

Ale tym razem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$ jest zbieżny, a więc $f < 1!$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2^n+k) \cdot \sqrt{2^n+k}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{2^n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n < +\infty \end{aligned}$$

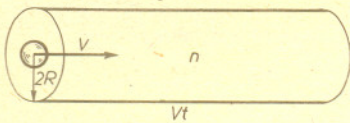
Przy dokładniejszych rachunkach można pokazać, że $f \approx 0,35$.

Opracował dr Jerzy RYLL

Czy gwiazdy się zderzają?

Mgr Mirosław GIERSZ

Rozpatrzmy układ składający się z gwiazd nie oddziałujących grawitacyjnie, o jednakowych masach M i promieniach R , poruszających się z prędkościami V . W ciągu czasu t wybrana gwiazda przebywa drogę Vt zamiatając obszar przestrzeni o objętości $W = Vt \cdot \pi(2R)^2$.



Jeśli przez n oznaczymy gęstość gwiazd, to iloczyn $n \cdot W$ podaje średnią liczbę gwiazd napotkanych w czasie t . Zatem średnio zderzenie nastąpi, gdy $nW \approx 1$. Stąd wynika średni czas między zderzeniami:

$$t \approx \frac{1}{4\pi R^2 V n}$$
$$\approx 2 \cdot 10^{20} \frac{1}{\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 V[\text{km/s}] n \left[\frac{\text{gwiazd}}{\text{pc}^3}\right]} \text{ [lat]}$$

Gwiazdy znajdują się w „nieskończoności”, gdy energia potencjalna ich wzajemnego oddziaływania jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z energią kinetyczną ich ruchów własnych.

Jeżeli całkowita energia układu fizycznego, będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej, jest ujemna, mówimy, że układ jest związany, w przeciwnym przypadku układ nie jest związany i znaczna jego część (lub całość) ulegnie rozproszeniu.

Patrząc w pogodną noc na niebo nie możemy oprzeć się wrażeniu mnogości gwiazd. Po chwili zdajemy sobie jednak sprawę, że rozmiary gwiazd są znacznie mniejsze od ich wzajemnych odległości na sferze niebieskiej. To pierwsze wrażenie wyniesione z pobieżnej obserwacji nieba znalazło potwierdzenie w obserwacjach astronomicznych dokonanych znacznie precyzyjniejszymi przyrządami niż oko ludzkie. Z obserwacji tych wynika, że cechą charakterystyczną poznanego Wszechświata są olbrzymie odległości między obiektami astronomicznymi należącymi do jednej klasy, a więc gwiazdami, galaktykami, gromadami galaktyk itd.

W okolicach Słońca najbliższe gwiazdy znajdują się w odległości kilku parseków. Wydaje się więc, że przy tak dużych odległościach zderzenia gwiazd muszą być zjawiskiem niezwykle rzadkim. Czy istnieją zatem obiekty astronomiczne, w których zderzenia gwiazd są znacznie częstsze? Liczba zderzeń zależy innymi od gęstości gwiazd. Im więcej gwiazd w stałej objętości, tym zderzenia są częstsze. Wszystkie obiekty astronomiczne mają wspólną cechę wewnętrzną budowy: gęstość ich jest największa w obszarach centralnych i maleje wraz z oddalaniem się od centrum. A więc musimy poszukiwać obiektów o największej gęstości gwiazd w obszarach centralnych. Okazuje się, że dobrymi kandydatami są centralne obszary jąder galaktyk i gromad kulistych. W najgęstszych obszarach tych obiektów gęstości gwiazd przekraczają dziesiątki milionów gwiazd na parsek sześcienny. Przy tak dużych gęstościach możemy spodziewać się od kilkudziesięciu (dla gromad kulistych) do kilku tysięcy (dla jąder galaktyk) zderzeń na miliard lat.

Czy zderzenia między gwiazdami mogą wpływać na ewolucję gromad kulistych bądź jąder galaktyk? Zanim odpowiemy na to pytanie, należy bliżej przyjrzeć się procesowi zderzenia gwiazd. Rozważmy w tym celu dwie identyczne gwiazdy o masie M , promieniu R , które poruszają się w dostatecznie dużej odległości od siebie (w „nieskończoności”) z prędkością względną V . Zgodnie z zasadą zachowania energii gwiazdy zbliżając się pod wpływem przyciągania grawitacyjnego zwiększają energię kinetyczną ruchu względnego. Na początku zderzenia, gdy gwiazdy stykają się powierzchniami, ich względna prędkość będzie większa lub równa prędkości

ucieczki z powierzchni gwiazdy $U_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Dla Słońca prędkość ta wynosi około

620 km/s. Czas zderzenia jest bardzo krótki, jest on w przybliżeniu równy ilorazowi średnicy gwiazdy i prędkości U_{esc} — dla Słońca wynosiłby około czterdziestu minut. Podczas zderzenia powstają bardzo silne fale uderzeniowe, które przekazują swoją energię otaczającej materii ogrzewając ją. Ponieważ energia potrzebna na pobudzenie fal uderzeniowych pochodzi z energii kinetycznej gwiazd, mówimy, że fale uderzeniowe dyssypują energię kinetyczną. W wyniku zderzenia gwiazdy mogą utracić część masy, zlepiać się albo zostać całkowicie rozerwane. Jeżeli założymy, że zderzenie jest niesprężyste, co oznacza, że dyssypowana jest cała energia kinetyczna, to możemy otrzymać proste kryterium pozwalające ocenić wynik zderzenia.

Energia ΔE_d dyssypowana podczas zderzenia części gwiazd o masach m (mniejszych lub równych M) wynosi w przybliżeniu $\Delta E_d \approx m \left(\frac{U_{esc}}{2}\right)^2$. Jeżeli gwiazdy w chwili początkowej są daleko,

ich całkowita energia jest równa energii kinetycznej $E_{\infty} = M \left(\frac{V}{2}\right)^2$ i jest większa od zera,

czyli układ początkowo nie jest związany. Jeżeli w wyniku zderzenia całkowita energia E_w będzie ujemna, to gwiazdy mogą zlepiać się. Skorzystajmy teraz z zasady zachowania energii, która mówi, że $E_{\infty} = \Delta E_d - |E_w|$, czyli $\Delta E_d = E_{\infty} + |E_w| > E_{\infty}$. A więc zlepianie gwiazd będzie zachodzić, jeśli energia dyssypowana będzie większa od początkowej energii kinetycznej gwiazd.

W przeciwnym przypadku możemy spodziewać się tylko rozproszenia nieznacznej części materii gwiazd w otaczającej przestrzeni. Aby wyznaczyć, w jakich warunkach nastąpi całkowite rozerwanie gwiazd, rozważmy (podobnie jak wyżej) najprostszą sytuację, w której dwie identyczne gwiazdy, poruszające się w „nieskończoności” z prędkością względną V , zderzają się centralnie. W zderzeniu centralnym cała energia kinetyczna zamieniana jest na energię termiczną i rozerwanie gwiazd jest możliwe, jak to wynika z zasady zachowania energii, jeżeli początkowa energia kinetyczna gwiazd będzie większa od ich energii wiązania. Przy pewnych upraszczających

założeniach energia wiązania gwiazdy wynosi $-3 \frac{GM^2}{R}$. Początkowa energia kinetyczna

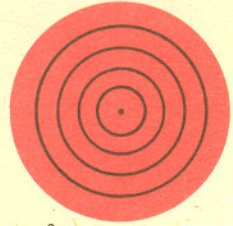
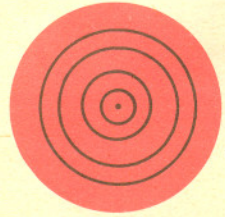
równa jest $M \left(\frac{V}{2}\right)^2$, zatem rozerwanie gwiazd będzie możliwe, gdy $V > \sqrt{\frac{12GM}{R}} = \sqrt{6} U_{esc}$.

Dla dwu identycznych gwiazd typu Słońca prędkość ta wynosi około 1,5 tys. km/s.

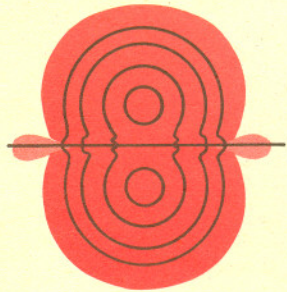
Model zderzenia omawiany powyżej jest bardzo prosty, nie uwzględnia on wielu istotnych procesów fizycznych zachodzących podczas zderzenia. Jednakże model ten poprawnie przewiduje, od jakich parametrów zależy końcowy produkt zderzenia gwiazd. Tymi parametrami są: prędkość gwiazd w „nieskończoności”, odległość w pericentrum (najmniejsza odległość między środkami gwiazd), masy i rozmiary gwiazd.

Jak już wspomniałem na początku artykułu, zderzenia gwiazd zachodzą dostatecznie często w centralnych obszarach jąder galaktyk i gromad kulistych. Gromady kuliste i jądra galaktyk różnią się znacznie nie tylko rozmiarami, ale przede wszystkim średnimi prędkościami

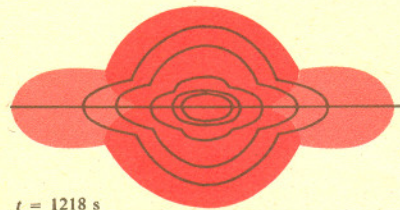
Na rysunkach przedstawione są wyniki symulacji numerycznej zderzenia centralnego dwu identycznych gwiazd typu Słońca. Kontury od centrum na zewnątrz odpowiadają gęstościom równym 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 gęstości centralnej. Obszary jaśniejsze przedstawiają materię uciekającą.



