

SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (158)

Chirurgia <i>dr Krzysztof S. Nowiński</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 5
Jak wygląda nasza Galaktyka? <i>dr Jacek Choloniewski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Jak rozwiązać równanie trzeciego stopnia?	str. 10
O Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki	str. 11
Klub 44	str. 12
Dobre wahadło, czyli dobra geometria	str. 14
Zadania	str. 15
Drobiazgi	str. 16

**W następnym numerze:
 Hipoteza Hadwiger**

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichoński
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tomasz Hofmokl — v-przewodniczący
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Pochocki
 dr Jan Rempała
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stępień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wolska
 prof. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnny,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska
 mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

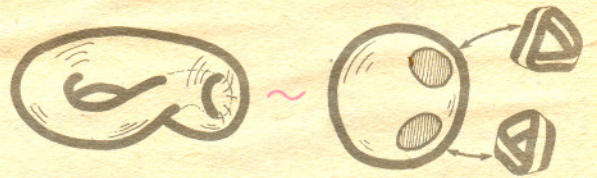
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 3031/12/86. P-25.

Wśród różnych przestrzeni, których badaniem zajmuje się topologia, szczególne miejsce zajmują różności, czyli przestrzenie, których każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą (dyskiem) w przestrzeni euklidesowej.

Są one ważne z jednej strony dlatego, że pojawiają się w naturalny sposób w wielu działach matematyki, a nawet poza nią (już Poincaré na przełomie XIX i XX wieku zaczął badać różności pojawiające się w zagadnieniach mechaniki teoretycznej), z drugiej zaś — ponieważ ich regularność w skali lokalnej pozwala na formułowanie silnych twierdzeń dotyczących ich

„globalnego” kształtu. Przykładem takiego twierdzenia może być klasyfikacja różności dwuwymiarowych, czyli powierzchni: dowodzi się, że każda powierzchnia zwarta jest homeomorficzna ze sferą, z której wycięto pewną liczbę kół „zaklejając” powstałe dziury „rurkami”, czyli zbiorami homeomorficznymi z powierzchnią walca, lub wstęgami Möbiusa. Liczba doklejanych rurek i wstęg Möbiusa może być przy tym wyznaczona z pewnych algebraicznych niezmienników powierzchni.

Dwa zbiory są homeomorficzne, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja ciągła z jednego na drugi i taka, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła.

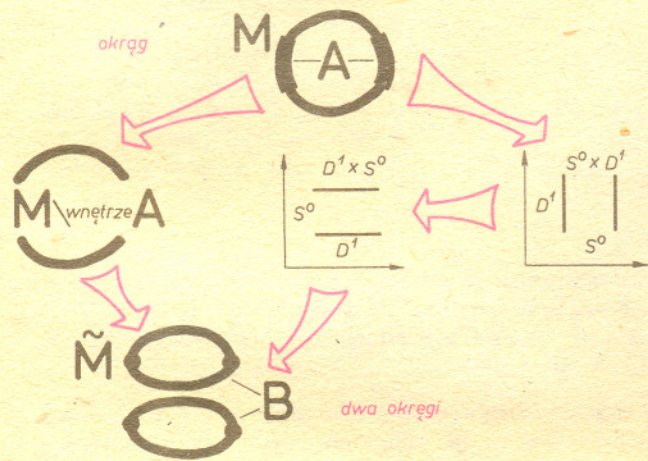


Rys. 1

Podobne twierdzenia, dające klasyfikację różności wyższego wymiaru, są znacznie trudniejsze i wymagają dość wyrafinowanych środków technicznych. Jedno z takich narzędzi, zwane chirurgią, spróbujemy tu opisać.

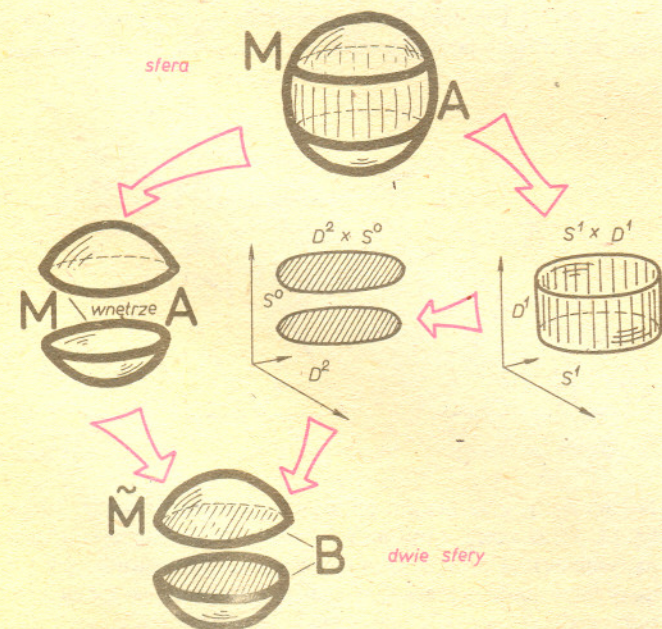
W ogólnym przypadku chirurgia polega na tym, że w n -wymiarowej różności M wybieramy podzbiór A homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim p -wymiarowej sfery S^p i $q+1$ -wymiarowej kuli D^{q+1} , przy czym $p+q+1 = n$. Brzegiem zbioru A jest iloczyn $S^p \times S^q$. Usuwamy teraz z M wewnątrz zbioru A i wklejamy inny zbiór $B = D^{p+1} \times S^q$; brzegiem B jest również $S^p \times S^q$, a wzdłuż niego właśnie kleimy. Otrzymaną w ten sposób nową różność \tilde{M} nazywamy wynikiem chirurgii typu (p, q) .

A oto kilka prostych przykładów. Gdy M jest okręgiem, musi być $p = q = 0$; pamiętajmy, że S^0 , czyli brzeg odcinka D^1 to po prostu dwa punkty.

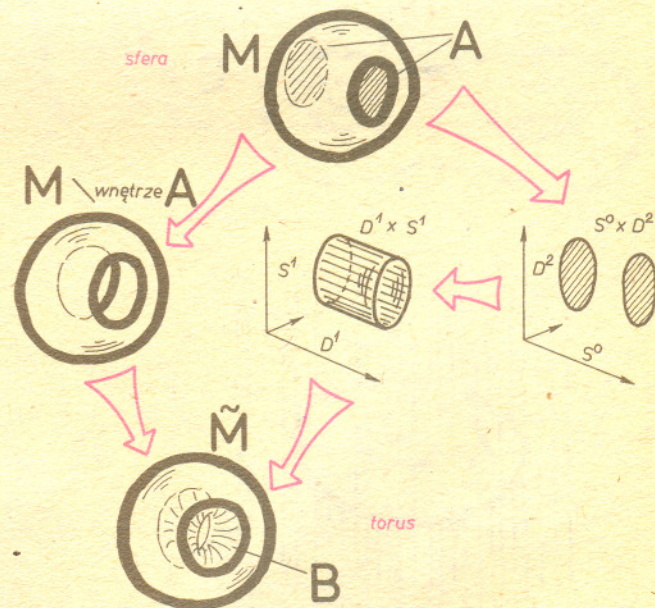


Rys. 2

Gdy M jest powierzchnią ($n = 2$), mamy już więcej swobody: oto przykłady chirurgii typu $(1,0)$ i $(0,1)$ dokonanych na sferze,

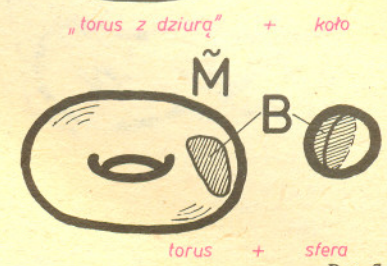
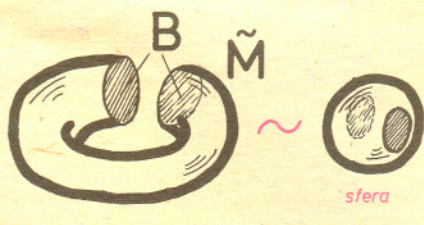
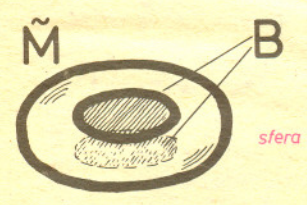
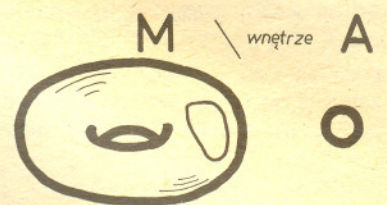
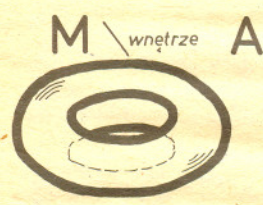
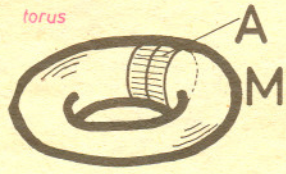
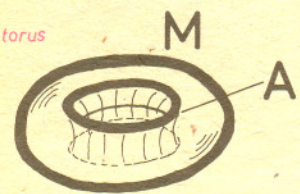


Rys. 3



Rys. 4

trzech chirurgii typu (1,0) na torusie,

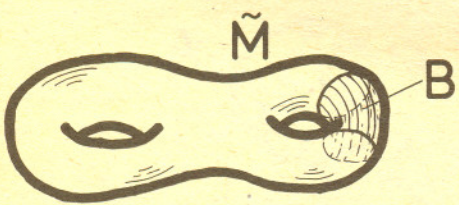
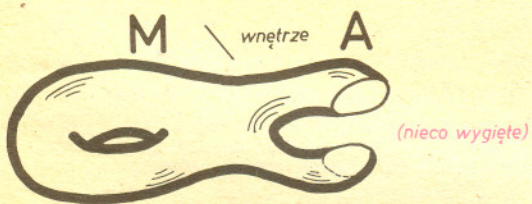
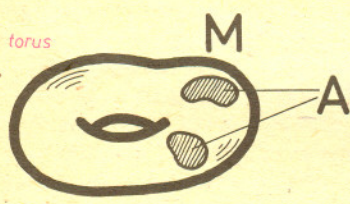


Rys. 5

Rys. 6

Rys. 7

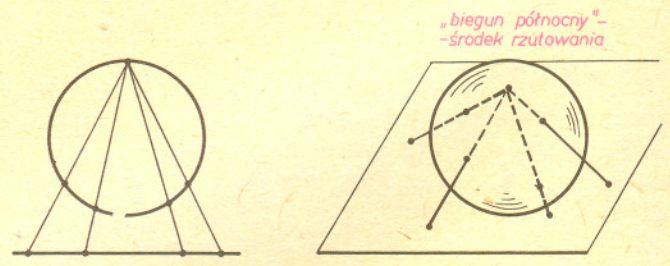
oraz chirurgii typu (0,1) na takim samym torusie.



