

Dnia 23 sierpnia

zmarł

prof. dr Witold Nowacki

autor znaczących prac z zakresu mechaniki

wieloletni prezes

Polskiej Akademii Nauk

SPIS TREŚCI

NUMERU 11(155)

Holografia — możliwości i zastosowania <i>dr Katarzyna Chalasińska-Macukow</i>	str. 1
O równoliczności zbiorów <i>mgr Piotr Zakrzewski</i>	str. 4
Kwazary mieszkają w galaktykach <i>dr Bronisław Rudak</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Hipoteza ergodyczna i twierdzenie Sinaja <i>dr Henryk Żołądek</i>	str. 10
Kącik olimpijski	str. 13
Zadania	str. 13
XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna	str. 14
Klub 44	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

W następnym numerze:

Inwentarz niebieski

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmoki
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczącą
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz SitarSKI
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych w tych oddziałach.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecońodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr inż. arch. Mariola Łotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93

Biuro Reklam i Propagandy

tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w Drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 2703/12/86. P-33.

Holografia — możliwości i zastosowania

Dr Katarzyna CHAŁASIŃSKA—MACUKOW

Holografia jest to metoda zapisu i rekonstrukcji pełnej informacji niesionej przez fale różnej natury: fale elektromagnetyczne, akustyczne czy elektronowe. Już w samej nazwie, którą można tłumaczyć jako „pełny zapis” (z greckiego *holos* = pełny, *gramma* = zapis), zaznaczona jest ta cecha. Właśnie możliwość pełnego zapisu różni holografię od konwencjonalnej fotografii i daje możliwość otrzymywania trójwymiarowych obrazów.

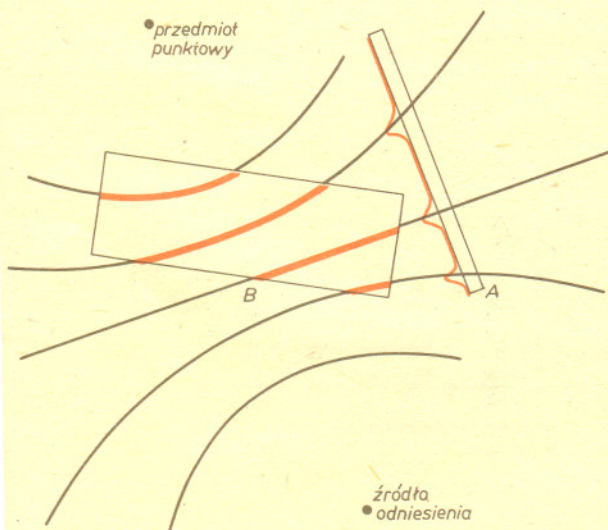
Podstawy holografii zostały sformułowane przez Denisa Gabora w latach 1948—1951, za co w 1971 roku otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Prawdziwy rozwój holografii przypada jednak dopiero na lata sześćdziesiąte i jest ściśle związany z rozwojem techniki laserowej. W tym czasie holografia i możliwości jej zastosowania w wielu dziedzinach nauki i techniki wzbudziły ogromne zainteresowanie. Była ona przez jakiś czas dominującą dziedziną optyki stosowanej. Trójwymiarowe obrazy holograficzne fascynowały i pobudzały wyobraźnię. Dawały wielkie nadzieje na szybką realizację trójwymiarowego kina i telewizji. Tak się jednak nie stało. Zbudowanie holograficznego kina okazało się bardzo trudne do realizacji i do dzisiaj takie nie istnieje. Również hologram nie stał się natychmiast konkurencją dla fotografii i nie wszedł do powszechnego użytku. Coraz częściej zaczęły pojawiać się opinie, że holografia jako metoda zapisu informacji nie spełniła pokładanych w niej nadziei, że zawiodła i że nie warto dalej na tak szeroką skalę w nią inwestować.

Niemniej jednak w laboratoriach naukowych prace trwały nadal. W wielu dziedzinach nauki i techniki holografia weszła na stałe jako technika zapisu. Poszukiwano również nowych materiałów światłoczułych oraz opracowywano nowe metody zapisu

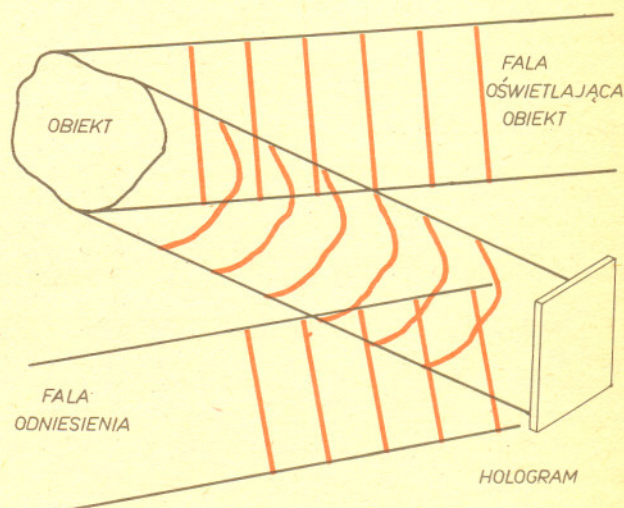
i rekonstrukcji hologramów. Rozwinęła się cała nowa dziedzina holografii — hologramy odtwarzane w świetle białym. To spowodowało, że w ostatnich latach holografia zaczyna znowu budzić zainteresowanie i mieć masowych odbiorców.

A właściwie na czym polega zapis holograficzny? Wyobraźmy sobie pole świetlne pochodzące od dwóch źródeł punktowych, z których jedno traktujemy jako przedmiot punktowy, a drugie jako źródło odniesienia. Rozkład maksimów fali stojącej, utworzonej przez interferencję fal pochodzących z obu źródeł, przedstawia rysunek 1. Aby zapisać hologram, należy umieścić w tym polu materiał światłoczuły. Sposób, w jaki to robimy, determinuje własności zapisanego hologramu oraz narzuca sposób jego odczytania. Położenie oznaczone na rysunku 1 jako *A* daje w efekcie tzw. hologram płaski, to znaczy zapis powstaje na powierzchni materiału światłoczułego.

Przykład prostego układu doświadczalnego do zapisu hologramu płaskiego przedstawia rysunek 2. Światło pochodzące z lasera jest dzielone na dwie części, z których jedna oświetla przedmiot i odgrywa rolę tzw. fali przedmiotowej, a druga, tzw. fala odniesienia, jest skierowana bezpośrednio w stronę hologramu. Obie fale są spójne, a więc mają zdolność do interferencji. Przypomnijmy sobie, że każdą falę można opisać poprzez podanie wartości jej amplitudy i fazy w danym momencie i punkcie przestrzeni. Gdy rejestrujemy światło rozproszone od przedmiotu, czyli gdy fotografujemy, klisza rejestruje natężenie I_p równe kwadratowi amplitudy fali rozproszonej. Faza jest zgubiona. Dlatego też fotografia wiernie odwzorowuje rozkład oświetlenia obiektu (za to odpowiada amplituda fali rozproszonej), ale jest dwuwymiarowa. Zagubiony został relief i głębia sceny — za to odpowiada właśnie faza fali rozproszonej.



Rys. 1



Rys. 2

W przypadku zapisu holograficznego klisza również rejestruje tylko natężenie I fali, ale dzięki wprowadzeniu fali odniesienia (i spójności światła) pojawiają się w nim nowe składniki. Natężenie I wynosi wtedy

$$I = I_p + I_o + I_{po},$$

gdzie I_p i I_o są odpowiednio natężeniami fal przedmiotowej i odniesienia, a I_{po} jest wynikiem interferencji między obu falami i zawiera informację o ich fazie. Właśnie dzięki dodaniu fali odniesienia hologram zawiera pełną informację o fali przedmiotowej, a obrazy holograficzne są trójwymiarowe.

Gdy hologram oświetlimy światłem laserowym (prosty układ przedstawia rysunek 3), otrzymamy obraz trójwymiarowy rejestrowanego obiektu, powstający w tej samej odległości, w jakiej znajdował się przedmiot i widziany tak, jak go „widział” hologram przy zapisie. Umieszczając oko za hologramem, w sposób zaznaczony na rysunku, możemy go obserwować „jak przez szybkę”. Ścisłe rzecz biorąc, podczas odczytu hologramu powstają dwa obrazy: rzeczywisty i urojony. Który z nich przedstawiony jest na rysunku 3, a który na rysunku 5?

Hologram płaski składa się z mniej lub bardziej skomplikowanych prążków interferencyjnych i działa jak superpozycja wielu siatek dyfrakcyjnych. Aby zrekonstruować obraz z takiego hologramu, niezbędne jest oświetlenie monochromatyczne, bo w przeciwnym przypadku każda barwa daje obraz nieco przesunięty, co powoduje, że rekonstrukcja jest nieczytelna.

Konieczność użycia światła laserowego do rekonstrukcji była właśnie powodem, że technika holograficzna pozostawała techniką laboratoryjną i nie wchodziła do powszechnego użytku. Jednym z wcześniejszych sposobów ominięcia tej trudności było zastosowanie zapisu objętościowego. Kiedy grubą warstwę materiału światłoczułego umieścimy w polu interferencyjnym w taki sposób, jak to zaznaczone jest na rysunku 1 (położenie B), to zapis powstaje w całej objętości materiału w postaci warstw mniej lub bardziej naświetlonych. Tak wykonany hologram nazywamy hologramem objętościowym. Może on być odtwarzany w świetle białym, gdyż ma własność selektywności chromatycznej i kierunkowej. W pierwszym przybliżeniu

można go potraktować jako filtr interferencyjny, który wycina z widma tylko tę długość fali, która spełnia warunki Bragga (patrz niżej). Na ogół warunki te są spełnione dla długości fali użytej do zapisu.

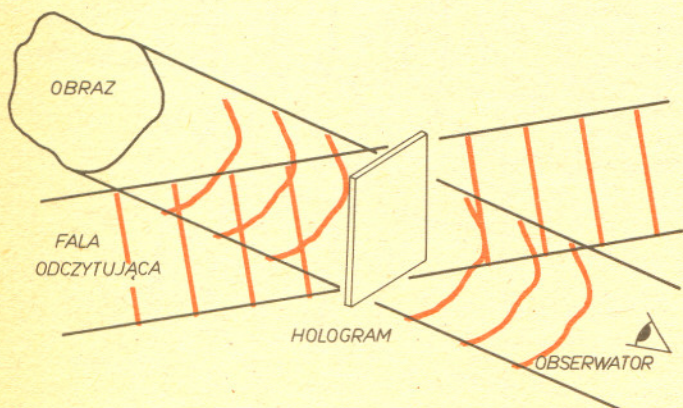
Filtr interferencyjny składa się z wielu naświetlonych płaszczyzn równoległych odbijających światło (podobnie jak warstwy atomów w kryształach). Fala padająca (np. światło białe) ulega ugięciu (rozproszeniu) na różnych płaszczyznach (patrz rysunek 4), uzyskując różne przesunięcia fazowe. W efekcie interferencji tych fal następuje wzmocnienie ich lub osłabienie w zależności od długości fali λ , kąta obserwacji θ i odległości d między płaszczyznami, zgodnie z warunkiem Bragga (warunek wzmocnienia)

$$2d \sin \theta = m \lambda, \quad \text{gdzie } m = 1, 2, 3 \dots$$

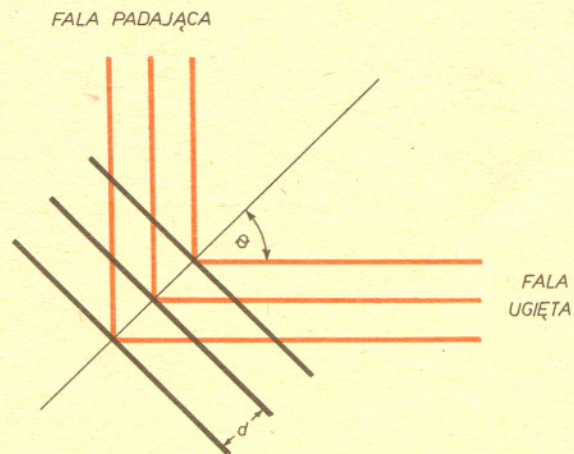
Selektywność chromatyczna i kierunkowa polegają na tym, że wzmocnienie dla różnych długości fal występuje pod różnymi kątami θ .

Technika objętościowa pozwala uzyskiwać obrazy holograficzne w naturalnych barwach. Wymaga to wielokrotnych naświetleń, z których każde tworzy hologram odpowiadający innej barwie, użytej do zapisu. W procesie rekonstrukcji światłem białym otrzymujemy superpozycję odtworzeń wiernie odpowiadającą obiektowi pierwotnemu. Ta technika jest w tej chwili bardzo rozwijana na całym świecie przez miłośników holografii artystycznej. Coraz częstsze są wystawy hologramów artystycznych. Powstały również muzea holograficzne, cieszące się wielką popularnością. W sklepach spotyka się reklamy holograficzne, a w kioskach z upominkami można kupić breloczki-hologramy. Dzięki uzyskiwaniu coraz to lepszych materiałów światłoczułych jakość obrazów bywa w tej chwili taka, że do złudzenia przypominają one oryginał.

Ale każdy hologram wykonany techniką objętościową jest jak dzieło artysty — trudny do skopiowania. Można więc mieć pojedyncze egzemplarze, ale nie ma mowy o masowym powielaniu dla celów komercyjnych. Ogromnej rewolucji w tej dziedzinie dokonały tzw. hologramy tęczowe, zaproponowane przez Bentona. Jego idea sprowadza się właściwie do wykonania hologramu z hologramu, przy czym zapis hologramów jest płaski. Pierwszy hologram jest zapisany w układzie konwencjonalnym z boczną falą odniesienia (rys. 2).



Rys. 3



Rys. 4

Drugi etap, polegający na zapisie hologramu z hologramu, przedstawiony jest na rysunku 5. Pomysł Bentona polegał na użyciu w tym drugim etapie szczeliny przesłaniającej hologram pierwotny. Odtwarzany z tak zamaskowanego hologramu obraz jest równocześnie rejestrowanym przedmiotem na drugim hologramie, czyli na hologramie Bentona. Hologram Bentona rejestruje również obraz szczeliny maskującej hologram pierwotny.