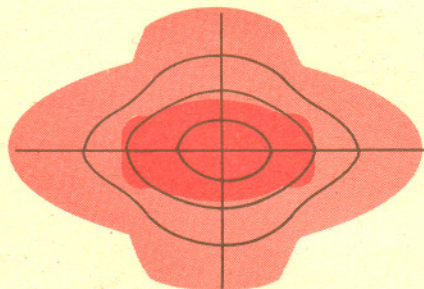
$t = 0 \text{ s}$



$t = 801 \text{ s}$



$t = 1218 \text{ s}$



$t = 1700 \text{ s}$

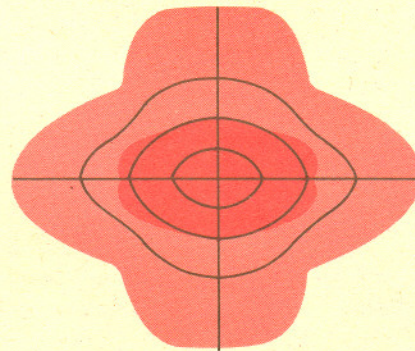
gwiazd. Prędkości średnie w centralnych obszarach gromad kulistych wynoszą kilkanaście km/s, natomiast w jądrach galaktyk przewyższają prawdopodobnie tysiąc km/s. W związku z tym w gromadach kulistych powinny dominować zderzenia prowadzące do zlepiania gwiazd i rozproszenia w otaczającej przestrzeni niewielkiej części masy gwiazd. W jądrach galaktyk natomiast dominować będą zderzenia prowadzące do rozerwania gwiazd albo do rozproszenia w przestrzeni znacznej części ich masy.

Zarówno jądra galaktyk, jak i gromady kuliste składają się z gwiazd ciągu głównego, białych karłów i niewielkiej ilości gwiazd neutronowych (ewentualnie czarnych dziur powstałych w wyniku ewolucji gwiazd). Wszystkie te rodzaje gwiazd biorą udział w zderzeniach, jednakże najbardziej spektakularne są zderzenia gwiazd ciągu głównego z białymi karłami lub gwiazdami neutronowymi (zderzenia białych karłów i gwiazd neutronowych są mało prawdopodobne ze względu na ich małe rozmiary). Podczas zderzenia energia kinetyczna zamieniana jest poprzez fale uderzeniowe na energię termiczną materii, czyli temperatura gęstych obszarów zderzających się gwiazd znacznie wzrasta. Fala uderzeniowa powstająca tuż nad powierzchnią białego karła powoduje wzrost temperatury otaczającej materii do wartości większych niż sto milionów kelwinów. Przy tak wysokich temperaturach następuje bardzo gwałtowne palenie wodoru, energia wydzielana w tym procesie jest porównywalna z energią wiązania gwiazdy, jest ona tego samego rzędu co energia wybuchu supernowej. Tak więc możemy spodziewać się jeżeli nie całkowitego rozerwania gwiazdy ciągu głównego, to przynajmniej odrzutu znacznej części jej masy. W zderzeniu gwiazdy ciągu głównego i białego karła rozerwanie gwiazdy związane jest z gwałtownym wydzielaniem energii w reakcjach termojądrowych i nie zależy od prędkości względnej w „nieskończoności”.

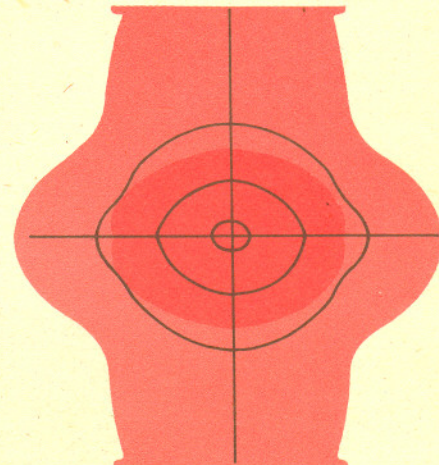
Na zakończenie zastanówmy się, w jaki sposób zderzenia gwiazd mogą wpływać na ewolucję centralnych obszarów jąder galaktyk i gromad kulistych. Przybliżoną strukturę dużych systemów gwiazdowych określają dwie wielkości: całkowita energia E_T i masa układu M_T . Dodatkowo, w przybliżeniu, w systemie spełnione jest tzw. twierdzenie o wirale, wiążące energię potencjalną E_p z energią całkowitą: $E_p = 2E_T$. W przybliżeniu energia potencjalna proporcjonalna jest do $-\frac{GM_T^2}{R_T}$ (R_T — jest to charakterystyczny promień systemu). W zderzeniach gwiazd tracona jest energia kinetyczna, co powoduje zmniejszanie się całkowitej energii E_T . Zgodnie z twierdzeniem o wirale reakcją systemu na zmniejszanie E_T będzie zmniejszanie się jego rozmiarów. System staje się bardziej związany (należy pamiętać, że w związanych systemach gwiazdowych energie E_T i E_p są ujemne). Z drugiej strony wiemy, że zderzenia gwiazd związane są także z wyrzutem większej lub mniejszej ilości materii z prędkościami kilkudziesięciu km/s. Jeżeli wyrzucona materia będzie miała prędkość większą od prędkości ucieczki z systemu gwiazdowego, to opuszczając system będzie wykonywała pracę pokonując jego przyciąganie, tym samym zwiększając energię systemu i jego promień. Widzimy więc, że zderzenia gwiazd zmieniają energię całkowitą systemu powodując tym samym jego ewolucję.

Jądra galaktyk są obiektami bardzo masywnymi ($M \approx 10^{10} M_\odot$), prędkości ucieczki wynoszą w nich kilka tysięcy km/s. Zatem materia wyrzucana podczas zderzeń będzie sphywała do obszarów centralnych tworząc masywny dysk. Jak się przypuszcza, w dysku tym mogą zachodzić gwałtowne procesy prowadzące do tworzenia nowych gwiazd. Gromady kuliste są obiektami znacznie mniej masywnymi ($M \approx 10^5 M_\odot$), dla których prędkości ucieczki są rzędu trzydziestu km/s. Tak więc materia wyrzucana podczas zderzeń będzie opuszczała gromadę powodując zwiększenie jej energii całkowitej. Jeżeli energia dostarczana do systemu przez uciekającą materię jest większa od energii traconej podczas zderzeń, to jądro gromady będzie zwiększało swoje rozmiary. W przeciwnym przypadku — gdy energia dyssypowana przeważa, jądro gromady będzie zmniejszało swoje rozmiary.

Poznanie budowy i ewolucji dużych systemów gwiazdowych pozwoli zapewne odpowiedzieć na wiele interesujących pytań. A mianowicie — jakiego rodzaju obiekty znajdują się w jądrach dużych systemów gwiazdowych, jakie procesy prowadzą do generacji lub dyssypacji energii. W chwili obecnej jesteśmy na etapie odkrywania, katalogowania i włączania nowych procesów do badań ewolucji dużych systemów gwiazdowych.