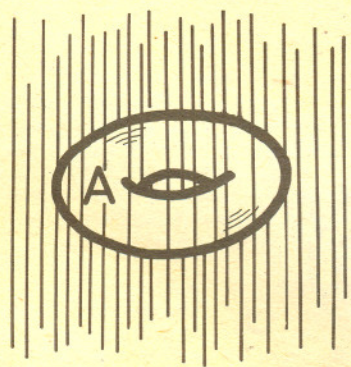
Rys. 8

Zauważmy tutaj, że w pewnych przypadkach dwie chirurgie mogą być wzajemnie odwrotne: chirurgią typu (0,1) zrobiliśmy ze sfery torus — rysunek 4, gdy chirurgia typu (1,0) z rysunku 5 lub 6 robi z torusa sferę.

Znacznie trudniej wyobrazić sobie chirurgię na rozmaitościach trójwymiarowych. Już najprostsz przykład takiej rozmaitości — sfera S^3 — nie daje się narysować bezpośrednio. Warto jednak przypomnieć sobie znany z kartografii rzut stereograficzny, dzięki któremu na płaszczyźnie można przedstawić mapę sfery bez jednego punktu. Rysując analogiczny rzut okręgu na prostą można sobie wyobrazić, że przechodząc do wymiaru 3 otrzymamy rzut sfery trójwymiarowej bez punktu na trójwymiarową przestrzeń.

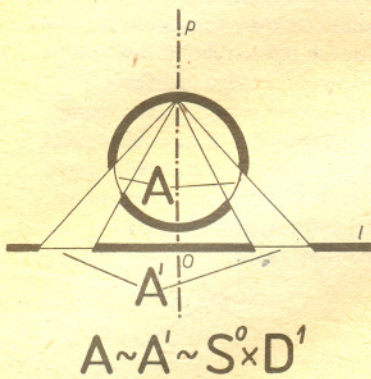


Rys. 9

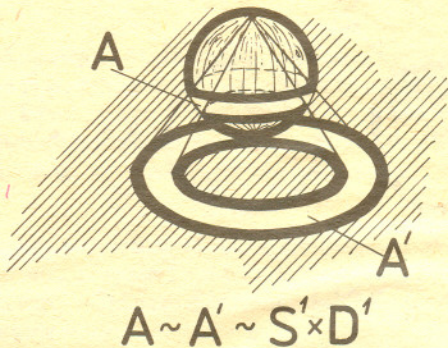


Rys. 10

Najciekawszym przykładem chirurgii trójwymiarowej jest chirurgia typu (1,1). Zbiorem A będzie (pełny) torus $S^1 \times D^2$ przedstawiony na rysunku 10. Czym jest jego dopełnienie (zbiór zakreślony na rysunku 10, przedstawiającym sferę trójwymiarową w rzucie stereograficznym, a więc przestrzeń R^3)? Okazuje się, o czym spróbujemy się przekonać, że otrzymamy znowu pełny torus.

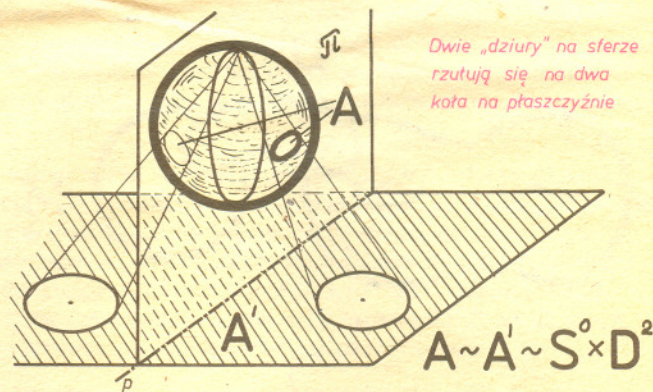


Obracamy nasz rysunek wokół osi p .
Otrzymujemy w ten sposób sferę rzutowaną stereograficznie na płaszczyznę powstającą z obrotu prostej l wokół punktu O .



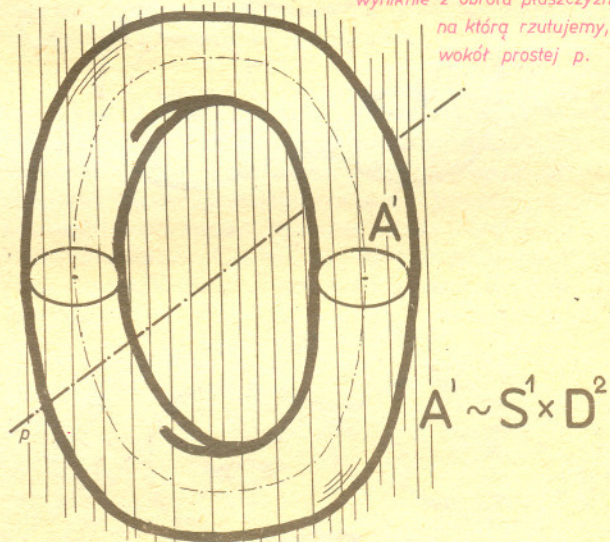
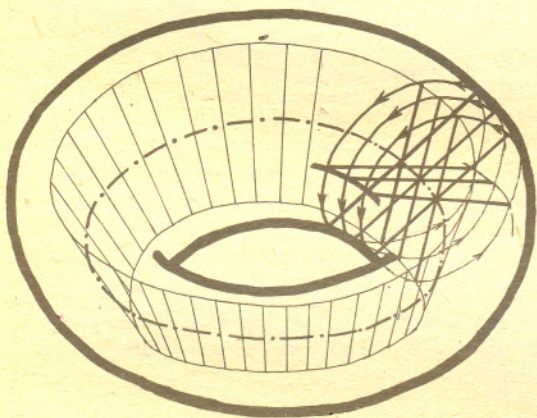
Rys. 11

Jedyną trudnością jest wyobrażenie sobie, co powstanie z zakreskowanej części sfery dwuwymiarowej z rysunku 12, gdy zaczniemy ją „obracać”. Gdy jednak zauważymy, że „obracamy” zbiór homeomorficzny z powierzchnią walcową, przy czym jeden jej równoleżnik pozostaje ustalony (jest to przecięcie sfery z płaszczyzną π), możemy narysować torus wypełniony rodziną powierzchni stożkowych (w szczególnych przypadkach będzie to powierzchnia walcowa i pierścień kołowy, mające wspólny okrąg).



Dwie „dziury” na sferze rzutują się na dwa kąta na płaszczyźnie

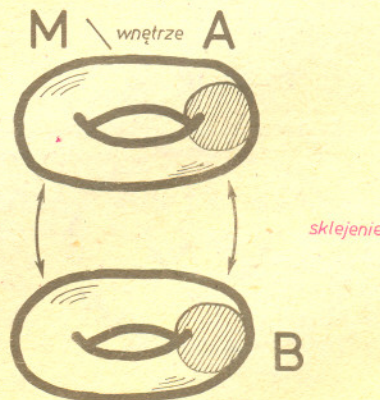
Rysunek musielibyśmy obrócić w przestrzeni czterowymiarowej wokół płaszczyzny π . Możemy jedynie narysować to, co wynika z obrotu płaszczyzny, na którą rzutujemy, wokół prostej p .



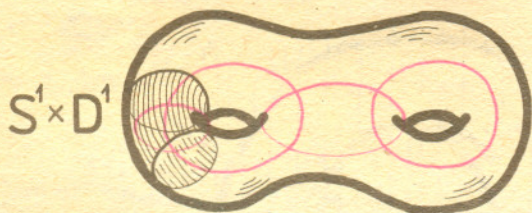
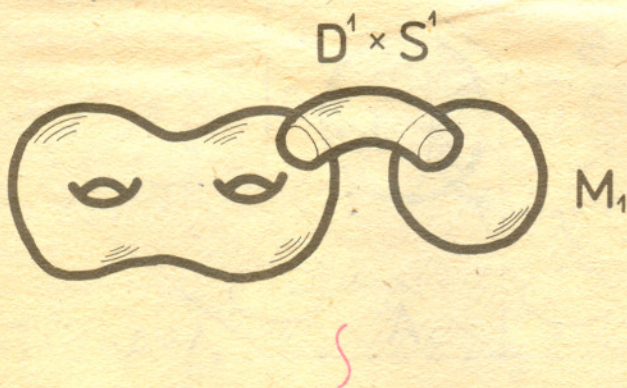
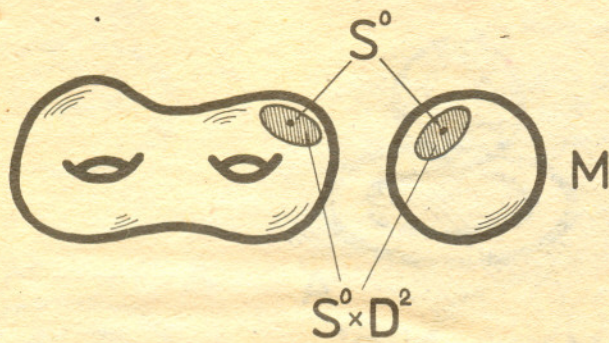
Rys. 13

Rys. 12

Pozostaje już tylko opis drugiego stadiumu chirurgii: do torusa $T = S^3 \setminus (S^1 \times D^2)$ musimy dokleić znowu torus $B = D^2 \times S^1$. Tym razem doklejenie wygląda tak, że utożsamiamy punkt z powierzchni torusa T z jego lustrzanym odbiciem na powierzchni B . W rezultacie z dwóch zakreskowanych na rysunku 14 kół skleamy jedną dwuwymiarową sferę; sklejenie takie odbywa się nad każdym punktem okręgu będącego „rdzeniem” torusa — otrzymujemy ostatecznie iloczyn kartezjański $\tilde{M} = S^1 \times S^2$.



Rys. 14

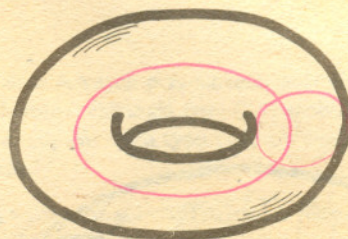


Rys. 15

Opisana tu chirurgia typu (1,1) ma pewną szczególną cechę: usuwany torus A i wklejany torus B są homeomorficzne. Różnica między rozmaitością M i \tilde{M} polega na różnych sposobach sklejanja — różnych utożsamieniach powierzchni torusa z nią samą. Gdy jeszcze dodamy możliwość różnego położenia A w sferze S^3 (mógł on być np. zawiązany w węzeł), otrzymamy wielką różnorodność możliwych chirurgii, zwanych chirurgiami Dehna. Stanowią one bardzo precyzyjne, choć trudne w użyciu narzędzie do badania rozmaitości trójwymiarowych, używane m.in. w ostatnio przedsięwziętej przez Anglika Rourke i Portugalczyka Rêgo próbie dowodu znanej od 87 lat hipotezy Poincarégo.

W *Delcie* nr 8/1986 informowaliśmy o udowodnieniu liczącej ponad 80 lat hipotezy Poincarégo. Dowód okazał się bardzo trudny i do chwili obecnej nie ma pewności, czy jest on poprawny.

Warto może jeszcze przedstawić ogólną ideę wykorzystania chirurgii. Używamy jej do „upodobniania do siebie” zadanej pary rozmaitości. Wyobraźmy sobie na przykład, że z sumy precla i sfery przedstawionej na rysunku 15 pragniemy zrobić torus. Zauważamy przede wszystkim, że na M znajdują się dwa punkty, których nie potrafimy połączyć łukiem. Dwa punkty to jednak S^0 , a ich otoczenie to $S^0 \times D^2$, a więc można przeprowadzić chirurgię, której wynikiem jest spójna już rozmaitość M_1 — czyli precel.

