

**DELTA**  
**MAGAZynu MUZYCZNEGO JAZZ**  
**KOMPUTERA**  
**KONTYNETÓW**  
**MORZA**  
**POZNAJ SWIAT**  
**PROBLEMÓW**  
**RODZINY I SZKOŁY**  
**WIDNOKRĘGÓW**  
**WIEDZY I ŻYCIA**

Czy pomyślałeś już o zabezpieczeniu otrzymywania Twojego ulubionego czasopisma w 1987 roku?

Jeżeli nie — to czas najwyższy zrobić to.

Gwarancją systematycznego otrzymywania ulubionego czasopisma jest — założenie teczki w dowolnym kiosku "Ruchu" lub zaprenumerowanie go.

INFORMUJEMY, że w kioskach "Ruchu" przyjmowane są zlecenia na odkładanie prasy do teczek.

PRZYPOMINAMY, że termin przyjmowania zgłoszeń prenumeraty na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1987 mija dnia 10 listopada 1986 roku.

Szczególne informacje o warunkach prenumeraty zamieszczane są w każdym tytule.

**SPIS TREŚCI**

**NUMERU 10(154)**

Najprostsze zadanie matematyki  
*mgr Winfried Just* str. 1

Patrz w Słońce  
*mgr Krzysztof Jahn* str. 4

Zadania str. 6

Do Redakcji str. 7

Mała Delta str. 8

O polach zakreślanych przez punkty  
 ruchomego odcinka  
*dr Arkadiusz Płoski* str. 10

Czy proton jest cząstką trwałą?  
*dr Danuta Kielczewska* str. 12

Moment pędu pola  
 elektromagnetycznego  
*mgr inż. Jerzy Dryzek* str. 14

Kąć olimpijski str. 15

Patrz w niebo str. 16

Klub 44 str. 17

**W następnym numerze:**  
**Holografia**

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr Alicja Derkowska  
 doc. dr Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc. dr Tomasz Hofmokl  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc. dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący  
 dr Jan Rempala  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Grzegorz SitarSKI  
 prof. dr Józef I. Smak  
 prof. dr Kazimierz Stepien  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Aniela Wolska  
 prof. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
 dr Andrzej Majhofer  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska  
 mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa  
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. centr. 25-72-91 do 93  
 Biuro Reklam i Propagandy  
 tel. 25-56-26  
 Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 2631/12/86. P-25.

**WARUNKI PRENUMERATY**

- Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

**Korespondencyjny Kurs Przygotowawczy z Matematyki  
 dla kandydatów na wyższe studia techniczne**

Kurs trwa do kwietnia 1987r. Włącznie. Polega on na rozwiązywaniu prac kontrolnych. Każda praca kontrolna składa się z 8 zadań, których stopień trudności odpowiada wymaganiom na egzaminie wstępnym. Tematy prac kontrolnych drukowane są w „Głosie Wybrzeża”, „Sztandarze Młodych” i „Trybunie Robotniczej” /pierwszy wtorek miesiąca/ oraz w „Gazecie Robotniczej” i „Życiu Warszawy” /pierwszy czwartek miesiąca/. Tam też jest podany adres i sposób przesyłania rozwiązań, by otrzymać je z powrotem poprawione i ocenione wraz z pisemną konsultacją.

Korespondencyjny Kurs Przygotowawczy z Matematyki jest zorganizowany w oparciu o kilkunastoletnie doświadczenia. Z tej powszechnie dostępnej formy autentycznej pomocy dla kandydatów na studia skorzystało już w latach ubiegłych kilkadziesiąt tysięcy osób.

# Najprostsze zadanie matematyki

Mgr Winfried JUST

Wyznaczyć liczbę elementów danego skończonego zbioru  $X$  — oto najbardziej elementarne zadanie matematyki. Wszyscy pamiętamy z pierwszej klasy szkoły podstawowej niezawodną metodę rozwiązywania tego problemu i na tym można by ten artykuł zakończyć, gdyby nie to, że każdy człowiek dysponuje tylko ograniczoną liczbą palców i ograniczonym czasem.

Rozważmy dla przykładu następujący problem: Na ile sposobów można  $n$  złotych podzielić między  $k$  osób? Żeby to zadanie przetłumaczyć na język matematyki, oznaczmy przez  $P(n, k)$

liczbę  $k$ -elementowych ciągów liczb naturalnych  $(m_i)_{i=1}^k$  takich, że  $\sum_{i=1}^k m_i = n$ . Zadaniem naszym jest wyznaczenie  $P(n, k)$ . „Liczeniu na palcach” odpowiada tu następujące rozumowanie:  $m_1$  może przybierać dowolną wartość od 0 do  $n$ ; przy założeniu, że  $m_1 = l$  możemy wartość  $m_2$  ustalić na  $n-l$  sposobów; jeśli wiadomo, że  $m_1 = l_1$ ,  $m_2 = l_2$ , to  $m_3$  może przyjąć jedną z  $n-l_1-l_2$  wartości, itd. Przy takim postępowaniu musielibyśmy rozpatrywać  $P(n, k)$  przypadków. Na razie jeszcze nie wiemy, jak długo by to trwało, ale na wszelki wypadek rozejrzyjmy się za efektywniejszym sposobem obliczenia  $P(n, k)$ .

Zauważmy przede wszystkim, że jeśli pierwsza osoba otrzymała  $l$  złotych, to mamy jeszcze  $n-l$  złotych do podziału między  $k-1$  osób. Zapisując tę obserwację formalnie otrzymujemy

$$(1) \quad P(n, k) = \sum_{l=0}^n P(n-l, k-1).$$

Zależność tego typu nazywa się zależnością rekurencyjną. Pozwala ona na obliczenie  $P(n, k)$ , jeśli znamy  $P(m, k-1)$  dla wszystkich  $m \leq n$ . Zatem możemy  $P(n, k)$  obliczyć w następujący sposób:

Najpierw zauważmy, że  $P(m, 1) = 1$  dla wszystkich  $m \geq 1$ . Obliczamy  $P(m, 2)$  ze wzoru (1) za pomocą  $m$  dodawań dla wszystkich  $m \leq n$ , potem kolejno  $P(m, 3)$ ,  $P(m, 4)$ , ...,  $P(m, k-1)$  dla wszystkich  $m \leq n$ . W ostatnim kroku obliczamy  $P(n, k)$  ze wzoru (1) za pomocą  $n$  dodawań.

Przy takim sposobie obliczania  $P(n, k)$  musimy dokonać łącznie  $(k-2) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$  dodawań.

Spróbujmy, czy nie można tego zrobić jeszcze prościej.

Obliczmy najpierw liczbę takich podziałów, nazwijmy je „sprawdliwymi”, przy których każda osoba otrzymuje co najmniej jedną złotówkę. Oznaczmy przez  $l_j$  sumę pieniędzy, którą łącznie otrzyma pierwsze  $j$  osób, czyli

$$l_j = \sum_{i=1}^j m_i.$$

Jasne, że  $l_1 < \dots < l_{k-1} < l_k = n$ , o ile tylko podział jest „sprawdliwy”. W ten sposób przyporządkowaliśmy każdemu podziałowi „sprawdliwemu”  $(k-1)$ -elementowy podzbiór

$\{l_1, \dots, l_{k-1}\}$  zbioru  $\{1, \dots, n-1\}$ , i to w sposób wzajemnie jednoznaczny. Czyli jest  $\binom{n-1}{k-1}$

takich podziałów. Ale nie wszystkie podziały są „sprawdliwe”, co gorsza, może w ogóle nie być takich, mianowicie wtedy, kiedy  $k > n$ . Stosujemy tu trik: Pożyczmy  $k$  złotych, podzielimy  $n+k$  złotych „sprawdliwie” między  $k$  osób, a potem szybkoitko zabierzemy każdej osobie po złotówce. Pozostałe  $n$  złotych jest już podzielone w sposób dowolny, więc otrzymaliśmy wzór

$$(2) \quad P(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, kiedy nam nikt nie pożyczy, ale tę drażliwą kwestię zostawmy ekonomistom. Nas bardziej interesuje pytanie, w czym ostatnie rozwiązanie jest lepsze od poprzedniego. Można oczywiście powiedzieć, że otrzymaliśmy elegancki wzór, który wyraża  $P(n, k)$  w sposób jawny, ale elegancja jest kwestią gustu i „jawność” wzoru pojęciem nader

umownym, pamiętajmy wszakże, iż symbol  $\binom{n}{k}$  również może być zdefiniowany w sposób rekurencyjny:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \text{ przy czym } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Ale spróbujmy obliczyć  $P(100,5)$ . Stosując wzór (1) musielibyśmy w tym celu wykonać  $3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 100 = 15\,250$  operacji dodawania, a ze wzoru (2) otrzymujemy wynik za pomocą pięciu mnożeń i jednego dzielenia:

$$P(100,5) = \binom{104}{4} = \frac{104 \cdot 103 \cdot 102 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 4\,598\,126;$$

ta ostatnia liczba pokazuje, ile palców musielibyśmy mieć, żeby policzyć na nich  $P(100,5)$ . Wzór (2) jest więc nie tylko ładny, lecz daje równocześnie szybki sposób obliczenia  $P(n, k)$ . Nie wszystkie eleganckie wzory jednak mają tę przyjemną własność. Dla przykładu rozpatrzmy następujące zagadnienie:

Mamy  $n$  różnych prezentów i chcemy nimi obdarować naszych  $k$  przyjaciół, przy czym każdy z nich ma otrzymać przynajmniej jeden prezent. Oznaczmy przez  $F(n, k)$  liczbę sposobów, na które można tego dokonać. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych  $n, k \geq 1$  zachodzi:

$$(3) \quad F(n, k) = k(F(n-1, k-1) + F(n-1, k)).$$

Żeby udowodnić wzór (3), założmy, iż jeden spośród tych  $n$  prezentów jest najnowszym numerem *Delty*. Jeśli już podjęliśmy decyzję, który z naszych  $k$  przyjaciół ma zostać jego szczęśliwym posiadaczem, możemy albo uznać, że najnowszy numer *Delty* jest tak ciekawy, iż osoba nim obdarowana już nie będzie zwracać uwagi na ewentualne dalsze prezenty, a zatem należy pozostałe  $n-1$  prezentów podzielić między pozostałych  $k-1$  osób, co możemy uczynić na  $F(n-1, k-1)$  sposobów; albo możemy uznać, że nasz przyjaciel powinien jeszcze coś oprócz *Delty* dostać, a wtedy mamy  $F(n-1, k)$  możliwości rozdzielenia pozostałych prezentów. Stąd otrzymujemy wzór (3).

Zauważmy jeszcze, że

$$(4) \quad F(n, 0) = 0, \quad \text{jeśli } n \neq 0 \quad \text{oraz} \quad F(n, k) = 0, \quad \text{jeśli } k > n.$$

Przyjmując dodatkowo, że  $F(0, 0) = 1$ , możemy ze wzorów (3) i (4) obliczyć kolejno:

$$F(1, 1), F(2, 1), F(2, 2), F(3, 1), \dots, F(k, k), F(k+1, 1), \dots, F(k+1, k), F(k+2, 1), \dots, F(n, k).$$

„Kosztuje” nas to  $kn - \frac{k(k-1)}{2}$  mnożeń i tyleż dodawań.

Z drugiej strony zachodzi zadziwiająca zależność:

$$(5) \quad F(n, k) = ((e^t - 1)^k)^{(n)}(0) \quad (f^{(n)} \text{ oznacza } n\text{-tą pochodną funkcji } f).$$

Powyższy wzór można udowodnić przez indukcję:

Skoro  $(e^t - 1)^0 \equiv 1$ , to otrzymujemy:

$$((e^t - 1)^0)^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n > 0. \end{cases}$$

Jeśli zaś  $k > 0$ , to  $((e^t - 1)^k)^{(0)}(0) = ((e^t - 1)^k)(0) = 0$ , czyli udowodniliśmy wzór (5) dla przypadków, kiedy  $n = 0$  lub  $k = 0$ .