$t = 1817 \text{ s}$



$t = 2350 \text{ s}$

5

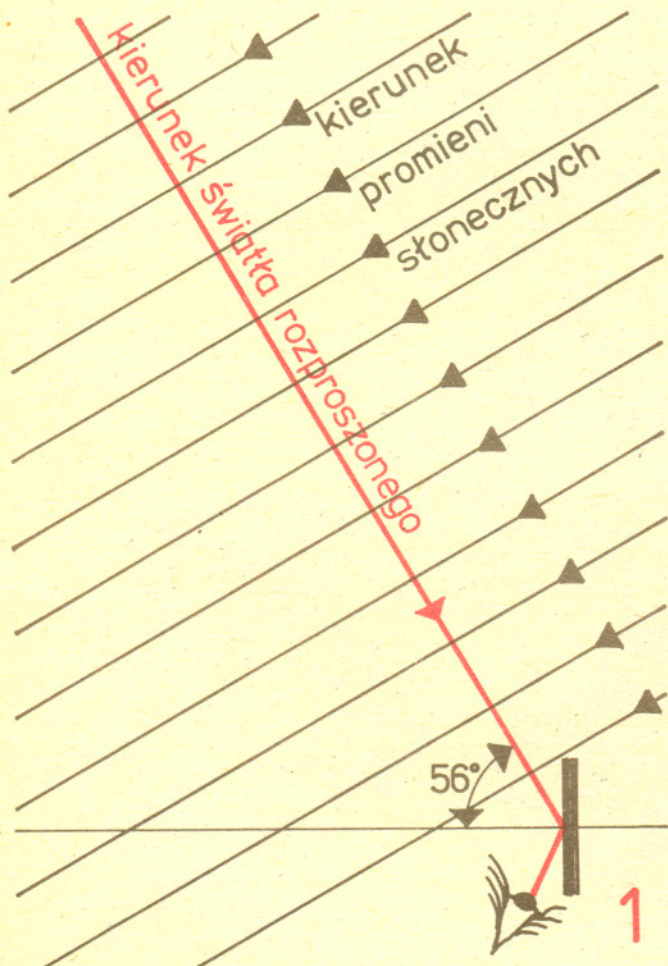
mała delta



Kompas zmierzchu

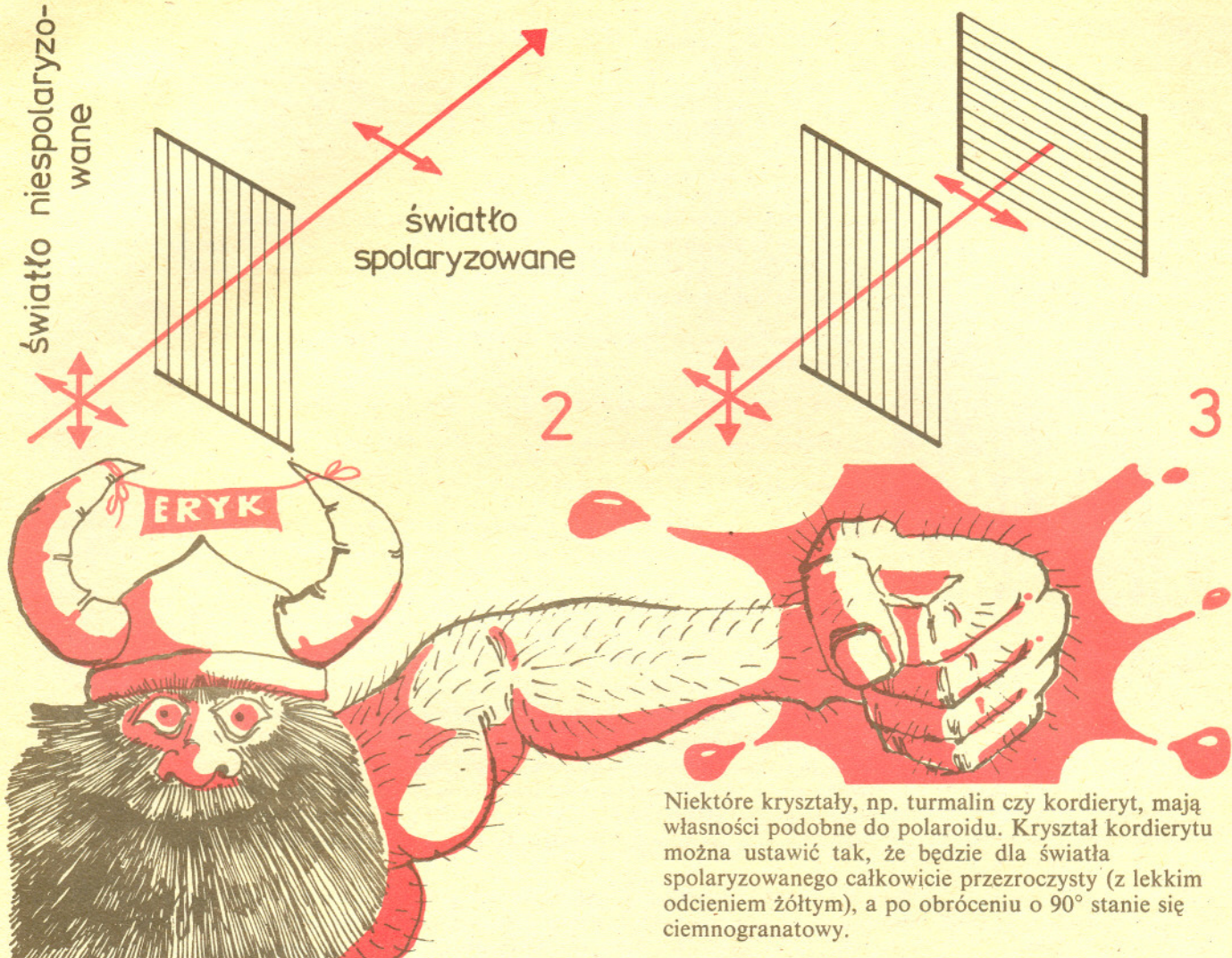
Na dużych szerokościach geograficznych, np. za kołem polarnym, nie można polegać na kompasie. Jego wskazania zaburza bliskie sąsiedztwo bieguna magnetycznego. Nie zawsze też nawigator może określić położenie posługując się Słońcem. Zdarza się bowiem, że nawet w południe Słońce znajduje się poniżej horyzontu. Przed wprowadzeniem nawigacji satelitarnej nawigatorzy samolotów używali w takiej sytuacji tzw. kompasu zmierzchu, który pozwala odnaleźć położenie Słońca poniżej horyzontu. Wykorzystuje się przy tym fakt, iż od kierunku padania promieni słonecznych zależy polaryzacja błękitu nieba.

Aby przekonać się, że światło pochodzące z różnych punktów nieba różni się nie tylko natężeniem, można wykonać doświadczenie z rysunku 1. Potrzebna jest szklana szybka, najlepiej pomalowana z jednej strony na czarno. Obserwować będziemy odbite w szybce niebo. Przy ustawieniu takim jak na rysunku odbicie jest stosunkowo jasne. Po obróceniu szybki o 90° (przy zachowaniu kąta około 56° między kierunkiem padania i płaszczyzną szybki) odbity obraz staje się wyraźnie ciemniejszy. Wygodnie jest prowadzić obserwacje zenitu o zachodzie Słońca. Najlepsze wyniki daje jednak zastąpienie szybki polaroidem.



Polaroid wykonuje się rozciągając silnie w jednym kierunku folię plastikową, która zbudowana jest z długich cząsteczek organicznych. Rozciąganie powoduje równoległe ustawienie się cząsteczek. Następnie zanurza się folię w roztworze zawierającym jod. Jod przyczepia się do cząsteczek dostarczając elektronów, które mogą się swobodnie poruszać, ale tylko wzdłuż cząsteczek. Gotowy polaroid zachowuje się jak drabinka z drutów, przy czym odległość między drutami jest w przybliżeniu równa długości fali świetlnej. Część energii światła padającego na polaroid jest pochłaniana. Zamienia się ona na energię prądu elektrycznego w cząsteczkach. Dlatego polaroid jest ciemniejszy od szkła. Światło przechodzące jest spolaryzowane w kierunku, w którym prąd nie może płynąć, czyli prostopadłe do cząsteczek (rys. 2). Dwa skrzyżowane polaroidy pochłaniają światło w całości (rys. 3).

Obserwując niebo przez polaroid trzymany blisko oka można, przy niektórych ustawieniach jego osi, zauważyć na niebie ciemny pas. Słońce znajduje się w kierunku prostopadłym do osi polaroidu i kierunku zaciemnienia (rys. 4).



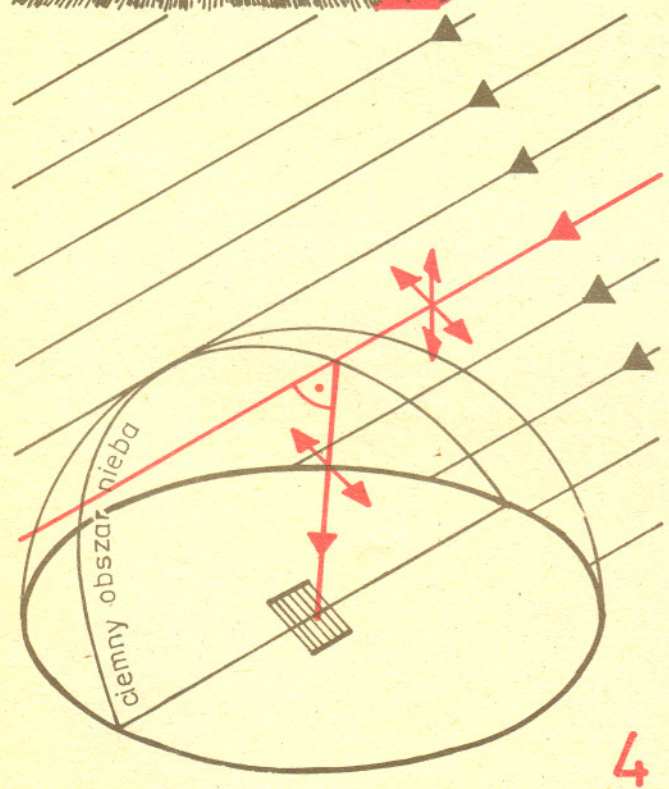
światło spolaryzowane

światło niespolaryzowane

2

3

Niektóre kryształy, np. turmalin czy kordieryt, mają własności podobne do polaroidu. Kryształ kordierytu można ustawić tak, że będzie dla światła spolaryzowanego całkowicie przezroczysty (z lekkim odcieniem żółtym), a po obróceniu o 90° stanie się ciemnogrnatowy.



4

Według starych sag skandynawskich Wikingowie umieli określić położenie Słońca, nawet gdy było pod horyzontem lub za chmurami, za pomocą magicznych „kamieni słonecznych”. Długo pozostawało zagadką, czym były owe „kamienie”. Bardzo prawdopodobne wyjaśnienie zostało znalezione przez duńskiego archeologa Thorkilda Ramskou, który wiedział coś niecoś o Wikingach i przez dziesięcioletniego chłopca, który wiedział o „kompasie zmierzchu” (jego ojciec był głównym nawigatorem Skandynawskich Linii Lotniczych). Ramskou napisał w pewnym czasopiśmie archeologicznym o „słonecznych kamieniach”. Chłopiec to przeczytał i wpadł na pomysł, iż mogą mieć one związek z „kompasem zmierzchu”. Następnie Ramskou z jubilerem dworu królewskiego Danii zebrali i zbadali wiele kryształów znajdujących w Skandynawii. Najlepszym „kamieniem słonecznym” okazał się kordieryt. Można za jego pomocą znaleźć położenie Słońca z dokładnością do $\pm 2,5^\circ$, nawet gdy znajduje się 7° poniżej horyzontu.

Małą Deltę przygotował Maciej JĘDRZEJCZAK

Proste, szkolne zadanie

Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Jakiś czas temu córka przyniosła ze szkoły następujące zadanie domowe:

Na dwóch izolowanych przewodzących kulach o promieniach 10 cm i 20 cm zgromadzono ładunki $-20 \mu\text{C}$ i $+50 \mu\text{C}$. Jakie ładunki Q_{10} i Q_{20} znajdą się na tych kulach po ich zetknięciu i ponownym rozdzieleniu?

Córka szybko uporała się z zadaniem zarabiając nazajutrz, zawsze mile widzianą, piątkę. Oto jej rozwiązanie.

1. Prawo zachowania ładunku: $Q_{10} + Q_{20} = (50 - 20) \mu\text{C} = 30 \mu\text{C}$.

2. Równość potencjałów kul: $\frac{Q_{10}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,1 \text{ m}} = \frac{Q_{20}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,2 \text{ m}}$.

Odpowiedź: $Q_{10} = 10 \mu\text{C}$, $Q_{20} = 20 \mu\text{C}$.

Kiedy przeprowadziłem test wśród znajomych fizyków, większość ich takie właśnie rozwiązanie, bez namysłu, podawała. A przecież jest to rozwiązanie całkowicie błędne. Wzór na potencjał

kuli $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ obowiązuje, gdy:

- a) kula jest naładowana równomiernie,
- b) nie ma w jej pobliżu żadnych innych źródeł pola.

W naszym zadaniu żaden z tych warunków nie jest spełniony. Szczególnie komplikuje sprawę fakt nierównomiernego rozkładu ładunku na powierzchniach obu kul. Zjawisko indukowania pewnego rozkładu ładunku w przewodniku jest zawsze wspomniane w elementarnych kursach fizyki, ale prawie nigdy nie jest badane ilościowo ze względu na poważne problemy matematyczne, jakie się z tym wiążą. Wyznaczanie pola elektrycznego w obecności przewodników jest natomiast standardowym działem klasycznej fizyki teoretycznej.