Podczas rekonstrukcji (rys. 6) między obserwatorem a hologramem powstaje obraz przedmiotu oraz, w innej płaszczyźnie, bliżej obserwatora, obraz szczeliny maskującej. Jeśli taki hologram oświetlimy światłem białym, to wraz ze zmianą długości fali obrazy szczelin i obrazy przedmiotu dla różnych długości fal wypadają w innym miejscu, na różnych wysokościach. Obrazy szczelin, odpowiadające różnym barwom, są rozdzielone przestrzennie. Umieszczając oko w płaszczyźnie szczeliny na danej wysokości będziemy obserwowali obraz przedmiotu, dawany przez jedną tylko długość fali. Przesunięcie oka w kierunku prostopadłym do szczeliny daje zmianę barwy obrazu — od fioletu do czerwieni, stąd nazwa „hologramy tężowe”. Jak widzimy, szczelina wprowadza w proces rekonstrukcji selektywność chromatyczną — działa jak szczelina wyjściowa monochromatora. Barwa zrekonstruowanego przedmiotu nie jest barwą oryginału, jednak obraz jest czytelny, a efekt jest zadziwiający.

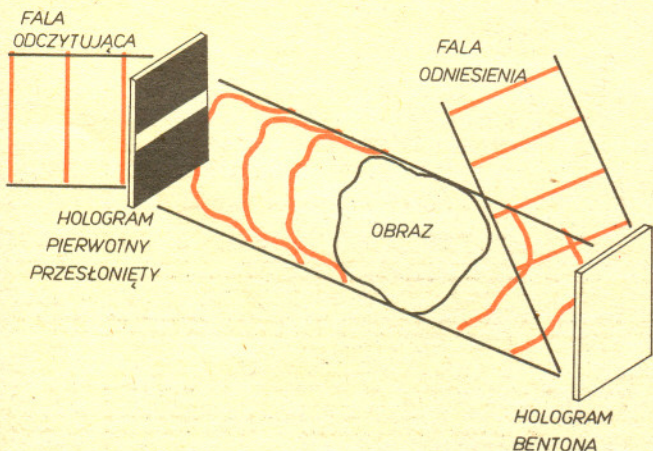
Bardzo ważny jest fakt, że metodą Bentona otrzymujemy hologram płaski. Proces kopiowania jest więc dużo prostszy niż w przypadku hologramów objętościowych. Bardzo łatwe jest też wykonanie hologramu odbiciowego, czyli takiego, na którym informacja zapisana jest nie w postaci rozkładu zacernienia na kliszy, lecz w postaci zmiennego reliefu proporcjonalnego do padającego natężenia w trakcie zapisu. Rekonstrukcja z takiego hologramu powstaje w świetle odbitym, a nie przechodzącym (jak to jest przedstawione na rysunku 6). Te cechy umożliwiły w ostatnich latach masową produkcję „hologramów tężowych”, które zaczęły się pojawiać konkurencyjnie z konwencjonalną fotografią. Ozdabiają one karty kredytowe, są na pocztówkach czy koszulkach typu *T-shirts*. Jedno z najpoczytniejszych czasopism na świecie *The National Geographic* już dwukrotnie „zafundowało” sobie okładkę z hologramem Bentona. Już widzę oczyma wyobraźni,

jak mój syn kupuje *Deltę* z trójwymiarowym obrazem holograficznym na okładce.

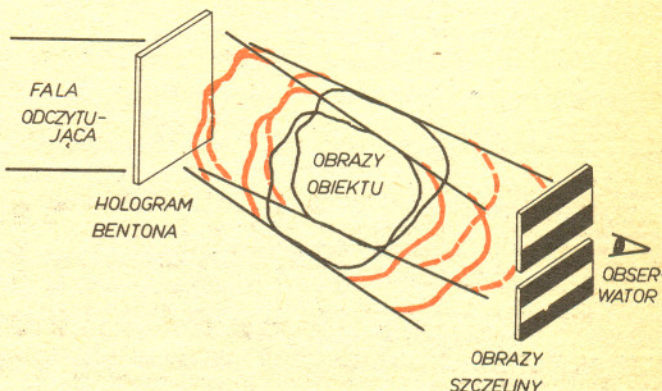
Na zakończenie chciałbym omówić jeszcze jeden, chyba najnowszy, rodzaj hologramu. Mam na myśli holografię komputerową. Na czym ona polega? Aby to zrozumieć, należy zdać sobie sprawę z tego, że światło rozproszone, niosące informację o przedmiocie, może być zapisane w postaci mniej lub bardziej skomplikowanej funkcji matematycznej, opisanej macierzą $n \times n$ punktów, odpowiadających punktom przestrzeni, w których znamy zarówno amplitudę, jak i fazę fali przedmiotowej. Stosunkowo proste operacje matematyczne pozwalają na obliczenie, za pomocą komputera, rozkładu natężenia pola odpowiadającego płaszczyźnie hologramu dla dowolnie danych rozkładów fali przedmiotowej. Otrzymane wartości liczbowe natężenia dla poszczególnych punktów hologramu można za pomocą specjalnych urządzeń przerzucić na kliszę w taki sposób, że zacernienie kliszy w danym punkcie będzie proporcjonalne do obliczonego natężenia. Tak otrzymany hologram odtwarza się światłem laserowym analogicznie jak płaski hologram konwencjonalny.

Komputerowy zapis hologramu rokuje ogromne nadzieje i ma zastosowanie w wielu dziedzinach techniki. Pozwala na rejestrację dowolnych rozkładów pola odpowiadających abstrakcyjnym, trudno realizowalnym w praktyce obiektom. Ma to zastosowanie w optycznym przetwarzaniu informacji, czyli m.in. w analizie zdjęć lotniczych, zdjęć z mikroskopu elektronowego czy diagnostyce medycznej. Tą metodą wykonuje się hologramy działające jak bezberracyjne soczewki czy całe zestawy soczewek, idealnie dopasowane do potrzeb układu, w którym mają pracować.

Jak widzimy, zastosowania techniki holograficznej są ogromne i bardzo różnorodne. Omówiłam tu tylko niektóre, te, które w tej chwili walczą o swoje miejsce. Jest wiele innych zastosowań, takich jak np. interferometria holograficzna, które są powszechnie stosowane już od lat. Dzięki realizacji pełnego zapisu informacji holografia otworzyła możliwości dotychczas niedostępne. Opracowanie nowych materiałów światłoczułych i nowych metod zapisu umożliwiła coraz to nowe zastosowania i ciągle poszerzanie grona odbiorców. Chyba nie zostało powiedziane jeszcze ostatnie słowo w tej dziedzinie.



Rys. 5

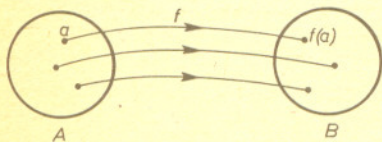


Rys. 6



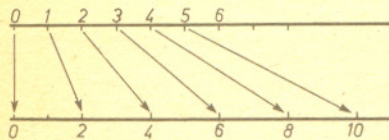
O równoliczności zbiorów

Mgr Piotr ZAKRZEWSKI



Rys. 1

Definicję równoliczności jako pierwszy podał Bernard Bolzano w roku 1847. Jednakże w pełni zrozumiał znaczenie tego pojęcia i dokładnie je zbadał dopiero w latach 1873—1890 Georg Cantor, twórca teorii mnogości.



Rys. 2

O istnieniu odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej między liczbami naturalnymi a ich kwadratami wiedział już Galileusz w roku 1638. Wyciągnął stąd wniosek, że aksjomat „całość jest większa od części” nie może być zastosowany do zbiorów nieskończonych.



Rozwiązanie zadania F 209. Niech x będzie grubością lodu po czasie t . Ponieważ proces nie zachodzi bardzo szybko, temperatura w warstwie lodu będzie zmieniała się liniowo od temperatury topnienia $T_0 = 0^\circ\text{C}$ do temperatury otoczenia $T = -10^\circ\text{C}$. Utrata ciepła z jednostki powierzchni lodu w krótkim czasie Δt jest równa $\kappa \frac{T_0 - T}{x} \Delta t$ i towarzyszy jej przyrost grubości lodu o Δx . Wynika stąd równość

$$\kappa \frac{T_0 - T}{x} \Delta t = L_0 \cdot \Delta x,$$

a po przejściu granicznym $\Delta t \rightarrow 0$ równanie różniczkowe

$$\frac{dt}{dx} = \frac{L_0}{\kappa(T_0 - T)} x.$$

Rozwiązanie tego równania (przy założeniu, że dla $t = 0, x = 0$) daje szukaną grubość warstwy lodu

$$x = \sqrt{\frac{2\kappa(T_0 - T)}{L_0}} \approx 8 \text{ cm}.$$

Czy zbiory nieskończone mogą różnić się liczbą elementów? Żeby móc sensownie postawić takie pytanie, spróbujmy uogólnić pojęcie równej liczebności zbiorów. Dla stwierdzenia, że skończone zbiory A i B mają po tyle samo elementów, wystarczy elementy zbioru A połączyć z elementami zbioru B w rozłączne pary w taki sposób, żeby żaden z elementów któregośkolwiek z zbiorów nie pozostał bez pary. Każdemu elementowi zbioru A odpowiada wówczas dokładnie jeden, występujący z nim w parze, element zbioru B i odpowiedniość ta jest wzajemnie jednoznaczna. Na odwrót: każda funkcja f działająca różnowartościowo z A na B łączy elementy tych zbiorów w pary postaci $\langle a, f(a) \rangle$, gdzie $a \in A$. Powyższe uwagi prowadzą do następującej definicji.

Zbiory X i Y są równoliczne (równej mocy, oznaczenie: $X \sim Y$), jeśli istnieje różnowartościowa funkcja przekształcająca zbiór X na zbiór Y .

Pojęcie równoliczności ma sens dla dowolnych zbiorów i, jak widzieliśmy, w przypadku zbiorów skończonych oznacza po prostu posiadanie tej samej liczby elementów. Zauważmy też, że jeśli $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, to $X \sim Z$ (sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi). Przyglądając się zbiorom nieskończonym natrafiamy jednakże na nowe zjawisko: zbiór może być równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym. Przykładowo, funkcja $f(n) = 2n$ ustala równoliczność zbioru \mathbb{N} liczb naturalnych ze zbiorem liczb parzystych (rys. 2).

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywamy przeliczalnymi. Przeliczalność zbioru X oznacza możliwość ponumerowania wszystkich jego elementów i ustawienia ich w ciąg nieskończony x_0, x_1, \dots , w którym wyrazy się nie powtarzają. Różnowartościowa funkcja z \mathbb{N} na X jest właśnie taką numeracją: wystarczy położyć $x_n = f(n)$. Tak więc nie tylko zbiór liczb parzystych, ale w ogóle każdy nieskończony zbiór złożony z liczb naturalnych jest przeliczalny (dlaczego?). Z drugiej strony, zbiory intuicyjnie znacznie „większe” od zbioru liczb naturalnych też mogą być przeliczalne. Przykładem takiego zbioru jest zbiór liczb wymiernych. Oczywiście ustawienie wszystkich liczb wymiernych w ciąg nie ma nic wspólnego z ich naturalnym porządkiem według wielkości.

Pora zatem zapytać, czy w ogóle istnieją zbiory nieskończone, które nie są przeliczalne? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a podstawowy przykład stanowi zbiór \mathbb{R} liczb rzeczywistych. Żeby tego dowiedzieć, pokażemy, że żaden nieskończony ciąg liczbowy nie wyczerpuje wszystkich liczb rzeczywistych. Dla dowolnego danego ciągu $(x_n : n \in \mathbb{N})$ znajdziemy mianowicie liczbę a , której w tym ciągu nie ma. Utwórzmy najpierw rozwinięcia dziesiętne liczb x_0, x_1, \dots . W każdym z rozwinięć będzie nas interesować jedynie ciąg złożony z cyfr od 0 do 9 występujący po przecinku. Wypiszmy więc te ciągi kolejno:

$$\begin{aligned} &c_0^0, c_1^0, c_2^0, \dots \\ &c_0^1, c_1^1, c_2^1, \dots \\ &c_0^2, c_1^2, c_2^2, \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

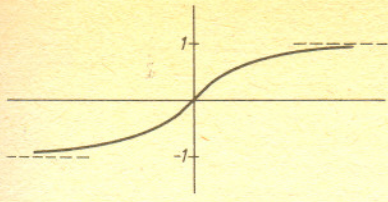
Jeśli przy tym liczba ma dwa rozwinięcia (np. $0,500\dots = 0,499\dots$), to wypisujemy jeden po drugim obydwa odpowiadające jej ciągi. Chcemy znaleźć liczbę a w postaci $0, a_0 a_1 a_2 \dots$. Będzie ona różna od wszystkich liczb $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, o ile tylko ciąg a_0, a_1, \dots będzie różny od wszystkich wypisanych powyżej ciągów. Połóżmy więc dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } c_n^n = 9, \\ c_n^n + 1, & \text{jeśli } c_n^n \neq 9. \end{cases}$$

Taka definicja gwarantuje, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciągi a_0, a_1, \dots i c_0^n, c_1^n, \dots są różne, gdyż różnią się n -tym wyrazem!

Tym samym dowód jest zakończony.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorami mocy continuum. Przykładem zbioru mocy continuum jest dowolny przedział liczbowy (z końcami lub bez jednego bądź obu końców). Dowód tego faktu rozbijemy na trzy kroki:



Rys. 3

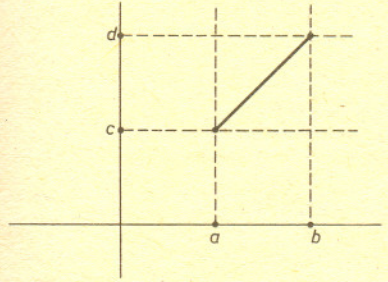
1. Przedział otwarty $(-1, 1)$ ma moc continuum. Równoliczności \mathbf{R} z $(-1, 1)$ dowodzi funkcja:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \text{ (rys. 3).}$$

2. Każde dwa przedziały otwarte są równoliczne. Jeśli bowiem mamy dane liczby a, b, c, d , gdzie $a < b$ i $c < d$, to funkcja liniowa:

$$g(x) = \frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

przekształca różnowartościowo przedział (a, b) na przedział (c, d) (rys. 4).