Założmy teraz, że (5) zachodzi dla  $F(n-1, k)$  i  $F(n-1, k-1)$ . Wtedy

$$((e^t - 1)^k)^{(n)}(0) = (((e^t - 1)^k)^{(n-1)})'(0) = (k(e^t - 1)^{k-1}e^t)^{(n-1)}(0) = k((e^t - 1)^{k-1} \cdot (e^t - 1 + 1))^{(n-1)}(0) = k(((e^t - 1)^{k-1})^{(n-1)}(0) + ((e^t - 1)^{k-1})^{(n-1)}(0)) = k(F(n-1, k) + F(n-1, k-1)) = F(n, k), \text{ co kończy dowód wzoru (5).}$$

Udowodniony przed chwilą wzór jest niewątpliwie bardzo elegancki, ale gdybyśmy chcieli obliczyć  $F(n, k)$  różniczkując funkcję  $(e^t - 1)^k$   $n$ -krotnie, a potem obliczając wartość otrzymanej  $n$ -tej pochodnej w zerze, zajęłoby to nam więcej czasu niż obliczanie  $F(n, k)$  ze wzorów (3) i (4). Ale ze wzoru (5) można wyprowadzić jeszcze jedno wyrażenie dla  $F(n, k)$ :

$$\begin{aligned} ((e^t - 1)^k)^{(n)}(0) &= \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot e^{t(k-j)} \binom{k}{j} \right)^{(n)}(0) = \left( \sum_{j=0}^k \left( (-1)^j e^{t(k-j)} \cdot \binom{k}{j} \right)^{(n)}(0) \right) = \\ &= \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k-j)^n e^{t(k-j)} \right)(0). \end{aligned}$$

Czyli otrzymujemy wzór

$$(6) \quad F(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k-j)^n.$$

Teraz widać, dlaczego bezpośrednie obliczanie  $F(n, k)$  z (5) trwa długo — różniczkując bowiem  $n$ -krotnie obliczamy każdą potęgę  $(k-j)^n$  przez  $n$  kolejnych mnożeń, nie mówiąc już o wykonywanych po drodze operacjach różniczkowania i dodawania powstających przy tym składników. Możemy natomiast obliczyć  $(k-j)^n$  znacznie szybciej korzystając z zależności:

$$(7) \quad x^{n+m} = x^n \cdot x^m.$$

Również obliczenie  $\binom{k}{j}$  we wzorze (6) można uprościć: skoro mamy znaleźć wszystkie

współczynniki  $\binom{k}{j}$  po kolei, najwygodniej będzie korzystać z zależności:

$$(8) \quad \binom{k}{j+1} = \binom{k}{j} \cdot \frac{k-j}{j+1}.$$

Zastanówmy się na przykład, ile trzeba wykonać operacji, żeby otrzymać  $F(64,5)$  ze wzoru (6). Skoro  $64 = 2^6$ , możemy obliczyć  $(5-j)^{64}$  korzystając z (7) za pomocą sześciu mnożeń. Obliczenie

zaś wartości kolejnego współczynnika  $\binom{5}{j}$  kosztuje nas jedno dzielenie i jedno mnożenie, a  $\binom{5}{j}$

trzeba jeszcze pomnożyć przez  $(5-j)^{64}$ . Skoro nie ma potrzeby obliczenia wartości  $(5-5)^{64}$  oraz  $(5-4)^{64}$ , musimy w sumie dokonać 35 mnożeń, 5 dzieleni i 5 dodawań.

W obu rozważanych przez nas przykładach mieliśmy następujący schemat: Dana jest rodzina zbiorów skończonych  $\{X_{n,k}: n, k \in \mathbb{N}\}$  oraz znamy oczywistą zależność rekurencyjną, która pozwala na obliczenie mocy zbioru  $X_{n,k}$ , jeśli znamy moce zbiorów  $X_{m,l}$  dla  $m < n$ ,  $l < k$ . Naszym zadaniem było znalezienie mniej oczywistego, lecz korzystniejszego z rachunkowego punktu widzenia wyrażenia na liczbę elementów  $X_{n,k}$ .

Istnienie tak prostych zależności jak (1) albo (3) należy jednak do wyjątków. Może takich związków w ogóle nie być, albo mogą być bardzo skomplikowane.

Dla przykładu powróćmy jeszcze raz do podziałów pieniędzy. Niech  $p(n)$  oznacza liczbę możliwych sposobów rozdzielenia  $n$  złotych między  $n$  osób tak, aby  $i$ -ta osoba otrzymała nie mniejszą kwotę niż  $(i+1)$ -sza osoba. Inaczej mówiąc,  $p(n)$  oznacza ilość nierosnących ciągów liczb naturalnych

$$(m_i)_{i=1}^n \text{ takich, że } \sum_{i=1}^n m_i = n.$$

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler, który jako pierwszy rozważał ten problem, znalazł następujący wzór rekurencyjny:

$$(9) \quad p(n) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \left( p\left(n - \frac{1}{2} m(3m-1)\right) + p\left(n - \frac{1}{2} m(3m+1)\right) \right)$$

(gdzie oczywiście  $p(x) = 0$  dla  $x < 0$ ).

Wzór (9) bynajmniej nie jest oczywisty i jego dowód wymaga trudnych środków analitycznych. Problemowi wyznaczenia  $p(n)$  poświęcono dziesiątki rozpraw matematycznych, a w dwudziestym wieku znaleziono wzór wyrażający  $p(n)$  przez całkę pewnej funkcji analitycznej po konturze zamkniętej w dziedzinie liczb zespolonych!



**Rozwiązanie zadania F 207.** Potraktujmy stację kosmiczną i obiekt jako punkty materialne o masach  $m$  i  $M$ . Inercjalny układ odniesienia umieścimy w punkcie, w którym znajdowała się początkowo masa  $M$ . Całkowity pęd jest w tym układzie równy

$$p_1 = mv.$$

Gdy masy osiągną maksymalne oddalenie, ich prędkość względna będzie równa zero, a więc obie będą się poruszały w wybranym układzie odniesienia z tą samą prędkością  $V$ . Całkowity pęd będzie wtedy równy

$$p_2 = (m+M)V.$$

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy

$$mv = (m+M)V.$$

Zasada zachowania energii daje

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{d} = \frac{(m+M)V^2}{2} - G \frac{mM}{x},$$

gdzie  $x$  jest szukaną maksymalną odległością. Z dwóch ostatnich równań wynika, że

$$x = \frac{1}{\frac{1}{d} - \frac{2G(M+m)}{v^2}}.$$

Prędkość ucieczki otrzymujemy z warunku  $x \rightarrow \infty$ . Jest ona równa

$$v_u = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

idła  $m \ll M$  praktycznie nie zależy od masy mniejszego ciała.

Niewiele zjawisk astronomicznych może się szczycić wielowiekową historią obserwacji. Należą do nich najbardziej widowiskowe przejawy aktywności słonecznej — plamy. Jest to fenomen, który w sprzyjających warunkach można dostrzec bez pomocy jakichkolwiek instrumentów. Duże grupy plam są widoczne w postaci ciemnych „łatek” na tarczy Słońca, gdy tylko jego blask jest dostatecznie osłabiony, by patrzeć nań bezkarnie (np. podczas wschodu i zachodu). Nic więc dziwnego, że tak naprawdę nie wiadomo, kiedy po raz pierwszy człowiek zobaczył plamy słoneczne.

Pierwsze w kręgu kultury śródziemnomorskiej obserwacje plam przypisuje się uczniowi Arystotelesa, Teofrastowi z Eresos. Jego spostrzeżenia pozostały jednak niezauważone przez współczesnych i zapomniane przez potomnych. Stało się tak zapewne ze względu na wielki autorytet jego mistrza. Przekonanie Arystotelesa o absolutnej doskonałości Słońca było bezkrytycznie przyjmowane przez wiele pokoleń. W niektórych epokach niedopuszczalne były przypuszczenia o jakiegokolwiek skazie na tarczy naszej gwiazdy, a za głoszenie innych poglądów ryzykowało się życiem. Prawdopodobnie dlatego przez długie wieki nie znajdziemy w Europie zapisków dotyczących plam słonecznych. W innych rejonach świata sytuacja przedstawiała się inaczej (z punktu widzenia naszych zainteresowań — lepiej).

*Teofrast z Eresos (370—287 r.p.n.e.), uczonec i filozof grecki. Rozbudował metodę obserwacji naukowej i stosował ją w badaniach. Jego imię weszło do historii nauki nie z powodu przypisywanych mu obserwacji plam słonecznych, lecz dzięki badaniom w dziedzinie biologii. Zyskał miano ojca botaniki.*

W bardzo starych kronikach chińskich można znaleźć zapiski o latających na tle zachodzącego Słońca olbrzymich ptakach. Wydaje się, że teksty te mówią o plamach, choć z drugiej strony olbrzymia niejednoznaczność symboliki chińskiej każe zachować pewną rezerwę. Dlatego też za pewniejszą datę początku obserwacji plam przyjmuje się rok 28 p.n.e., kiedy powstał pierwszy zapis, co do którego nie ma takich wątpliwości. Od tego czasu w Chinach, a później w Korei i Japonii prowadzone były systematyczne obserwacje plam na Słońcu. Niewiele wiemy na temat ówczesnych interpretacji tego zjawiska oraz jego znaczenia w życiu religijnym, społecznym czy też politycznym. Było to jednak ważne wydarzenie, gdyż starannie odnotowywano obserwacje pojawiających się na Słońcu co jakiś czas ciemnych skaz. Zapiski takie, prowadzone przez ponad półtora tysiąca lat, stanowią spory materiał obserwacyjny. Do 1638 roku sporządzono 112 zapisów, które stanowią nie tylko ciekawostkę historyczną. Okazało się, że można je wykorzystać w badaniach długookresowych zmian aktywności Słońca.

Dla Europy plamy nie istniały aż do XVII wieku. Od tego czasu astronomowie, mając już do dyspozycji lunety, coraz częściej obserwowali Słońce, gdzie dostrzegali ciemne plamy. Wprawdzie akurat wtedy Słońce przechodziło ponad siedemdziesięcioletni okres zaniku aktywności (plamy pojawiały się stosunkowo rzadko), jednak występowanie plam wymagało jakiegoś wyjaśnienia. Pomysłów powstało bardzo wiele. Miały to być przejścia dotychczas nie znanych planet dolnych na tle tarczy Słońca. Proponowano nawet dla nich nazwy.

Inna klasa hipotez wiązała obserwowane zjawisko bezpośrednio ze Słońcem. Hipotezy te powstawały, oczywiście, po przełamaniu przekonania o absolutnej doskonałości Słońca. Uważano plamy bądź to za ciemne obłoki w atmosferze, bądź też za dziury w ognistych chmurach, poprzez które widoczna miała być chłodna, ciemna, stała i zamieszkała powierzchnia Słońca. Cokolwiek byśmy pomyśleli o tych pomysłach, były z pewnością bardziej

poprawne niż poprzednie. Właśnie dlatego, że wiązały plamy ze Słońcem.

Począwszy od drugiej połowy XVIII wieku plamy słoneczne zaczęły budzić coraz większe zainteresowanie. Obserwowano je częściej i systematyczniej, co w końcu doprowadziło do odkrycia znanego dzisiaj wszystkim cyklu aktywności słonecznej. Dokonał tego Heinrich Schwabe, który w 1843 roku zauważył, że średnia liczba plam na Słońcu zmienia się okresowo co kilkanaście lat. Odkrycie to jest uważane za początek badań aktywności naszej gwiazdy, chociaż minęło jeszcze trochę czasu, zanim przekonano się, że plamy są tylko jedną z wielu cech generalnej własności Słońca — aktywności magnetycznej. Rozwój wiedzy w tej dziedzinie, jaki nastąpił w latach czterdziestych bieżącego stulecia, trochę jakby zmniejszył pierwszorzędną rolę plam. Fenomen obserwowany od dwóch tysięcy lat stał się jednym ze szczegółów tajemniczego mechanizmu, który ciągle jeszcze poznajemy.

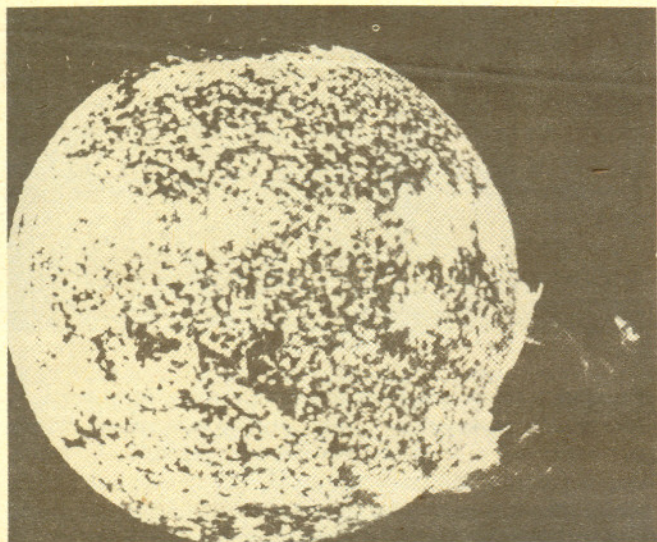
Obok plam istnieje wiele innych zjawisk i procesów składających się na aktywność Słońca. Łączy je wspólna cecha — wszystkie są skutkiem istnienia pola magnetycznego i jego oddziaływania z materią. Rodzaj efektu wywołanego przez pole zależy od stanu, w jakim znajduje się materia (gęstość, temperatura, prędkość). Zanim więc poznamy dalsze zjawiska, przyjrzyjmy się pokrótce budowie Słońca, w szczególności zaś obszarom, w których zjawiska te występują.

Schematycznie struktura Słońca przedstawia się następująco. Kula o promieniu około 0,25 promienia Słońca ( $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5$  km) stanowi jądro, w którym zachodzą procesy nuklearne będące źródłem energii wyświecanej przez gwiazdę. Pokrywa je otoczka, w której w naturalny sposób można wyróżnić dwa obszary. W jądrze i wewnętrznej części otoczki, do odległości około 0,8  $R_{\odot}$  od centrum, transport energii w kierunku powierzchni odbywa się przez promieniowanie. Obszar, w którym już nie zachodzą procesy termojądrowe, leżący bezpośrednio nad jądrem, to część promienista otoczki. Możemy ją sobie wyobrazić jako zbiór cienkich sferycznych warstw utworzonych przez spoczywającą materię. Mówimy wówczas, że obszar taki znajduje się w równowadze hydrostatycznej. Energia dostarczana z jądra jest przenoszona z warstwy do warstwy przez promieniowanie. Oczywiście, nie narusza to równowagi hydrostatycznej — materia pozostaje w spoczynku.