W pewnych przypadkach — nasze zadanie do nich właśnie należy — to trudne na ogół zagadnienie można rozwiązać stosunkowo prosto. Jest tak wtedy, gdy działanie wyindukowanego w przewodniku ładunku da się zastąpić działaniem jednego lub pewnej liczby fikcyjnych ładunków punktowych. W dalszej części tego artykułu zbadamy oddziaływanie pojedynczego ładunku z przewodzącą płaszczyzną, następnie ze sferą i wreszcie opierając się na uzyskanych wynikach rozwiążemy problem podziału ładunku między dwie stykające się kule.

Niech półprzestrzeń $x < 0$ wypełniona będzie przewodnikiem (rys. 1). Gdy do powierzchni granicznej zbliżymy ładunek punktowy o wartości Q , jego pole elektryczne wywoła w przewodniku krótkotrwały prąd, który rozdzieli (dotychczas dokładnie wymieszane) ładunki dodatnie od ujemnych. Te rozdzielone ładunki wytworzą dodatkowe pole zmniejszające płynący prąd, aż do ustalenia się stanu równowagi, w którym prąd już nie będzie płynął, a dodatkowe pole elektryczne przewodnika będzie ściśle kompensować (wewnątrz przewodnika) pole elektryczne ładunku zewnętrznego.

Wyindukowany ładunek występuje wyłącznie na powierzchni. Istotnie, gdybyśmy przypuścili, że wewnątrz przewodnika jest jakiś obszar o gęstości ładunku różnej od zera, to na mocy prawa Gaussa strumień pola przez powierzchnię, otaczającą ów obszar, musiałby też być różny od zera. Jest to jednak niemożliwe, skoro pole E jest tam (tzn. wewnątrz przewodnika) równe zeru, c.b.d.o.

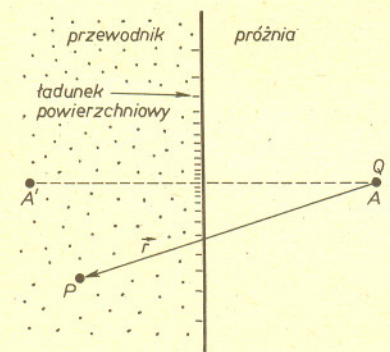
Oznaczając pole elektryczne wyindukowanego ładunku powierzchniowego E_i mamy dla $x < 0$, np. w punkcie P :

$$0 = E_i + \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

czyli

$$E_i = \frac{(-Q)r}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Jest to ważny przykład ładunku rozciągniętego wytwarzającego pole identyczne (w półprzestrzeni $x < 0$) z polem ładunku punktowego $-Q$ umieszczonego w początku wektora r . Ze względu na



Rys. 1



Rozwiązanie zadania M 467. Niech $a = m + n$ oznacza łączny kapitał, S_x — średnią długość gry przy założeniu, że pierwszy gracz ma kapitał początkowy x . Wtedy $S_0 = S_a = 0$. Rozpatrzmy sytuację po pierwszym rzucie monetą. Kapitał pierwszego gracza

z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ wzrośnie o 1 i z takim samym prawdopodobieństwem zmaleje o 1. Dlatego dla $1 \leq x \leq a-1$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_{x-1} + 1) + \frac{1}{2}(S_{x+1} + 1),$$

skąd $2S_x = S_{x-1} + S_{x+1} + 2$. Niech teraz $\Delta_i = S_i - S_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \dots, a$. Mamy $\Delta_i - \Delta_{i-1} = -2$, czyli $\Delta_i = c - 2(i-1)$, natomiast $S_i = \Delta_i + \Delta_{i-1} + \dots + \Delta_1$ (ponieważ $S_0 = 0$), zatem

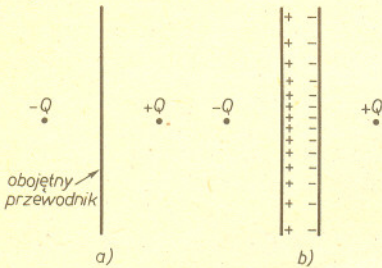
$$S_i = \frac{c + c - 2(i-1)}{2} \cdot i = (c + 1 - i) \cdot i.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą c . Ale $S_a = (c + 1 - a) \cdot a = 0$, stąd $c + 1 = a$. Ostatecznie $S_i = (a - i) \cdot i$, czyli $S_m = m \cdot n$.

symetrię jest jasne, że pole naszego *plaskiego* ładunku powierzchniowego, obserwowane w półprzestrzeni $x > 0$, jest też identyczne z polem ładunku $-Q$, ale umieszczonego tym razem w zwierciadlanym odbiciu punktu A . Ładunek $-Q$ w punkcie A' nazywa się ładunkiem-obrazem.

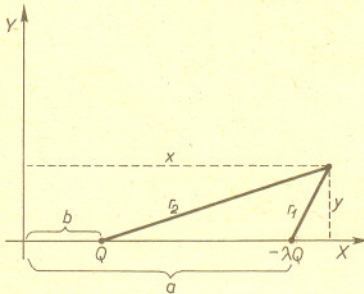
Zauważmy, że ogromna większość substancji przewodnika, którym tak rozrzutnie wypełniliśmy całą półprzestrzeń, nie jest w istocie do niczego potrzebna. Można usuwać dowolnie duże kawały neutralnego przecież metalu (byle nie zaczepić o powierzchnię) nie zmieniając wartości pola ani dla $x < 0$, ani dla $x > 0$. Wystarczy, w istocie, wziąć cieką przewodzącą blachę i do niej zbliżyć ładunek, a wytworzone pole elektryczne będzie takie samo jak przy półprzestrzeni przewodzącej. Przewodząca płaszczyzna rozdziela przestrzeń na dwa rozłączne obszary. Jak się przekonaliśmy, pole po jednej stronie nie zależy zupełnie od ładunków umieszczonych po stronie przeciwnej. Za to pole elektryczne po stronie ładunku uzupełnione jest dodatkowym polem ładunku indukowanego. W identyczny sposób można udowodnić ekranującego działania powierzchni przewodzącej obejmującej obszar skończony. Dla płaszczyzny wykazaliśmy ponadto, że ładunek wyindukowany równoważny jest po stronie źródła punktowemu ładunkowi-obrazowi umieszczonemu za ekranem.

Nim przejdziemy do badania zachowania powierzchni sferycznej, przeprowadźmy pewien eksperyment myślowy. Rozważmy układ dwóch identycznych ładunków przeciwnego znaku $+Q$ i $-Q$. Ładunki te wytwarzają pole elektryczne, które ma płaszczyznę ekwipotencjalną o potencjale zero. Zaczniemy cieką warstwę wokół tej powierzchni wypełniać przewodnikiem. Ponieważ wprowadzony przewodnik łączy punkty o jednakowym potencjale, nie popłynie po nim żaden prąd, nie zgromadzi się na nim żaden ładunek. Możemy naszym płaskim przewodnikiem rozciąć przestrzeń na dwie części nie wywołując żadnej zmiany pola elektrycznego (rys. 2a).



Rys. 2

Sytuacja przypomina bardzo tę poprzednio rozpatrywaną, ale teraz oba ładunki są rzeczywiste, a przewodnik nie wytwarza żadnego dodatkowego pola. Jeśli jednak uwzględnić pewną skończoną grubość przewodnika, to ponieważ jego wnętrze musi być wolne od pola, więc zgodnie z wcześniejszą analizą po obu jego stronach muszą wyindukować się odpowiednie ładunki ekranujące (rys. 2b). W symetrycznym położeniu źródeł zewnętrznych gęstości ładunków indukowanych po przeciwnych stronach są równe co do wartości bezwzględnej i dlatego ładunki te nie wytwarzają pola w otaczającej przestrzeni. Jeśli jednak zaczniemy przemieszczać względem przewodnika nabój $-Q$, to wystąpi zmiana gęstości powierzchniowej ładunku dodatniego, który go ekranuje, ale nie spowoduje to ani zmiany gęstości ładunku indukowanego po prawej stronie przewodnika, ani nie zmieni to pola w prawej półprzestrzeni. W szczególności, gdy ładunek $-Q$ doprowadzimy do samej powierzchni przewodzącej i pozwolimy mu zneutralizować się wzajemnie z ładunkiem indukowanym — dostaniemy dokładnie sytuację poprzednio rozpatrywaną. Zniknął ładunek rzeczywisty $-Q$, pozostało jednak po prawej stronie pole elektryczne, jakie on na początku wytwarzał!



Rys. 3

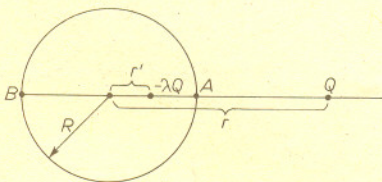
Rozpatrzmy teraz dwa ładunki przeciwnego znaku, ale o różnych wartościach bezwzględnych, np. Q i $-\lambda Q$, gdzie $0 < \lambda < 1$. Wyznamy miejsce geometryczne punktów, które są λ razy bliżej ładunku słabszego niż silniejszego. Będzie to oczywiście powierzchnia o potencjale zero.

Ponieważ układ ma symetrię obrotową, wystarczy rozpatrzeć przekrój szukanej powierzchni płaszczyzną rysunku (rys. 3). Warunek nasz: $\lambda r_2 = r_1$ po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa przyjmie postać: $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = \lambda \sqrt{y^2 + (x-b)^2}$.

Równanie powyższe po podniesieniu do kwadratu przekształcamy do postaci:

$$(1 - \lambda^2) \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{1 - \lambda^2} (2a - \lambda^2 \cdot 2b)x + \frac{1}{1 - \lambda^2} (a^2 - \lambda^2 b^2) \right] = 0,$$

z której odczytujemy, że szukaną krzywą jest okrąg o środku łączącym na osi x -ów (jest to tzw. okrąg Apoloniusza). Zamiast wyznaczyć teraz promień okręgu i jego położenie w zależności od λ i odległości między ładunkami, wygodniej jest przyjąć, że znamy R i r , a szukamy r' i λ (rys. 4). Z warunku zerowania potencjału w punktach A i B mamy

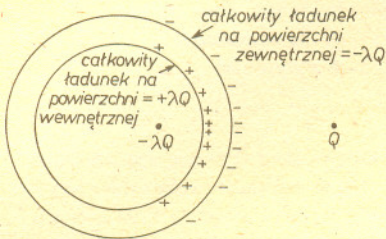


Rys. 4

$$\frac{\lambda Q}{R - r'} = \frac{Q}{r - R} \quad \text{oraz} \quad \frac{\lambda Q}{R + r'} = \frac{Q}{r + R}.$$

Rozwiązując ten układ dostajemy $\lambda = \frac{R}{r}$ oraz $r' = \frac{R^2}{r}$. W geometrii odwzorowanie

przeprowadzające punkt odległy o r (gdzie znajduje się ładunek Q) w jego obraz odległy o r' (gdzie znajduje się ładunek $-\lambda Q$) nosi nazwę inwersji (względem okręgu — jeśli rozważamy płaszczyznę, a względem sfery — jeśli rozważamy przestrzeń trójwymiarową).