Rys. 4

3. Jeśli P jest przedziałem, a y dowolną liczbą spoza P , to $P \cup \{y\} \sim P$, tzn. dołączenie jednego elementu nie zmienia mocy przedziału.

Weźmy bowiem dowolny różnowartościowy ciąg $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elementów P (jeśli a i b są końcami P i $a < b$, to można np. położyć $x_n = a + \frac{b-a}{n+2}$ dla $n = 0, 1, \dots$). Zdefiniujmy (rys. 5):

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{jeśli } x = y \\ x_{n+1} & \text{jeśli } x = x_n \\ x & \text{dla pozostałych punktów przedziału } P. \end{cases}$$

Funkcja f przekształca $P \cup \{y\}$ różnowartościowo na P .

Punkty 1, 2 i 3 są udowodnione. Jeśli teraz mamy dane dowolne liczby a i b , $a < b$, to:

- $(a, b) \sim \mathbf{R}$ na mocy 1 i 2,
- $(a, b) \sim [a, b]$, $(a, b) \sim (a, b]$ i $(a, b) \sim [a, b]$ na mocy 3.

Każdy przedział ma więc „tyle samo elementów” co cały zbiór liczb rzeczywistych.

Następny przykład jest jeszcze bardziej zaskakujący. Wiadomo dobrze, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi a punktami prostej (oś liczbowa). Prosta ma więc moc continuum. Z kolei położenie punktu na płaszczyźnie określamy za pomocą dwóch liczb rzeczywistych — współrzędnych w ustalonym układzie współrzędnych.

Okazuje się jednak, że ... zbiór punktów płaszczyzny też ma moc continuum! Znaczy to, że do określenia położenia punktu na płaszczyźnie wystarczy jedna współrzędna!

Dla dowodu ustalmy na danej płaszczyźnie pewien układ współrzędnych prostokątnych. Zauważmy najpierw, że kwadrat $K = \{ \langle x, y \rangle : 0 < x \leq 1 \text{ i } 0 < y \leq 1 \}$ jest równoliczny z płaszczyzną. Jeśli bowiem f jest jakąkolwiek funkcją przekształcającą różnowartościowo przedział $(0, 1]$ na \mathbf{R} , to funkcja

$$g(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), f(y) \rangle \quad \text{dla } x, y \in K$$

przekształca różnowartościowo K na całą płaszczyznę. Ponieważ przedział $(0, 1]$ ma moc continuum, więc wystarczy pokazać, że $K \sim (0, 1]$. Znowu posłużymy się rozwinięciami dziesiętnymi. Dla uniknięcia niejednoznaczności używamy wyłącznie rozwinięć, w których występuje po kolei nieskończenie wiele cyfr różnych od zera. Weźmy więc punkt $\langle x, y \rangle \in K$ i niech:

$$\begin{aligned} x &= 0, x_0 x_1 x_2 \dots \\ y &= 0, y_0 y_1 y_2 \dots \end{aligned}$$

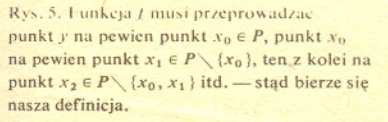
Chcemy mu przyporządkować liczbę $z = 0, z_0 z_1 z_2 \dots$ należącą do przedziału $(0, 1]$. Jak to zrobić? Problem sprowadza się do tego, by z pary nieskończonych ciągów: $(x_n : n \in \mathbf{N})$ i $(y_n : n \in \mathbf{N})$ utworzyć jeden ciąg $(z_n : n \in \mathbf{N})$. Najprościej byłoby przeplatać kolejne wyrazy danych ciągów dostając w wyniku ciąg: $x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 \dots$. Ta metoda jest jednak zła, gdyż zdefiniowana na jej podstawie funkcja nie przekształcałaby K na $(0, 1]$. Przykładowo, na liczbę 0,1010... nie przeszedłby żaden punkt z K . Można jednak przeplatać nie pojedyncze wyrazy, lecz całe ich bloki. Odpowiednie bloki otrzymamy stawiając w naszych ciągach kreski po każdym wyrazie różnym od zera. Na przykład parze liczb:

$$x = 0, 1|2|03|004|..., \quad y = 0, 08|5|9|0002|...$$

przyporządkujemy liczbę $z = 0,108250390040002...$

Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że tak określona funkcja przekształca różnowartościowo K na $(0, 1]$.

Powróćmy do pytania, od którego zaczęliśmy. Wiemy już, że odpowiedź na nie jest twierdząca. Znamy przykłady zbiorów przeliczalnych i zbiorów mocy continuum. Czy mogą jednak istnieć zbiory nieprzeliczalne innej jeszcze mocy? Okazuje się, że tak. Świat zbiorów nieskończonych jest bardzo bogaty. Zachęcamy Czytelnika do lepszego poznania rządzących nim praw.



Rys. 5. Funkcja f musi przeprowadzać punkt y na pewien punkt $x_0 \in P$, punkt x_0 na pewien punkt $x_1 \in P \setminus \{x_0\}$, ten z kolei na punkt $x_2 \in P \setminus \{x_0, x_1\}$ itd. — stąd bierze się nasza definicja.

Cantor przez trzy lata usiłował udowodnić, że zbiór punktów prostej nie jest równoliczny ze zbiorem punktów płaszczyzny. Gdy przekonał się, że jest przeciwnie, napisał w liście do Dedekinda: „Widzę, że tak jest, ale nie wierzę”.

Wśród matematyków znany jest pomysł hotelu Hilberta o nieskończonej liczbie miejsc. W tym hotelu zawsze znajdzie się miejsce dla spóźnionego podróżnego — wystarczy każdego z dotychczasowych gości przenieść do pokoju o numerze o jeden większym niż zajmowany poprzednio.

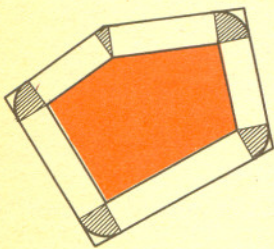
Wyjaśnienie zagadki ze strony 14, dotyczącej zadania 1 z XXVII MOM. Zbiór $S \cup \{d\}$ nadal ma własność: dla dowolnych różnych liczb a, b należących do S liczba $ab - 1$ jest pełnym kwadratem.

Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy do dalszej lektury książkę Wacława Sierpińskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii* oraz książkę Kazimierza Kuratowskiego pod tym samym tytułem.



Kwazary mieszczą w galaktykach

Rozwiązanie zadania M 453. Rozwiązanie przedstawione jest na rysunku.



Pola prostokątów dają w sumie p , a pola wycinków kołowych dają w sumie pole koła o promieniu 1, czyli π .

Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu sześciianu o krawędzi a wokół głównej przekątnej wynosi

$$\frac{5\pi}{\sqrt{3}} a^3.$$

W drobiazgu 122 z Delt 6/1986 podaliśmy błędny wynik. Przepraszamy naszych Czytelników.

Dziękujemy panom: Rafałowi Augustynowi z Katowic, Janowi Okoniewskiemu i Ryszardowi Szelidze z Żar za zwrócenie nam uwagi na błąd.

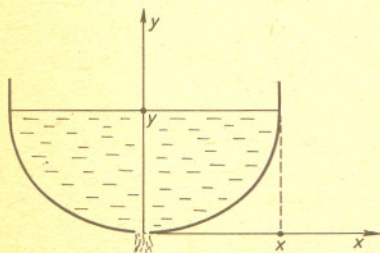


Rozwiązanie zadania F 208. Jeśli założymy, że woda jest nieściśliwa, to $s \cdot v = S \cdot V$, gdzie V — prędkość opadania górnego poziomu wody, S — jego pole powierzchni, a v — prędkość wypływu przez dolny otwór o powierzchni s . Z zasady zachowania energii mamy: $v^2 = 2gy$, gdzie y — głębokość wody (rysunek). Zaniedbaliśmy przy tym energię kinetyczną górnych warstw wody ze względu na warunek $S \gg s$.

Z warunku stałej prędkości przesuwania się poziomu wody wynika:

$$\frac{\pi x^2}{\sqrt{2gy}} = \frac{s}{V} = \text{const.}$$

Stąd — kształt klepsydry opisany jest funkcją $y = kx^4$, gdzie $k = \pi^2 V^2 / 2gs^2$.



Dr Bronisław RUDAK

Najbardziej charakterystyczną cechą kwazarów jest znaczne przesunięcie ku czerwieni powstających w tych obiektach linii widmowych. Miarą tego przesunięcia jest parametr

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}},$$

gdzie λ_{lab} oznacza laboratoryjną długość fali linii widmowej (np. dla linii Lyman α wodoru $\lambda_{lab} = 1215 \text{ \AA}$), natomiast λ_{obs} jest obserwowaną długością fali tejże linii.

Jeżeli Wszechświat ekspanduje zgodnie z prawem Hubble'a, to odległości Układu Słonecznego do poszczególnych obiektów rosną wraz ze wzrostem z .

Rekordową wartością parametru z szczyli się obecnie kwazar PKS 2000–330:

$$z(\text{PKS } 2000-330) = 3,78.$$

Rozpiętość wartości z w całej grupie znanych kwazarów jest znaczna — spotyka się wśród nich obiekty, których przesunięcie ku czerwieni niewiele przekracza 0,01. Wartości z dla galaktyk są średnio mniejsze niż dla kwazarów. Dla wielu z nich $z < 0,01$, ale jest sporo galaktyk, które leżą znacznie dalej niż niejeden kwazar. Obecny rekord dla galaktyk wynosi $z = 3,2$. W sumie jednak to właśnie kwazary są najodleglejszymi obserwowanymi przez człowieka obiektami materialnymi.

W pierwotnej, roboczej definicji kwazarów istotną rolę odgrywała „nibygwiazdowość” tych obiektów. Słowo angielskie *quasar* jest skróceniem sformułowania *quasi-stellar object*. Kwazary to ciała, które na „pierwszy rzut oka” (umówmy się, że oko to duży astrograf) wyglądają jak gwiazdy. Na kliszy fotograficznej obraz kwazara czy gwiazdy jest dokładnie taki, jaki daje punktowe źródło promieniowania. Oba typy obiektów są nierozróżnialne dopóty, dopóki nie mamy możliwości zobaczenia ich widma elektromagnetycznego za pomocą spektrografu. Widma kwazarów są tak różne od widm gwiazdowych, że pomyłki zdarzają się bardzo, bardzo rzadko. Z galaktykami nie ma tego problemu. Są to obiekty rozciągnięte (mówimy czasem — dają rozdzielone obrazy). Może nie wszystkie są tak pięknie widoczne jak słynna galaktyka w Andromedzie, ale na kliszach fotograficznych wyraźnie różnią się od gwiazd.

Kwazary leżą na krańcach Wszechświata (prawdziwie kosmologiczne odległości), a mimo to dają się zaobserwować — świadczy to o olbrzymich ilościach energii wysyłanych przez nie w każdej chwili w postaci promieniowania elektromagnetycznego. Zwykła gwiazda podobna do Słońca wypromieniowuje w ciągu jednej sekundy mniej więcej 10^{33} ergów. Typowa galaktyka zawiera 10^{11} takich gwiazd, a więc świeci z mocą 10^{44} ergów na sekundę. Istnieją wśród galaktyk monstra — gigantyczne galaktyki eliptyczne, których moc przekracza 10^{45} ergów/s. Nie są to jednak liczby, którymi można zaimponować kwazarom. W tej rodzinie 10^{47} ergów/s to przeciętność, a najjaśniejszy do tej pory znany obiekt w kosmosie — kwazar S50014+81 — promieniuje z mocą 10^{48} ergów/s!

To, co jest zadziwiające, to fakt, iż tak olbrzymie energie wyzwalane są w obiektach o rozmiarach nieporównanie mniejszych niż rozmiary jakiegokolwiek galaktyki. Niezbyt duża galaktyka osiąga średnicę kilku tysięcy parseków. W tym obszarze jest wystarczająco dużo miejsca dla kilkudziesięciu miliardów gwiazd i to właśnie gwiazdy są żarówkami w galaktyce-żyrandolu. Kwazar jest natomiast obiektem jakościowo odmiennym. Kształtu jego widma nie da się wytłumaczyć jako superpozycji wielu widm gwiazdowych, a co ważniejsze — praktycznie cała energia wypromieniowywana przez kwazar generowana jest w obszarze dającym się wpisać w sferę o promieniu zaledwie jednego parseka. Opisanie tego, co dzieje się w obrębie tego parseka, nie należy do tematu artykułu. Warto jednak wspomnieć, że według obecnych koncepcji centralnym motorem kwazara jest czarna dziura o masie bliskiej miliarda mas Słońca. Promieniowanie kwazara jest następstwem dyssypacji energii kinetycznej materii gazowej akreującej (spadającej) na czarną dziurę. Żeby kwazar był w stanie emitować właściwą dla niego ilość energii w jednostce czasu, w ciągu jednego tylko roku musi spaść na czarną dziurę materia o masie blisko stu mas Słońca.

Można teraz zastanawiać się skąd miałyby się brać owa materia. Jakim sposobem kwazary zapewniają sobie dostateczną ilość „paliwa”, aby świecić? Nie może to być w żadnym wypadku gaz międzygalaktyczny. Gęstość materii międzygalaktycznej jest zbyt niska. Kwazary z całą pewnością muszą być „podłączone” do niewidocznych do tej pory potężnych „zbiorników” z materią. Gdyby takich zbiorników nie udało się odkryć, kto wie, jakie miałyby to reperkusje w całej kosmologii. Jedynym ratunkiem byłoby przyjęcie, że kwazary znajdują się dużo bliżej niż sądzimy, wobec czego promieniują znacznie mniej energii niż wynikałoby to z założenia



Rozwiązanie zadania M 451. Suma cyfr szukanej liczby wynosi 10. Oznaczmy przez k liczbę zer. Przypuszczenie, że $k = 0$ prowadzi do sprzeczności, gdyż k to liczba zer. Suma $10 - k$ liczb różnych od zera jest równa 10, a po odrzuceniu cyfry k zostaje $9 - k$ cyfr różnych od zera, które dają w sumie $10 - k$. W takim razie jest wśród nich $8 - k$ jedynek i jedna dwójka. Mamy zatem k zer, $8 - k$ jedynek, jedną dwójkę i cyfrę k . Pokażemy, że $k \geq 3$. Zauważmy, że jest $8 - k$ cyfr, które występują raz. Stąd

$$\frac{0+1+2+\dots+(8-k-1)}{8-k \text{ składników}} \leq 10.$$

Zatem $\frac{(7-k)(8-k)}{2} \leq 10$, czyli $k \geq 3$.