W wyższych rejonach otoczki (powyżej 0,8  $R_{\odot}$ ) równowaga ta załamuje się. Panujące tam warunki sprawiają, że promieniowanie staje się mało wydajnym mechanizmem transportu energii. Jego rolę w dużym stopniu przejmuje burzliwa konwekcja. Ogromną część energii dostarczanej z wnętrza gwiazdy przenoszą gwałtownie wznoszące się ku powierzchni bąble gorącej materii. Miejsce wznoszących się bąbli zajmuje chłodniejsza materia spływająca z wyższych warstw. Opadając ogrzewa się, po czym ponownie wędruje do góry, gdzie przekazuje energię otoczeniu, itd., itd. Warstwa konwektywna otoczki, o grubości około 20% słonecznego promienia, praktycznie sięga powierzchni Słońca — fotosfery.

Fotosfera jest najniższą położoną, bardzo cienką (o grubości około 500 km), warstwą atmosfery. Tworzy obraz świecącej sfery (stąd jej nazwa) o wyraźnej, ostro zaznaczonej krawędzi. Większość docierającego do nas promieniowania Słońca powstaje właśnie w fotosferze. Możemy więc powiedzieć, że stanowi ona najgłębszą warstwę, którą jeszcze możemy oglądać. Z tego powodu, jak i ze względu na niewielką grubość, fotosferę utożsamia się z powierzchnią Słońca i, w ogólności, gwiazd.

Konwektywny ruch materii zachodzi również w fotosferze nadając jej specyficzny wygląd. Wznoszące się gorące bąble gazu świecą oczywiście intensywniej niż materia opadająca (chłodniejsza). Widzimy to na powierzchni w postaci jasnych „łatek” (gorące bąble) otoczonych ciemniejszymi, nieregularnymi pierścieniami (opadająca materia). Takie komórki konwektywne tworzą obraz granulacji przypominającej sieć o jasnych oczkach (fot. 1). Rozmiary oczek (granul) wynoszą od 100 do 1000 km.



Fot. 1

Na powierzchni widoczny jest także obraz konwekcji wielkoskalowej, zachodzącej głębiej, gdzie rozmiary komórek są znacznie większe niż granulę. Nie są to jednak jaśniejsze i ciemniejsze obszary, lecz rejony uporządkowanego pola prędkości. Ślad dużych komórek konwektywnych tworzą supergranule. Są to obszary o kształcie nieregularnych wielokątów, w których środku materia wypływa, a następnie przepływa poziomo do brzegów, gdzie opada. Rozmiary oczek supergranulacji wynoszą około 30 000 km. Zarówno granulacja, jak i supergranulacja mają ogromny wpływ na postać pola magnetycznego obserwowanego w fotosferze.

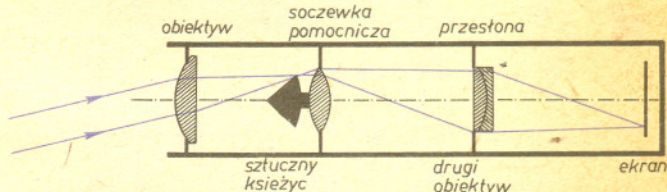
Obok konwekcji wpływ na niejednorodność fotosfery mają także zjawiska związane z aktywnością Słońca. Silnym zaburzeniem powierzchni są oczywiście plamy, które wyświecają na jednostkę powierzchni blisko 80% energii mniej niż otoczenie. Odpowiada temu niższa temperatura plam. Są o 1600—1800 K chłodniejsze od fotosfery, której średnia temperatura (z uwzględnieniem wahań związanych z granulacją) wynosi 5800 K. Plamy powstają na skutek pojawienia się silnego pola magnetycznego na powierzchni. Wprawdzie oddziaływanie pola z materią nie ogranicza się wyłącznie do warstw fotosferycznych, lecz tu efekt jest widoczny najwyraźniej.

Szczególnie ważnym obszarem, z punktu widzenia badań aktywności nie tylko Słońca, ale i innych gwiazd, jest chromosfera. Stanowi ona niejednorodną warstwę gazu leżącego między fotosferą a koroną. Jej podstawa jest utożsamiana z takim obszarem ponad fotosferą, w którym temperatura po osiągnięciu minimalnej wartości (na Słońcu  $T_{min} = 4100$  K) rośnie z wysokością. W większej części chromosfery słonecznej temperatura wynosi około 10 000 K, by w tzw. obszarze przejściowym, pomiędzy chromosferą a koroną, gwałtownie wzrosnąć do około miliona stopni.

Chromosfera słoneczna oglądana na brzegu tarczy (podczas zaćmień Słońca lub za pomocą koronografu) przypomina

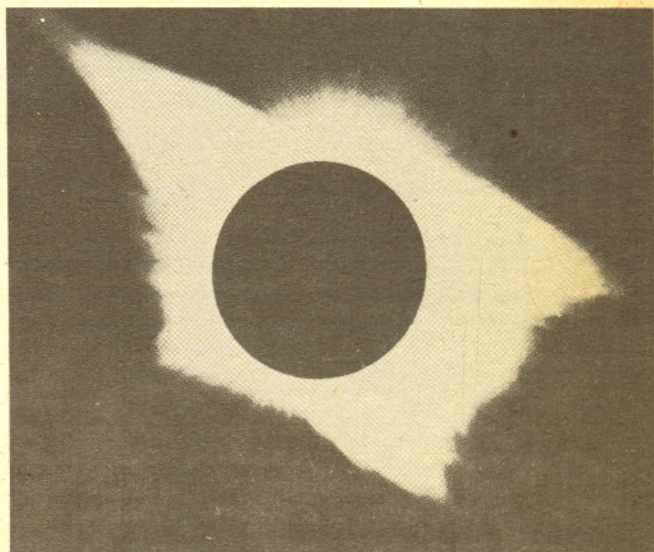
Linie widmowe wodoru serii Balmera odpowiadają przejściom między poziomem drugim a wyższymi. Oznacza się je literą H z indeksem, którym są kolejne litery greckiego alfabetu. I tak linię odpowiadającą przejściu elektronu ze stanu 2 na 3 oznaczamy  $H_{\alpha}$ , linia  $H_{\beta}$  powstaje przy przejściu  $2 \rightarrow 4$ ,  $H_{\gamma} - 2 \rightarrow 5$ , itd.

postrzępioną czerwoną otoczkę. Swą barwę zawdzięcza dużej intensywności wodorowej linii  $H_{\alpha}$  o długości fali 6562,8 Å (a więc w czerwonej części widma). Natomiast postrzępienie, czyli niejednorodność tej otoczki wiąże się ściśle z mechanizmem powodującym, że chromosfera jest gorętsza od fotosfery. Pod powierzchnią i w fotosferze materia znajduje się w ciągłym, bardzo gwałtownym ruchu, który może być źródłem fal mechanicznych. W efekcie część energii może być przeniesiona spod powierzchni do atmosfery w postaci fal. Tam energia fal jest zamieniana na energię termiczną, co powoduje wzrost temperatury gazu. Proces ten jest szczególnie wydajny, gdy zachodzi w obecności pola magnetycznego. Generowane wówczas tzw. fale hydromagnetyczne są odpowiedzialne w głównej mierze za wzrost temperatury i występowanie gorącej chromosfery i korony w atmosferach gwiazdowych.



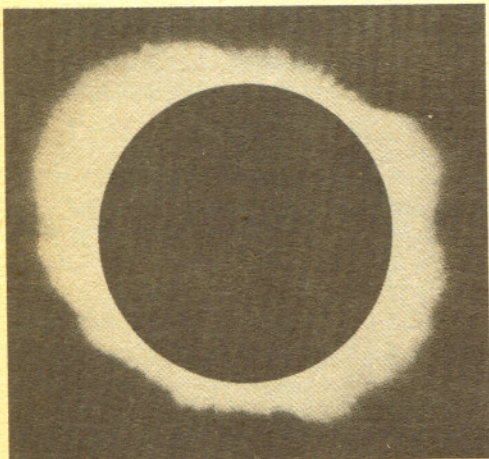
Koronograf jest przyrządem umożliwiającym obserwacje korony słonecznej dzięki wyeliminowaniu światła tarczy słonecznej za pomocą wypolerowanego stożka odbijającego promieniowanie na boki (patrz rysunek). Średnica stożka, tzw. sztuczny Księżyc, jest taka, że do ekranu dociera światło pochodzące wyłącznie z korony.

Warstwą leżącą jeszcze wyżej, obejmującą również układ planetarny, jest korona związana ze Słońcem przez pole magnetyczne. Świeci ona przede wszystkim rozproszonym promieniowaniem słonecznym. Koronę tworzy niezwykle rozrzedzony, silnie zjonizowany gaz, osiągający temperaturę 1—3 milionów stopni. Do czasu skonstruowania koronografu jej obserwacje można było prowadzić wyłącznie podczas całkowitych zaćmień Słońca — obecnie zaś każdego pogodnego dnia. Bardzo bogaty materiał obserwacyjny dostarcza wielu cennych wiadomości o kształcie i zmianach całej korony, a także o procesach zachodzących lokalnie. Grubość tej warstwy nie jest stała taka sama — bardzo silnie reaguje na zmiany aktywności Słońca. Podczas maksimum jest najbardziej rozbudowana (patrz fot. 2).



Fot. 2

Wiele strug białawej na tle czarnego nieba materii, rozciągających się od powierzchni Słońca do odległości  $0,5-10R_{\odot}$ , tworzy strukturę wysoce asymetryczną. Zwiększone strumienie cząstek uciekają wzdłuż linii sił pola magnetycznego tworząc wiatr słoneczny. W okresie minimum aktywności ilość strug maleje, a korona osiąga największy stopień symetrii (fot. 3). Przypomina pierścień o niewielkiej grubości otaczający Słońce. W skrajnym przypadku może w ogóle zanikać. Co prawda, współcześnie nie zdarzało się to jeszcze, jednak nasi przodkowie oglądali takie zjawisko. Z XVIII-wiecznych relacji wiadomo, że przez pewien czas, dziś wiemy, iż miało to miejsce podczas zaniku aktywności, Słońce nie miało korony. Jej pozostałość tworzyła, widoczny podczas zaćmienia, cienki pierścień wokół Księżyca.



Fot. 3

Szczególnie interesującym zjawiskiem występującym w koronie są protuberancje. Wszyscy chyba znają te jasne obłoki gazu wznoszące się ponad powierzchnię Słońca. Są przecież bardzo wdzięcznym tematem wielu fotografii, a także filmów popularno-naukowych przedstawiających ich ewolucję. Zwykle pojawiają

się w stosunkowo niewielkiej (w porównaniu z rozmiarami korony) odległości od powierzchni Słońca. Zdarzają się jednak i takie, które sięgają wysokości porównywalnych z promieniem naszej gwiazdy. Przykładem może być fotografia 4. Protuberancje mogą przybierać różne kształty. Tworzą jasne pętle, łuki czy też arkady. Formy, jakie przyjmują, zależą od kształtu lokalnego pola magnetycznego przenikającego atmosferę. Również pole decyduje o powstaniu i ewolucji protuberancji.



Fot. 4

Poznaliśmy już najważniejsze przejawy słonecznej aktywności oraz obszary atmosfery, w których zjawiska te występują. Wiemy, że swe istnienie zawdzięczają jednemu tylko czynnikowi — polu magnetycznemu. Aby zrozumieć naturę tych zjawisk i ich różnorodność, musimy wiedzieć coś o oddziaływaniu pola magnetycznego z plazmą: jakie efekty może pole wywołać w zjonizowanej materii, a także w jaki sposób gaz wpływa na pole. Znajomość tych efektów pozwala nam nie tylko wyjaśnić obserwowane w atmosferze Słońca zjawiska, lecz także wysnuć pewne wnioski na temat przypuszczalnego zachowania się pola magnetycznego w głębi otoczki. Jego przecież nie możemy zobaczyć, a właśnie tam zachodzą procesy decydujące o aktywności magnetycznej razem ze wszystkimi jej przejawami.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 448.** Niech  $k$  oznacza liczbę dzielników liczby  $n$ . Udowodnić, że  $k^2 < 4n$ .

Rozwiązanie na str. 13

**M 449.** Na kwadratowej tabliczce o wymiarach  $25 \times 25$  napisano liczby naturalne:  $1, 2, \dots, 25$  w taki sposób, że w żadnym wierszu nie powtarza się żadna liczba, a ponadto na polach symetrycznych względem głównej przekątnej znajduje się ta sama liczba. Wykazać, że liczby na głównej przekątnej są różne.

Rozwiązanie na str. 10

**M 450.** Dane są pierwiastki  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  wielomianu  $x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t$ . Obliczyć współczynniki  $p, q, r, s, t$  używając nie więcej niż 10 dodawań i nie więcej niż 10 mnożeń.