Rys. 5

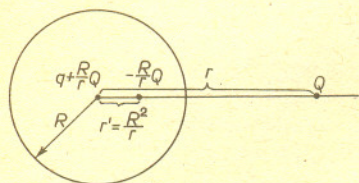
Jeśli zaczniemy teraz abstrakcyjną powierzchnię ekwipotencjalną pokrywać przewodnikiem, to podobnie jak poprzednio nie wpłynie to zupełnie na natężenie pola elektrycznego, ani wewnątrz, ani na zewnątrz utworzonej w ten sposób powłoki sferycznej. Jedynie w samym cienkim (lecz przecież w praktyce nie nieskończenie cienkim) obszarze, zajęтым przez przewodnik, wystąpi zmiana, gdyż tam pole musi być ekranowane i od ładunku $-\frac{R}{r}Q$, i od ładunku Q (rys. 5).

Podobnie jak w przypadku płaszczyzny i teraz można przesuwac ładunek wewnętrzny aż do jego zneutralizowania z ładunkiem indukowanym na powierzchni wewnętrznej, a pole elektryczne na zewnątrz pozostanie nie zmienione. Tym samym uzyskaliśmy rozwiązanie problemu elektrostatycznego kuli o całkowitym ładunku $-\lambda Q$, w pobliżu której znajduje się ładunek Q . Istnienie czy nieistnienie wewnątrz kuli miejsc nie wypełnionych przewodnikiem jest nieistotne. Jeśli na kulę wprowadzimy w tej sytuacji dodatkowy ładunek, to zgodnie z zasadą superpozycji możemy przyjąć, że rozłoży się on równomiernie na powierzchni kuli, a jego pole elektryczne będzie polem ładunku punktowego umieszczonego w środku (tak przecież się dzieje, gdy wprowadzimy ładunek na odosobnioną, nie naładowaną wcześniej kulę). Jeśli chcemy, by

całkowiły ładunek kuli wynosił q , musimy dodać ładunek $q + Q \frac{R}{r}$. Prowadzi to do

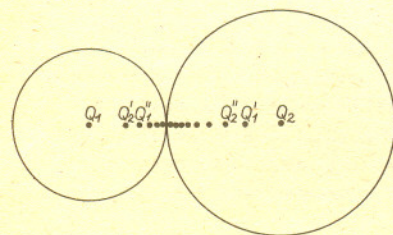
następującej konfiguracji (rys. 6): Ładunek kuli wynosi q , ładunek zewnętrzny odległy o r równy jest Q — a wytworzone pole elektryczne jest polem trzech ładunków punktowych pokazanych na rysunku. Jasne jest, że umieściwszy na zewnątrz kuli N ładunków punktowych, pole elektryczne ładunku indukowanego opisałibyśmy przez $N + 1$ fikcyjnych ładunków, z których jeden byłby w środku, a pozostałe w punktach uzyskanych przez inwersję położeń ładunków oryginalnych. Zauważmy ponadto, że potencjał kuli zależy tylko od ładunku umieszczonego w środku, a nie od

$$\text{rzeczywistego ładunku na kuli: } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(q + \frac{QR}{r} \right).$$



Rys. 6

Uzyskana sytuacja zaczyna przypominać nasz pierwotny problem. Gdyby zamiast ładunku Q była druga przewodząca kula, to poddana by ona była działaniu pola ładunków-obrazów pierwszej kuli i wytwarzałyby się w niej ładunki-obrazy, generujące z kolei nowe obrazy w pierwszej kuli. Ciąg ładunków-obrazów opisujący pole elektryczne każdej z kul będzie, rzecz jasna, nieskończony. Wyznamy położenia i wartości wszystkich tych ładunków.



Rys. 7

Konstrukcję ciągu rozpoczniemy od umieszczenia w środkach kul ładunków Q_1 i Q_2 . Do tego musimy dodać obrazy tych ładunków, obrazy tych obrazów, obrazy obrazów tych obrazów, etc. Sytuacja w ten sposób uzyskana (rys. 7) jest w pełnej zgodzie ze znaną wcześniej konfiguracją z jednym ładunkiem zewnętrznym i z zasadą superpozycji. Zauważmy przede wszystkim, że na powierzchni kuli o promieniu R_1 pary ładunków $Q_2, Q_2'; Q_1', Q_1''; Q_2'', Q_2'''; Q_1''', Q_1''''$; dają zerowy potencjał. Jedyny wkład do potencjału (oznacmy go V) da ładunek Q_1 . Stąd

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 V R_1.$$

Analogicznie

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 V R_2.$$

Znamy pierwsze wyrazy ciągów — reguły znalezione dla inwersji pozwolą podać rekurencję wyrażającą wartości dalszych wyrazów przez poprzednie. Wystarczy skupić uwagę na ciągu $Q_1, Q_1', Q_1'', Q_1''', \dots$ (ciąg $Q_2, Q_2', Q_2'', Q_2''', \dots$ uzyskamy zamieniając w rozwiązaniu dla Q_1, \dots promienie R_1 i R_2 miejscami).

Oznaczmy dla wygody

$$Q_1 = q_1; Q_1' = q_2; Q_1'' = q_3, \dots \text{ etc.}$$

Przyjmijmy, że ładunek q_n odległy jest od punktu styczności o x_n (rys. 8). Mamy

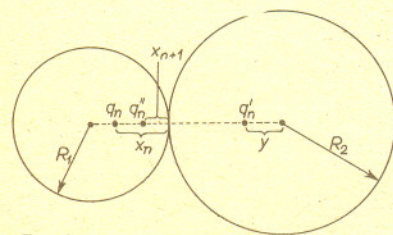
$$y = \frac{R_2^2}{R_2 + x_n}, \quad R_1 - x_{n+1} = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 - y}.$$

Eliminując y po prostych przekształceniach uzyskujemy relację:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n} + 1.$$

Wielkości $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n}$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1, a ponieważ znamy wartość tego wyrażenia dla $n = 1$ ($x_1 = R_1$), więc możemy od razu napisać wyraz ogólny:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + n - 1,$$



Rys. 8



Rozwiązanie zadania M 468. Nic. Pomalujmy drzewa na różowo i turkusowo tak, by sąsiednie drzewa były różnych kolorów. Zauważmy, że po skoku parzystość liczby wiewiórek na drzewach różowych i parzystość liczby wiewiórek na drzewach turkusowych nie ulegnie zmianie. Na początku liczby te to 5 i 5, a więc rozkład 10 i 0 nie może być nigdy osiągnięty.



Rozwiązanie zadania M 466. Rozpatrzmy punkty A i B na obwodzie wielokąta wybrane tak, by dzieliły jego obwód na połowy. Niech O będzie środkiem odcinka AB . Wtedy koło o środku O i średnicy a pokrywa wielokąt. Istotnie, weźmy dowolny punkt M na obwodzie wielokąta oraz punkt M' — obraz M przy symetrii środkowej względem O . Mamy

$$OM \leq \frac{1}{2}(M'A + AM) = \frac{1}{2}(MB + AM) \leq \frac{1}{2}a,$$

zatem M leży w kole.

Na zakończenie zauważmy, że jeśli $d < a$, to np. trójkąt o bokach $\frac{a+d}{2}$, $\frac{a+d}{2}$, $a-d$ nie mieści się w żadnym kole o średnicy d .

czyli

$$x_n = \frac{R_1 R_2}{R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)}.$$

Znając położenie ładunku q_n i stosując dwukrotnie wzór na wartość ładunku-obrazu możemy uzyskać wzór rekurencyjny (pomijam towarzyszące temu proste przekształcenia algebraiczne):

$$q_{n+1} = q_n \frac{R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)}{R_2 + n(R_1 + R_2)},$$

czyli

$$q_{n+1}[R_2 + n(R_1 + R_2)] = q_n[R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)] \stackrel{(*)}{=} \text{const.}$$

Stałą wyznaczamy podstawiając $n = 1$ (bo znamy q_1) i dostajemy

$$q_n = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} + n - 1}.$$

Ujemne ładunki-obrazy q'_n wynoszą:

$$q'_n = -\frac{R_2}{R_2 + x_n} \cdot q_n = -4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Oznaczając

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}$$

możemy całkowite ładunki zgromadzone na kulach zapisać jako następujące szeregi:

$$Q_{10} = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha_2 + 1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{\alpha_2 + 2} - \frac{1}{1+2} + \dots \right)$$

$$Q_{20} = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{\alpha_1 + 2} - \frac{1}{1+2} + \dots \right).$$

Uzyskane szeregi są dość wolno zbieżne. Nie stanowi to problemu, gdy nie zależy nam na zbyt wielkiej dokładności lub jeśli dysponujemy komputerem. Jeśli jednak chwilowo nie mamy go pod ręką, możemy spróbować zsumować te szeregi analitycznie.

Zapisując ogólny wyraz szeregu jako całkę oznaczoną:

$$\frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{1+n} = \int_0^1 x^{\alpha+n-1} dx - \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 x^n (x^{\alpha-1} - 1) dx$$

łatwo wykonamy sumowanie pojawiającego się postępu geometrycznego $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{1+n} \right) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - 1}{1-x} dx.$$

Po podstawieniu $x = y^3$ dla wartości $\alpha = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ dostajemy po prostych przekształceniach

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - 1}{1-x} dx = 3 \int_0^1 \frac{y + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dy = \frac{3}{2} \ln 3 \pm \sqrt{3} \frac{\pi}{6}.$$

Daje to stosunek ładunków

$$\frac{Q_{20}}{Q_{10}} = \frac{3\sqrt{3} \ln 3 + \pi}{3\sqrt{3} \ln 3 - \pi} \approx 3,45,$$

co w połączeniu z równaniem na sumę ładunków pozwala wreszcie obliczyć Q_{10} i Q_{20} :

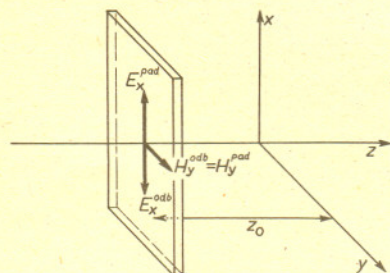
$$Q_{10} = 6,75 \mu\text{C}, \quad Q_{20} = 23,25 \mu\text{C}.$$

Ufffff ...