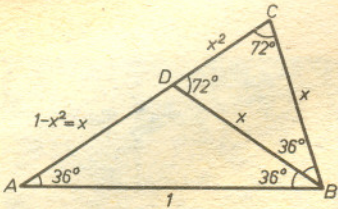


Rys. 16

Precel ten różni się jednak jeszcze od torusa: mamy na nim cztery pętle (zbiory homeomorficzne z okręgami), przecinające się w pojedynczych punktach i takie, których nie można ściągnąć do punktu nie opuszczając przy tym powierzchni. Na torusie pętli takich można znaleźć dwie (rys. 16). Wybieramy więc jedną z dwóch „zbytecznych” pętelek, bierzemy jej otoczenie — tym razem ma ono postać $S^1 \times D^1$ i wykonujemy chirurgię. Jej wynikiem jest torus.

W ogólnym przypadku historia komplikuje się nieco, można jednak efektywnie wyznaczyć pewien obiekt algebraiczny — tzw. przeszkodę do chirurgii stanowiącą pewne kryterium rozróżnienia, a więc klasyfikacji. W rezultacie topologiczne zagadnienie porównania dwóch rozmaitości sprowadza się do problemu wyliczenia pewnego elementu pewnej grupy — a to jest właśnie celem rachunków znanych pod nazwą topologii algebraicznej.

Rozwiązanie zadania M 460. Rozpatrzmy trójkąt ABC , gdzie $\sphericalangle A = 36^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72^\circ$. Poprowadźmy dwusieczną BD . Trójkąty ABC i BCD są podobne. Jeśli $AB = 1$, $BC = x$, to $CD = x^2$, jednocześnie $1 - x^2 = AD = BD = x$. Zatem $x^2 + x - 1 = 0$, czyli $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $\sin 18^\circ = \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Rozwiązanie zadania F 215. a) Prawo zachowania energii przy przelocie statku z punktu A do B daje $Mv_A^2/2 - GMM_Z/(R_Z + h) = Mv_B^2/2 - GMM_Z/R_Z$. Zgodnie z drugim prawem Keplera promień wodzący statku liczony od środka Ziemi w równych odstępach czasu zakresła równe powierzchnie. Jeśli odstęp czasu Δt jest dostatecznie mały, to powierzchnia tą będąc w przybliżeniu równa powierzchni trójkąta o podstawie $v \cdot \Delta t$ i wysokości R :

$$\frac{1}{2} (R_Z + h) \cdot v_A \cdot \Delta t = \frac{1}{2} R_Z v_B \cdot \Delta t,$$

gdzie v_A, v_B są prędkościami w punktach A i B orbity, h — wysokością orbity w punkcie A . Z powyższych równań wynika że prędkość statku w punkcie A , po włączeniu silnika jest równa

$$v_A = \sqrt{2gR_Z^2 / [(R_Z + h) \cdot (2R_Z + h)]}.$$

Do momentu włączenia silnika statek porusza się po kołowej orbicie z prędkością, którą łatwo można obliczyć, $v_0 = \sqrt{gR_Z^2 / (R_Z + h)}$. Silnik powinien zmniejszyć prędkość statku o wielkość

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{gR_Z^2}{R_Z + h} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2R_Z}{2R_Z + h}}\right)} \approx v_0 h / 4R_Z \approx 145 \text{ m/s}.$$

Ponieważ silnik pracuje jedynie krótką chwilę, więc możemy posłużyć się zasadą zachowania pędu:

$$Mv_0 = (M - m)(v_0 - \Delta v) + m(u + v_0),$$

gdzie m — masa wyrzuconego w postaci gazów paliwa, u — ich prędkość wylotu. Przekształcając ostatnie wyrażenie otrzymujemy

$$m = M \cdot \Delta v / (u + \Delta v) \approx M \cdot \Delta v / u \approx 175 \text{ kg}.$$

b) w tym wypadku postępujemy analogicznie jak w a) z tą różnicą, że wektor v będzie skierowany prostopadłe do wektora v_0 . Dlatego też $\Delta v = \sqrt{v_0^2 - v_A^2}$. A zatem $\Delta v = 1480 \text{ m/s}$, co daje większe zużycie paliwa $m \approx M \cdot \Delta v / u \approx 1800 \text{ kg}$.

Podział nieba na gwiazdozbiory, a także nazwy większości z nich pochodzą z czasów starożytnych. Szczególną uwagę zwracano wówczas na te gwiazdozbiory, przez które przechodzi ekliptyka (krzywa, po której „wędruje” Słońce w swym rocznym ruchu po niebie). Najdawniej nazywanymi są więc gwiazdozbiory Pasa Zodiaku, zwanego także Zwierzyńcem, gdyż wiele z nich nosi nazwy różnych zwierząt. Ich nazwy i granice pochodzą od astronomów i astrologów babilońskich.

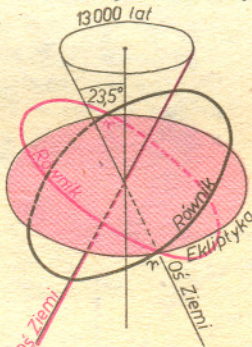
Pas Zodiaku rozciąga się na szerokość 15–20 stopni symetrycznie po obu stronach ekliptyki. Ponieważ płaszczyzny orbit większości ciał Układu Słonecznego niemal pokrywają się z płaszczyzną orbity Ziemi, w obszarze Zwierzyńca oprócz ruchu Słońca odbywają się ruchy Księżyca, planet i prawie wszystkich planetoid.

Obszar jednego gwiazdozbioru zodiakalnego (około 30° długości na ekliptyce) Słońce pokonuje w ciągu około miesiąca. Nie oznacza to jednak, że przejście przez granicę gwiazdozbiorów odbywa się na przełomie miesięcy. Natomiast przejścia Słońca przez określone punkty — granice znaków zodiaku — związane są z początkiem astronomicznych pór roku. Na przykład około 21 marca Słońce przechodzi przez punkt Barana i w tym momencie rozpoczyna się astronomiczna wiosna.

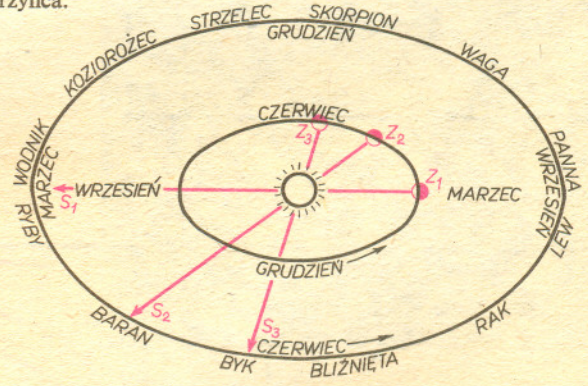
Data rozpoczęcia wiosny, jak zresztą każdej pory roku, nie jest w każdym roku taka sama. Ten szczególny moment związany jest z przejściem środka tarczy słonecznej przez punkt przecięcia ekliptyki z równikiem niebieskim (punkt Barana). Odstęp między dwoma kolejnymi takimi przejściami, zwany rokiem zwrotnikowym, nie jest całkowitą wielokrotnością dób ziemskich. Jest on odzwierciedleniem ruchu obiegowego Ziemi wokół Słońca i nie ma żadnego związku z obrotem Ziemi wokół osi. Dlatego równonoc wiosenna może wypadać 20, 21 lub 22 marca. W tym roku wiosnę powitamy 21 marca o godzinie 04^h52^m (czasu zimowego).

Historyczna nazwa punktu Barana pochodzi od greckiego astronoma Hipparcha (180–110 r.p.n.e.). Została ona nadana około 2000 lat temu, gdy punkt Barana leżał w zodiakalnej konstelacji Barana. Wskutek zjawiska precesji osi ziemskiej przesuwa się on na zachód wzdłuż ekliptyki o niecałą minutę kątową w ciągu roku. Do czasów dzisiejszych przesunął się o 30° i „zawędrował” do sąsiadującego z Baranem gwiazdozbioru Ryb, jednak jego historyczna nazwa pozostała nie zmieniona.

W ciągu owych 2000 lat takiemu samemu przesunięciu uległy położenia innych, ustalonych przez Hipparcha znaków zodiaku. Gdy mówimy na przykład, że w momencie rozpoczęcia zimy Słońce wchodzi w znak Koziorożca, naprawdę znajduje się ono akurat w sąsiadującym od zachodu z Koziorożcem gwiazdozbiore Strzelca. Nazwy zwrotników ziemskich z powodu „wędrowki” znaków zodiaku również nie są aktualne. Dziś zamiast zwrotnikiem Raka i Koziorożca nazwalibyśmy je raczej odpowiednio zwrotnikiem Bliźniąt i Strzelca. W ciągu 26 000 lat, gdy oś ziemską zatacza w przestrzeni pełny stożek, każdy ze znaków zodiaku przechodzi przez wszystkie gwiazdozbiory Zwierzyńca.



Po 13 tys. lat punkt Barana będzie „z drugiej strony” ekliptyki.



Nocą widoczne są gwiazdozbiory leżące po przeciwnej, w stosunku do Słońca, stronie ekliptyki.

Bezpośrednie obserwacje ruchu Słońca na tle gwiazdozbiorów zodiakalnych nie są możliwe z powodu silnego rozpraszania promieni słonecznych w atmosferze ziemskiej. Można jednak dokonywać takich obserwacji w sposób pośredni. Wystarczy obserwować gwiazdozbiory Pasa Zodiaku górujące w danym miesiącu o północy. Wiadomo bowiem, iż Słońce przechodzi wtedy przez gwiazdozbiór leżący po przeciwnej stronie ekliptyki. Gdy np. o północy góruje Panna, to w południe górują Ryby, słowem — Słońce znajduje się akurat w gwiazdozbiore Ryb i zgodnie z przedstawionymi wcześniej uwagami jest ono w znaku Wodnika.

Nasza Galaktyka widoczna na niebie jako Droga Mleczna (rys. 1) składa się z gwiazd oraz gazu i pyłu. Jasne obszary Drogi Mlecznej to gwiazdy. Ciemne obszary widoczne na Drodze Mlecznej, bez gwiazd, świadczą o obecności zimnej, nieświecącej materii — gazu i pyłu. Ta właśnie ciemna materia w sposób drastyczny utrudniała i nadal bardzo utrudnia badania Galaktyki.

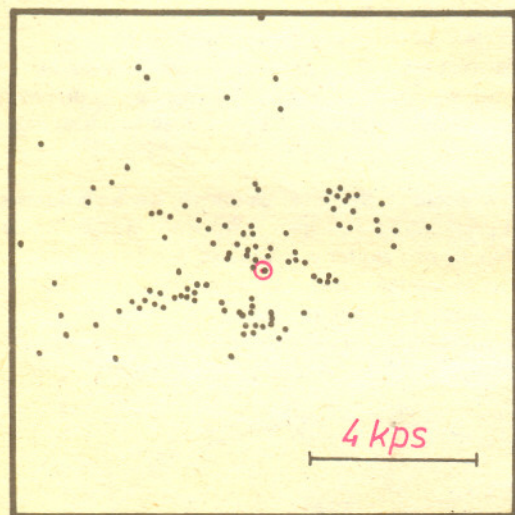
Mimo to wiemy już o Galaktyce kilka rzeczy na pewno:

- Galaktyka ma kształt dysku o średnicy około 30 kiloparseków,
- Słońce leży w płaszczyźnie tego dysku i odległe jest od jego środka o około 8,5 kiloparseków,
- Galaktyka obraca się.