Rozwiązanie na str. 13

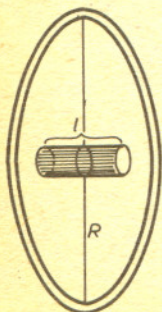
Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

**F 206.** Stacja kosmiczna ma kształt pierścienia o masie  $M = 3 \cdot 10^7$  kg i promieniu  $R = 500$  m. W środku pierścienia znajduje się laboratorium w kształcie cylindra o długości  $l = 50$  m prostopadłego do płaszczyzny pierścienia (rysunek). Zaproponowano, by winda, która ma łączyć poszczególne poziomy laboratoria, poruszała się tylko pod wpływem przyciągania grawitacyjnego pierścienia. Wyznaczyć okres ruchu takiej windy.

Rozwiązanie na str. 11

**F 207.** Niezidentyfikowany obiekt o masie  $m$  oddala się od stacji kosmicznej o masie  $M$ . Gdy odległość obiektu od stacji była równa  $d$ , prędkość względna miała wartość  $v$  i skierowana była wzdłuż prostej łączącej obiekt i stację. Na jaką maksymalną odległość obiekt może oddalić się od stacji? Dla jakiej prędkości  $v$  będzie się oddalał do nieskończoności? Zakładamy, że obiekt i stacja nie mają własnego napędu.

Rozwiązanie na str. 3



Z zapartym tchem przeczytałem w „trójce” żarcik zatytułowany „Cudowna własność liczby  $(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}/54$ ”, a przedstawiający dowód twierdzenia Williamsa (1937)

mówiącego, że  $\max \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma : \alpha, \beta, \gamma \text{ — kąty trójkąta} \right\} =$   
Liczba z Tytułu.

Iloczyn, który maksymalizujemy, został oznaczony przez  $R$ , a następnie przekształcony do postaci

$$R = \left( \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

i dalej, przez podstawienie  $\alpha = x+z$ ,  $\beta = x-z$ ,  $y = \cos x$ ,  $k = 1 - \cos z$  do postaci

$$R = y \sqrt{-y^4 + 2y^3 - 2y + 1} - ky \sqrt{1 - y^2}.$$

Następuje zdanie: „standardowe metody (źródniczować i przyrównać do zera...) raczej zawodzą. Chyba że ktoś z Czytelników...” Potraktowałem to jako wyzwanie. A źródniczuję! Oczywiście nie w tych najnowszych zmiennych ( $y$  i  $k$ ), a w tych „średnio nowych” ( $x$  i  $z$ ). Bowiem

$$R = (\cos z - \cos x) \sin x \cos x.$$

Obszar zmienności:  $[\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi] \Leftrightarrow [z] < x < [\pi/2]$ .

Rachunki:

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\sin z \sin x \cos x; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \sin^2 x \cos x + (\cos z - \cos x) (\cos^2 x - \sin^2 x) = \quad [\text{dla } z = 0] \\ &= (1 - \cos^2 x) \cos x + (1 - \cos x) (2 \cos^2 x - 1) = \\ &= (1 - y) (3y^2 + y - 1); \end{aligned} \quad [\text{ozn. } y = \cos x (\neq 1)]$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} \Leftrightarrow z = 0, \quad y = (\sqrt{13} - 1)/6.$$

Brzeg obszaru: dla  $x = \pi/2$  oraz dla  $x = \pm z$  mamy  $R = 0$ . Stąd

$$R_{\max} = (1 - y_0) \sqrt{1 - y_0^2} y_0 \quad [\text{gdzie } y_0 = (\sqrt{13} - 1)/6]$$

i nie da się ukryć, że wychodzi Liczba z Tytułu.

A potem przyszła melancholijna refleksja: pojawiające się w oryginalnym rozumowaniu wielomiany czwartego stopnia (pod pierwiastkiem) oraz łańcuch Sturma to majstersztyk, koronkowa robota, przepiękne rękodzieło. My zaś „standardową metodą różniczkowania” to trochę jak taranem we wrota ręcznie rzeźbione przez dawnych snycerzy.

I jeszcze wspomnienie z młodości. Jako student I roku słuchałem wykładu algebry w wykonaniu Profesora Andrzeja Mostowskiego, wielkiego matematyka i Wielkiego Człowieka. Łańcuch Sturma znalazł swoje miejsce w tym wykładzie. Później już nie dane mi było z tą metodą się zetknąć. Ale zapamiętałem! I dzięki temu byłem w stanie zrozumieć rachunki w tym wdzięcznym artykuliku.

Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania powyższego zadania z użyciem rachunku różniczkowego nadesłali nam również Mikołaj Tyszka z Krakowa, Zygmunt Bartkowski z Warszawy, N. Porwał z Zabrze i Stanisław Łanowy z Gliwic.



Pan Jarosław Wróblewski z Wrocławia zwrócił mi uwagę, że rozwiązanie zadania M 430 jest błędne. Błąd wynika z chęci uproszczenia rozwiązania. Przypominam zadanie

**M 430.** W punkcie 0 na prostej stoi pionek. Rzucamy symetryczną monetą i w zależności od wyniku przesuwamy pionek o jednostkę w lewo lub w prawo. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pionek kiedyś przekroczy milion.

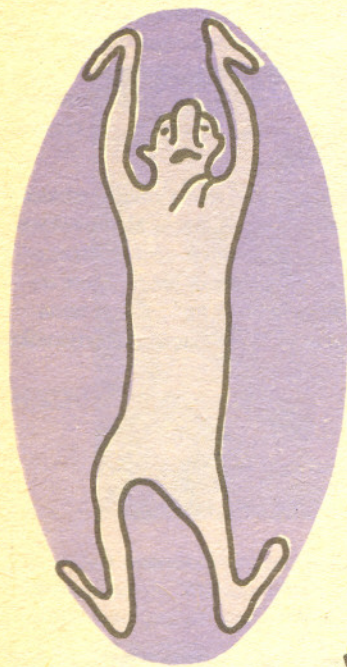
**Rozwiązanie.** Niech  $p_k$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że pionek startujący z punktu  $k$  przekroczy kiedyś milion. Mamy  $p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1}$  dla  $k \leq 10^6$ , ponieważ po wykonaniu pierwszego ruchu z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  znajdziemy się w punkcie  $k+1$ , gdzie szansa przekroczenia miliona wynosi  $p_{k+1}$  i z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  w punkcie  $k-1$ , gdzie szansa przekroczenia miliona wynosi  $p_{k-1}$ . Jednocześnie  $p_{10^6+1} = 1$ . Ciąg  $\{p_k\}_{k \leq 10^6+1}$  jest ciągiem arytmetycznym, jednak gdyby nie był stały, pewne jego wyrazy byłyby ujemne lub większe od 1. Dlatego  $p_k = 1$  dla  $k \leq 10^6 + 1$ .

**Uwaga.** Interesujący jest przypadek, gdy moneta nie jest symetryczna. Wtedy rozwiązanie zamieszczone w numerze 4 daje bezsensowną odpowiedź.



# delta mała delta

## Elipsoida wydłużona czy spłaszczona?

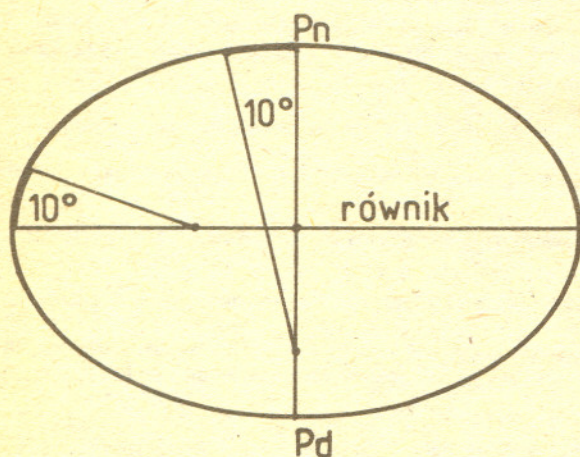


Trudno dociec, kiedy ludziom zaświtała myśl, że Ziemia może być kulista. Na pewno kulistość Ziemi (traktowanej jako centralne ciało we Wszechświecie) głosił już Anaksymander z Miletu (611—547 p.n.e.), po nim Pitagoras (572—497 p.n.e.) i Arystoteles (384—322 p.n.e.). Naturalnym dalszym krokiem musiało być wyznaczenie jej rozmiarów. Dokonał tego po raz pierwszy Eratostenes (275—195 p.n.e.). Stwierdził on, że w dniu przesilenia letniego Słońce w południe widoczne jest w Assuanie w zenicie, a w Aleksandrii  $7^{\circ}2'$  od zenitu. Przyjąwszy, że miasta te (odległe o 5000 stadionów) leżą w przybliżeniu na tym samym południku, wywnioskował, że odległość tych miast musi stanowić  $7,2/360$  całego obwodu Ziemi. Stąd Eratostenes otrzymał promień Ziemi  $R = 250\,000$  stadionów, co jest nadspodziewanie zgodne z rzeczywistością, jako że  $1$  stadion =  $158$  m.

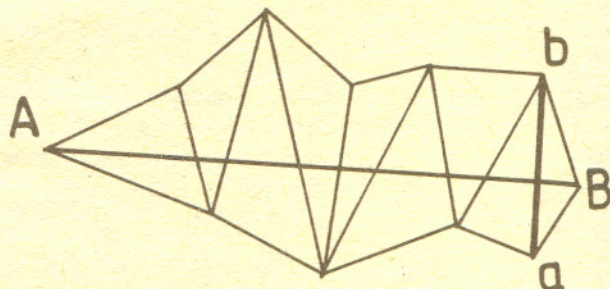


Następne wyznaczenia rozmiarów Ziemi (Posidonius, Al Mamun, Fernel, Norwood) nie wniosły właściwie nic nowego. Dopiero Snellius około 1610 r. zapoczątkował nową, znacznie dokładniejszą metodę mierzenia odległości opartą na triangulacji. Od tego czasu można było pokusić się o zbadanie, na ile kształt Ziemi odbiega od kulistego — jeśli w ogóle odbiega. W pierwszym przybliżeniu sprowadzały się to do zmierzenia wzdłuż południka jego łuków odpowiadających różnicy szerokości

geograficznych np.  $1^{\circ}$ . Gdyby jednostopniowe łuki były dłuższe przy równiku, dowodziłoby to, że modelem Ziemi może być elipsoida obrotowa wydłużona, zaś gdyby były dłuższe w pobliżu biegunów, to ziemską elipsoida byłaby spłaszczona. Sprawa nie była tak oczywista, jak nam się teraz wydaje. Wprawdzie Newton i Huygens byli przekonani, że wskutek ruchu obrotowego Ziemia powinna przyjąć kształt (w przybliżeniu) elipsoidy obrotowej spłaszczonej, jednak istniały głosy przeciwne. Co więcej, pomiary triangulacyjne wykonane we Francji w XVII w. (J. Cassini, Maraldi, Lahire) zdawały się świadczyć za wydłużonym kształtem Ziemi, a więc przeciwnie do przewidywań Newtona.

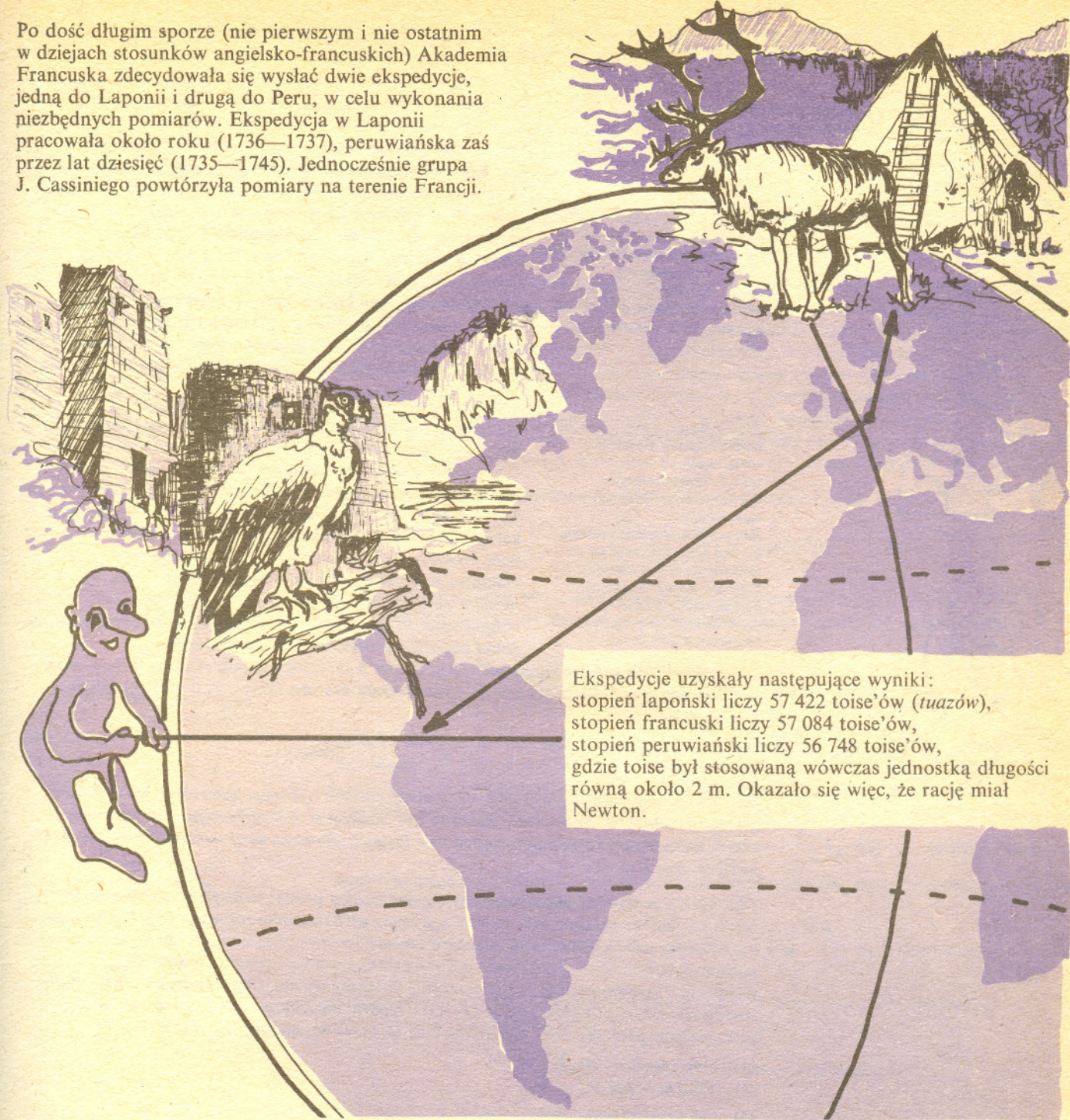


Rys. 1. Na elipsoidzie jednakowym różnicom szerokości geograficznej odpowiadają niejednakowe łuki. Na elipsoidzie spłaszczonej odpowiednie łuki przy biegunie są dłuższe.