Jedyną cyfrą występującą dwukrotnie jest więc jedynka, stąd $k = 6$ i liczba ma zapis dziesiętny 6210001000.



Rozwiązanie zadania M 452. Niech $q_n = P(X \geq n)$; niech $q_1 = q$. Mamy teraz $P(\{X \geq m+n\} \cap \{X \geq m\}) = P(X \geq n) \times P(X \geq m)$. Lewa strona to po prostu $P(X \geq m+n)$, więc $q_{m+n} = q_m \cdot q_n$. Wynika stąd, że $q_n = q^n$. Dalej, $P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = q^n - q^{n+1} = q^n(1 - q)$.

Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} q^n(1 - q)$ musi być zbieżny, zatem $0 < q < 1$.

Uwaga. Własność, o której mowa w zadaniu, nazywana jest własnością „braku pamięci”. Jeśli X będziemy interpretować jako czas oczekiwania na zajście jakiegoś zjawiska, to prawdopodobieństwo tego, że zjawisko zajdzie w ciągu najbliższych n jednostek czasu, nie zależy od tego, jak długo już czekamy. Taką własność ma na przykład czas oczekiwania na pierwszy sukces w ciągu prób Bernoulliego.

o ich kosmologicznych odległościach. Należałoby odrzucić ekspansję Wszechświata jako czynnik powodujący poczerwienienie kwazarów i galaktyk i szukać innego przekonywającego rozwiązania. A rezygnacja z rozszerzającego się Wszechświata narobiłaby wielu kłopotów kosmologom, niekoniecznie dlatego, że 90% z nich zarabia na chleb badając modele Wszechświata z ekspansją.

Na szczęście Natura okazała się łaskawa. Dzięki wyrafinowanym technikom obserwacyjnym, rozwiniętym w ostatnich latach, udało się znaleźć dla kilkudziesięciu kwazarów upragnione zbiorniki z paliwem. „Kilkadziesiąt” — to liczba nieduża, zwłaszcza iż kwazarów znamy obecnie ponad 1500, ale początek został zrobiony.

Owymi zbiornikami kwazarowego paliwa okazały się być całkiem zwykłe galaktyki. Co więcej, każdy z kwazarów rezyduje w samym centrum (jądrze) swojej galaktyki. Mechanizm zasilania w tym wypadku kwazara materią jest na tyle skomplikowany i trudny, że można go zamknąć w jednym zdaniu: główne elementy galaktyki — gwiazdy — w swojej wędrówce po galaktyce mogą zabłądzić w pobliże jądra, gdzie potężne siły przyłykowe czarnej dziury rozrywają je bezlitośnie, po czym tak „skruszona” materia przez ową dziurę jest pochłaniana.

Czy odkrycie wokół kwazarów właśnie galaktyk, a nie innych tworów, mogło być dla astronomów zaskoczeniem? Raczej nie. Żeby zrozumieć dlaczego, musimy przyjrzeć się niektórym osobnikom w menażerii galaktyk.

Pod względem morfologicznym galaktyki można z grubsza podzielić na trzy grupy: spiralne, eliptyczne i nieregularne. W każdej z tych grup znajduje się całkiem liczna gromadka galaktyk-olbrzymów, których rozmiary dziesięciokrotnie przewyższają rozmiary osobników typowych. Niezwykle ciekawymi obiektami, stanowiącymi zaledwie kilka procent olbrzymich galaktyk spiralnych, są galaktyki Seyferta.

Fascynującą cechą galaktyki Seyferta jest bardzo silnie świecące, najczęściej punktowe, jądro. Moc wypromieniowywana przez takie jądra wynosi od 10^{42} do 10^{44} ergów na sekundę. Zatem samo jądro wyświeca ilość energii porównywalną z ilością energii wyświecanej przez całą resztę galaktyki Seyferta. To jeszcze nie wszystko. Widmo punktowego jądra jako żywo przypomina widmo typowego kwazara (gwoździ ścisłości: mowa tu o jądrach galaktyk Seyferta typu 1). Spektroskopowo jądra galaktyki Seyferta są nieodróżnialne od kwazarów! Czy w takim razie kwazary i jądra galaktyki Seyferta nie stanowią przypadkiem dwóch różnych klas jasności (mocy promieniowania) jakiegoś jednego typu obiektów? Dlaczego nie? Pierwotnej definicji kwazarów można wiele zarzucić. Zgodnie z nią kwazar to obiekt punktowy, nie rozdzielony na kliszy fotograficznej. A przecież stopień rozdzielczości zależy istotnie od wielu czynników. Techniki obserwacyjne są coraz skuteczniejsze i to, co było niewidoczne na początku lat sześćdziesiątych, może zostać zaobserwowane obecnie lub w bliskiej przyszłości. Czy kwazar, wokół którego zdołamy zaobserwować słabiutką galaktykę, przestanie być z tego powodu kwazarem?

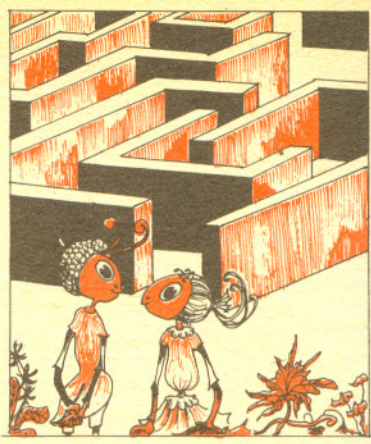
Badania galaktyki Seyferta wskazują dość jednoznacznie, że ich jądra są „kwazarami małej mocy”: zawierają masywną czarną dziurę (około 10^8 — 10^9 mas Słońca), która akreuje materię w tempie jednej masy Słońca na rok.

Wróćmy wreszcie do galaktyk odkrywanych wokół kwazarów. Na pierwszych zdjęciach wykonanych kilka lat temu galaktyki te wyglądają jak bardzo słabe mgiełki otaczające kwazary. Żeby udowodnić niezbicie, iż mgiełki te w istocie są galaktykami, trzeba było posłużyć się spektroskopią i zbadać ich widma. Udało się to w kilkunastu przypadkach (pamiętajmy, że fotografować możemy obiekty słabsze od tych, dla których możliwe jest otrzymanie widma).

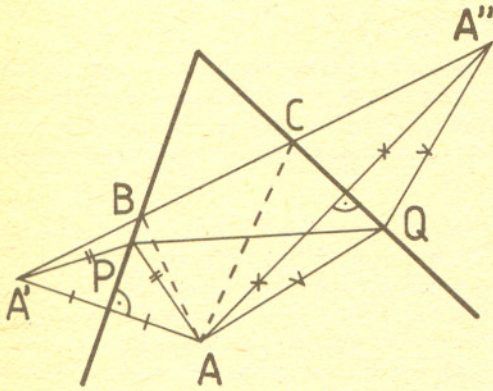
Problem, który fascynuje obecnie badaczy, to pytanie, jaka jest morfologia galaktyk zawierających kwazar. Jeżeli marzy się nam pełna unifikacja kwazarów i jąder galaktyk Seyferta, to chciałoby się, żeby były to galaktyki spiralne. Tak jednak nie jest. Tylko około 40% zaobserwowanych do tej pory galaktyk z kwazarem w środku to rzeczywiście galaktyki spiralne. Mniej więcej drugie tyle obiektów wykazuje wszelkie cechy obrzeczowych galaktyk eliptycznych. O pozostałych 20% trudno cokolwiek zdecydowanego powiedzieć — materiał obserwacyjny jest zbyt niepewny. We wszystkich natomiast przypadkach jasność jądra, czyli kwazara, jest około stu razy większa niż jasność samej galaktyki.

Rok 1985 przyniósł nieoczekiwaną obserwację. Otóż w galaktyce otaczającej kwazar QSO 1059 + 73 (w odległości około 400 milionów parseków) zauważono „jasny, niebieski obiekt”. Według odkrywców jedynym sensownym wytłumaczeniem jest zjawisko supernowej. Czy jest to istotne w kontekście poruszonego tematu? Ależ bardzo! Pomijając fakt, że byłaby to najdalsza zaobserwowana do tej pory supernowa, mielibyśmy w ręku — dowód na kosmologiczne odległości do kwazarów (pamiętajmy, że supernowe umożliwiają niezależny pomiar odległości), — jeszcze jeden dowód na obecność gwiazd w „mgiełce” otaczającej kwazary, — dowód, że przynajmniej niektóre kwazary występują w galaktykach spiralnych (do szacowań statystycznych przydałoby się nieco więcej takich odkryć).

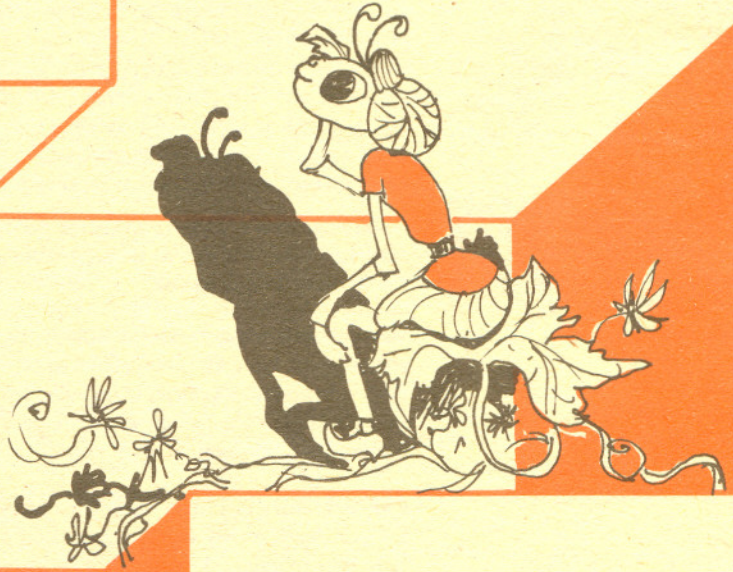
mata delta



NAJKRÓCEJ



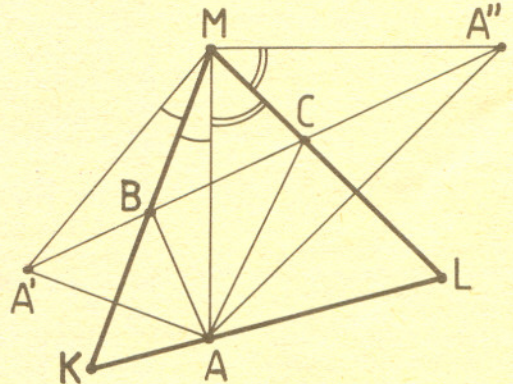
Aby znaleźć trójkąt o najmniejszym obwodzie, który ma jeden wierzchołek w punkcie A wewnątrz danego kąta ostrego, a dwa pozostałe na ramionach tego kąta — odbijamy punkt A symetrycznie względem tych ramion otrzymując punkty A' i A'' , — poszukiwane wierzchołki B i C znajdujemy w przecięciach odcinka $A'A''$ z ramionami kąta. Istotnie, wybierając na ramionach kąta dowolne punkty P i Q stwierdzamy, że obwód trójkąta APQ ma tę samą długość co łamana $A'PQA''$, a ta jest najkrótsza, gdy $P = B$ i $Q = C$, ponieważ odcinek jest krótszy od innych łamanych łączących jego końce.

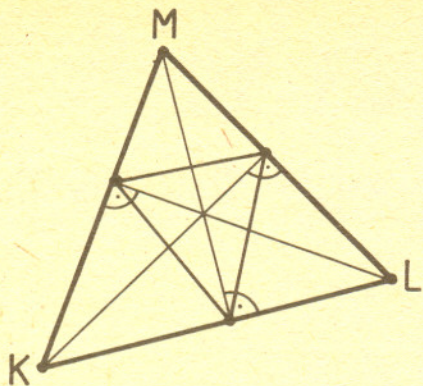


Można rozwiązać trudniejsze zadanie: problem Fagnano (fańjano) — znaleźć trójkąt o najmniejszym obwodzie mający po jednym wierzchołku na każdym z boków danego ostrokątnego trójkąta KLM .

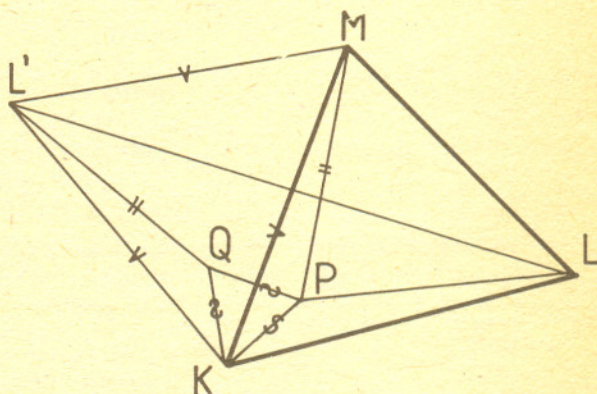
Gdybyśmy znali położenie jednego z wierzchołków (np. A) — zadanie sprowadzałoby się do poprzedniego. Weźmy więc jakikolwiek punkt A na boku KL i znajźmy pozostałe wierzchołki trójkąta jak w poprzednim zadaniu. Obwód trójkąta ABC to długość odcinka $A'A''$. Dla jakiego spośród możliwych punktów A odcinek ten będzie najkrótszy? Zauważmy, że $MA' = MA = MA''$. Trójkąt $A'MA''$ jest więc równoramienny i

$$A'A'' = 2A'M \sin \frac{\sphericalangle A'MA''}{2} = 2AM \sin \sphericalangle KML.$$

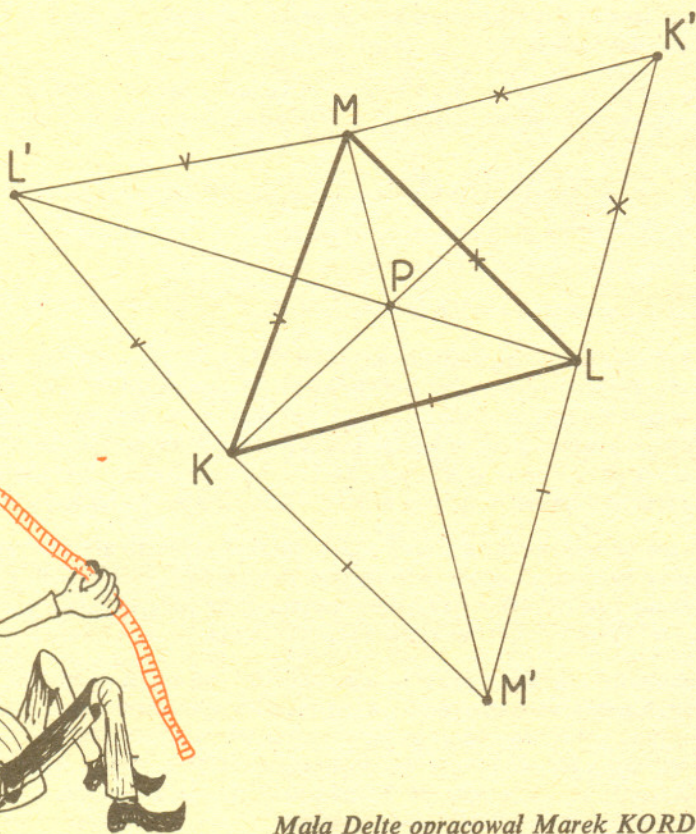




Zatem odcinek $A'A''$ jest najkrótszy, gdy najkrótszy jest odcinek AM . Tak więc rozwiązaniem problemu Fagnano jest tzw. trójkąt spodkowy — o bokach łączących punkty przecięcia wysokości z przeciwległymi bokami.