1 parsek = $3,0857 \cdot 10^{16}$ m



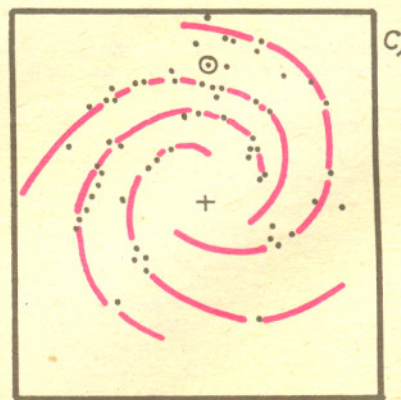
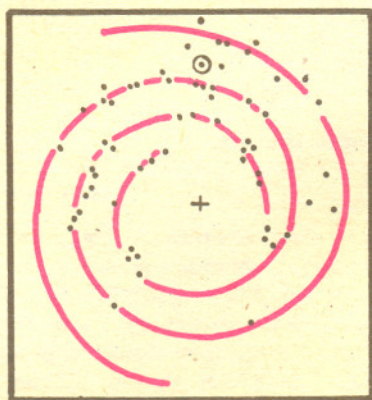
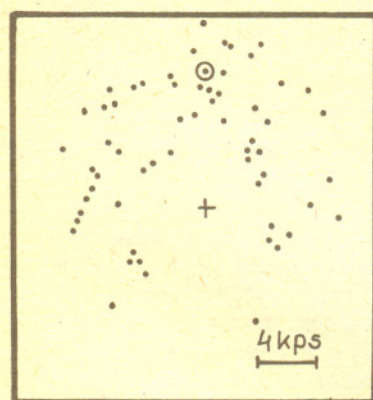
Rys. 1



Rys. 2 ☉ Słońce

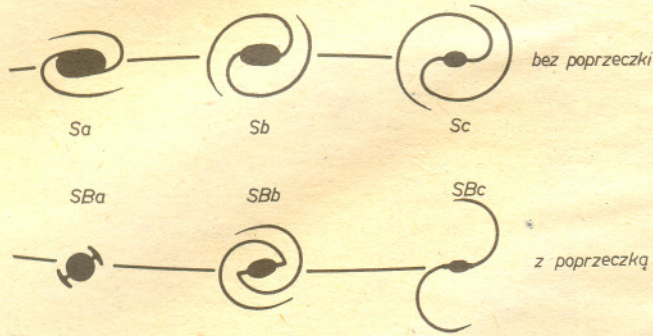
Powyższe dane znane od ponad 50 lat, uzyskane zostały na podstawie obserwacji ruchów i położenia gwiazd i gazu znajdujących się stosunkowo niedaleko Słońca. Do dalszych rejonów Galaktyki obserwacje sięgają z trudem właśnie na skutek absorbującego działania gazu i pyłu. I tak, położenie gwiazd w Galaktyce, promieniujących głównie w dziedzinie optycznej, znane jest jedynie do około 3 kiloparseków — patrz rysunek 2 (kropkami oznaczono położenia otwartych gromad gwiazd). W dziedzinie radiowej absorpcja jest mniejsza i z tego powodu obłoki wodoru (promieniujące głównie radiowo) są widoczne na większych odległościach (rys. 3a).

Opierając się na przedstawionych powyżej informacjach o Galaktyce trudno byłoby odpowiedzieć na zawarte w tytule tego artykułu pytanie — jak wygląda nasza Galaktyka? Kłopotów takich nie mamy z innymi galaktykami, ponieważ widzimy je po prostu „z zewnątrz” (w przeciwieństwie do Galaktyki, którą widzimy „od środka” jako jej mieszkańcy). Z podobną sytuacją spotykamy się w życiu codziennym — lepiej znamy przecież wygląd innych ludzi niż swój własny. Jeśli więc założymy, że Galaktyka nie jest zbudowana w jakiś skrajnie nietypowy sposób, to wynika z tego, że któraś z widocznych na niebie galaktyk musi być podobna do naszej.

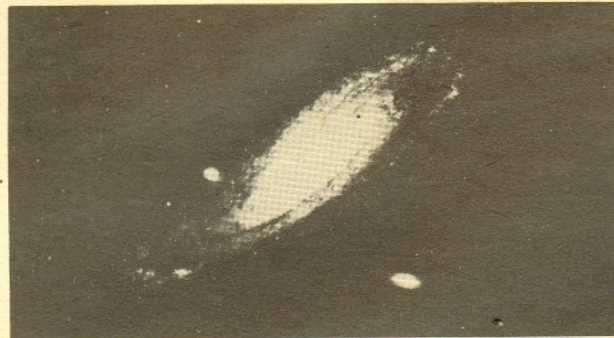


Rys. 3

Istnieją dwa zasadnicze rodzaje galaktyk: eliptyczne i spiralne (pomijamy tu, dla uproszczenia, galaktyki soczewkowate i nieregularne). Naszą Galaktykę na pewno należy zaliczyć do galaktyk spiralnych. Świadczą o tym między innymi: — niejednorodności rozkładu materii (patrz rys. 2 i 3a), które



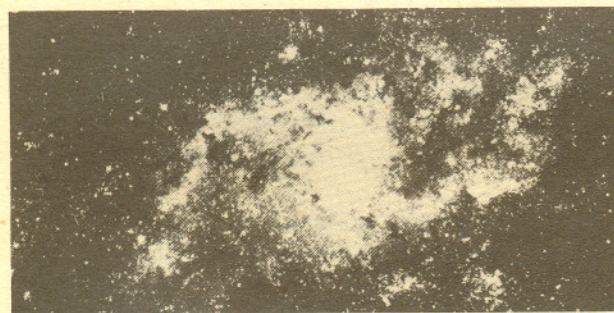
Rys. 4



M31 (Sb)



M81 (Sb)



M33 (Sc)



M74 (Sc)

mogą wynikać z istnienia ramion spiralnych, — duże ilości gazu i pyłu, który nie występuje w tak znacznych ilościach w galaktykach eliptycznych, — ruch obrotowy Galaktyki (ruch gwiazd w galaktykach eliptycznych jest „nieuporządkowany”).

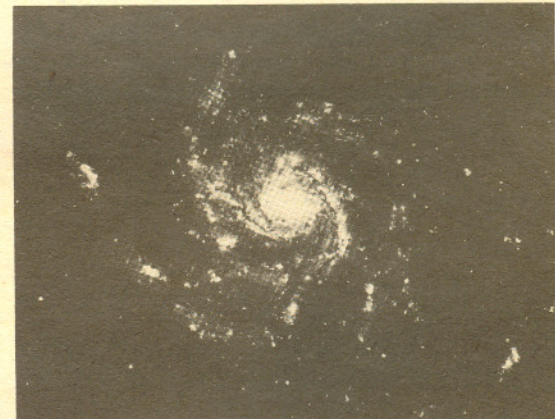
Galaktyki spiralne można z kolei podzielić na sześć podgrup w zależności od długości i „stopnia nawinięcia” ich ramion spiralnych, wielkości części centralnej w stosunku do rozmiarów dysku oraz od występowania lub braku tzw. poprzeczki. Podział ten jest schematycznie przedstawiony na rysunku 4. Próba dopasowania dwóch symetrycznych ramion spiralnych do obserwowanego rozkładu obłoków wodoru (rys. 3b) wskazuje na to, że naszą Galaktykę należy zaliczyć do typu Sbc (pośredniego między Sb i Sc). Na rysunku 5 przedstawione są galaktyki M31 i M81 (typ Sb), M33 i M74 (typ Sc). Nasza Galaktyka powinna więc mieć wygląd „pośredni” (galaktyki M31 i M33 są najbliższymi dużymi galaktykami spiralnymi i, co ciekawe, ich podstawowe parametry ograniczają z góry i z dołu odpowiednie parametry Galaktyki — patrz tabela).

Rys. 5

	M 31	Galaktyka	M 33
typ morfologiczny	Sb	Sbc	Sc
masa [M_{\odot}]	$1,78 \cdot 10^{11}$	$1,31 \cdot 10^{11}$	$0,13 \cdot 10^{11}$
średnica [kiloparsek]	55	30	18
moc promieniowania w barwie V [L_{\odot}]	$2,5 \cdot 10^{10}$	$0,9 \cdot 10^{10}$	$0,3 \cdot 10^{10}$

Rzeczywistość jest jednak bardziej skomplikowana niż to przedstawiono powyżej. Istnieją bowiem galaktyki spiralne mające więcej niż dwa ramiona, a także z ramionami rozdzwajającymi się lub nawet dzielącymi się na większą liczbę odnóg (patrz rys. 6). Musimy więc dopuścić możliwość, że także Galaktyka może mieć taką budowę. Jak widać z rysunku 3c, dane obserwacyjne również dobrze pasują na przykład do galaktyki z czterema ramionami spiralnymi. W literaturze fachowej znaleźć można również i inne kształty, i liczby ramion, które przypisuje się Galaktyce.

Rys. 6



Czytelnik oczekujący zdecydowanej odpowiedzi na tytułowe pytanie czuje się zapewne zawiedziony. Tak, to prawda — my, mieszkańcy Galaktyki, jeszcze dokładnie nie wiemy, jak ona wygląda. Postęp w zrozumieniu jej struktury będzie się dokonywał w przyszłości zapewne dwutorowo. Przede wszystkim konieczne są dalsze obserwacje położenia gwiazd i gazu w samej Galaktyce. Ważną rzeczą powinno być także dokładniejsze poznanie wyglądu innych galaktyk i zrozumienie ich budowy. To, że obie te drogi były i dotychczas są równie ważne, wynika, mam nadzieję, z tego artykułu.

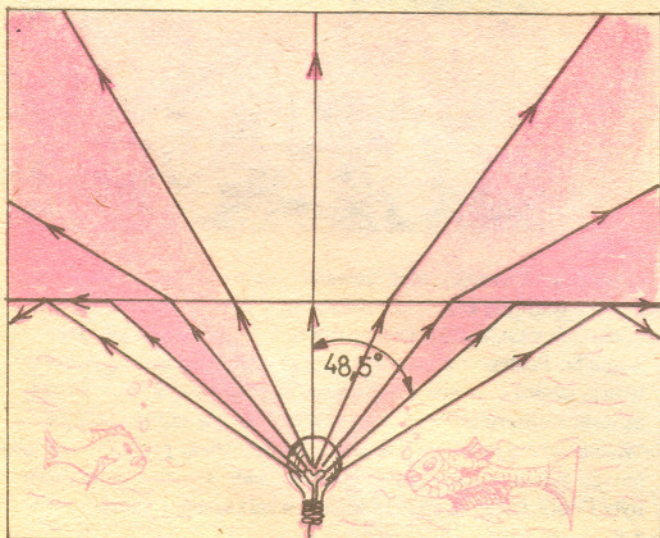
Mała delta

Ryby i brylanty

Oglądając łyżeczkę zanurzoną w szklance wody przekonujemy się doświadczalnie, że światło załamuje się przechodząc z jednego ośrodka do drugiego.