Rys. 2. Zamiast mierzyć długi odcinek  $AB$  można zmierzyć krótszy odcinek  $ab$  oraz kąty we wszystkich niezbędnych trójkątach. Na tym polega triangulacja.

Po dość długim sporze (nie pierwszym i nie ostatnim w dziejach stosunków angielsko-francuskich) Akademia Francuska zdecydowała się wysłać dwie ekspedycje, jedną do Laponii i drugą do Peru, w celu wykonania niezbędnych pomiarów. Ekspedycja w Laponii pracowała około roku (1736—1737), peruwiańska zaś przez lat dziesięć (1735—1745). Jednocześnie grupa J. Cassiniego powtórzyła pomiary na terenie Francji.



Ekspedycje uzyskały następujące wyniki:  
 stopień lapoński liczy 57 422 toise'ów (*tuazów*),  
 stopień francuski liczy 57 084 toise'ów,  
 stopień peruwiański liczy 56 748 toise'ów,  
 gdzie toise był stosowaną wówczas jednostką długości  
 równą około 2 m. Okazało się więc, że rację miał  
 Newton.

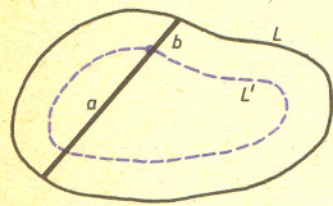
Cała ta sprawa stała się impulsem do wprowadzenia nowego wzorca długości. Mianowicie francuskie Zgromadzenie Narodowe powołało specjalną Komisję Miar i Wag (należeli do niej m.in. Monge, Lagrange, Laplace), której zadaniem miało być znalezienie jednostek długości i ciężaru opartych na jakichś naturalnych podstawach, a przez to łatwo odtwarzalnych. W 1791 r. Komisja zaproponowała, by jednostką długości stało się  $10^{-7}$  ćwiartki południka ziemskiego. Propozycja została zaaprobowana i — jak wiemy — powszechnie przyjęta na całym świecie — powiedzmy: prawie na całym świecie. Przeprowadzone zostały jeszcze dodatkowe pomiary triangulacyjne i w 1799 r. Lenoir wykonał wzorzec nowej jednostki — metra. Jest to sztaba z irydowo-platynowego stopu (o małej rozszerzalności

cieplnej) przechowywaną w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sevres pod Paryżem. Potem, po wykonaniu jeszcze dokładniejszych pomiarów okazało się, że wzorcowy metr nie jest równy  $10^{-7}$  ćwiartki południka, ale to już inna historia. Najnowsza definicja metra ustalona przez Generalną Konferencję Miar i Wag w Paryżu w 1983 r. mówi, że metr jest długością odcinka pokonywanego przez światło w próżni w czasie  $1/299\,792\,458$  sekundy. Rozmiary Ziemi (przyjęte przez Kongres Międzynarodowej Unii Astronomicznej w 1976 r.) są przy tym: promień równikowy  $a = 6\,378\,140$  m, promień biegunowy  $b = 6\,356\,760$  m, spłaszczenie  $(a-b)/a = 1/298,257$ .

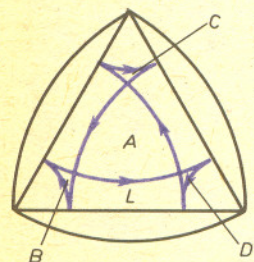
Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

# O polach zakreslanych przez punkty ruchomego odcinka

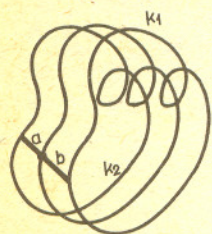
Dr Arkadiusz PŁOSKI



**Twierdzenie Holditcha:**  
Jeśli oba końce odcinka przemieszczają się po krzywej zamkniętej  $L$ , a punkt podziału odcinka w stosunku  $a:b$  zakreśla krzywą  $L'$ , to różnica pól figur ograniczonych krzywymi  $L$  i  $L'$  jest równa  $\pi ab$ .



Trójkąt Reuleaux jest ograniczony trzema łukami o środkach w wierzchołkach trójkąta równobocznego i promieniach równych bokowi tego trójkąta. Jeśli punkt wewnętrzny odcinka, którego końce poruszają się po trójkącie Reuleaux, zakreśla krzywą  $L$  jak na rysunku, to pole algebraiczne obszaru ograniczonego przez nią jest równe  $A \setminus B \setminus C \setminus D$ .



**Twierdzenie.** Jeśli końce odcinka zakreślają krzywe  $K_1$  i  $K_2$  ograniczające pola  $S_1$  i  $S_2$ , a punkt leżący w odległościach  $a > 0$  i  $b > 0$  od jego końców zakreśla krzywą  $K$ , to pole ograniczone krzywą  $K$  jest równe

$$S = \frac{aS_1 + bS_2}{a+b} - \pi abn.$$

Przy założeniach twierdzenia Holditcha ruchomy odcinek wykonuje jeden obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (a więc wtedy  $n = +1$ ), przy czym oba jego końce zakreślają tę samą krzywą ograniczającą pole  $S_1 = S_2$ . Stosując nasze twierdzenie otrzymujemy związek:  $S_1 - S = \pi ab$ .

Okazuje się, że dowód podanego twierdzenia jest bardzo prosty, jeśli tylko należy określić pojęcia w nim występujące. Aby to zrobić, musimy użyć rachunku różniczkowego i całkowego, nie będziemy jednak wykonywać złożonych rachunków; wystarczy nam znajomość samych pojęć pochodnej i całki. Chcąc przedstawić nasze argumenty w krótki sposób posłużymy się rachunkiem wektorowym: punkty płaszczyzny będziemy przedstawiać za pomocą ich wektorów wodzących  $a, b, c, \dots$ . Równoległobok (z wyróżnionym porządkiem ramion) jest więc określony przez podanie pary wektorów  $a, b$ , a jego pole  $[a, b]$  ma następujące własności:

- (1)  $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$ ,
- (2)  $[ka, b] = k[a, b]$ ,
- (3)  $[a, b] = -[b, a]$ ,
- (4) istnieje para jednostkowych wzajemnie prostopadłych wektorów  $i, j$  taka, że  $[i, j] = +1$ .

Warunki (1)–(4) przyjmujemy dalej jako aksjomatyczną definicję pola równoległoboku. Pole trójkąta o ramionach  $a, b$  definiujemy jako  $1/2[a, b]$ . Płaszczyzna, w której określono pole równoległoboku, spełniające warunki (1)–(4), nazywa się płaszczyzną zorientowaną. Można sprawdzić, że płaszczyznę da się zorientować dokładnie na dwa sposoby (warunki (1)–(4) wyznaczają pole z dokładnością do znaku). W dalszym ciągu zakładamy, że płaszczyzna jest zorientowana. Zajmiemy się teraz formalnym opisem ruchu, przy czym ograniczymy się do przypadku, w którym ruchomy obiekt powraca do położenia wyjściowego. Wektorem ruchomym  $r$  nazywamy gładką funkcję wektorową określoną w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  i spełniającą warunek  $r(0) = r(2\pi)$  (przedział  $\langle 0, 2\pi \rangle$  może być zastąpiony przez jakikolwiek inny, nasz wybór został podyktowany wygodą rachunkową). Argument funkcji  $r$  interpretujemy jako czas: mówimy, że wektor ruchomy  $r$  zajmuje w chwili  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  położenie  $r(t)$ . Gładkość oznacza tutaj, że funkcja  $r$  ma w każdym punkcie pochodną (oznaczaną dalej  $\dot{r}$ ), tzn. jeśli  $r(t) = (a(t), b(t))$ , to  $\dot{r}(t) = (a'(t), b'(t))$  i że pochodna ta jest funkcją ciągłą. Założenia te można osłabić, ale nie będziemy się nad tym zatrzymywać. Przypomnijmy jeszcze, że  $\dot{r}(t)$  interpretujemy w mechanice jako prędkość wektora ruchomego  $r$  w chwili  $t$ .



**Rozwiązanie zadania M 449.** Każda z 25 liczb występuje w tabliczce 25 razy, w tym parzystą liczbę razy poza główną przekątną. Wobec tego każda liczba wystąpi na głównej przekątnej nieparzystą liczbę razy, a więc dokładnie raz.



Rozwiązanie zadania F 206. Po wychyleniu z położenia równowagi (punkt 0 na rysunku) na wiatr zaczyna działać siła przyciągania grawitacyjnego  $F$  skierowana do środka pierścienia. W punkcie odległym o  $x$  od 0 siła  $\Delta F$  przyciągania windy przez mały element pierścienia o masie  $\Delta M_1$  ma wartość

$$\Delta F_1 = -G \frac{\Delta M_1 m}{R^2 + x^2}$$

i jest skierowana pod kątem  $\alpha$  do osi, przy czym

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Stąd rzut  $\Delta F_1$  na oś pierścienia

$$\Delta F_{1i} = -G \frac{\Delta M_1 m x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Wypadkowa sił pochodzących od wszystkich mas  $\Delta M_1$  jest więc równa

$$F = -G \frac{M m x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

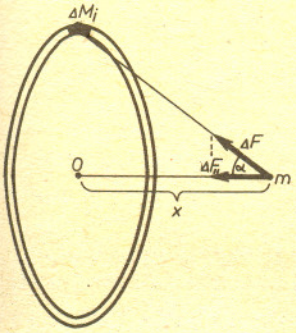
Ponieważ rozmiary pierścienia są dużo większe od długości cylindra, siła przyciągająca jest w przybliżeniu proporcjonalna do wychylenia

$$F \approx -G \frac{M m}{R^3} x = -kx.$$

Ruch windy jest w tym przybliżeniu ruchem harmonicznym o okresie

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{MG}}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $T \approx 18$  dni. Jak widać, pomysł takiego napędu windy trzeba odrzucić.



Definicja. Polem zakreślonym przez wektor ruchomy  $r$  nazywamy liczbę  $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r(t), \dot{r}(t)] dt$ .

Łatwo wskazać intuicję geometryczną objaśniającą przyjętą definicję: pole zakreślone przez wektor  $r$  w małym przedziale czasu  $\langle t, t + \Delta t \rangle$  jest w przybliżeniu równe polu trójkąta o ramionach

$$r(t), r(t + \Delta t), \text{ tzn. liczbie } \frac{1}{2} [r(t), r(t + \Delta t)] = \frac{1}{2} \left[ r(t), \frac{1}{\Delta t} (r(t + \Delta t) - r(t)) \right] (\Delta t) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} [r(t), \dot{r}(t)] \Delta t. \text{ Aby znaleźć pole zakreślone przez wektor } r \text{ w całym przedziale czasowym}$$

$\langle 0, 2\pi \rangle$ , sumujemy pola opisanych wyżej trójkątów, a następnie przechodzimy do granicy.

Niech teraz  $r$  będzie wektorem ruchomym nie przechodzącym przez początek układu. Założenie to oznacza, że  $r(t) \neq 0$  dla wszystkich  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Istnieje wówczas funkcja ciągła  $\varphi$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  taka, że  $r = |r|(i \cos \varphi + j \sin \varphi)$ . Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej będącej wielokrotnością liczby  $2\pi$ . Z warunku  $r(0) = r(2\pi)$  wynika, że  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) + 2\pi n$  dla pewnej liczby całkowitej  $n$ . Liczbę  $n$  nazywamy indeksem wektora ruchomego  $r$  (nie przechodzącego przez początek układu) względem  $0$  i oznaczamy  $\text{ind}(r, 0)$ . Indeks  $\text{ind}(r, 0)$  można opisać nieformalnie jako liczbę obiegów wektora  $r$  względem początku układu. Zainteresowany tym pojęciem Czytelnik znajdzie szczegółowy i przystępny wykład podstawowych własności indeksu w książce A. Birkholca *Analiza matematyczna dla nauczycieli*.