I jeszcze jedno zadanie: problem Fermata — w trójkącie ostrokątnym znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków będzie najmniejsza. Weźmy w trójkącie KLM dowolny punkt P i obróćmy trójkąt KPM o 60° otrzymując trójkąt KQL' . Powstaną dwa trójkąty równoboczne KPQ i KML' . W szczególności $PL + PK + PM = LP + PQ + QL'$, a zatem suma odległości punktu P od wierzchołków trójkąta jest równa długości łamanej $LPQL'$. Szukany punkt musi więc leżeć na odcinku LL' .

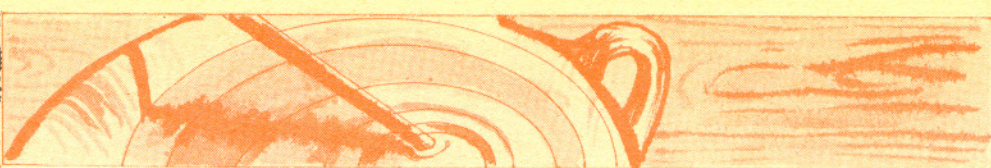


Ze względu na symetrię założeń szukany punkt leżeć musi na każdym z odcinków łączących wierzchołek trójkąta z wierzchołkiem trójkąta równobocznego zbudowanego na przeciwległym boku. Tylko czy te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie?

Tak rzeczywiście jest. Dla tych, którzy sami chcieliby przekonać się o tym, podajemy inny sposób znalezienia najlepszego punktu P . Łamana $LPQL'$ jest odcinkiem, gdy

$$\sphericalangle KPL = \sphericalangle KQL' = 120^\circ.$$

Wystarczy więc znaleźć przecięcie łuku okręgu, z którego odcinek KL widać pod kątem 120° , z takimż łukiem dla odcinka ML i najlepszy punkt P jest znaleziony. Przy okazji odkryliśmy jeszcze jedną własność ostatniego rysunku: przecinające się w punkcie P odcinki dzielą płaszczyznę na jednakowe kąty.



Hipoteza ergodyczna i twierdzenie Sinaja

Dr Henryk ŻOŁĄDEK

Wstęp

Jednym z podstawowych problemów mechaniki statystycznej jest wyjaśnienie procesu dochodzenia do równowagi termodynamicznej w układach makroskopowych, tj. złożonych z wielkiej liczby cząstek (rzędu 10^{23} w 1 cm^3). Stan równowagi termodynamicznej jest to taki stan układu (gazu, cieczy, kryształu itp.), w którym wszystkie cząstki są „dokładnie wymieszane”. (Definicje wprowadzanych tu pojęć podamy później.)

Przykładem procesu osiągnięcia takiej równowagi jest rozprężanie gazu w próżnię (rys. 1). Po usunięciu przegrody gaz w krótkim czasie wypełni cały zbiornik i nigdy nie powróci do stanu początkowego.

Z drugiej strony wiadomo, że klasyczny układ złożony z N cząstek o masie m opisuje się równaniami Newtona

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

gdzie x_i oznacza położenie i -tej cząstki, a F_i siłę na nią działającą. Położenia i prędkości cząstek układu w danej chwili określają jego dalszą ewolucję. Wystarczy rozwiązać równania Newtona.

Znając położenia i prędkości cząstek w danej chwili możemy też odtworzyć dotychczasową historię układu. Co więcej, możemy przypuszczać, że układ po pewnym czasie powróci do stanu początkowego; przecież żaden ze stanów nie jest wyróżniony. Stoi to w jawnej sprzeczności z układem z rysunku 1; jeszcze nikt nie zaobserwował, żeby cząstki gazu zebrały się ponownie w jednej części zbiornika.

Sprzeczność ta została sformułowana w zeszłym wieku, kiedy Maxwell, Boltzmann i Gibbs tworzyli podstawy mechaniki statystycznej i po dziś dzień stanowi poważne wyzwanie dla fizyków i matematyków.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie pewnego matematycznego podejścia do powyższego zagadnienia.

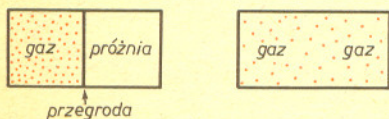
Stan układu

Stan układu mechanicznego jest zdefiniowany przez podanie położenia i prędkości wszystkich cząstek układu. Przestrzeń fazowa jest to zbiór wszystkich stanów układu, czyli zbiór wszystkich możliwych zespołów położenia i prędkości cząstek wchodzących w układ. Na przykład: przestrzenią fazową jednej cząstki znajdującej się w pudełku K jest iloczyn kartezjański $K \times \mathbb{R}^3$, (zbiór par (x, v) , gdzie x oznacza położenie, a v — wektor prędkości). Przestrzenią fazową układu złożonego z N cząstek w pudełku K jest $K \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times K \times \mathbb{R}^3$ (N razy).

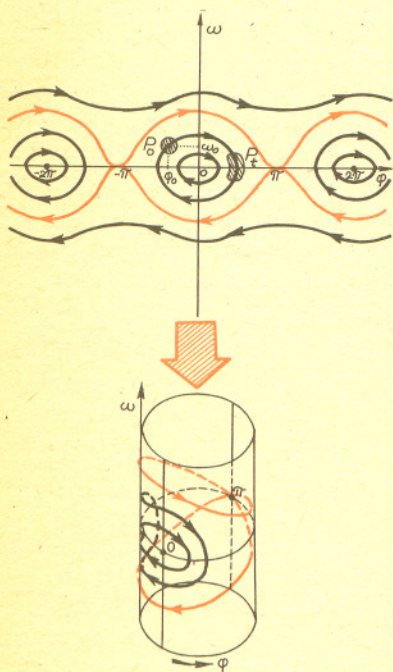
W podobny sposób wprowadza się pojęcie przestrzeni fazowej innych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody. Na przykład przestrzenią fazową wahadła matematycznego jest nieskończony walec $S^1 \times \mathbb{R}$, a stan jest wyznaczony przez podanie kąta φ wychylenia wahadła od położenia równowagi i prędkości kątowej ω wahadła (rys. 2).

Wprowadzone powyżej pojęcie stanu układu jest wygodne jedynie dla teoretyków.

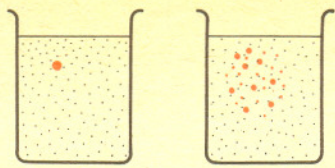
W praktycznych zastosowaniach niemożliwe jest dokładne wyznaczenie stanu. Jest on określony tylko z pewnym przybliżeniem. Poza tym im więcej cząstek układ zawiera, tym więcej położenia i prędkości trzeba wyznaczać i już dla $N = 10$ dostajemy 60 liczb. Widać, że dla N rzędu 10^{23} nasze pojęcie stanu traci jakikolwiek praktyczny sens. Z powyższych powodów w mechanice statystycznej wprowadza się inne pojęcie stanu układu.



Rys. 1



Rys. 2. Przestrzeń fazowa wahadła matematycznego. Stan P odpowiada punktom leżącym w zaznaczonym krążku, a stan P_1 odpowiada punktom leżącym w zdeformowanym pod wpływem ewolucji obrazie tego krążka.



Rys. 3. Kropla oliwy pod wpływem zderzeń z molekułami cieczy dyfunduje i znajdzie się w dowolnym miejscu, natomiast kropla soku rozpuści się jednostajnie w całej objętości wody.

Według nowej definicji stanem układu nazywa się rozkład prawdopodobieństwa P (lub miarę probabilistyczną) na przestrzeni fazowej. Położenia i prędkości cząstek nie są wyznaczone jednoznacznie. Można jedynie mówić o prawdopodobieństwie $P(A)$ tego, że położenia i prędkości cząstek leżą w danym obszarze A przestrzeni fazowej. Przykładem takiego stanu może być stan wahałda matematycznego, w którym wychylenie φ i prędkość kątowa ω mogą z jednakowym prawdopodobieństwem znajdować się w kuli o małym promieniu ε i środku (φ_0, ω_0) (rys. 2). Jest to przybliżenie stanu (φ_0, ω_0) w sensie pierwszej definicji.

W dalszym ciągu położenia i prędkości cząstek występujących w układzie będziemy nazywali punktem przestrzeni fazowej (lub prosto punktem) i oznaczać przez X . Punkt przestrzeni fazowej w chwili t oznaczmy przez X_t .

Stan układu na ogół się zmienia, jeśli P jest stanem w chwili 0, to stan w chwili t jest rozkładem prawdopodobieństwa P_t , w którym $P_t(A)$ oznacza prawdopodobieństwo (względem miary P) tego, że w chwili t punkt X będzie się znajdował w obszarze A . Stan P nazywa się stanem równowagi termodynamicznej, jeśli jest stały, tj. $P_t = P$. Mówimy, że układ w stanie P dąży do stanu równowagi P_* , jeśli rozkład P_t dąży do rozkładu P_* przy t rosnącym do nieskończoności (tzn. dla każdego obszaru A w przestrzeni fazowej $P_t(A) \rightarrow P_*(A)$).

Posługując się wprowadzonymi pojęciami opisany we wstępie problem można sformułować następująco. Pokazać, że:

- 1) istnieje tylko jeden stan równowagi termodynamicznej P_* ,
- 2) odpowiada on sytuacji, w której cząstki są wymieszane.

dla dowolnego stanu początkowego P mamy $P_t \rightarrow P_*$. Własność 2) oznacza, że układ w stanie równowagi można traktować jako układ makroskopowy, w którym nie są istotne położenia poszczególnych cząstek i który opisuje się parametrami termodynamicznymi, takimi jak temperatura, ciśnienie, gęstość itp. Właśnie przejście od opisu mikroskopowego (za pomocą równań Newtona) do makroskopowego stanowi tę trudność, z którą matematycy i fizycy jeszcze nie uporali się w zadowalającym stopniu.

Ergodyczność i mieszanie

Załóżmy, że stan P układu jest stanem równowagi. Mówimy, że układ w stanie P jest ergodyczny, jeśli dla dowolnego obszaru A przestrzeni fazowej (takiego, że $P(A) > 0$) i dla dowolnego punktu X przestrzeni fazowej punkt $X_t \in A$ dla pewnego t , to znaczy, że punkt w procesie ewolucji znajdzie się w dowolnym kawałku przestrzeni fazowej. Innymi słowy, trajektoria punktu X (zbiór punktów X_t) jest gęsta w przestrzeni fazowej.

Definicję ergodyczności przytoczyliśmy dla formalności. Z punktu widzenia mechaniki statystycznej ważniejsze jest pojęcie mieszania. Mówimy, że układ w stanie równowagi P jest układem mieszającym, jeśli dla dowolnych obszarów A i B przestrzeni fazowej takich, że $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, prawdopodobieństwo tego, że punkt X startujący z A ($X \in A$) znajdzie się w chwili t w obszarze B ($X_t \in B$) dąży do $P(B)$ przy t rosnącym do nieskończoności. Oznacza to jednostajne rozplływanie się dowolnego obszaru przestrzeni fazowej w całej przestrzeni fazowej.

Oczywiście, każdy układ mieszający jest ergodyczny. Najbardziej obrazowymi przykładami ukazującymi różnicę między ergodycznością i mieszaniem są: bardzo mała kropla oliwy w szklance z wodnym roztworem alkoholu o gęstości równej gęstości oliwy i kropla soku w szklance z wodą (rys. 3). Na rysunku 4 przedstawione są inne przykłady układów ergodycznych i nieergodycznych.

Ważność pojęcia mieszania ilustruje następujące

Twierdzenie 1. Jeśli układ w stanie równowagi P jest mieszający, a Q jest innym stanem układu, to $Q_t \rightarrow P$ przy $t \rightarrow \infty$.

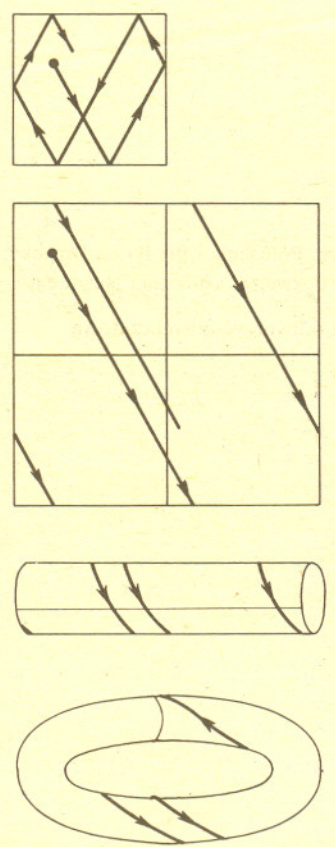
Nie będziemy dowodzić tego twierdzenia, które w gruncie rzeczy jest prostym wnioskiem z definicji mieszania (o ile znamy teorię całki i miary i założymy, że stan Q jest dostatecznie regularny).