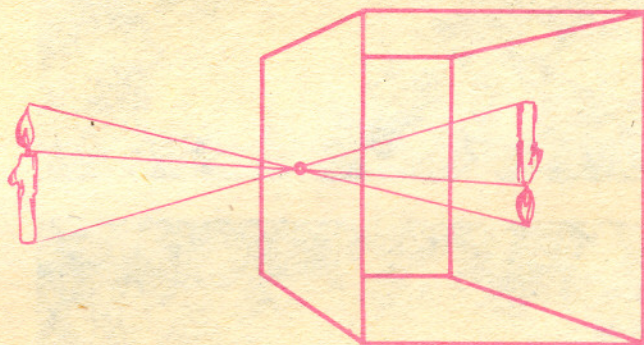
Przyjrzyjmy się dokładniej szklance z łyżeczką. Powierzchnia wody oglądana przez dno naczynia jest przezroczysta. Gdy jednak spojrzymy na nią od dołu pod pewnym kątem, zachowuje się jak bardzo dobre lustro. Mówimy w tym przypadku o zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia. O rysowaniu drogi promienia świetlnego, przechodzącego przez granicę dwóch ośrodków, pisaliśmy już w *Małej Delcie* 2/1985. Tutaj opiszemy, jak zwierzęta i ludzie wykorzystują zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia.



Tylko część światła wysłanego przez zanurzoną pod wodą żarówkę wydostaje się nad powierzchnię. Wszystkie promienie, które biegną poza kątem pokazanym na rysunku, ulegają całkowitemu odbiciu od wewnętrznej powierzchni lustra wody.

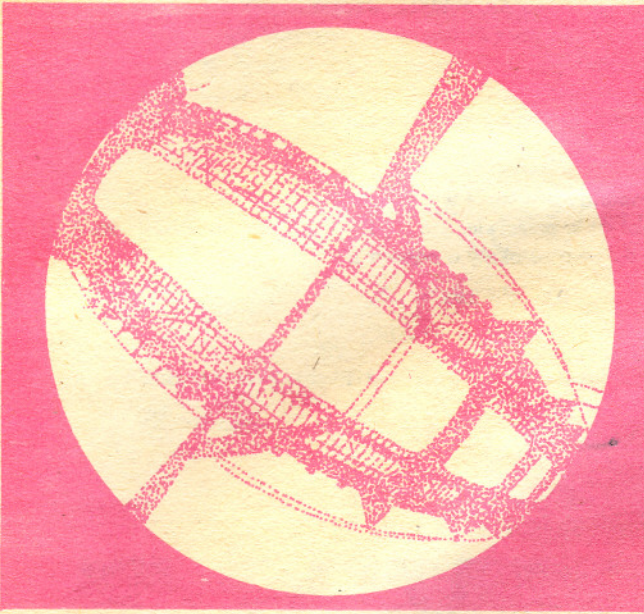
Tą samą drogą, którą przebywa światło żarówki, docierają pod wodę promienie słoneczne.

Wykonano następujący eksperyment. Do zwróconego ku górze najprostszego aparatu fotograficznego (tzw. *camera obscura*) włożono kliszę. Aparat wypełniono wodą i zrobiono zdjęcie. Cóż można zobaczyć na fotografii? Obraz przedmiotów znajdujących się pionowo w górze jest niemal wierny — biegnące od nich światło niewiele załamuje się na powierzchni wody. Im bliżej jednak brzegu fotografii, tym obraz świata jest bardziej zniekształcony.

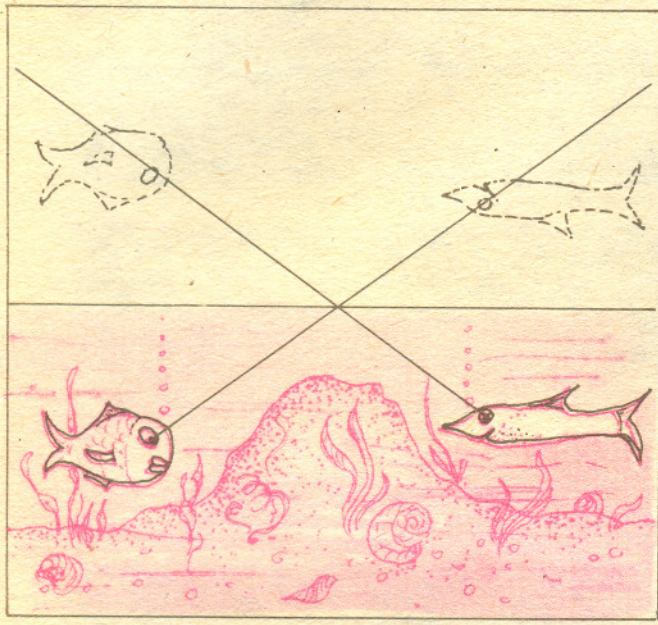


Camera obscura to pudełko z otworkiem w jednej ze ścianek. Obraz „fotografowanego” przedmiotu powstaje na przeciwległej do otworu ściance.

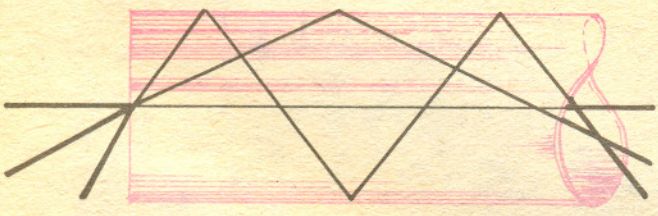




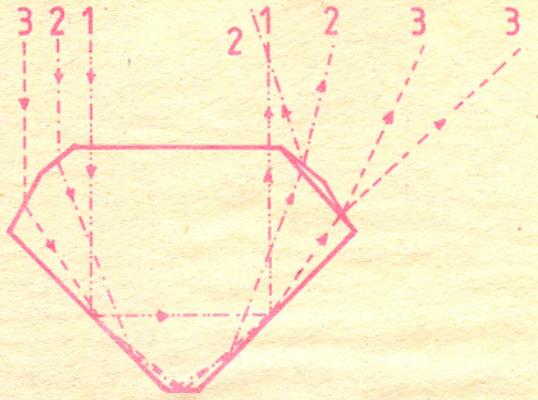
Tak wygląda wykonana w opisany sposób fotografia mostu widzianego z rybiej perspektywy.



Tak korzystają z całkowitego wewnętrznego odbicia ryby. Mogą one widzieć przedmioty, które na lądzie byłyby niewidoczne za przeszkodami.

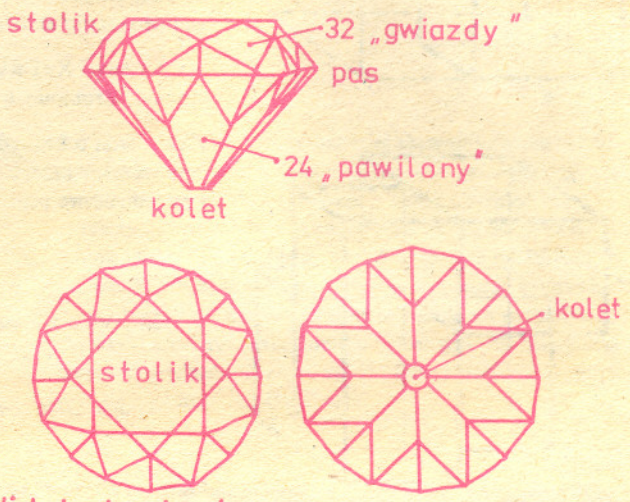


Włókno szklane może dzięki całkowitemu wewnętrznemu odbiciu działać jak przewodnik światła (światłowód) i wykorzystywane jest do przesyłania obrazów i sygnałów.

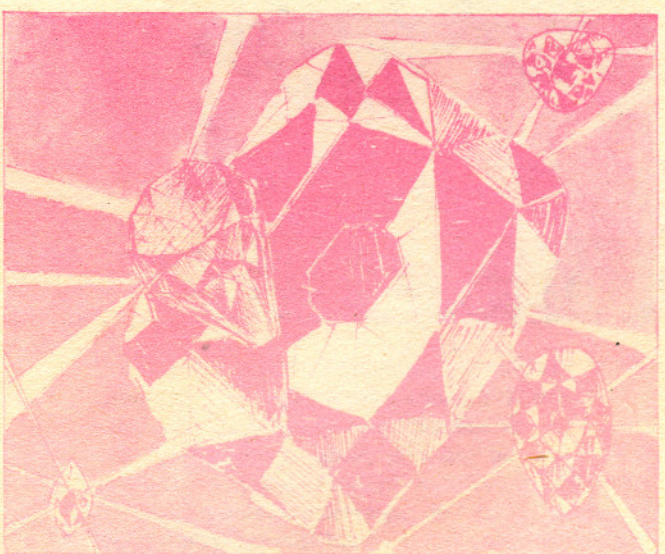


Przekrój brylantu

Całkowite wewnętrzne odbicie sprawia, że brylanty pięknie błyszczą. Dla diamentu kąt, poza którym wszystkie promienie światelne pozostają uwięzione wewnątrz, wynosi 24° . Odpowiedni dobór kątów szlifowania sprawia, że brylant oglądany od strony koletu jest ciemny. Prawie całe światło wpadające do niego przez stolik powraca odbite w różnych kierunkach. Oglądamy to w postaci świetlistego iskrzenia.

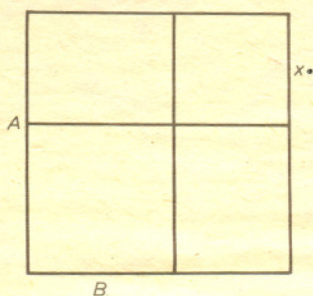


Widok brylantu



Małą Deltę przygotowali Krzysztof BIESAGA i Maciej JĘDRZEJCZAK

Jak rozwiązać równanie trzeciego stopnia



Najpierw nauczone się rozwiązywać równania kwadratowe postaci

$$x^2 + px = q, \quad \text{dla } p \text{ i } q \text{ dodatnich.}$$

Robiono to geometrycznie. Z kwadratu o boku A wycinamy w rogu kwadrat o boku B i największy kwadrat, jaki zmieści się w przeciwległym rogu — jego bok oznaczamy przez x . „Reszta” kwadratu to dwa jednakowe prostokąty o bokach B i x .

Mamy więc

$$B^2 + x^2 + 2Bx = A^2,$$

czyli

$$x^2 + 2Bx = A^2 - B^2.$$

To równanie jest tego samego kształtu co pierwsze, więc zakładamy, że są one jednakowe. Mamy stąd dwa równania

$$2B = p \quad \text{i} \quad A^2 - B^2 = q.$$

Wówczas

$$A^2 = q + B^2 = q + \frac{p^2}{4}.$$

I w ten sposób znamy już x :

$$x = A - B = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}.$$

Jest to (choć wygląda inaczej) znany ze szkoły wzór na rozwiązanie równania kwadratowego. Później bowiem zgodzono się, by ten wzór stosować również wtedy, gdy nie da się go geometrycznie zilustrować.

Na początku XVI wieku udało się zastosować tę metodę do rozwiązania równania trzeciego stopnia. Zrobiono tak.