Lemat. Jeżeli wektor ruchomy  $r$  nie przechodzi przez początek układu, to

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[r(t), \dot{r}(t)]}{r(t)^2} dt = \text{ind}(r, 0).$$

Dowód. Niech  $\varphi$  będzie taką funkcją ciągłą, że  $r = |r|(i \cos \varphi + j \sin \varphi)$ . Z założenia, że  $r$  jest funkcją gładką, wynika istnienie i ciągłość pochodnej  $\dot{\varphi}$ . Łatwo sprawdzić, że  $[r, \dot{r}] = r^2 \dot{\varphi}$ , a więc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[r(t), \dot{r}(t)]}{r(t)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi} (\varphi(2\pi) - \varphi(0)) = \text{ind}(r, 0).$$

Możemy teraz nadać ścisły sens wypowiedzi naszego twierdzenia i udowodnić je. Odcinkiem ruchomym o długości  $d > 0$  będziemy nazywać parę wektorów ruchomych  $r_1, r_2$  taką, że  $|r_1(t) - r_2(t)| = d$  dla wszystkich  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Liczbą pełnych obrotów odcinka ruchomego  $r_1, r_2$  nazywamy indeks  $\text{ind}(r_2 - r_1, 0)$ . Aby udowodnić twierdzenie, rozważmy odcinek ruchomy  $r_1, r_2$  o długości  $a + b$  ( $a > 0, b > 0$ ) i oznaczmy  $r = \frac{a}{a+b} r_1 + \frac{b}{a+b} r_2$ . Jest to więc wektor wodzący punktu leżącego w odległościach  $a > 0$  i  $b > 0$  od końców odcinka ( $|r - r_1| = b$  oraz  $|r - r_2| = a$ ). Zgodnie z przyjętą definicją pola mamy:

$$\int_0^{2\pi} [r_k(t), \dot{r}_k(t)] dt = 2S_k \quad \text{dla } k = 1, 2 \quad \text{oraz} \quad \int_0^{2\pi} [r(t), \dot{r}(t)] dt = 2S.$$

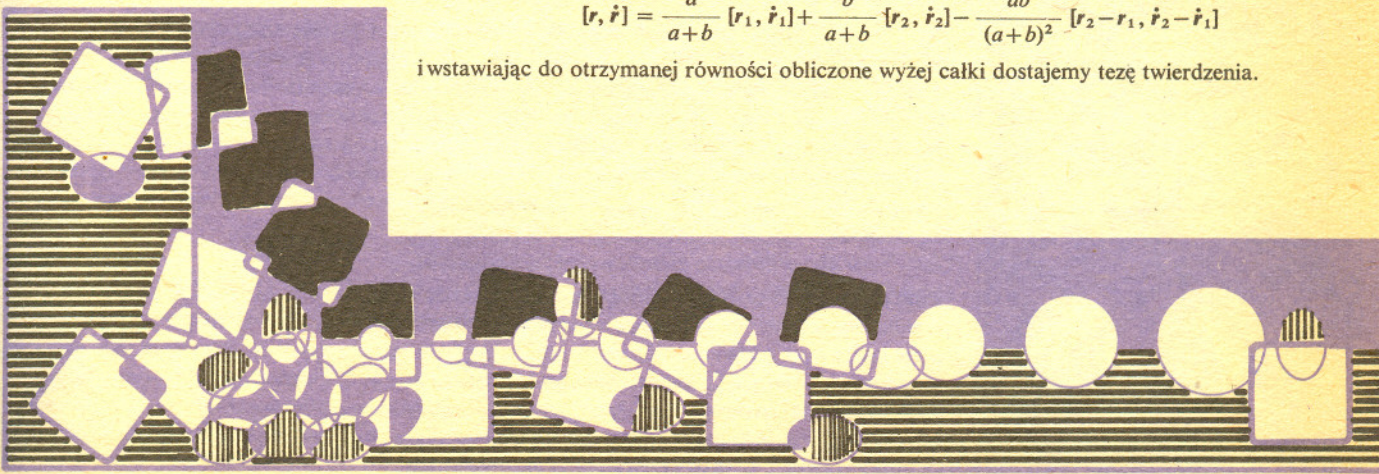
Z drugiej strony stosując udowodniony lemat do wektora  $r_2 - r_1$  i uwzględniając fakt, że  $(r_2 - r_1)^2 = (a + b)^2$ , otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} [r_2(t) - r_1(t), \dot{r}_2(t) - \dot{r}_1(t)] dt = 2\pi(a + b)^2 n.$$

Całkując łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$[r, \dot{r}] = \frac{a}{a+b} [r_1, \dot{r}_1] + \frac{b}{a+b} [r_2, \dot{r}_2] - \frac{ab}{(a+b)^2} [r_2 - r_1, \dot{r}_2 - \dot{r}_1]$$

i wstawiając do otrzymanej równości obliczone wyżej całki dostajemy tezę twierdzenia.



# Czy proton jest cząstką trwałą?

Dr Danuta KIEŁCZEWSKA

Rozwój poglądów na temat stabilności protonu jest fascynującym przykładem poszukiwania najgłębiej ukrytych przyczyn obserwowanych zjawisk.

W artykule stosujemy następujące

oznaczenia:  
p — proton  
n — neutron  
 $\nu$  — neutrino  
 $e^-$  — elektron  
 $e^+$  — pozyton  
 $\pi$  — mezon pi

Jądra atomowe składają się z protonów i neutronów. Swobodny neutron rozpada się średnio po 15 minutach na proton, elektron i antyneutrino (tzw. rozpad  $\beta$ ). Neutron związany w stabilnym jądrze nie ulega takiemu rozpadowi. Podobnie, trwały ze względu na rozpad  $\beta$  jest proton, gdyż ma masę nieco mniejszą od neutronu. Trwałość protonu (i związanego neutronu) nie wynika jednak z żadnej z podstawowych zasad zachowania. Istnieje wiele cząstek, na które mogłyby się rozpadać z zachowaniem energii, pędu, momentu pędu i ładunku. Wszystkie te wielkości są zachowane na przykład w rozpadzie protonu na dwa pozytony i elektron ( $p \rightarrow e^+e^+e^-$ ). Podobnie dla związanego neutronu do pomyslenia jest rozpad  $n \rightarrow e^+e^-\nu$ . Nigdy jednak takich procesów nie zaobserwowano.

Nie obserwuje się również rozpadów elektronów, ale elektron jest najlżejszą cząstką obdarzoną ładunkiem i nie mogłyby się rozpadać bez pogwałcenia zasady zachowania energii lub ładunku. Przez analogię przyjęto zatem, że proton jest najlżejszą cząstką mającą ładunek barionowy (liczbę barionową)  $B = +1$ . Neutron ma ładunek barionowy też równy  $+1$ , a dla antyprotonu i antyneutronu  $B = -1$ . Postulowano dalej, że suma liczb barionowych jest zachowywana w reakcjach podobnie jak całkowity ładunek elektryczny.

W przypadku istnienia siły „barytropowej” różne jądra byłyby różnie przyciągane przez Ziemię, ponieważ każde jądro ma nieco inny stosunek masy do liczby barionowej. Jednak analiza precyzyjnych eksperymentów badających pole grawitacyjne Ziemi wykazała, że siła przyciągania ciał jest proporcjonalna tylko do masy, a nie do ich ładunku barionowego.

Prawo zachowania ładunku elektrycznego jest zasadniczą cechą elektrodynamiki — teorii opisującej oddziaływanie cząstek naładowanych. Nie istnieje natomiast podobnie ugruntowana teoria, w którą udałooby się wbudować zasadę zachowania ładunku barionowego. W szczególności nie stwierdzono przejawów siły „barytropowej”, która analogicznie do siły Coulomba byłaby proporcjonalna do całkowitego ładunku barionowego.

Podejrzenie co do zachowania liczby barionowej nasuwa również fakt, że we Wszechświecie obserwuje się dużo więcej materii ( $B = +1$ ) niż antymaterii ( $B = -1$ ). Jeżeli odrzucimy nieatrakcyjną hipotezę, że obserwowana obecnie asymetria była zadany warunkiem początkowym, to musimy przyjąć, że w pierwszych chwilach Wielkiego Wybuchu zachodziły procesy nie zachowujące ładunku barionowego.

Procesy takie, jeśli występują i dziś, są z pewnością niezwykle rzadkie. Można na przykład ocenić, ile nukleonów (tj. protonów i neutronów) w ciele człowieka może ulec rozpadowi, zanim zostanie przekroczona dopuszczalna dawka promieniowania. Okazuje się, że takiej dawce odpowiada rozpad  $3 \times 10^8$  nukleonów w 1 kg w ciągu roku, czyli jednego nukleonu na  $2 \times 10^{18}$ . Przyjmując, że dawkę 100 razy większą poczulibyśmy już na pewno, możemy wnioskować, że rozpady zdarzają się nie częściej niż jeden na  $2 \times 10^{16}$  nukleonów w ciągu roku. Wynika z tego, że pojedynczy nukleon żyje średnio dłużej niż  $2 \times 10^{16}$  lat. Jest to imponująca długowieczność, jeśli zważyć, że wiek Wszechświata oceniany jest na zaledwie  $10^{10}$  lat.

Od 1954 roku próbowano doświadczalnie wyznaczać dolną granicę czasu życia protonu. Stosowano do tego celu detektory zaprojektowane do rejestracji neutrin kosmicznych. W 1974 roku fizycy amerykańscy pod kierunkiem F. Reinesa, po przeanalizowaniu danych zebranych w ciągu 9 lat pracy dwudziestotonowego detektora umieszczonego w kopalni złota w Afryce Południowej, otrzymali dolną granicę czasu życia nukleonu równą  $3 \times 10^{29}$  lat. Ta sama grupa fizyków wystąpiła wtedy z propozycją budowy większego detektora, jednakże nie otrzymała potrzebnych funduszy. Rozpad protonu nie wydawał się wówczas dostatecznie ważnym zagadnieniem.

Tymczasem w fizyce cząstek elementarnych uzyskano wiele nowych wyników. Opisano w jednolity sposób oddziaływania elektromagnetyczne wiążące m.in. elektrony z jądrami w atomach, oraz oddziaływania słabe, odpowiedzialne np. za rozpad  $\beta$ . W ramach tego opisu podstawowymi składnikami materii są kwarki oraz leptony. Z kwarków zbudowane są nukleony, a także wszystkie inne cząstki oddziałujące za pośrednictwem oddziaływań silnych. Do leptonów zaliczane są te cząstki materii, które silnie nie oddziałują, np. elektron i neutrino. Kwarki i leptony stanowią więc dwie różne i niezależne rodziny.



Mezony  $\pi$  to cząstki 7 razy lżejsze od nukleonów, zbudowane z kwarków i antykwarków.



Rozwiązanie zadania M 450. Obliczamy kolejno

- $b_1 := a_1 + a_2,$
- $b_2 := a_1 \cdot a_2,$
- $b_3 := a_3 + a_4,$
- $b_4 := a_3 \cdot a_4,$
- $b_5 := b_1 + b_3,$
- $b_6 := b_5 + a_5 = p,$
- $b_7 := b_5 \cdot a_5,$
- $b_8 := b_2 + b_4,$
- $b_9 := b_1 \cdot b_3,$
- $b_{10} := b_8 + b_9,$
- $b_{11} := b_{10} + b_7 = q,$
- $b_{12} := b_{10} \cdot a_5,$
- $b_{13} := b_1 \cdot b_4,$
- $b_{14} := b_2 \cdot b_3,$
- $b_{15} := b_{13} + b_{14},$
- $b_{16} := b_{12} + b_{15} = r,$
- $b_{17} := b_{15} \cdot a_5,$
- $b_{18} := b_2 \cdot b_4,$
- $b_{19} := b_{17} + b_{18} = s,$
- $b_{20} := b_{19} \cdot a_5 = t.$

A czy może być łącznie mniej niż 20 działań?

Naladowana cząstka poruszająca się w przezroczystym ośrodku z prędkością większą od prędkości światła w tym ośrodku emituje światło, tzw. promieniowanie Czerenkowa. Światło to wysyłane jest wzdłuż stożka wokół kierunku lotu cząstki, analogicznie do fal akustycznych wysyłanych przez samoloty ponaddźwiękowe. W odległości pięciu metrów od toru cząstki natężenie promieniowania jest tak małe jak od żarówki umieszczonej w odległości Księżyca.

Miony są to cząstki oddziałujące podobnie jak elektrony, o masie 200 razy większej od masy elektronu.



Rozwiązanie zadania M 448. Rozpatrzmy dzielniki liczby  $n$ , które nie przewyższają  $\sqrt{n}$ .