Rozwiązanie zadania F 219. Na powierzchni przewodnika są spełnione następujące warunki dla składowych natężenia pola elektrycznego i magnetycznego

$$E_x^{\text{odb}} = -E_x^{\text{pad}} \text{ oraz } H_y^{\text{odb}} = H_y^{\text{pad}}$$



Na tej podstawie otrzymujemy

$$E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} z_0 - \omega t\right) = -E_0' \cos\left(-\frac{\omega'}{c} z_0 - \omega' t\right),$$

co daje

$$E_0 = -E_0' \quad \text{oraz}$$

$$(*) \quad \frac{\omega}{c} z_0 - \omega t = -\frac{\omega'}{c} z_0 - \omega' t,$$

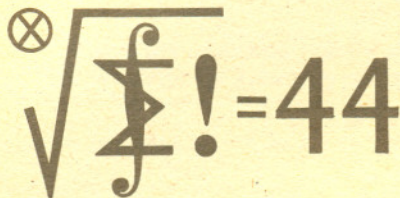
gdzie z_0 jest aktualną współrzędną płyty odbijającej. Jeśli przyjmiemy, że w chwili początkowej płyta przechodziła przez początek układu współrzędnych, to wówczas położenie płyty, która porusza się ruchem jednostajnym, jest określone równaniem $z_0 = vt$. Wstawiając równanie na z_0 do (*) otrzymujemy

$$\omega \frac{v}{c} - \omega = -\omega' \frac{v}{c} - \omega',$$

skąd

$$\omega' = \omega \frac{1-v/c}{1+v/c},$$

a więc taką samą zmianę częstotliwości ν jak w przypadku zderzenia fotonu ze zwierciadłem (por. zadanie F 218 w tym numerze).



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 137 /WT=3,26/ i 138 /WT=1,36/
z numeru 10/1986

Henryk Mikołajczak - Wałbrzych	42,73pkt
Zbigniew Zaus - Kraków	39,41pkt
Michał Marczak - Radom	37,92pkt
Mirosław Mikucki - Augustów	36,20pkt
Edward Orzechowski - Warszawa	35,43pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które przysłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1987

Zadania z matematyki nr 149, 150

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

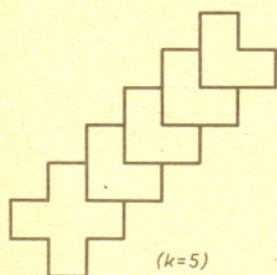
149. Niech b będzie średnią arytmetyczną długości wszystkich boków pewnego wielokąta wypukłego, a d — średnią arytmetyczną długości wszystkich przekątnych tego wielokąta. Dowieść, że $b < d$.

150. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d , spełniające warunki: $d > 0, c^2 + a^2d < 4bd$. Wykazać, że wielomian $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

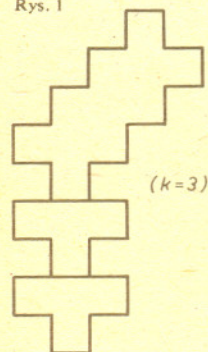
Zadanie 150 przysłał pan Wojciech Boratyński z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1986

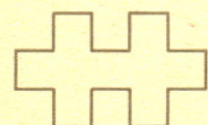
Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

141. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = \prod_{k=0}^7 (n+k)^{-1}$.

142. Wyznaczyć liczby naturalne będące polami wielokątów ograniczonych łamanymi zamkniętymi bez samoprzecięć, o bokach długości 1, kolejno prostopadłych.

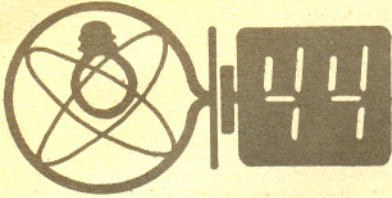
141. Oznaczmy $b_n = \prod_{k=0}^6 (n+k)^{-1}$ i zauważmy, że $b_n < n^{-7}$ oraz $b_n - b_{n+1} =$

$$= \prod_{k=1}^6 (n+k)^{-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+7} \right) = 7n^{-1} \left(\prod_{k=1}^6 (n+k)^{-1} \right) (n+7)^{-1} = 7a_n. \text{ Stąd}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{7} (b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - b_4 + \dots) = \frac{1}{7} b_1 = \frac{1}{7 \cdot 7!}.$$

142. Niech K oznacza krzyżyk złożony z 5 k. j. (kwadratów jednostkowych), a L oraz T — figury z 3 oraz 4 k. j., w kształcie liter L oraz T. Dla $k = 1, 2, 3, \dots$ możemy z figury K oraz $k-1$ egzemplarzy figury L zbudować dopuszczalny (tj. spełniający warunki zadania) wielokąt W o polu $|W| = 3k+2$ (rysunek 1). Dołączając do niego jeden lub dwa egzemplarze figury T otrzymujemy wielokąty dopuszczalne o polach $3k+6$ i $3k+10$ (rysunek 2). Wyrazy tych trzech ciągów przyjmują wartości 5, 8, 9 oraz wszystkie wartości naturalne większe od 10. Oczywiście liczba 1 też jest polem dopuszczalnego wielokąta. Pokażemy, że pozostałe liczby naturalne, tj. 2, 3, 4, 6, 7, 10 — nie są.

Weźmy dowolny wielokąt dopuszczalny W . Niech n będzie największą długością prostokąta P o szerokości jednostkowej, o bokach równoległych do boków W , zawartego w W ; nazwijmy dłuższe boki P poziomymi. Gdy $n \geq 6$, W zawiera ≥ 3 k. j. w każdym z dwóch rzędów poziomych przyległych do P (bo inaczej brzeg W miałby bok długości > 1), a więc $|W| \geq 12$. Gdy $n = 5$, w każdym z tych rzędów W zawiera ≥ 2 k. j.; jeśli 2, to muszą one przylegać do drugiego i czwartego segmentu prostokąta P ; jeśli ≥ 3 , to w kolejnym rzędzie poziomym muszą być dalsze fragmenty W . Zatem albo W jest wielokątem z rysunku 3, albo $|W| > 5+2+3 = 10$. Gdy $n = 4$, W musi zawierać ≥ 2 k. j. w każdym z rzędów przyległych do P i jeszcze ≥ 2 k. j. w każdym z dwóch dalszych sąsiednich rzędów, tak, że $|W| \geq 12$. Gdy $n = 3$, W musi być wielokątem z rysunku 1 (dla pewnego k). Przypadek $n = 2$ jest niemożliwy, bo numerując „od dołu” kolejne rzędy kwadratów jednostkowych przecinające W widzimy, że w rzędzie drugim W ma ≥ 3 kolejne k. j. Ostatecznie, możliwe wartości $|W|$ przebiegają zbiór $\{1, 5, 8, 9\} \cup \{x \in \mathbb{N} : x \geq 11\}$.



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

47. Wolframowe włókno żaróweczki próżniowej ma przy nominalnym napięciu zasilającym 3,5 V temperaturę 2000 K. Jaka będzie temperatura włókna podczas zasilania żaróweczki napięciem 4,5 V? Przy jakim (orientacyjnie) napięciu nastąpi stopienie włókna? Można przyjąć, że wolfram w wysokiej temperaturze promieniuje jak ciało doskonale czarne. Opór właściwy wolframu jest w przybliżeniu proporcjonalny do $T^{1.2}$ (T — temperatura). Temperatura topnienia wolframu wynosi 3650 K.

48. Posiadanie pary uszu ułatwia nam określenie kierunku, z którego dochodzi dany dźwięk. Stwierdzono, że dokładność, z jaką można ten kierunek wyznaczyć, zależy od częstotliwości dźwięku, przy czym w przedziale częstotliwości od 2 kHz do 5 kHz jest ona wyraźnie mniejsza, aniżeli dla częstotliwości niższych oraz wyższych. Jakie przyczyny fizyczne mogą być odpowiedzialne za to zjawisko?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1986

Przypominamy treść zadań:

39. Na środku poziomej, podpartej na brzegach, sprężystej płyty umieszczono silnik. Stwierdzono przy tym, że płyta ugięła się w tym miejscu o 1 cm. Zakładając, że masa silnika jest dużo większa od masy płyty, obliczyć przybliżoną częstotliwość drgań rezonansowych silnika na tej płycie.