Z sześcianu o krawędzi A wycinamy w rogu sześcian o krawędzi B i największy sześcian, jaki zmieści się w przeciwległym rogu — jego krawędź oznaczamy przez x . „Reszta” sześcianu to trzy jednakowe prostopadłości o krawędziach A , B i x . Mamy więc

$$B^3 + x^3 + 3ABx = A^3,$$

czyli

$$x^3 + 3ABx = A^3 - B^3.$$

Możemy więc rozwiązywać równania trzeciego stopnia postaci

$$x^3 + px = q, \quad \text{dla } p \text{ i } q \text{ dodatnich.}$$

Porównując takie równanie ze znalezionym równaniem geometrycznym otrzymujemy

$$3AB = p \quad \text{i} \quad A^3 - B^3 = q.$$

Wprowadzając pomocnicze zmienne $K = A^3$ i $L = B^3$ mamy

$$KL = \frac{p^3}{27} \quad \text{i} \quad K - L = q,$$

czyli

$$K(K - q) = \frac{p^3}{27} \quad \text{i} \quad L = K - q,$$

skąd

$$K^2 - qK = \frac{p^3}{27},$$

a więc

$$K = \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2} \quad \text{i} \quad L = \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}.$$

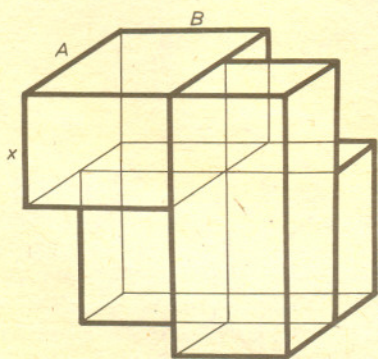
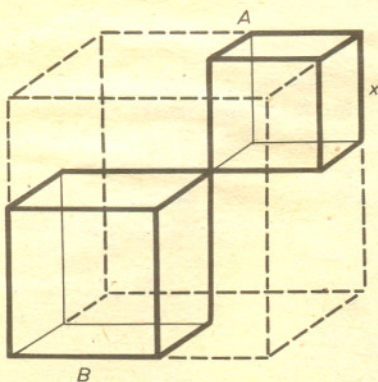
W ten sposób znamy już x :

$$x = A - B = \sqrt[3]{K} - \sqrt[3]{L} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Na rysunku (w centymetrach) jest $A = \frac{7}{2}$ i $B = 2$, czyli rozwiązujemy równanie

$$x^3 + 21x = \frac{279}{8}.$$

Gdybyśmy nie znali A i B , moglibyśmy znaleźć x z podanego wzoru. Potworne rachunki prowadzące do wyniku $\frac{3}{2}$ pokazują, czym różni się rezultat matematyczny, gotowy wzór, od obliczenia konkretnej wartości.



Rozwiązanie zadania M 461. Dowodzimy nierówność dla $a \neq b$. Oznaczmy $s = (a+b)/2$. Zauważymy, że nierówność z treści zadania jest równoważna nierówności

$$\log_s a \cdot \log_s b \leq 1,$$

gdyż

$$\log_s a = \frac{1}{\log_a s} > 0.$$

Nierówność tę otrzymujemy korzystając dwukrotnie z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną oraz z monotoniczności funkcji logarytmicznej

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_s a \cdot \log_s b} &\leq \frac{\log_s a + \log_s b}{2} = \log_s \sqrt{ab} \leq \\ &\leq \log_s \frac{a+b}{2} = 1. \end{aligned}$$

Uwaga. Dla $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ mamy

$$\log_a s = \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} > \log_s b,$$

dla $a = \frac{1}{256}$, $b = \frac{127}{256}$ mamy

$$\log_a s = \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} < \log_s b.$$



Pomińmy ten problem. Nasuwa się jeszcze pytanie, na ile ogólny jest uzyskany rezultat.

Po pierwsze: czy w każdym równaniu stopnia trzeciego

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

można „zgubić” wyraz zawierający x^2 ? Tak — należy podstawić $x = y - \frac{a}{3}$.

Po drugie: co się stanie, gdy zrezygnujemy z warunku dodatniości p i q ? To poważna sprawa. W przypadku równania kwadratowego rezygnacja z tego warunku nie powodowała żadnych komplikacji — jeżeli we wzorze na x działania nie dały się wykonać (w obrębie liczb rzeczywistych), znaczyło to, że równanie nie ma (rzeczywistych) pierwiastków. A nie dawały się te działania wykonać, gdy pod pierwiastkiem (kwadratowym) znajdowała się liczba ujemna. W przypadku równania trzeciego stopnia w analogicznej sytuacji pierwiastek (rzeczywisty) może jednak istnieć. I da się uzyskać z tych wzorów pod warunkiem, że zaczniemy używać również liczb zespolonych. Ale to już inna historia.

Opracował M.K.

Rozwiązanie zadania F 214. Zgodnie z warunkami zadania prędkość ładownika na wysokości $H = R_K$ powinna być równa co do modułu prędkości statku-bazy. Prędkość jego możemy obliczyć z równości siły przyciągania grawitacyjnego i siły odśrodkowej: $GM_K m / (2R)^2 = mv^2 / (2R_K)$. Jeśli dodatkowo zaniedbamy ruch obrotowy Księżyca i skorzystamy z relacji $GM_K = g_K R_K^2$, otrzymujemy prędkość statku-bazy $v^2 = g_K R_K / 2$; M_K jest masą Księżyca, g_K przyspieszeniem swobodnego spadku na Księżycu, m — masą ładownika. Stosując teraz zasadę zachowania energii dla ładownika

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM_K}{R_K} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_K}{2R_K}$$

i podstawiając wyrażenie na prędkość v otrzymujemy niezbędną prędkość ładownika

$$v_0 = \sqrt{3g_K R_K / 2} \approx 2,1 \text{ km/s.}$$

Jest to jedynie wartość prędkości, jaką musi mieć ładownik. Niestety, jej kierunek nie pokrywa się z kierunkiem prędkości statku-bazy na orbicie. Aby zetknięcie było miękkie, niezbędna jest korekcja kierunku prędkości ładownika przy użyciu pomocniczych silników.



Rozwiązanie zadania M 462. Niech $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k}$ (z dwumianu Newtona).

Wtedy $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \binom{n}{k}$. Podstawiając $x = 1$ otrzymujemy tezę.

Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału.

Oto regulamin:

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt*y jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*y.



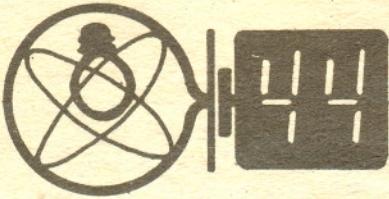
Piotr Jędrzejewicz
w karykaturze
prof. L. Jeśmanowicza.

Protokół

Jury konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki na posiedzeniu w dniu 17.09.1986 r. obradując w składzie:

prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, dr hab. Marek Kordos, dr Jerzy Ryll, dr Jan Waszkiewicz, dr Jerzy Bednarczuk, biorąc pod uwagę pracę oraz przebieg jej obrony postanowiło:

- 1° przyznać Piotrowi Jędrzejewiczowi złoty medal i nagrodę w wysokości zł 12 000,— za pracę „O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych”,
- 2° przyznać opiekunowi pracy Piotra Jędrzejewicza, koledze Mirosławowi Uskiemu nagrodę w wysokości zł 5 000,—.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 31 /WT=1,65/ i 32 /WT=3,31/
z numeru 8/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	37,84pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	35,00pkt
Aleksander Surma	- Myszków	34,26pkt
Anna Gluza	- Toruń	24,63pkt
Paweł Rogocz	- Legnica	23,63pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	20,80pkt
Piotr Baża	- Toruń	20,14pkt
Robert Repucha	- Gołdap	19,23pkt

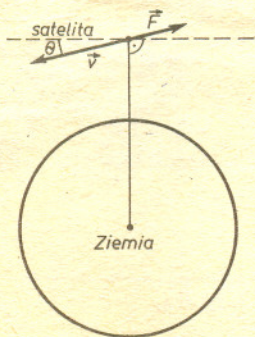
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1987

Zadania z fizyki nr 43, 44

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

43. Bombę kalorymetryczną napełniono w temperaturze 18°C mieszaniną tlenu i metanu pod ciśnieniem 1 MPa, przy czym ciśnienia cząstkowe obu gazów były jednakowe. Po szczelnym zamknięciu bomby wywołano w niej reakcję spalania metanu. Jakie ciśnienie będzie panowało w bombie po jej ostygnięciu do pierwotnej temperatury?

44. Wiadomo, że hamowanie przez górne warstwy atmosfery wpływa na tory sztucznych satelitów powodując ich stopniowe przybliżanie się do powierzchni Ziemi, czemu — paradoksalnie — towarzyszy wzrost prędkości. Przyjmując, że tor satelity ma kształt spirali o stałym kącie pochylenia θ (rysunek), wykazać, że między składową przyspieszenia w kierunku ruchu a , a siłą oporów F zachodzi związek $ma_r = -F$ (m — masa satelity). Wyjaśnić pozorną sprzeczność z drugą zasadą dynamiki.



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1986

Przypominamy treść zadań:

35. Na unieruchomionym, poziomym walcu o promieniu R znajduje się jednorodna, prostopadłościenna belka o długości l i grubości h , oparta na walcu w środku swej długości i prostopadła do osi walca. Czy takie

położenie belki jest położeniem równowagi trwałej, chwilowej czy obojętnej? Czy rodzaj równowagi zależy od wymiarów belki, a jeżeli tak, to w jaki sposób? Zakładamy, że między belką a walcem nie ma poślizgu.

36. Jak wygląda świat nadwodny widziany z rybiej perspektywy? Podać rozwartość kąta, pod jakim oko umieszczone na pewnej głębokości pod powierzchnią wody widzi świat nadwodny i opisać ewentualne zniekształcenia obrazu.

35. Oznaczmy początkowy punkt podparcia belki (na środku podstawy) przez A . Po odchyleniu belki z pierwotnego położenia poziomego o mały kąt δ styka się ona z walcem w punkcie B (rysunek). Wobec braku poślizgu zachodzi $AB = R\delta$. Oznaczając środek ciężkości belki przez S mamy $SA = h/2$. Niechaj p będzie pionową prostą przechodzącą przez punkt A , a C i D — odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów S i B na tę prostą. Jak wynika z rysunku (Q oznacza siłę ciężkości belki), rodzaj równowagi zależy od wartości stosunku długości odcinków SC i BD :

$$k = \frac{SC}{BD} = \frac{SA \sin \delta}{BA \cos \delta} = \frac{h}{2R} \frac{\tan \delta}{\delta}$$

Ponieważ dla kątów δ dążących do zera $\tan \delta / \delta$ dąży do jedności, pozostając jednak większe od jedności, równowaga trwała ($k < 1$) zachodzi dla $h < 2R$, natomiast dla $h \geq 2R$ mamy $k > 1$ i równowaga jest chwilowa. Jak widać, rozwiązanie nie zależy od długości belki.