Słynna Hipoteza Ergodyczna mówi:

układy mechaniki statystycznej w stanie równowagi są układami mieszającymi.

Dążenie do równowagi nie jest jedynym wnioskiem płynącym z Hipotezy Ergodycznej. Wynika z niej także, że dla typowego punktu przestrzeni fazowej część czasu, gdy punkt ten przebywa w obszarze A , jest proporcjonalna do względnej objętości obszaru A . W przykładzie z rysunku 1 względna objętość obszaru przestrzeni fazowej odpowiadająca skupieniu cząstek w jednej części zbiornika jest rzędu $(1/2)^{10^{23}}$. Zatem średni czas powrotu do stanu wyjściowego jest rzędu $2^{10^{23}}$ s (wiek Wszechświata wynosi około 10^{17} s).

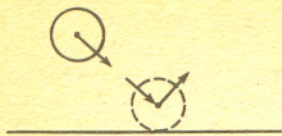
Nic dziwnego, że Hipoteza Ergodyczna skupiła swego czasu i skupia nadal uwagę wielu badaczy.



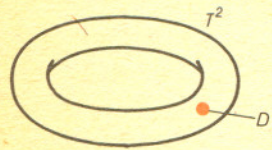
Rys. 4. Bilard w kwadracie K . Łatwo zauważyć, że ten układ jest równoważny swobodnemu ruchowi cząstki w torusie T^2 (czterokrotnie większemu od kwadratu K). Zajmijmy się zatem swobodnym ruchem w T^2 . Jeśli wybierzemy stan, w którym wszystkie punkty przestrzeni fazowej ($T^2 \times S^1$) są jednakowo prawdopodobne, to układ nie jest ergodyczny, ponieważ trajektorie leżą na powierzchniach $\varphi = \text{const}$, które nie są gęste w $T^2 \times S^1$. Jeśli wybierzemy stan, w którym dopuszczalne są jedynie punkty z $\varphi = \varphi_0$, to układ jest ergodyczny, jeśli $\text{tg } \varphi_0$ jest liczbą niewymierną i nie jest ergodyczny, jeśli $\text{tg } \varphi_0$ jest liczbą wymierną. W żadnym ze stanów układ nie jest mieszający.

Twierdzenie Sinaja

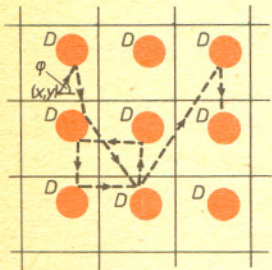
Rozważmy układ N kul o jednakowej średnicy d , jednakowej masie i jednakowej szybkości, znajdujących się w prostokątnym pudełku. Ruch oddzielnej kuli jest jednostajny i prostoliniowy do momentu zderzenia się z inną kulą lub ze ścianą pudełka. (Przy zderzeniu kąt padania równa się kątowi odbicia — składowa styczna prędkości pozostaje taka sama, a składowa normalna zmienia znak — rys. 5.) Okazuje się, że stan, w którym wszystkie konfiguracje kul i ich prędkości są jednakowo prawdopodobne, jest stanem równowagi.



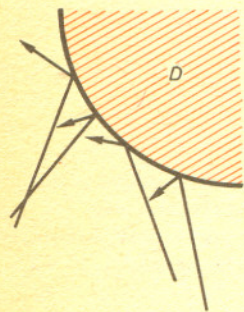
Rys. 5



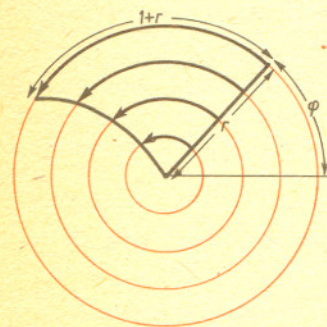
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9. Ewolucja (skokowa) układu dana jest przekształceniem $(r, \varphi) \rightarrow (r, \varphi + 1 + r)$. Okręgi $r = \text{const}$ są zachowywane i ewolucja na tych okręgach sprowadza się do obrotu o kąt zmieniający się z r . Układ ten nie jest ergodyczny, bo trajektoria dowolnego punktu leży na okręgu i nie jest gęsta. Rozważmy teraz przekształcenie płaszczyzny, które mało różni się od powyższego i zachowuje pole (tzn. kawałek płaszczyzny przeprowadza na kawałek o takim samym polu). Twierdzenie KAM mówi, że w nowym układzie część trajektorii nadal będzie leżała na zamkniętych krzywych (bliskich okręgom $r = \text{const}$). Przedstawiony tu układ pochodzi od pewnych rzeczywistych układów fizycznych.

W 1963 roku matematyk radziecki Jakow G. Sinaj opublikował twierdzenie o mieszanii powyższego układu. Jest ono cytowane w niemal wszystkich podręcznikach fizyki statystycznej. Jednak jego dowód nie został jeszcze do tej pory ściśle i w pełni przedstawiony. Praca Sinaja z 1963 roku liczy 4 strony i zawiera tylko ogólne wskazówki, jak powyższego twierdzenia należy dowodzić. W pracy z 1970 r. Sinaj udowodnił własność mieszanienia dla układu typu bilard. Rozwinął tam technikę, za pomocą której można rozważać układ sztywnych kul w pudełku. Część trudności technicznych związanych z układem kul została przezwyciężona w pracy ucznia Sinaja, N. I. Czernowa, z 1982 r. Wydaje się, że do pełnego dowodu niewiele brakuje i wkrótce zostanie on opublikowany.

Bilard

Przyczyna ergodyczności i mieszanienia układów mechanicznych leży w ich niestabilności. Zaprezentujemy to zjawisko na przykładzie bilardu na dwuwymiarowym torusie T^2 , z wyrzuconym dyskiem D (rys. 6). (Jest on równoważny bilardowi w kwadracie z wyrzuconym dyskiem.) Wygodnie jest przedstawić ten układ jako bilard na płaszczyźnie z wyrzuconą okresową rodziną dysków (rys. 7). Cząstka (jedna) porusza się prostoliniowo z prędkością 1 i odbija się od dysków zgodnie z zasadą: kąt padania równa się kątowi odbicia. Utożsamiając na płaszczyźnie punkty różniące się o współrzędne całkowite otrzymuje się z powrotem torus i ruch na nim. Punkt przestrzeni fazowej jest określony przez położenie cząstki $(x, y) \in T^2 \setminus D$ i kierunek prędkości (albo jej kąt nachylenia ψ do osi $0X$, $\varphi \in S^1$). Zatem przestrzeń fazowa jest trójwymiarowa i równa $(T^2 \setminus D) \times S^1$. Z praktycznego punktu widzenia trudno jest śledzić jedną cząstkę (patrz rys. 7). Wygodniej jest wybrać mały zespół (komórkę) cząstek leżących w pewnym małym kawałku $T^2 \setminus D$ z prędkościami leżącymi w małym otoczeniu wybranej prędkości.

Zobaczmy, co będzie się działo z komórką w późniejszych chwilach. Dopóki cząstki z komórki nie zderzą się z dyskiem D , dopóty komórka zachowuje swoją wyjściową formę. Natomiast po odbiciu od dysku cząstki rozbiegną się (rys. 8). Widać, że nasza komórka po odbiciu rozplynie się. Nastąpi duży rozrzut prędkości. W trakcie dalszego ruchu rozrzut prędkości nie zmienia się, natomiast rozrzut położeń stale powiększa się. Przy następnym odbiciu zachodzi nowy rozrzut prędkości i idący za tym rozrzut położeń. Po kilku odbiciach nie sposób narysować obrazu wyjściowej komórki. Jest on dokładnie rozmazany. Sinajowi udało się ująć to zjawisko w ściśle matematyczne formuły i udowodnić ergodyczność bilardu na torusie.

Układ dwóch kul w kwadracie jest ergodyczny (wynika to z twierdzenia Sinaja), natomiast układ dwóch kul na torusie T^2 nie jest ergodyczny. Przyczyna nieergodyczności ostatniego układu leży w tym, że suma prędkości $v_1 + v_2$ obu kul jest stała w trakcie ruchu na torusie (ale nie w kwadracie). Stąd wynika, że trajektorie punktów nie są zbiorami gęstymi (leżą na powierzchniach $v_1 + v_2 = \text{const}$).

Układ złożony z kilku kul można sprowadzić do układu typu bilard w przestrzeni wielowymiarowej. Jeśli oznaczymy przez q_i , $i = 1, \dots, N$, położenia środków kul, a przez $q = (q_1, \dots, q_n)$ punkt w przestrzeni $3N$ -wymiarowej, to otrzymamy ruch cząstki w przestrzeni $3N$ -wymiarowej. Musimy jednak wprowadzić pewne ograniczenia — odległość między środkami kul nie jest mniejsza niż d i odległość środków kul od ścianek pudełka nie jest mniejsza niż $d/2$. (Te ograniczenia odpowiadają wyrzuceniu dysku D w przypadku dwuwymiarowego bilardu.) Prawo — kąt padania równa się kątowi odbicia — pozostaje nie zmienione. Natomiast wyrzucony obszar nie jest ściśle wypukły (dokładniej, brzeg jego zawiera odcinki). W tym miejscu leży trudność, którą pokonał Czernow.

Uwagi końcowe

Na koniec powiemy kilka słów o ograniczoności zastosowania Hipotezy Ergodycznej. Otóż układ sztywnych kul jest jednym z nielicznych układów ergodycznych. Wskazują na to eksperymenty numeryczne i współczesna teoria układów dynamicznych. (Wskazuje na to ważne twierdzenie udowodnione przez A. N. Kołmogorowa, W. I. Arnolda i J. Mosera, tzw. twierdzenie KAM.) Tak więc w tych przypadkach potrzeba innych podejść do problemu nieodwracalności. Oczywiście takie podejścia istnieją, jednakże są matematycznie trudne w realizacji ze względu na złożoność problemu i trudności rachunkowe.

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań z geometrii bardzo wygodnym narzędziem jest rachunek wektorowy. Oto jego zalety:
 1° Wiele pojęć geometrycznych łatwo jest wyrazić za pomocą wektorów, np.: równoległość, prostopadłość, długość odcinka, pole trójkąta.
 2° Rachunek wektorowy podlega prawom zwykłej algebry.

Jako przykład rozwiążemy zadanie 4 z zawodów III stopnia XVIII Olimpiady Matematycznej.

Przekątne pewnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości a, b, c, d , są prostopadłe. Udowodnić, że przekątne dowolnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości a, b, c, d , są prostopadłe.

Rozwiązanie. Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem płaskim. Obliczymy iloczyn skalarny $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ wektorów, utworzonych przez jego przekątne.

$$\begin{aligned} AD^2 = \overline{AD}^2 &= (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \\ &+ 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} = AB^2 + CD^2 - BC^2 + \\ &+ 2(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) = AB^2 + CD^2 - BC^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}, \end{aligned}$$

$$\text{a stąd } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2).$$

Okazuje się, że iloczyn ten zależy tylko od długości boków czworokąta. Ponieważ prostopadłość przekątnych jest równoważna zerowaniu się tego iloczynu, więc w czworokącie, którego boki równe są bokom wyjściowego czworokąta, przekątne też muszą być prostopadłe, c.n.d.

Podamy teraz kilka zadań dla Czytelników.

1. Dane są w przestrzeni punkty A, B, C, D . Niech M oznacza środek odcinka \overline{AC} , zaś N — środek odcinka \overline{BD} . Udowodnić, że

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

(zadanie 8 z II Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

2. Dana jest w przestrzeni kula K i punkty A, B poza kulą takie, że odcinek \overline{AB} przecina wnętrze kuli. Udowodnić, że zbiór tych punktów P , dla których odcinki \overline{AP} i \overline{BP} są styczne do kuli K , zawarty jest w pewnej płaszczyźnie.

(zadanie 3 z zawodów II stopnia XXXI Olimpiady Matematycznej)

3. Udowodnić, że jeżeli punkt P przebiega okrąg wpisany w trójkąt ABC , to wartość $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2$ jest stała (a, b, c są odpowiednio długościami boków leżących naprzeciw wierzchołków A, B, C).

(6-II-XXXI)

4. Dana jest kula i wewnątrz niej punkt P . Punkty A, B, C są takimi dowolnymi punktami powierzchni tej kuli, że odcinki $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ są parami prostopadłe. Niech \overline{PQ} będzie przekątną wewnętrzną prostopadłościanu wyznaczonego przez odcinki $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$. Wyznaczyć zbiór punktów Q .

(zadanie 2 z XX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej)

Sławomir TOMASZEWSKI



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 451. Znaleźć liczbę dziesięciocyfrową, której pierwsza cyfra jest zarazem liczbą zer w jej zapisie dziesiętnym, druga liczbą jedynek i tak aż do ostatniej cyfry, która jest liczbą dziewiątek. Rozwiązanie na str. 7

M 452. Niech X będzie zmienną losową, przyjmującą wartości całkowite nieujemne, o następującej własności

$$P(X \geq m+n | X \geq m) = P(X \geq n) \text{ dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

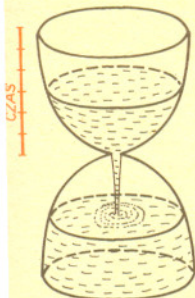
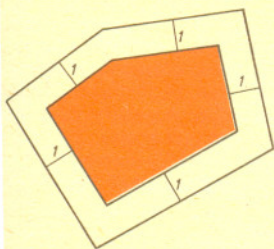
Znaleźć rozkład X .
 Rozwiązanie na str. 7

M 453. Boki wielokąta wypukłego o obwodzie p „rozsunięto” o 1. Udowodnić, że przyrost pola jest większy niż $p + \pi$.
 Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Maciej JĘDRZEJCZAK

F 208. Jaki kształt powinna mieć klepsydra (rysunek) wypełniona wodą, aby skala czasu była liniowa?
 Rozwiązanie na str. 6

F 209. Jakiej grubości warstwa lodu utworzy się na spokojnej powierzchni jeziora w ciągu 12 godzin, jeśli temperatura powietrza wynosi -10°C , a początkowa temperatura wody 0°C . Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu $\kappa = 2,2 \text{ J/K} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$, ciepło topnienia $L = 3,4 \times 10^5 \text{ J/kg}$, a gęstość $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.
 Rozwiązanie na str. 4



XXVII MIĘDZYNARODOWEJ OLIMPIADZIE MATEMATYCZNEJ

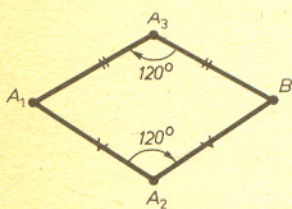
(Warszawa, 8—14 VII 1986)

Zadanie 1 (propozycja RFN). Niech d będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Udowodnić, że w zbiorze $\{2, 5, 13, d\}$ można tak wybrać dwa różne elementy a, b , by $ab - 1$ nie było kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Wystarczy dowieść, że co najmniej jedna z liczb $2d - 1, 5d - 1, 13d - 1$ nie jest pełnym kwadratem. Przy dzieleniu przez 16 każda liczba będąca kwadratem daje resztę 0, 1, 4 lub 9, natomiast co najmniej jedna z trzech napisanych wyżej liczb daje inną resztę — o czym przekonujemy się obliczając te reszty dla szesnastu możliwych wartości reszt z dzielenia d przez 16.