40. Jak zmienia się okres obiegu Ziemi wokół Słońca (rok gwiazdowy) na skutek wypromieniowania energii przez Słońce? Gęstość strumienia tej energii w odległości od Słońca, równej średniemu promieniowi orbity Ziemi, wynosi $1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$, pozostałe dane do obliczeń należy wziąć z tablic.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 35 /WT=2,20/ i 36 /WT=2,24/
z numeru 10/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	42,59pkt
Dzierżysław	Lipniacki	40,68pkt
Aleksander Surma	- Myszków	37,16pkt
Anna Gluza	- Toruń	29,27pkt
Piotr Bała	- Toruń	24,84pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	24,12pkt
Robert Repucha	- Gołdap	23,00pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	20,46pkt

39. Oznaczmy masę silnika przez m . Pod wpływem siły mg (g — przyspieszenie ziemskie) następuje ugięcie płyty o $x = 1 \text{ cm}$. Przyjmując proporcjonalność ugięcia do działającej siły wyznaczamy odpowiednią stałą sprężystości $k = mg/x$. Częstotliwość f drgań rezonansowych obliczamy tak, jak dla ciężarka zawieszonoego na sprężynie:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x}}$$

(widzimy, że częstotliwość ta jest taka sama, jak wahadła matematycznego o długości x). Po podstawieniu wartości mamy

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{0,01}} \text{ s}^{-1} \approx 5 \text{ Hz.}$$

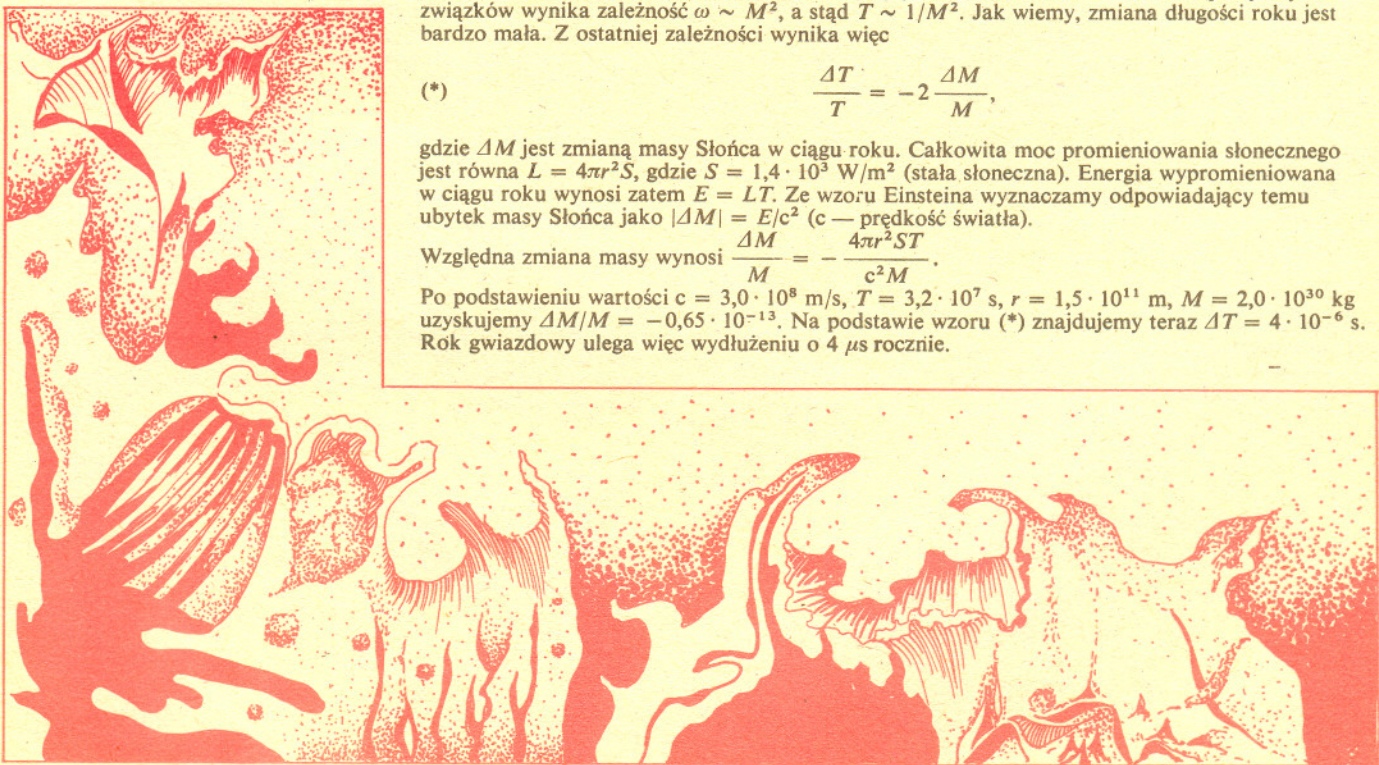
40. Orbitę Ziemi traktujemy jako kołową o promieniu r i wprowadzamy oznaczenia: M — masa Słońca, m — masa Ziemi, G — stała grawitacji, ω — prędkość kątowna Ziemi, T — okres obiegu Ziemi wokół Słońca. Ponieważ siła dośrodkowa utrzymująca Ziemię w ruchu po okręgu jest siłą przyciągania słonecznego, mamy $m\omega^2 r = GMm/r^2$. Z drugiej strony, niezależnie od zmian masy Słońca, zachowany jest moment pędu Ziemi względem Słońca: $m\omega r^2 = \text{const}$. Z powyższych związków wynika zależność $\omega \sim M^2$, a stąd $T \sim 1/M^2$. Jak wiemy, zmiana długości roku jest bardzo mała. Z ostatniej zależności wynika więc

$$(*) \quad \frac{\Delta T}{T} = -2 \frac{\Delta M}{M},$$

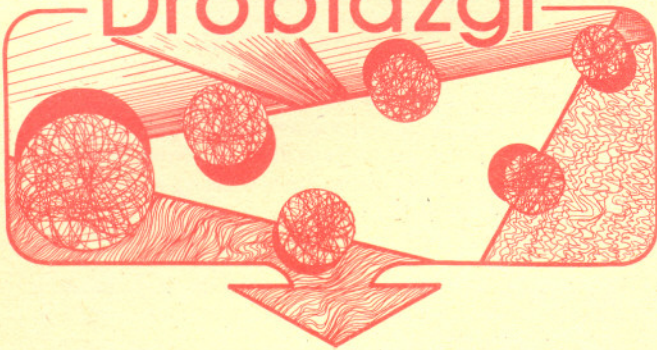
gdzie ΔM jest zmianą masy Słońca w ciągu roku. Całkowita moc promieniowania słonecznego jest równa $L = 4\pi r^2 S$, gdzie $S = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ (stała słoneczna). Energia wypromieniowana w ciągu roku wynosi zatem $E = LT$. Ze wzoru Einsteina wyznaczamy odpowiadający temu ubytek masy Słońca jako $|\Delta M| = E/c^2$ (c — prędkość światła).

$$\text{Względna zmiana masy wynosi } \frac{\Delta M}{M} = -\frac{4\pi r^2 S T}{c^2 M}.$$

Po podstawieniu wartości $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $T = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$, $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ uzyskujemy $\Delta M/M = -0,65 \cdot 10^{-13}$. Na podstawie wzoru (*) znajdujemy teraz $\Delta T = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Rok gwiazdowy ulega więc wydłużeniu o $4 \mu\text{s}$ rocznie.



Drobiazgi



Można przypuszczać, że jądra wielkich planet Układu Słonecznego — Jowisza i Saturna — składają się głównie z helu i wodoru. Astrofizycy konstruujący szczegółowe modele teoretyczne tych planet napotykają jednak poważną trudność — nic nie wiadomo o oddziaływaniach międzycząsteczkowych w warunkach, jakie tam prawdopodobnie panują. W centrum Jowisza ciśnienie osiąga bowiem 45 mln atmosfer przy temperaturze 20 tys. K, a na Saturnie 10 mln atmosfer przy 14 tys. K. Grupa fizyków z Narodowego Laboratorium im. Lawrence'a w Livermore (USA) przeprowadziła pierwsze eksperymenty, w których ciekły hel został ściśnięty do gęstości pięciokrotnie większej od normalnej. Pociski zawierające próbki helu o początkowej temperaturze 4,3 K wystrzelivano z prędkością 3—7 km/s w kierunku przeszkody. Ciśnienie w fali uderzeniowej, jaka powstała w chwili zderzenia, osiągało 560 tys. atmosfer, a temperatura rosła do 21 tys. K. Dotychczas udało się ustalić przybliżone równanie stanu helu (tj. zależność ciśnienia, objętości i temperatury) w tych ekstremalnych warunkach. Stwierdzono także wzrost znaczenia oddziaływań trój- i więcej cząsteczkowych.

Promieniowanie, które dociera do nas od Słońca, znacznie różni się od tego, które jest produkowane w jego centrum. Wewnątrz Słońca głównym rodzajem promieniowania elektromagnetycznego są promienie γ i X. Dopiero przy samej powierzchni, gdzie temperatura jest znacznie niższa, dominuje promieniowanie widzialne. Wędrowka kwantów promieniowania we wnętrzu gwiazd jest bardzo długa i silnie zakłócana. Odległość odpowiadająca promieniowi Słońca światło przebywa w próżni w ciągu 2,2 s, natomiast wytworzone w centrum Słońca wysokoenergetyczne kwanty pokonują tę drogę we wnętrzu Słońca w ciągu około miliona lat! Dzieje się tak, ponieważ każdy pochłonięty kwant jest następnie wyswiewany w przypadkowym kierunku. Oczywiście bywa, że zostanie przy tym „rozmięziony na drobne”, dlatego powierzchnię Słońca opuszcza już w postaci większej liczby kwantów o odpowiednio niższych energiach. Tylko neutrina opuszczają wnętrze Słońca praktycznie bez przeszkód, nie zmieniając swej energii i pędu. Ich badanie jest w zasadzie jedyną metodą obserwacji wnętrza gwiazd.

Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek A sześcianu o boku a i przecinająca sześcian tak, że jej linie przecięcia ze ścianami zawierającymi krawędź AB tworzą z tą krawędzią ten sam kąt α , odcina od sześcianu bryłę o objętości

$$\frac{a^3}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - 2p^3 + q^3),$$

gdzie

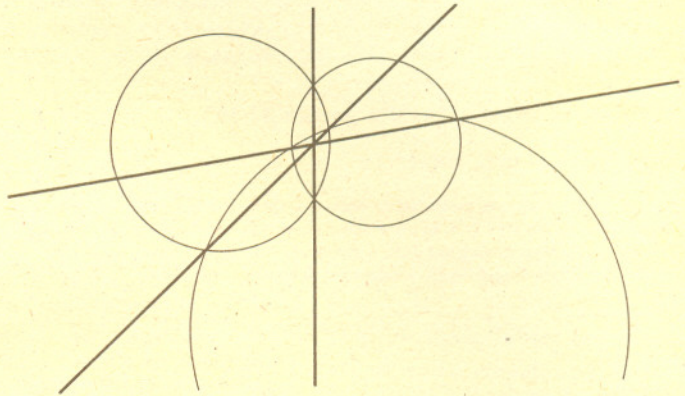
$$p = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 - \operatorname{ctg} \alpha & \text{dla } \alpha > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \leq \operatorname{arctg} 2, \\ 1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha & \text{dla } \alpha > \operatorname{arctg} 2. \end{cases}$$

Warto sprawdzić.