Jest ich nie więcej niż  $\frac{k+1}{2}$ , ponieważ

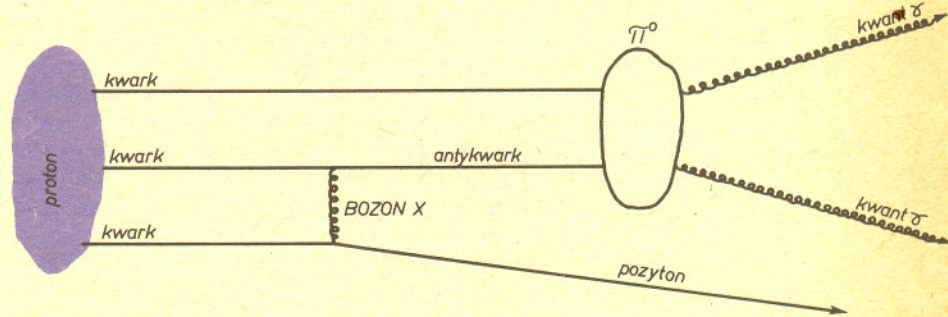
każdemu dzielnikowi  $d < \sqrt{n}$  można

przyporządkować dzielnik  $\frac{n}{d} > \sqrt{n}$  —

takie przyporządkowanie jest różnowartościowe.

Stąd  $\frac{k}{2} < \frac{k+1}{2} \leq \sqrt{n}$ , czyli  $k^2 < 4n$ .

W 1974 roku zaproponowano teorię (oznaczoną symbolem SU(5)), która do jednolitego opisu włączała również oddziaływania silne, zachodzące między kwarkami. Wymagało to połączenia kwarków i leptonów w jedną rodzinę, a więc w konsekwencji dopuszczenie możliwości przekształceń jednych w drugie. Na przykład jeden z trzech kwarków protonu mógłby przejść w  $e^+$ , a drugi w antykwark, który z trzecim kwarkiem utworzy nienaładowany mezon  $\pi^0$  (rys.). Proces ten następowałby przez wymianę między kwarkami hipotetycznej cząstki (bozonu X), której istnienie jest niezbędnym elementem jednolitego opisu oddziaływań elektroślabych i silnych.



Czas życia protonu wyznaczony w ramach teorii SU(5) jest krótszy niż  $2 \times 10^{31}$  lat. Wynik ten jest już w zakresie możliwości doświadczalnych, bo jeśli w 1 g materii znajduje się około  $6 \times 10^{23}$  nukleonów (liczba Avogadra), to w 1000 tonach powinno średnio zajść ponad 26 rozpadów w ciągu roku. W 1979 roku eksperyment podobny do zaproponowanego 5 lat wcześniej został zaakceptowany. Do jego realizacji przystąpili najpierw fizycy z uniwersytetów w Irvine (Kalifornia) i Michigan oraz z laboratorium w Brookhaven. Potem przyłączyły się inne laboratoria w tym również z Uniwersytetu Warszawskiego.

Aby uzyskać maksymalną ilość badanej materii tanim kosztem, wypełniono detektor 8 tysiącami ton wody. Promieniowanie Czerenkowa emitowane przez naładowane szybkie cząstki przechodzące przez detektor rejestrowane jest przez 2048 fotopowielaczy umieszczonych w ścianach detektora. Impulsy z fotopowielaczy analizowane są następnie przez komputer.

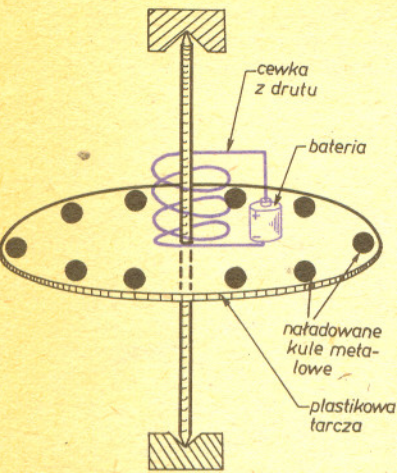
Jak powinien wyglądać w takim detektorze wspomniany rozpad  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ ? Każdy z produktów rozpadu powinien mieć całkowitą energię bliską połowie masy protonu. Ponieważ proton rozpada się niemal w spoczynku, pęd pozytonu powinien być przeciwny do pędu mezonu  $\pi^0$ . Pozyton wysyła stożek światła przebywając drogę około 2,5 metra. Mezon  $\pi^0$  rozpada się prawie natychmiast na dwa fotony, które w przybliżeniu zachowują jego kierunek i po przebyciu w wodzie drogi średnio 36 cm produkują pary  $e^+ e^-$ . W efekcie fotopowielacze oświetlone przez rozpadający się proton powinny znajdować się w przybliżeniu w dwóch pierścieniach na przeciwnych ścianach detektora.

W detektorze mogą zachodzić też inne zjawiska, które wywołują sygnały podobne do oczekiwanych z rozpadów nukleonów. Najpoważniejszy problem stanowią cząstki promieniowania kosmicznego. Dlatego detektor zbudowano w kopalni soli, około 600 m pod jeziorem Erie. Na tę głębokość docierają tylko miony i neutrina.

Po dwóch latach pracy detektora zebrano dane, spośród których wybrano około 400 zdarzeń. Zarówno liczba zdarzeń, jak i ich własności zgadzają się z tym, czego oczekiwaliśmy od oddziaływań neutrin atmosferycznych. Nie można jednak wykluczyć, że niektóre ze zdarzeń są rozpadami nukleonów. Takich „kandydatów” na różne sposoby rozpadu jest ponad 20. Na podstawie tych przypadków obliczono górne granice prawdopodobieństw 34 sposobów rozpadu. Odpowiadające im dolne granice czasu życia nukleonu wynoszą od  $10^{31}$  lat do  $50 \times 10^{31}$  lat.

Żadne z 400 zdarzeń nie przypomina oczekiwanego rozpadu  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ . Jeżeli więc byłoby to główny sposób rozpadu protonu, to jego czas życia jest dłuższy niż  $25 \times 10^{31}$  lat, co ponad dziesięciokrotnie przewyższa przewidywania teorii SU(5). Doświadczenie wykazuje zatem, że prosty koncepcyjnie schemat ujednoczenia oddziaływań nie sprawdza się i należy szukać innych.

Nie znamy w tej chwili definitywnej odpowiedzi na pytanie, czy proton jest cząstką trwałą. Gdy po raz pierwszy badano to zagadnienie doświadczalnie, powszechna była wiara fizyków w trwałość protonu. Obecnie ogół fizyków sądzi, iż proton nie jest cząstką trwałą, mimo że trzydzieści lat doświadczeń obniżyło górną granicę prawdopodobieństwa rozpadu aż  $10^{15}$  razy.



Rys. 1. Dysk Feynmana.

W drugim tomie wykładów Feynmana w rozdziale siedemnastym autor podaje czytelnikom do rozwiązania pewien paradoks, który później zyskał miano „paradoksu dysku Feynmana”. Feynman proponuje, aby rozważyć cienką kolistą plastikową tarczę, która może się swobodnie obracać wokół osi (rys. 1). Na tarczy współosiowo znajduje się solenoid, przez który przepływa prąd elektryczny czerpany z małej baterii, także umieszczonej na tarczy. Konstrukcję uzupełniają kilka małych metalowych kulek umieszczonych w pobliżu brzegu tarczy i izolowanych od siebie i od solenoidu. Każda z kulek jest naładowana ładunkiem elektrycznym  $Q$ . Niech tak skonstruowany dysk spoczywa.

Przypuśćmy teraz, że bateria została odłączona od solenoidu. Przerwanie prądu w obwodzie spowoduje zanik znajdującego się wewnątrz solenoidu, równoległego do osi tarczy pola magnetycznego. Pojawi się zatem, zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya, indukowane pole elektryczne. Linie sił tego pola będą okręgami współśrodkowymi z osią tarczy. W efekcie naładowane kulki na obwodzie tarczy doznają działania pewnej siły elektrycznej, stycznej do obwodu. Tak więc zanik prądu w solenoidzie spowoduje obrót tarczy i pojawienie się momentu pędu. Przeczy to jednej z fundamentalnych zasad zachowania w fizyce, a mianowicie zasadzie zachowania momentu pędu.

To nagle pojawienie się momentu pędu tarczy nie jest efektem mechanicznym wynikającym z jakiegoś szczególnego sposobu realizacji wyłączenia prądu w solenoidzie. Rozwiązanie paradoksu leży w stwierdzeniu, iż pole elektromagnetyczne ma swój własny moment pędu, który po zaniku prądu przekazywany jest tarczy.

Moment pędu pola elektromagnetycznego wyraża się wzorem

$$(1) \quad L_{EM} = \epsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z},$$

gdzie  $\mathbf{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego,  $\mathbf{B}$  — indukcją pola magnetycznego w punkcie  $\mathbf{r}$ , a  $\epsilon_0$  jest przenikalnością dielektryczną próżni.

Przed wyłączeniem prądu mamy wewnątrz solenoidu pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  wytworzone przez poruszające się elektrony i pole elektryczne  $\mathbf{E}$  naładowanych kulek znajdujących się na obwodzie tarczy. Zatem  $L_{EM}$  jest różny od zera. Przerwanie prądu w obwodzie solenoidu spowoduje zanik pola magnetycznego, a więc zanik  $L_{EM}$ . Jednak całkowity moment pędu układu nie zmieni się, bo na jego miejsce pojawi się moment pędu tarczy. Dowód tego, iż moment pędu pola elektromagnetycznego i moment pędu tarczy są równe, przeprowadził przy użyciu złożonej analizy wektorowej G. G. Lombardii.

Zaproponowano również nieco inny eksperyment, który można łatwiej przeanalizować. Nieskończenie długi solenoid o promieniu  $R$ , w którym płynie prąd  $I$ , umieszczony jest współosiowo między dwiema rurami (o promieniach  $a$  i  $b$  i długości  $l \gg b > a$ ) naładowanymi równomiernie ładunkami  $-Q$  i  $+Q$  (rys. 2). Rury mogą się swobodnie obracać wokół wspólnej osi.

W chwili początkowej obie rury spoczywają, czyli ich moment pędu jest równy zeru. Wyłączmy w pewnym momencie prąd w solenoidzie. Spowoduje to zanik równoległego do osi pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ . Powstanie indukowane pole elektryczne, które działając na ładunki umieszczone na powierzchni rur spowoduje ich obrót w przeciwne strony. Mechaniczny moment pędu rur będzie równy momentom sił scałkowanym po czasie

$$(2) \quad |L_{ma}| = \int aQE_a dt, \quad |L_{mb}| = \int bQE_b dt,$$

gdzie  $E_a$  i  $E_b$  to pole elektryczne działające odpowiednio na wewnętrzną i zewnętrzną rurę. Zgodnie z prawem Faradaya

$$(3) \quad E_a = \frac{d\Phi_a/dt}{2\pi a} = \pi a^2 \frac{dB/dt}{2\pi a} = a \frac{dB/dt}{2},$$

$$E_b = \frac{d\Phi_b/dt}{2\pi b} = \pi R^2 \frac{dB/dt}{2\pi b} = R^2 \frac{dB/dt}{2b}.$$

Podstawiając te wartości do (2) otrzymamy

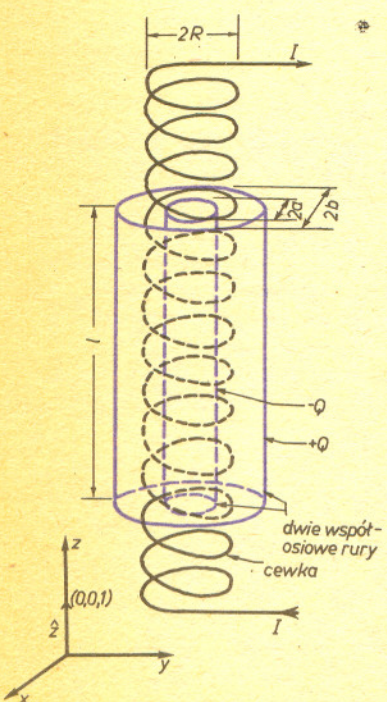
$$(4) \quad |L_{ma}| = \int Qa^2 dB/2 = Qa^2 B/2, \quad |L_{mb}| = \int QR^2 dB/2 = QR^2 B/2,$$

gdzie  $L_{mb}$  ma zwrot osi solenoidu  $\hat{z}$ , a  $L_{ma}$  — przeciwny;  $B$  jest początkową wartością pola magnetycznego wewnątrz solenoidu. Zatem całkowity moment pędu po wyłączeniu prądu jest równy

$$(5) \quad L_m = L_{mb} - L_{ma} = \frac{QB(R^2 - a^2)}{2} \hat{z}.$$

Obliczmy teraz moment pędu pola elektromagnetycznego przed wyłączeniem prądu w solenoidzie. Zgodnie z przyjętymi warunkami pole magnetyczne istniało tylko wewnątrz solenoidu. Natomiast pole elektryczne jest równie zeru wszędzie poza obszarem między rurami i, jak wynika z prawa Gaussa, ma ono wartość  $E = Q/(2\pi\epsilon_0 rl)$  i kierunek radialny. Zatem

G. G. Lombardii, *American Journal of Physics* 51(1983)str. 213.



Rys. 2



całkowanie we wzorze (1) rozciągać się będzie na obszar, w którym istnieją jednocześnie pola  $E$  i  $B$ . Wykorzystując symetrię kołową opisanego układu możemy napisać

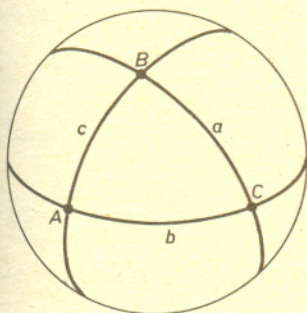
$$(6) \quad L_{EM} = \hat{z} \epsilon_0 \int_a^R \frac{rQB(2\pi r l)}{2\pi \epsilon_0 r l} dr = \frac{QB(R^2 - a^2)}{2} \hat{z}.$$

Wykazaliśmy, iż istotnie moment pędu pola równy jest mechanicznemu momentowi pędu rur, który pojawia się po wyłączeniu prądu w solenoidzie. Zasada zachowania momentu pędu nie została naruszona.