36. Jakościowy opis zjawiska wraz z rysunkami zawiera *Mała Delta*. Wartość kąta granicznego $\alpha_{gr} = 48^\circ,5$ oblicza się na podstawie prawa załamania ze wzoru $\sin \alpha_{gr} = \frac{1}{n}$, gdzie n jest

współczynnikiem załamania wody. W pobliżu horyzontu dla rosnących kątów padania światła β tej samej odległości katowej $\Delta\beta$ odpowiadają różne, coraz mniejsze kąty widzenia $\Delta\alpha$:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{\cos \beta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}}$$

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

145. Rysunek 1 przedstawia siedmiookąt, którego wszystkie boki i przekątne pokolorowano trzema kolorami tak, że żadne trzy odcinki (boki lub przekątne) tego samego koloru nie tworzą trójkąta. Dać przykład wielokąta o większej liczbie wierzchołków (im więcej, tym wyższa ocena) z bokami i przekątnymi pomalowanymi trzema kolorami, z zachowaniem powyższego warunku. Rozwiązania należy pisać w formie tabelki, jak na rysunku 2. Kolory kodujemy symbolami B, G, R; wierzchołki wielokąta — cyframi. W okienku na przecięciu wiersza x i kolumny y umieszczamy symbol koloru odcinka łączącego wierzchołki x i y . (Tabelka z rysunku 2 opisuje siedmiookąt z rysunku 1.)

146. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych x, y) równanie

$$\frac{(x+y-1)^2+x+y}{(x-y-3)^2+1} + \frac{(x-y-3)^2-1}{(x+y-1)^2-x-y+2} = 0.$$

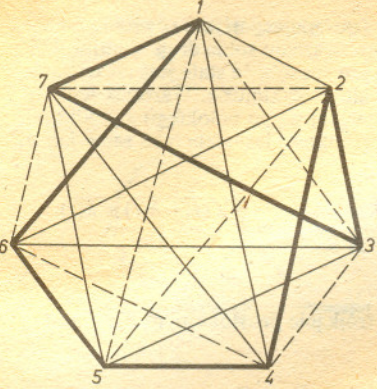
Zadanie 146 przysłał pan Piotr Jurczyszyn z Opola

137. Na sferze rozmieszczono 10^6 punktów. Dowieść, że są wśród nich takie trzy, że jeśli x, y, z oznaczają odległości katowe między tymi punktami, to liczby $\cos(10^6x), \cos(10^6y), \cos(10^6z)$ są jednakowego znaku (+, -, 0) i liczby $\sin(10^6x), \sin(10^6y), \sin(10^6z)$ są jednakowego znaku.

138. Dowieść, że $\sum_{k=1}^n [k^2/4] = [n(n+2)(2n-1)/24]$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

— kolor B
— kolor G
- - - kolor R

Rys. 1



	1	2	3	4	5	6
7	B	R	B	G	G	R
6	B	G	G	R	B	
5	R	R	G	B		
4	G	B	R			
3	R	B				
2	G					

Rys. 2

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1986

Przypominamy treść zadań:

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 133 /WT=3,23/ i 134 /WT=2,28/
z numeru 8/1986

Zbigniew Koza	-	Jelenia G.	45,08pkt
Tomasz Rawlik	-	Gliwice	44,06pkt
Karek Prauza	-	Poraj	43,58pkt
Jerzy Mikuta	-	Zielona G.	42,78pkt
Henryk Mikołajczak	-	Wałbrzych	40,63pkt
Zbigniew Zaus	-	Kraków	36,93pkt

Pan Koza kończy drugie, a pan Rawlik - trzecie okrążenie.

137. Oznaczmy krótko: $f(x) = \cos(10^6x), g(x) = \sin(10^6x)$. Jest dziewięć (a właściwie osiem) możliwych układów znaków pary liczb $(f(x), g(x))$: ++, +-, +0, -+, --, -0, 0+, 0-, 00 (ostatni należy wykluczyć, bo sinus i cosinus nie mogą być jednocześnie zerami). Ponumerujemy dopuszczalne układy cyframi od 1 do 8. Każdej parze punktów sfery przyporządkujemy jedną z tych cyfr, w zależności od tego, który układ znaków przyjmują $f(x), g(x)$, gdzie x jest odległością katową danych punktów. Należy udowodnić, że istnieją w rozpatrywanym zbiorze trzy punkty a, b, c takie, że parom $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$ została przyporządkowana ta sama cyfra.

Lemat. Przyjmijmy $n_1 = 2, n_k = kn_{k-1} + 1$ dla $k = 2, 3, \dots$. Ustalmy k ; niech J będzie zbiorem k -elementowym i niech M będzie dowolnym zbiorem mającym więcej niż n_k elementów. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich (nieuporządkowanych) par różnych elementów zbioru M . Przypuśćmy, że dana jest funkcja $\varphi: X \rightarrow J$. Wówczas istnieją elementy $a, b, c \in M$ takie, że parom $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$ funkcja φ przyporządkowuje ten sam element zbioru J .

Z lematu natychmiast wynika teza zadania, wystarczy przyjąć $k = 8, J = \{1, \dots, 8\}$. $M =$ dany zbiór punktów sfery; założenia lematu są spełnione, bo $n_8 = 109601 < 10^6$. Pozostaje udowodnić lemat.

Dowód lematu. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Ustalmy $k > 1$ i założmy prawdziwość tezy lematu dla $k-1$. Niech J, M, φ spełniają założenia lematu. Wybierzmy dowolny element $m_0 \in M$ i weźmy pod uwagę wszystkie pary $\{m, m_0\}, m \in M, m \neq m_0$. Par tych jest tyle, ile elementów w zbiorze $M \setminus \{m_0\}$, czyli co najmniej n_k . Funkcja φ przyjmuje na tych parach k wartości, a ponieważ $n_k > kn_{k-1}$, więc co najmniej jedna z tych wartości, powiedzmy j_0 , jest przyjmowana więcej, niż n_{k-1} razy. Niech $M' = \{m \in M: \varphi(\{m, m_0\}) = j_0\}$. Jeśli są w zbiorze M' dwa elementy m_1 i m_2 takie, że $\varphi(\{m_1, m_2\}) = j_0$, to trójka m_0, m_1, m_2 spełnia warunek z tezy lematu. Jeśli w zbiorze M' nie ma takich dwóch elementów, znaczy to, że funkcja φ przyjmuje na parach elementów zbioru M' wartości ze zbioru $J' = J - \{j_0\}$. Zbiór J' ma $k-1$ elementów, a zbiór M' ma więcej, niż n_{k-1} elementów. W myśl założenia indukcyjnego jest w zbiorze M' trójka elementów spełniająca żądany warunek. Stąd prawdziwość tezy lematu dla danego k i — przez indukcję — dla wszystkich $k \geq 2$.

Uwaga. Zadanie ma charakter czysto kombinatoryczny, cała treść geometryczna jest nieistotna. Dane funkcje f i g można zastąpić dowolnymi innymi funkcjami. Jeśli nawet nie da się wykluczyć możliwości $f(x) = 0 = g(x)$ (a więc będzie dziewięć układów par znaków), to i tak rozumowanie pozostanie w mocy, bo $n_9 = 986410$.

138. Oznaczmy lewą i prawą stronę dowodzonej równości przez L_n i P_n , a wyrażenie w nawiasach kwadratowych po prawej stronie — przez R_n . Zatem $P_n = [R_n]$. Przyjmijmy dodatkowo $L_0 = 0$. Dla $n = 2m$ mamy

$$R_{2m} = \frac{1}{24} (2m)(2m+2)(4m-1) = \frac{1}{2} m^2(m+1) + \frac{1}{6} m(m+1)(m-1).$$

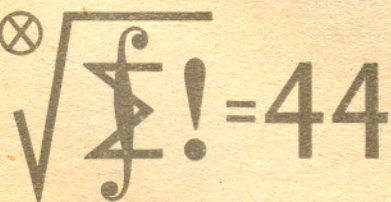
Jest to liczba całkowita, a więc $P_{2m} = R_{2m}$. Łatwo sprawdzamy, że

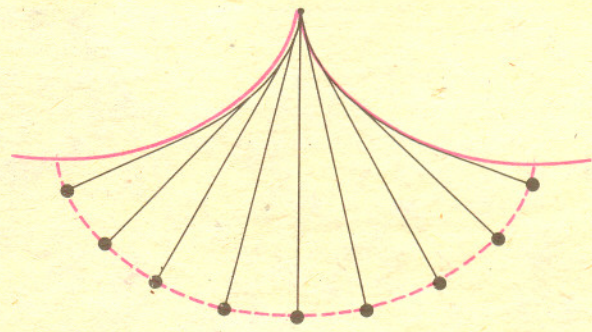
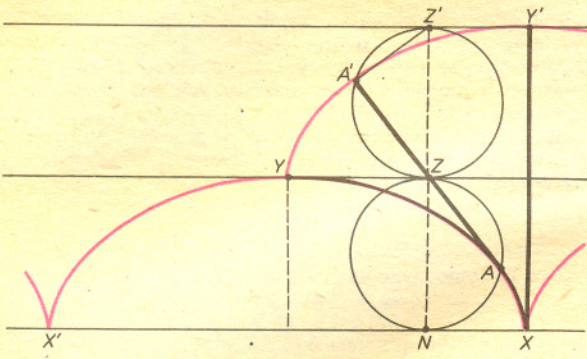
$$P_{2m+2} - P_{2m} = R_{2m+2} - R_{2m} = 2m^2 + 3m + 1 = L_{2m+2} - L_{2m},$$

a ponieważ $L_0 = P_0 = 0$, zatem przez indukcję $L_{2m} = P_{2m}$ dla wszystkich m . Mamy ponadto

$$P_{2m+1} - P_{2m} = [R_{2m+1}] - R_{2m} = [R_{2m+1} - R_{2m}] = m^2 + m = L_{2m+1} - L_{2m}.$$

Stąd $L_n = P_n$ dla wszystkich n .





W tym celu musimy zająć się długościami łuków cycloidy i okręgu, który ją wyznacza. Ze sposobu powstawania cycloidy wiemy, że łuk $Z'A'$ górnego okręgu ma długość YZ — prawda? Ponieważ $X'X = 2\pi r$, więc $YZ = X'N - \pi r$. Ale łuk NZA dolnego okręgu ma długość $X'N$. Zatem długość łuku $Z'A'$ jest równa długości łuku ZA . Czyli rzeczywiście punkty A , Z i A' leżą na jednej prostej, co oznacza, że koniec naciągniętej nici (poruszający się stale prostopadle do nici) przejdzie przez punkt A' — dowolny punkt górnej cycloidy.

Zupełnie przy okazji obliczyliśmy długość pełnego łuku cycloidy, jest ona równa $2XY'$, czyli $8r$, ośmiu promieniom wyznaczającego cycloidę okręgu.

A gdzie dobre wahadło,

bo dobra geometria już była? Znow obróćmy cycloidę do góry nogami. Jeśli pomiędzy dwoma łukami cycloidy wyznaczonej przez okrąg o promieniu r zawiesimy ciężarek na nitce o długości $4r$, to będzie się on wahał „po cycloidzie”, a ponieważ cycloida jest tautochroną, więc okres jego wahań nie będzie zależał od wychylenia — zawsze będzie równy

$$4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Opracował M. K.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 460. Obliczyć $\sin 18^\circ$.
Rozwiązanie na str. 5

M 461. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a > 1$, $b > 1$ zachodzi nierówność

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geq \log_{\frac{a+b}{2}} b. \quad \text{W. Mnich}$$

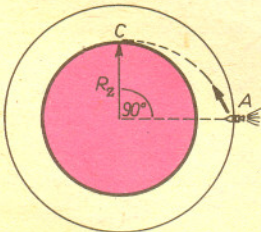
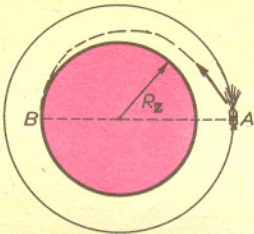
Rozwiązanie na str. 10

M 462. Niech $\binom{n}{k}$ będzie współczynnikiem Newtona, tj. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $0 \leq k \leq n$.