Zadanie 2 (Chiny). Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1 A_2 A_3$ i punkt P_0 . Definiujemy $A_5 = A_{5-3}$ dla wszystkich $s \geq 4$. Konstruujemy ciąg punktów P_0, P_1, P_2, \dots tak, że P_{k+1} jest obrazem P_k przy obrocie wokół punktu A_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \dots$) o 120° w kierunku wskazówek zegara. Udowodnić, że jeśli $P_{1986} = P_0$, to trójkąt $A_1 A_2 A_3$ jest równoboczny.

Rozwiązanie. Złożenie obrotów (o dowolnych środkach) o kąty, których suma jest wielokrotnością 360° , jest przesuńcieniem. Jeśli więc r_i oznacza obrót (w ustalonym kierunku) o 120° wokół A_i ($i = 1, 2, 3$), to $f = r_3 r_2 r_1$ jest przesuńcieniem o pewien wektor v . Zatem rozważane przekształcenie przeprowadzające P_0 na P_{1986} jest przesuńcieniem o wektor $(1986/3)v = 662v$, a ponieważ $P_{1986} = P_0$, więc $v = 0$ i f jest przekształceniem identycznościowym.



Stąd $A_1 = f(A_1) = r_3(B)$, gdzie $B = r_2 r_1(A_1) = r_2(A_1)$ (rysunek). Trójkąty $A_1 A_2 B$ i $B A_3 A_1$ są równoramienne, mają równe kąty ($\angle A_2 = \angle A_3 = 120^\circ$) i wspólny bok $A_1 B$ — są więc przystające. Wobec tego $A_1 A_2 B A_3$ jest rombem i $A_1 A_2 A_3$ jest trójkątem równobocznym.

Zadanie 3 (NRD). Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przyporządkowana jest liczba całkowita w taki sposób, że suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia. Jeśli trzem kolejnym wierzchołkom przyporządkowane są odpowiednio liczby x, y, z i $y < 0$, to następująca operacja jest dopuszczalna: liczby x, y, z zastępujemy odpowiednio liczbami $x+y, -y, z+y$. Powtarzamy tę operację dopóki, dopóki co najmniej jedna z pięciu liczb jest ujemna. Rozstrzygnąć, czy ten proces koniecznie musi się zakończyć po skończonej liczbie kroków.

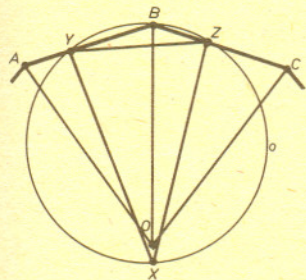
Rozwiązanie. Przypuścimy, że w pewnej chwili kolejnym wierzchołkom pięciokąta przyporządkowane są liczby u_1, \dots, u_5 i że któraś z nich jest ujemna (np. $u_j < 0$). Niech $V = (v_1, \dots, v_5)$ będzie układem liczb otrzymanym z układu $U = (u_1, \dots, u_5)$ po wykonaniu opisanej w zadaniu operacji (dla $y = u_j$). Rozważmy funkcję $F(U) = \sum (u_{i+1} - u_{i-1})^2$ (numerycja cykliczna: $u_0 = u_5, u_6 = u_1$). Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $F(V) - F(U) = 2u_j S$, gdzie $S = \sum u_i = \sum v_i > 0$; stąd $F(V) < F(U)$. Zatem wartości F w kolejnych krokach procedury tworzą malejący ciąg liczb

całkowitych nieujemnych. Ciąg taki musi być skończony.

Inna metoda (J. Keane, USA; nagroda specjalna). Przy oznaczeniach jak wyżej, niech $G(U) = \sum |u_i| + \sum |u_i + u_{i+1}| + \sum |u_i + u_{i+1} + u_{i+2}| + \sum |u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + u_{i+3}|$. Gdy porównamy 20 składników definiujących $G(U)$ z 20 składnikami definiującymi $G(V)$, okaże się, że 19 składników ma tę samą wartość, a ten jeden, który pozostaje, jest większy w $G(U)$ niż w $G(V)$. Konkluzja jak w metodzie poprzedniej.

Zadanie 4 (Islandia). Niech A i B będą kolejnymi wierzchołkami n -kąta foremnego ($n \geq 5$) o środku O położonego na płaszczyźnie. Trójkąt XYZ , który jest przystający do OAB i który zajmuje początkowo pozycję OAB , porusza się na płaszczyźnie tak, że każdy z punktów Y, Z przebiega cały brzeg wielokąta, a X pozostaje wewnątrz wielokąta. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X .

Rozwiązanie. Niech C będzie kolejnym za A, B wierzchołkiem wielokąta i przypuśćmy, że Y leży wewnątrz AB , a Z — wewnątrz BC .



Okrąg o opisany na XYZ przechodzi przez B , ponieważ $\angle XYZ + \angle YBZ = \angle AOB + \angle ABO + \angle OBC = 180^\circ$. Promień tego okręgu równa się $r = R/2\cos\alpha$, gdzie $\alpha = 180^\circ/n$, a $R = OA$ jest promieniem okręgu opisanego na wielokącie. Kąty $\angle XYZ$ i $\angle XBZ$ są równe jako wpisane oparte na tym samym łuku. Stąd $\angle OBZ = \angle OBC = \angle XYZ = \angle XBZ$, czyli punkty B, O, X leżą na jednej prostej. Cięciwa BX okręgu o największą długość ma wtedy, gdy jest średnicą. Zatem maksymalna długość odcinka OX wynosi $d = 2r - R = R((1/\cos\alpha) - 1)$. Szukaną figurą jest n -ramienna gwiazdka — suma n odcinków długości d leżących na przedłużeniach odcinków łączących punkt O z wierzchołkami wielokąta.

Zadanie 5 (Wielka Brytania). Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze nieujemnych liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych nieujemnych, że

- $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ dla wszystkich $x, y \geq 0$,
- $f(2) = 0$,
- $f(x) \neq 0$ dla $0 \leq x < 2$.

Rozwiązanie. Dla $z \geq 2$ mamy $f(z) = f((z-2)f(2))f(2) = 0$. Zatem

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z \geq 2.$$

Dla $0 \leq y < 2$ zachodzą więc równoważności: $x \geq 2 - y \Leftrightarrow x + y \geq 2 \Leftrightarrow f(x+y) = 0 \Leftrightarrow f(xf(y))f(y) = 0 \Leftrightarrow f(xf(y)) = 0 \Leftrightarrow xf(y) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2/f(y)$. Znaczący to, że $2 - y = 2/f(y)$ dla $0 \leq y < 2$. Zatem f musi być dana wzorem

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{2-y} & 0 \leq y < 2, \\ 0 & y \geq 2. \end{cases}$$

Pozostaje tylko sprawdzić, że funkcja ta istotnie spełnia warunki zadania.

Zadanie 6 (NRD). Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów o współrzędnych całkowitych. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na białą, w taki sposób, że dla każdej prostej L równoległej do jednej z osi współrzędnych bezwzględna wartość różnicy pomiędzy liczbą punktów białych i czerwonych leżących na L jest nie większa niż 1? Uzasadnij swoją odpowiedź.

W końcu przecież udało się (a było to już dobrze po północy 6/7 lipca) ustalić kompromisowe sformułowanie wszystkich zadań, praktycznie jednobrzmiące w czterech językach. Te teksty, przetłumaczone następnie przez poszczególnych jurorów na języki ojczyste, zostały powielone i w dniach zawodów rozdane uczniom.

Od chwili przybycia do Warszawy aż do zakończenia pisania w czwartek jurorzy nie mieli możliwości kontaktu ze swymi podopiecznymi; byli zakwaterowani na przeciwnym krańcu miasta i tam też obradowali. Jedyny krótkotrwały kontakt wzrokowy miał miejsce podczas uroczystości oficjalnego otwarcia MOM. Do sali, w której się to odbywało, Jury zostało wprowadzone innymi drzwiami niż uczniowie i zajęło wyznaczone miejsca w odrębnej części sali. „Drut kolczasty”, choć niematerialny, był wyraźnie wyczuwalny.

Zawody: dwa dni po trzy zadania. Dla zawodników — koniec wysiłku i zdenerwowania. Organizatorzy oferują im program turystyczny. A dla Jury? Rozwiązania zadań są napisane w odczytanych językach uczniów. Rozpoczyna się następny etap prac: koordynacja ocen. 32-osobowa ekipa koordynatorów (matematyków z różnych ośrodków w Polsce) została podzielona na sześć zespołów, do poszczególnych zadań konkursowych. Kto czytał w numerze 5/1986 *Delty* tekst pt. *Byłem koordynatorem*, ten wie, jak wyglądała koordynacja ocen w kameralnych warunkach XIV MOM. Przy obecnej liczbie uczestników tryb tej pracy musiał zostać usprawniony. Do k -tego zespołu koordynatorów podchodzi (według ustalonego „rozkładu jazdy”) reprezentant m -tego kraju w Jury ($k \leq 6, m \leq 37$) i przedstawia ocenione wstępnie przez siebie rozwiązania k -tego zadania wykonane przez swoich podopiecznych. Niektóre prace trzeba tłumaczyć słowo po słowie, inne wystarczy pokrótce zreferować. Ocenę ustala juror wraz z koordynatorami; zadaniem tych ostatnich jest baczyć, by jednakową miarą były mierzone prace wszystkich uczestników. Kontrowersje były nieliczne. Żadna z nich, na szczęście, nie trafiła na plenarne posiedzenie Jury; we wszystkich przypadkach udało się wynegocjować ocenę możliwą do przyjęcia dla obu stron. Niemala w tym zasługa Przewodniczącego Zespołu Koordynatorów profesora Tadeusza Figla, który pośrednicząc w negocjacjach kilkakrotnie wniósł się na wyżyny sztuki dyplomacji.

Tak więc końcowe posiedzenie Jury sprowadziło się do ustalenia barier punktowych dla poszczególnych rodzajów nagród oraz przyznania nagrody specjalnej (za pomysłowe rozwiązanie zadania nr 3). Decyzje Jury uwidocznione są w tabeli wyników u dołu strony. Warto nadmienić, że wśród laureatów nagród III stopnia znalazł się 10-letni Australijczyk Terence Tao (19 pkt) (a także trójka Polaków).

MOM jest oficjalnie rozgrywana tylko w konkurencji indywidualnej, ale kierownicy ekip pracowicie sumują punkty i tworzą nieoficjalną klasyfikację drużynową. W tym roku na czele znalazły się ex aequo Stany Zjednoczone i Związek Radziecki (po 203 punkty), a dalej RFN (196), Chiny (177), NRD (172), Rumunia (171). Ekipa polska (z 93 punktami) była siedemnasta, za Australią (117) i Kanadą (112), a przed Marokiem (90) i Tunezją (85). Najbardziej wyrównaną ekipę przysłała RFN; jej najsilniejszy zawodnik zdobył 36 punktów, a dwaj najsłabsi — po 30. Drużyna polska była jedyną, która nie zdobyła ani jednego punktu w zadaniu nr 4. Z drużyn o pełnych składach taki sam wynik miały dwie drużyny w zadaniu nr 6 i cztery w zadaniu nr 3. Natomiast komplet punktów zdobyło siedem drużyn w zadaniu nr 2 i po jednej w zadaniach 4 (!) i 5. Suma wszystkich ocen za rozwiązania zadań nr 1, 2, 3, 4, 5, 6 wyniosła odpowiednio: 800, 864, 176, 683, 881, 405. Widać, że najtrudniejsze było zadanie nr 3 (zresztą zgodne z przewidywaniami). Ekipa radziecka zdobyła za to zadanie razem 22 punkty; ekipa amerykańska — 17 punktów; rumuńska — 16; chińska — 14 (inne mniej; np. polska — 1). Na marginesach podane są teksty zadań wraz ze szkieletowymi rozwiązaniami. Dysponując rozwiązaniami pochodzącymi od autorów zadań, od uczestników olimpiady i od matematyków, którzy rozwiązywali te zadania dla własnej satysfakcji, wybraliśmy rozwiązania najprostsze do skrótowego zapisania. Zaznaczmy jednak, że wszystkie zadania, oprócz 3, były przez olimpijczyków rozwiązywane na wiele innych sposobów. Na przykład zadanie nr 2 rozwiązuje się wygodnie przy użyciu liczb zespolonych. W zadaniu nr 6 poznaliśmy chyba z sześć istotnie różnych metod rozwiązania. Zachęcamy naszych Czytelników do popróbowania własnych sił na tym polu. Namawiamy do tego przede wszystkim tych, którzy są jeszcze uczniami. Przecież za rok — XXVIII MOM. Na Kubie!