Oceny globalnej ilości meteorytów, jaką „zbiera” Ziemia każdej doby z przestrzeni kosmicznej, różnią się znacznie. Trudno więc przytaczać konkretne wartości prawdopodobieństwa upadku meteoru w dane miejsce na Ziemi, choć wiadomo, że jest ono bardzo małe. Mimo to nie jest wykluczone, że niektóre z tajemniczych zaginięć statków mogą być wywołane przez meteory. Wśród różnych niezwykłych spadków meteorów zanotowano około 10 spadków na statki. Zdarzyły się nawet przypadki zatopienia statków przez meteory. Przed wybuchem II wojny światowej omal nie został zatopiony w ten sposób u północno-wschodnich wybrzeży Ameryki wielki, holenderski statek towarowy „Ocean”.

Proste wyznaczone przez przecięcia każdych dwóch spośród trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie.

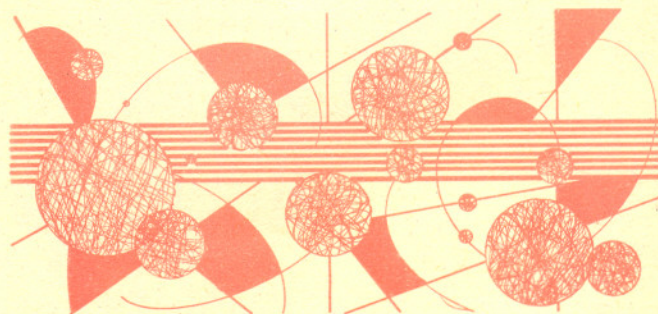


Prędkość liniowa punktu na równiku ziemskim, wynikająca z ruchu obrotowego naszej planety, jest równa około 0,5 km/s i maleje wraz ze wzrostem szerokości geograficznej (na szerokości geograficznej Warszawy osiąga wartość „zaledwie” 0,3 km/s). Znacznie większą prędkość liniową ma Ziemia na swej wokółsłonecznej orbicie — średnio 30 km/s, nie mówiąc już o prędkości Układu Słonecznego (w tym Ziemi) w ruchu obiegowym wokół centrum Galaktyki — 250 km/s. Dany punkt na Ziemi ma największą prędkość liniową względem Słońca podczas zimowych nocy (w pierwszych dniach stycznia). Dlaczego?

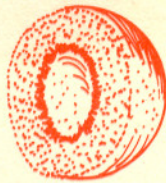
Nie tylko Wielkie Twierdzenie Fermata jest proste w sformułowaniu, a dowieść się nie daje. Nie wiadomo np. czy każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. Sprawdzenie dla konkretnej liczby parzystej dawało, jak dotąd, wynik pozytywny, ale to przecież nie dowód. Wiadomo natomiast, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych.

Do historii astronomii przeszło zakrycie Aldebarana (α Byka) przez tarczę Księżyca będącego w pobliżu pierwszej kwadry w dniu 9 marca 1497 roku. Zaobserwował je Mikołaj Kopernik wspólnie z włoskim astronomem Marią Dominikiem Novarą. Obserwacja ta wykazała zasadniczy błąd w ptolemeuszowskiej teorii ruchu Księżyca. Zaistniała sprzeczność między obserwacją a teorią, fatalna w skutkach dla teorii Ptolemeusza.

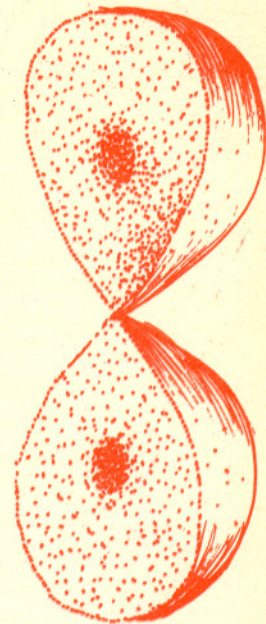
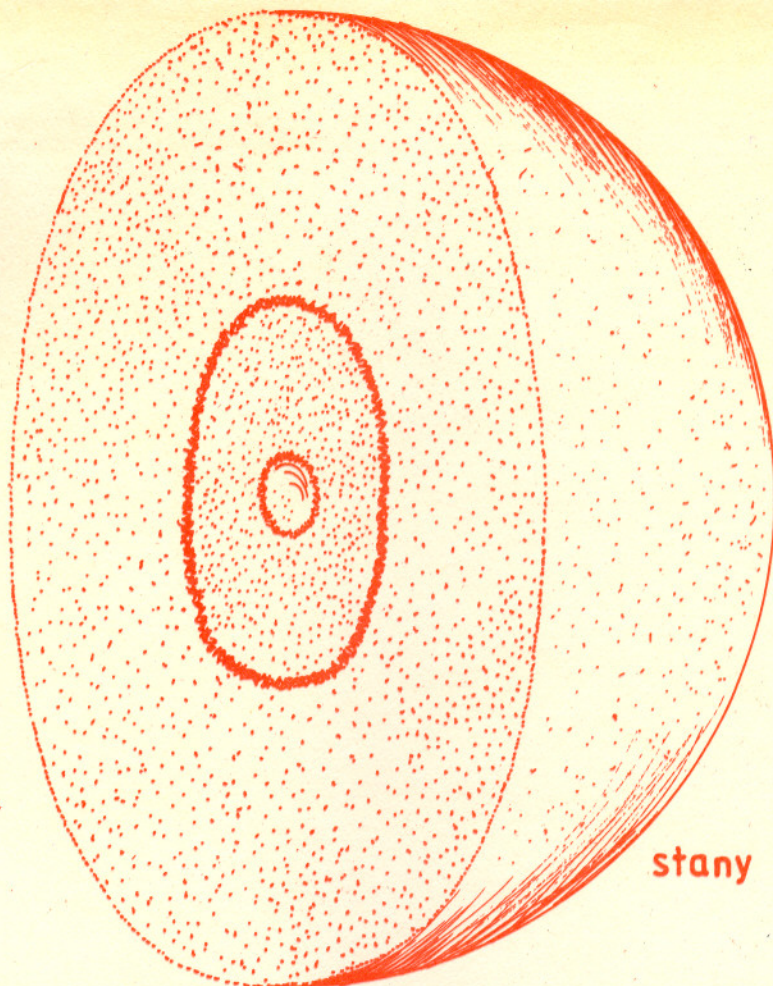
Miejszem geometrycznym punktów wnętrza kwadratu, dla których średnia geometryczna odległości od dwóch sąsiednich boków kwadratu jest równa odległości od przekątnej tego kwadratu, są ćwiartki okręgów.



10^8



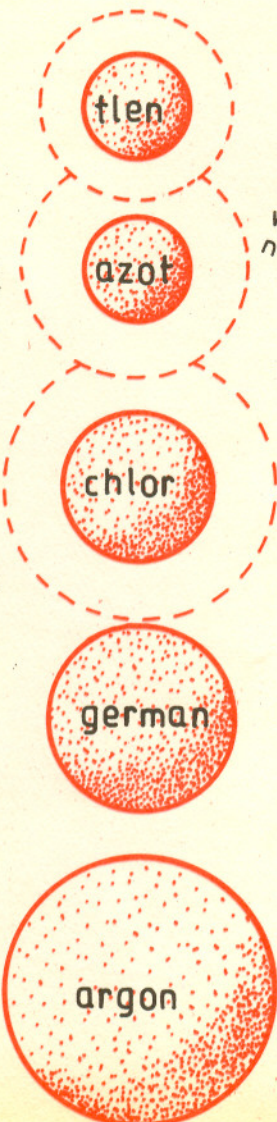
stan podstawowy



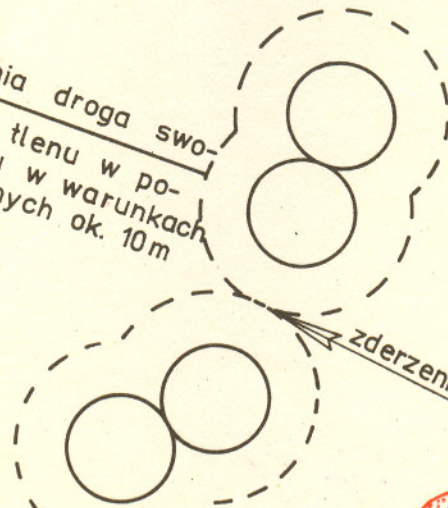
stany wzbudzone

CHMURA ELEKTRONU W ATOMIE WODORU

ROZMIARY ATOMÓW ZWIĄZANYCH W CZĄSTECZKACH

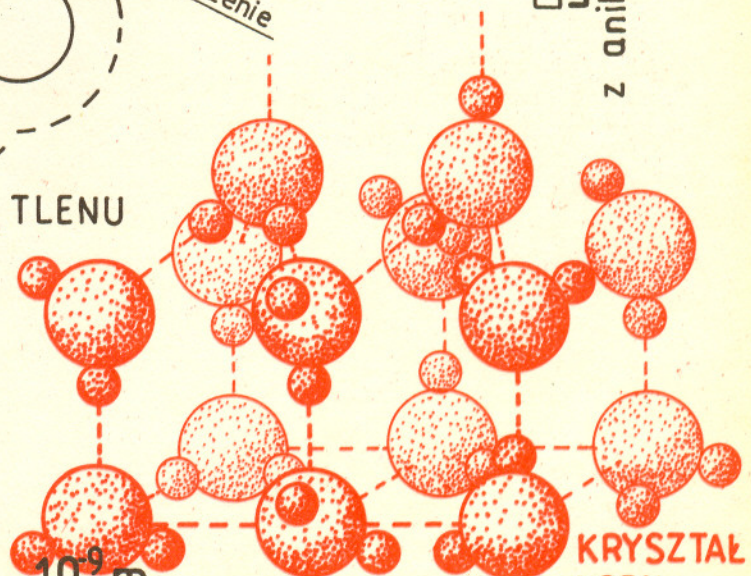


srednia droga swobodna tlenu w powietrzu w warunkach normalnych ok. 10m



CZĄSTECZKI TLENU

Długość fali fotonów z anihilacji elektronu i pozytonu



KRYSTAŁ LODU

10^{-9} m
 $10 \text{ \AA} = 1 \text{ m}\mu = 1 \text{ nm}$