Udowodnić, że $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

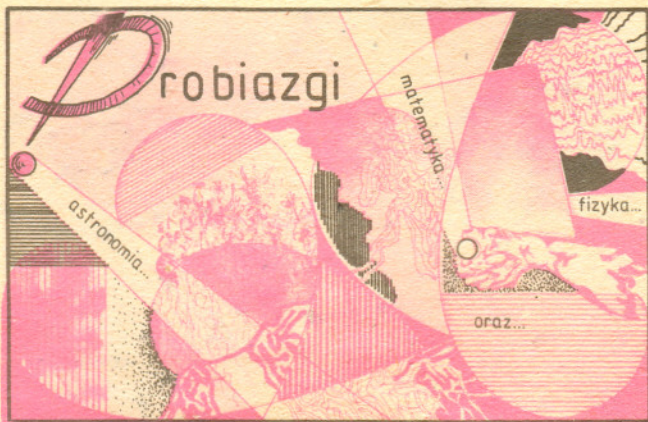
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI



F 214. Wyobraźmy sobie kolejną wyprawę na Księżyc, nie mniej pechową niż ekspedycja Apollo 13. Po wylądowaniu na powierzchni Księżyca komputer pokładowy odmawia posłuszeństwa. W jaki sposób astronauta mogą samodzielnie obliczyć wartość prędkości v , z jaką musiałyby wystartować lądownik, aby połączyć się na orbicie ze statkiem-bazą? Statek-baza krąży po kołowej orbicie na wysokości równej promieniowi Księżyca $R_K = 1700$ km. Przyspieszenie swobodnego spadku g_K na Księżycu wynosi około $1,7$ m/s².
Rozwiązanie na str. 11

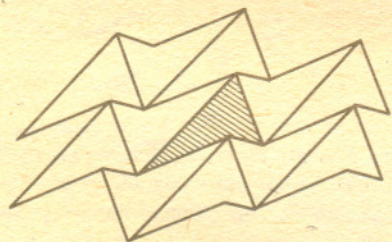
F 215. Tej samej ekspedycji udało się dotrzeć z powrotem na kołową orbitę wokół Ziemi, na wysokości $h = 500$ km. Aby zejść na orbitę, z której możliwe jest lądowanie, należy na krótki czas włączyć silnik. Prędkość wylatujących z dyszy silnika gazów wynosi $u = 10^4$ m/s.
a) Jaka minimalna masa paliwa powinna zostać użyta do tego, aby po włączeniu hamującego silnika w punkcie A (patrz rysunek) trajektoria statku osiągała Ziemię w punkcie B?
b) Jaką masę paliwa należałoby zużyć, aby statek osiągnął Ziemię w punkcie C, jeśli włączony na krótko silnik nada dodatkowy pęd w kierunku centrum Ziemi? Masa statku wynosi $M = 12$ ton. Przyspieszenie swobodnego spadku na powierzchni Ziemi $g = 9,81$ m/s².
Rozwiązanie na str. 5



W peryhelium (najbliższym względem Słońca punkcie orbity) Ziemia oddalona jest od Słońca o 147 117 000 km, zaś w aphelium (najdalszym punkcie swej orbity) — o 152 083 000 km. W momencie przejścia przez peryhelium (między 2 a 5 stycznia) na półkuli północnej panuje zima, a przy przejściu przez aphelium (między 1 a 5 lipca) — lato. Można by przypuszczać, że ma to znaczenie dla kształtowania się różnic klimatycznych na obu półkulach. Jednak o wiele ważniejszą sprawą są w tym wypadku różnice powierzchni zajmowanych przez wody i lądy na półkulach północnej i południowej. Wiosna, lato, jesień i zima trwają na naszej półkuli odpowiednio (długości pór roku liczy się od odpowiednich przejść do odpowiednich równonocy): 92^d19^h, 93^d15^h, 89^d19^h, 89^d00^h. Na półkuli północnej najdłużej więc trwa lato, a na południowej najdłuższą porą roku jest zima. Różnice w długości trwania poszczególnych pór roku związane są z faktem, że w pobliżu peryhelium prędkość Ziemi na jej orbicie jest największa (30,29 km/s), a w okolicy aphelium — najmniejsza (29,29 km/s).



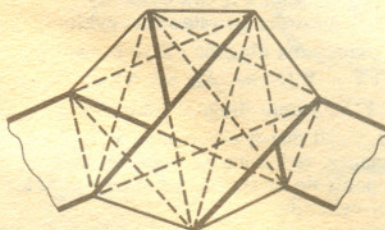
Dowolny, nawet wklęsły, czworokąt jest dobrym kształtem na kafelki, z jakich można ułożyć posadzkę. I sposób ułożenia jest prosty — wystarczy pamiętać, by w każdym wierzchołku schodziły się wszystkie kąty tego czworokąta — rzecz jasna — każdy z innego kafelka.



Soczewka wykonana z jednego rodzaju szkła nie może skupić wszystkich barw w jednym punkcie. Zawsze bowiem przy załamaniu światła promienie niebieskie odchylane są silniej niż czerwone. Dlatego przystosowanie soczewki oka do obserwacji przedmiotu czerwonego wymaga większego wysiłku niż przystosowanie do obserwacji, znajdującego się w tej samej odległości, przedmiotu niebieskiego. Jest to przyczyną omyłek w ocenie odległości; przedmioty czerwone wydają się bliższe od niebieskich. Trzy pionowe pasy flagi francuskiej nie mają jednakowej szerokości. Początkowo ich szerokość była taka sama, ale wtedy miało się wrażenie, iż pas niebieski jest szerszy od czerwonego. Sprawę zbadała specjalna komisja i zaleciła wybranie szerokości pasów niebieskiego, białego i czerwonego w stosunku 30:33:37.

W dyskusji nad literaturą polską pomija się na ogół fakt, że mamy w tej dziedzinie rekordzistę świata. Księga rekordów Guinnessa podaje, że „Józef Ignacy Kraszewski, który stworzył ponad 900 tomów powieści i prac historycznych” jest w dalszym ciągu niezagrożonym championem. Nie odnotowany w tej księdze jest rekord w produkcji prac matematycznych. Należy on od dwóch wieków do Leonharda Eulera i wynosi 883 prace.

Siedmiokąta foremnego nie można skonstruować linijką i cyrklem. Można natomiast to zrobić używając jedynie paska papieru. Należy w tym celu zawiązać ten pasek w węzeł taki, jak na rysunku. Pasek papieru pozwala skonstruować dowolny wielokąt foremny.



Każdy nadprzewodnik jest idealnym diamagnetykiem. Oznacza to, że pole magnetyczne, na tyle słabe, by nie zniszczyć stanu nadprzewodzącego, nie może wniknąć do wnętrza nadprzewodnika. Pole magnetyczne indukowanych prądów całkowicie kompensuje w tym przypadku pole zewnętrzne. Dzięki tej własności nadprzewodniki doskonale nadają się na osłony magnetyczne. Nie jest pewne, czy każdy idealny diamagnetyk musi być nadprzewodnikiem. „Prawie idealny” diamagnetyzm odkryto w chlorku miedzi i siarczku kadmu przy ciśnieniu kilkuset megapaskali i temperaturze 150–200 K. Niektórzy uważają jednak, że jest to wynik błędnej interpretacji danych doświadczalnych. Ostatecznego wyjaśnienia dostarczą planowane eksperymenty.

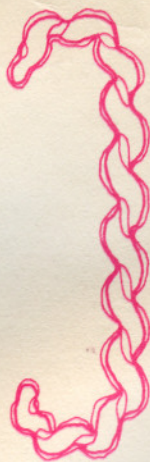
Nie chce się wierzyć, ale znany jest wynalazca taczki. Jeszcze trudniej uwierzyć, że było to dopiero w XVII wieku — wynalazcą jest Blaise Pascal, a wynalazku dokonał dla wojska. Istotnie, taczka znacznie usprawnia sypanie wałów obronnych.

Spośród trójkątów o danej długości podstawy i długości wysokości najmniejszy obwód ma trójkąt równoramienny.

Energia potrzebna na przebycie takiego samego dystansu (w przeliczeniu na kilogram wagi ciała) przez rybę jest dwukrotnie mniejsza niż energia zużywana przez ptaka. Ewentualne zdziwienie (woda stawia większy opór niż powietrze) bierze się stąd, iż zapominamy o grawitacji. Lecący ptak przede wszystkim walczy z grawitacją, a nie z oporem powietrza — ryba pokonuje tylko opór wody. Jak jednak wytłumaczyć fakt, że odpowiednia energia zużywana przez ssaka na lądzie jest kilkadziesiąt razy większa?



10⁴



BAKTERIA
ZÓŁTACZKI



WŁÓKNA CELULOZY

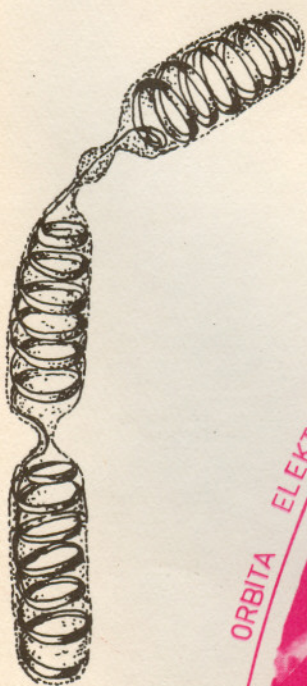


WŁÓKNA PIÓRA KURCZAKA

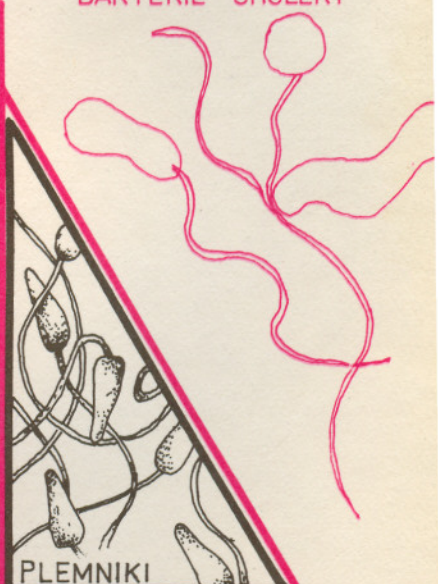
n=600

BAKTERIE CHOLERY

CHROMOSOM



ORBITA ELEKTRONU W ATOMIE WODORU WZBUDZONYM DO POZIOMU



PLEMNIKI

WŁÓKNA KOLAGENO-
WE SKÓRY



10⁻⁵m

10 μm

OMÓRKA DROZDZY



BAKTERIE



WIRUS OSPY