WYNIKI XXVII MOM

Nagrody I stopnia:

Kós Géza	(Węgry)	} 42pkt
Władimir Roganow	(ZSRR)	
Stanisław Smirnow	(ZSRR)	
Fang Weimin	(Chiny)	} 41pkt
Jörg Jahnel	(NRD)	
Joseph Keane	(USA)	

oraz 12 zawodników $z \geq 34$ pkt
(1 z Brazylii, 1 z Bułgarii, 2 z Chin, 1 z Francji, 2 z RFN, 2 z Rumunii, 2 z USA i 1 z Wietnamu)

Nagrody II stopnia:

41 zawodników z 20 krajów (≥ 26 pkt)

Nagrody III stopnia:

48 zawodników z 25 krajów (≥ 17 pkt) w tym trzech Polaków
Piotr Jędrzejewicz 23pkt
Tadeusz Pezda 20pkt
Stanisław Kasjan 17pkt

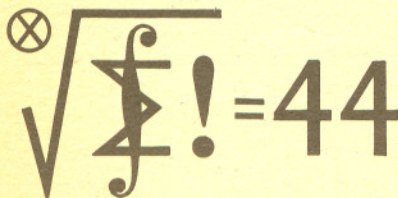
Nagroda specjalna:

Joseph Keane (USA)
(za oryginalne rozwiązanie zadania nr3)

Rozwiązanie. Pokolorowanie takie jest zawsze możliwe. Dla dowodu wzięmy dowolną linię prostą L poziomą lub pionową przecinającą rozważany zbiór A i niech P_1, \dots, P_r będą punktami zbioru $A \cap L$, ponumerowanymi w kolejności wzrastania wolnej współrzędnej. Łączymy odcinkami P_1 z P_2, P_3 z P_4 itd. (na końcu może pozostać pojedynczy punkt). Tak samo postępujemy z punktami na każdej takiej prostej L . Otrzymujemy rodzinę odcinków; każdy punkt z A należy co najwyżej do dwóch odcinków. Suma wszystkich odcinków rozpada się na linie

łamane bez wspólnych wierzchołków, zamknięte lub nie. Wierzchołki każdej z nich malujemy naprzemiennie (biało, czerwono, białą itd.); jest to możliwe, bo łamane zamknięte mają parzystą liczbę wierzchołków. Jeśli pozostały punkty nie należące do żadnego z rozważanych odcinków, malujemy je całkiem dowolnie. Nietrudno sprawdzić, że otrzymane pokolorowanie ma wymaganą własność. Czas rozwiązywania $4\frac{1}{2}$ godziny każdego dnia. Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać 7 punktów.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1987



Próba sił Klubu 44 w XXVII MOM

Na początku lipca był jeszcze optymizm. W wyniku selekcji opartej na ocenach rozwiązań zadań z ośmiu numerów Deltę /oraz na zgodzie wyrażonej, a następnie potwierdzonej przez kandydatów/ została wyłoniona szóstka reprezentantów: M. Gałeczki, J. Komorowski, D. Kurpiel, J. Mikuta, A. Pawłowski, K. Serbin oraz rezerwowi A. Bonk. Niestety, trzech z nich odwołali swój udział dosłownie w ostatniej chwili. Do rozwiązywania zadań XXVII MOM /przez $4\frac{1}{2}$ godziny po południu 9 i 10 lipca/ przystąpiła więc czteroosobowa ekipa Klubu 44 w składzie: Andrzej Bonk /Chełmża/, Marek Gałeczki /Milanówek/, Dariusz Kurpiel /Zarszyn/, Jerzy Mikuta /Zielona Góra/. Ich prace zostały ocenione według kryteriów przyjętych na Olimpiadzie. Wyniki - bez rewelacji, ale i bez wstydu; Klub 44 wypadł porównywalnie z reprezentacją Polski. Marek Gałeczki zdobył 21 punktów. Z takim wynikiem miałyby na XXVII MOM nagrodę III stopnia. Drużyna uzyskała łącznie 59 punktów. W przeliczeniu na ekipę sześciuosobową daje to rezultat plasujący w nieoficjalnej klasyfikacji drużynowej między Marokiem a Tunezją /por. strona 15/. Szkoda, że ekipa nie była w komplecie!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z matematyki nr 139, 140

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

139. Dane są trzy ciągi nieskończone (x_i) , (y_i) , (z_i) , ich wyrazami są liczby naturalne. Dowieść, że istnieją numery p i q takie, że jednocześnie spełnione są nierówności $x_p \leq x_q$, $y_p \leq y_q$, $z_p \leq z_q$.

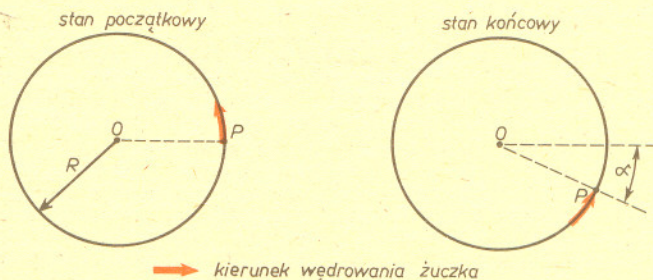
140. Trójkąt ABC ma pole S . Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} i dzielą te boki w następujących stosunkach: $AG = GB$, $2BE = EC$, $3CF = FA$. Trójkąt utworzony przez proste AE, BF, CG ma pole S' . Obliczyć stosunek S'/S .

Zadanie 140 przysłał pan Tomasz Rawlik z Gliwic.

Zadania z fizyki nr 37, 38

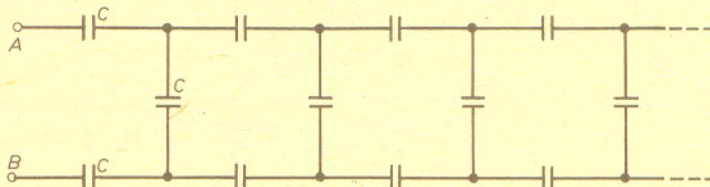
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

37. Jednorodna, pozioma tarcza o masie M i promieniu R może się obracać praktycznie bez tarcia wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek O — patrz rysunek 1. Z punktu P obwodu tej, początkowo nieruchomej, tarczy wyrusza żuczek (o rozmiarach znacznie mniejszych od R), który wędruje dookoła tarczy po jej obwodzie i zatrzymuje się w punkcie P po dokonaniu okrążenia. Znając kąt α , o jaki obróciła się tarcza w czasie tej wędrowki, wyznaczyć masę żuczka.

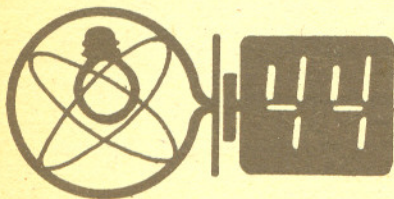


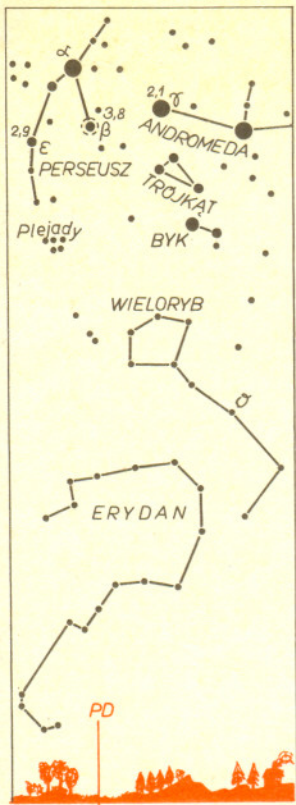
Rys. 1

38. Znaleźć wypadkową pojemność (między punktami A i B) nieskończonego łańcucha złożonego z jednakowych pojemności C , jak na rysunku 2.



Rys. 2

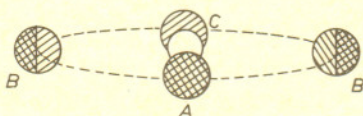
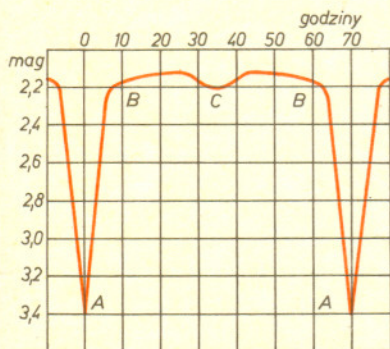




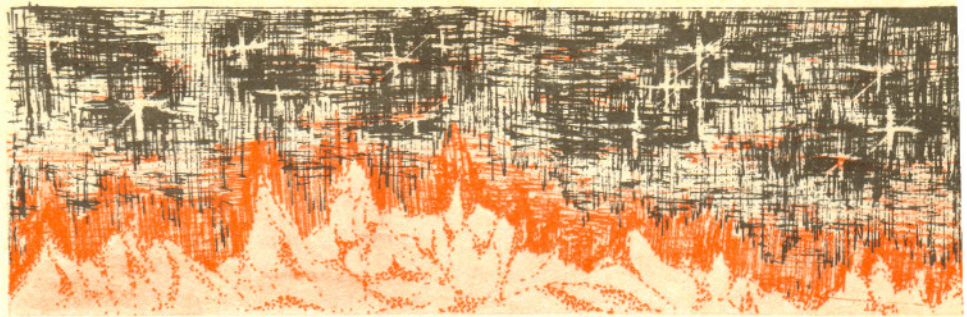
Rys. 1. Wygląd nieba około godziny 22 na przełomie listopada i grudnia.

Minima Algola w listopadzie 1986 r.

- 2 XI 8^h41^m
- 5 XI 5^h29^m
- 8 XI 2^h18^m
- 10 XI 23^h07^m
- 13 XI 19^h56^m
- 16 XI 16^h44^m
- 19 XI 13^h33^m
- 22 XI 10^h22^m
- 25 XI 7^h11^m
- 28 XI 4^h00^m
- 1 XII 0^h50^m



Rys. 2. Krzywa zmian blasku Algola.



Patrz w niebo

Zmienność blasku gwiazd, tak dobrze znana i zbadana we współczesnej astronomii, została odkryta dopiero w 1596 roku przez pastora holenderskiego Davida Fabriciusa. Zaobserwował on osobliwe zachowanie gwiazdy oznaczonej symbolem σ Wieloryba, która co 11 miesięcy z jasnego obiektu drugiej wielkości gwiazdowej zmieniała się w ledwie dostrzegalny gołym okiem, aż wreszcie na parę miesięcy zniknęła. Dziś wiadomo, że blask Miry (tak nazwał ją później Heweliusz) zmienia się w tym czasie na skutek pulsacji o 8 wielkości gwiazdowych — od 2 do 10 mag.

Drugą w kolejności odkrycia gwiazdą zmienną i jednocześnie najdawniej znaną gwiazdą zaćmieniową jest Algol (β Persei). Jego szczególne własności odkrył w 1667 roku Geminiano Montrari z Bolonii. Jednak przez ponad 100 lat zmienność Algola nie wzbudzała zainteresowania wśród astronomów. Dopiero w 1782 roku angielski miłośnik astronomii John Goodricke przeprowadził serię systematycznych obserwacji umożliwiających wyznaczenie okresu zmian blasku Algola. On również jest autorem modelu objaśniającego okresowe zmiany jasności układu. Według Goodricke'a ich przyczyną jest wzajemne zakrywanie się składników różnej jasności okrążających wspólny środek masy.

Dzisiejsza nasza wiedza na temat tego układu przedstawia się następująco: Jest to układ potrójny odległy od Ziemi o około 100 lat świetlnych. Najjaśniejszy składnik — Algol A to gwiazda ciągu głównego około 90 razy jaśniejsza od Słońca. Algol B jest podolbrzymem około 3 razy jaśniejszym od Słońca. Te dwie gwiazdy okrążają wspólny środek masy w ciągu 2 dni 20 godzin 49 minut i właśnie je obserwujemy jako zmieniającego swój blask Algola. Trzeci składnik — Algol C — okrąża parę AB w dużej odległości z okresem 1,86 lat. Jest on gwiazdą osobliwą około 4 razy jaśniejszą od Słońca. Cały układ jest źródłem promieniowania radiowego i rentgenowskiego.

Algol jest dla początkujących miłośników astronomii szczególnie wdzięcznym obiektem dla przeprowadzenia obserwacji zmian blasku. W fazie maksimum, tj. gdy widzimy z Ziemi obydwa składniki jednocześnie (Algola C nie widać nigdy gołym okiem), jest on gwiazdą 2,1 wielkości gwiazdowej. Bez trudu odnajdujemy go wówczas jako drugą co do jasności gwiazdę w Perseuszu. Warto porównać go wtedy z „gwiazdą stałą” (nie zmieniającą jasności) o podobnym blasku. Może nią być np. γ Andromedy (rys. 1). Gdy składnik B zasłoni (dla ziemskiego obserwatora) jaśniejszy składnik A, blask układu spada do 3,4 mag. Na krzywej zmian blasku odpowiada to wystąpieniu minimum głównego (rys. 2 punkt A). W tej fazie Algol jest znacznie słabszy niż ϵ Perseusza (2,9 mag) leżąca na przedłużeniu odcinka łączącego γ And i β Per. W miarę odsłaniania Algola A blask układu wzrasta aż do osiągnięcia maksymalnej wartości (rys. 2 punkt B). Cała faza minimum głównego trwa około 9 godzin. Na krzywej zmian blasku widzimy również tzw. minimum wtórne (rys. 2 punkt C) odpowiadające zakryciu składnika słabszego przez jaśniejszy. Jest ono znacznie płytsze i tym samym trudniejsze do zaobserwowania.

Kilkugodzinne obserwacje przeprowadzone w pogodną noc w okolicy minimum blasku Algola pozwalają przekonać się o jego zmienności. Przedsięwzięcie wymagające więcej precyzji i cierpliwości polega na wyznaczeniu momentu głównego minimum blasku. Aby go wyznaczyć, należy sporządzić rysunek krzywej zmian blasku układu, odkładając na osi pionowej jasność obserwowaną, a na poziomej — czas. Oszacowania jasności Algola, przez porównanie z którąś z „gwiazd stałych” (np. ϵ Per), dokonujemy co 15–20 minut przez kilka godzin przed i po spodziewanym momencie minimum. Dokładny moment powinien wypadać na osi symetrii tego fragmentu krzywej zmian blasku. Składając kartkę z wykresem tak, by obie gałęzie — malejącego i rosnącego blasku — pokryły się możliwie jak najdokładniej, na przecięciu złożenia z osią czasu odczytujemy zaobserwowany moment minimum blasku Algola.

mgr Joanna UDALSKA