Istnieją inne, bardziej dostępne obserwacji zjawiska, w których ujawnia się moment pędu pola elektromagnetycznego. Rozważmy na przykład elektron w modelu atomu Bohra. Ma on określony, w zależności od stanu, w którym się znajduje, moment pędu  $L_r$ . Jeśli za pomocą elektromagnesu wytworzymy jednorodne pole magnetyczne  $B$  prostopadłe do płaszczyzny orbity, to pole elektryczne elektronu i pole magnetyczne zgodnie z relacją (1) dadzą moment pędu równy  $L_{EM} = -er^2B/2$ , gdzie  $r$  jest promieniem orbity elektronu w modelu Bohra. Zatem zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu dla zrównoważenia powstałego  $L_{EM}$  elektron zyska w polu dodatkowy mechaniczny moment pędu  $\Delta L_m = -L_{EM}$ . Moment magnetyczny stowarzyszony z tym momentem pędu jest równy  $m = -e\Delta L_m/(2m_e) = -e^2r^2B/(4m_e)$ , a więc ma kierunek przeciwny do kierunku pola  $B$ . Jest to tzw. indukowany moment diamagnetyczny. Pojawienie się w obecności pola  $B$  dodatkowego momentu pędu  $\Delta L_m$  oznacza, że elektron obraca się z dodatkową częstością  $\omega_p = |\Delta L_m|/(mr^2) = e|B|/(2m)$  zwaną częstością Larmora. Tak więc diamagnetyzm można uważać za konsekwencję zasady zachowania momentu pędu.

Na zakończenie zauważmy, że skoro pole elektromagnetyczne niesie pewien moment pędu, nie powinien nikogo dziwić fakt, iż foton, który jest kwantem tego pola, ma własny moment pędu (spin). Poza tym warto pamiętać, że obiekt fizyczny nie będący w ruchu może mieć pewien moment pędu. „Dysk Feynmana” jest tego przykładem.

## Kącik olimpijski



Weźmy trzy punkty  $A, B, C$  na sferze nie leżące na jednym kole wielkim. Przez każde dwa z nich poprowadźmy koło wielkie sfery. Te trzy koła wielkie dzielą sferę na 8 części zwanych trójkątami sferycznymi. Kąty  $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$  między stycznymi do łuków kół wielkich nazywamy kątami trójkąta sferycznego, a łuki  $c = \overset{\frown}{AB}, a = \overset{\frown}{BC}, b = \overset{\frown}{CA}$  kół wielkich — jego bokami (mierzymy je w radianach).

Przy takim podziale sfery jeden z trójkątów ma wszystkie boki i kąty mniejsze od  $\pi$ . Taki trójkąt nazywamy eulerowski. Między jego bokami i kątami zachodzą związki:

- (1)  $b - c < a < b + c, a + b + c < 2\pi,$
- (2)  $\pi < A + B + C < 3\pi.$

Wzór sinusów

$$(3) \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Wzory cosinusów

$$(4) \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Wzory cotangensów

$$(5) \quad \sin c \cotg a - \sin b \cotg A = \cos c \cos B, \\ \sin c \cotg b - \sin a \cotg B = \cos c \cos A.$$

Analogiczne wzory otrzymujemy dla pozostałych boków i kątów.

Rozwiążmy teraz zadanie 6 z trzeciego etapu XXXIII OM — używając jednego z powyższych wzorów.

Udowodnić, że w dowolnym czworobocianie suma wszystkich kątów dwuściennych jest większa od  $2\pi$ .

Opiszemy najpierw pewną ogólną konstrukcję.

Rozpatrzmy niewielką — tzn. przecinającą tylko trzy ściany — sferę o środku w wierzchołku czworobocianu. Te trzy ściany (i trzy krawędzie) wyznaczają na sferze boki (i wierzchołki) trójkąta sferycznego eulerowskiego. Miary jego boków to miary kątów płaskich przy wierzchołku, a miary jego kątów to miary kątów dwuściennych. Stosujemy lewą część nierówności (2) do wszystkich wierzchołków czworobocianu i sumujemy stronami. Po lewej stronie nierówności będzie  $4\pi$ , po prawej — podwojona suma wszystkich kątów dwuściennych.

Można zauważyć, że stosując konstrukcję opisaną w rozwiązaniu i wzory (3) — (5) dostajemy przepis na rozwiązanie dowolnego naroża (tzn. okolic wierzchołka czworobocianu), o ile tylko mamy wystarczająco dużo danych początkowych.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne czworobocianu są ostre, to wszystkie jego ściany są trójkątami ostrokątnymi.

(zadanie 6 z zawodów III stopnia XXXIV Olimpiady)

2. Udowodnić, że w każdym czworobocianie istnieje wierzchołek, przy którym trzy kąty płaskie są ostre.

(10-I-XXVIII)

3. Udowodnić, że suma sześciu kątów, pod którymi widać krawędzie dowolnego czworobocianu z dowolnego jego punktu wewnętrznego, jest większa od  $540^\circ$ .

(zadanie 3 z III Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

4. Udowodnić, że jeżeli wszystkie ściany czworobocianu są trójkątami przystającymi, to te trójkąty są ostrokątne.

(12-I-XII)

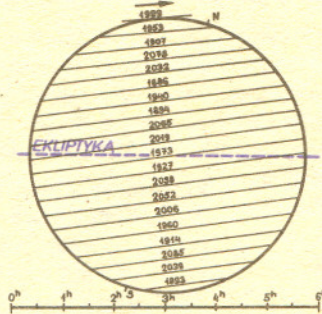
Marek GAŁECKI



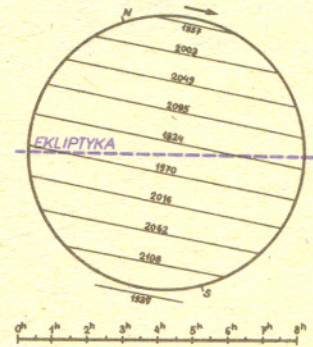
Przejście planety dolnej (Merkurego lub Wenus) na tle tarczy słonecznej jest zjawiskiem analogicznym do zaćmienia Słońca przez Księżyc. Oczywiście obserwowane rozmiary kątowe obiektu zakrywającego są w tym przypadku nieporównanie mniejsze i dla ziemskiego obserwatora przebieg zjawiska jest znacznie mniej efektowny, dla większości ludzi wręcz niezauważalny. Dla astronomów jest jednak wydarzeniem ważnym, dostarczającym wielu danych do wyznaczenia średnicy kątowej planety i określenia jej dokładnych współrzędnych. W bardzo rzadkich przypadkach przejścia planety na tle plamy słonecznej nadarza się szczególna okazja przeprowadzenia wielu ciekawych pomiarów dotyczących fizyki plam.

Podobnie jak zaćmienia Słońca czy Księżycza momenty przejść planet na tle tarczy słonecznej potrafimy bardzo dokładnie przewidywać. Przejścia mogą być obserwowane tylko wtedy, gdy w czasie złączenia dolnego Ziemia i dana planeta znajdują się na linii przecięcia płaszczyzn ich orbit, tj. w węźle. W czasie innych złączeń dolnych planety przechodzą „powyżej” lub „poniżej” tarczy słonecznej, ponieważ płaszczyzny ich orbit są dość silnie nachylone do płaszczyzny ekliptyki (Merkury: 7°, Wenus: 3,4°). Ziemia przechodzi przez węzły orbity Merkurego 7 maja i 9 listopada, a przez węzły orbity Wenus 6 czerwca i 8 grudnia. Jeśli w okolicy tych dat wypadnie złączenie dolne odpowiedniej planety, to spełnione zostaną wspomniane wyżej warunki wystąpienia zjawiska przejścia planety dolnej przed tarczą Słońca.

W 243-letnim cyklu przejścia Wenus wypadają w odstępach: 105,5; 8; 121,5; 8 lat. Niestety, żyjemy w czasach przypadających na najdłuższą przerwę. Poprzednie przejście Wenus przed tarczą Słońca było obserwowane 6 grudnia 1882 roku, a najbliższe wypadnie dopiero 8 czerwca 2004 roku. Przejścia Merkurego występują częściej. W 217-letnim cyklu jest 19 przejść<sup>4</sup> listopadowych (co 7 lub 13 lat) i 10 majowych (co 13 lub 33 lata).



Rys. 1. Listopadowe przejścia Merkurego przed tarczą słoneczną.



Rys. 2. Majowe przejścia Merkurego przed tarczą słoneczną.

Wschód Słońca w Warszawie 13 listopada:  
6<sup>h</sup>52<sup>m</sup>.

I kontakt — zewnętrzny 2<sup>h</sup>43<sup>m</sup>54<sup>s</sup>.

II kontakt — wewnętrzny 2<sup>h</sup>45<sup>m</sup>49<sup>s</sup>.

III kontakt — wewnętrzny 7<sup>h</sup>30<sup>m</sup>03<sup>s</sup>.

IV kontakt — zewnętrzny 7<sup>h</sup>33<sup>m</sup>58<sup>s</sup>.

Średnica kątowa tarczy słonecznej:

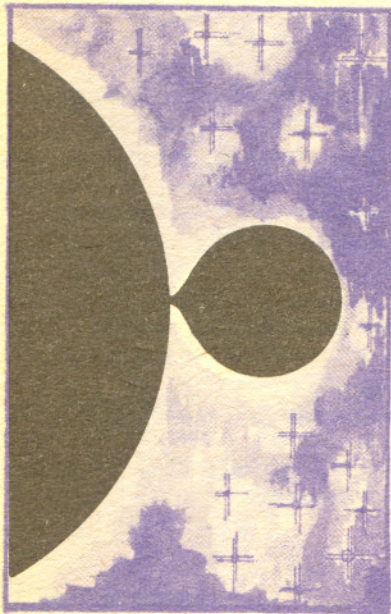
32'19",46.

Średnica kątowa tarczy Merkurego: 9",94.

Najbliższe przejście Merkurego przed tarczą Słońca mamy szansę zaobserwować 13 listopada bieżącego roku. Niestety, rozpocznie się ono jeszcze przed wschodem Słońca w Polsce, ale warto obejrzeć choćby samo „zejście” planety z jego tarczy. Momenty poszczególnych kontaktów podane są w tabelce. Osobom zainteresowanym proponujemy przeprowadzenie obserwacji przy użyciu niewielkiej lunetki (dziesięciokrotne powiększenie wystarczy). Podobnie jak przy obserwacjach plam słonecznych najlepiej dokonać projekcji tarczy słonecznej na biały ekran (pisaliśmy o tym w *Delcie* 3/1986). Patrzenie bezpośrednio przez lunetkę na Słońce jest niedopuszczalne — może prowadzić do bardzo poważnego uszkodzenia oka.

Planeta będzie widoczna na tle tarczy słonecznej jako ciemna plamka o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami plam słonecznych, tak, że trudno ją od plamy odróżnić. Do odszukania jej pomocne więc mogą być następujące wskazówki: Merkury na tle tarczy słonecznej ma bardziej regularny, okrągły kształt, jest jednakowo ciemny na całej powierzchni i przesuwa się systematycznie wzdłuż cięciwy w kierunku zachodnim. W czasie kontaktów wewnętrznych (tarcza planety stykna wewnętrznie z tarczą słoneczną) występuje zjawisko tzw. „czarnej kropli”. Tarcza planety ulega wtedy pozornemu zniekształceniu. Początkowo wygląda ona jak kropla z dziobkiem zwróconym w kierunku brzegu tarczy słonecznej. Z czasem dziobek wyciąga się, zwęża, aż wreszcie zostaje przerwany. Występowanie zjawiska „czarnej kropli” utrudnia ściśle określenie momentów kontaktów wewnętrznych.

W początku XVIII wieku Edmond Halley opracował metodę wyznaczenia wartości jednostki astronomicznej na podstawie pomiarów dokonywanych w czasie obserwacji przejścia Wenus na tle tarczy słonecznej. Kolejno w latach 1761 i 1769 obserwatorzy w różnych punktach kuli ziemskiej określali momenty wewnętrznych kontaktów planety z tarczą słoneczną. Jednak mimo ogromnej skali przedsięwzięcia, zaangażowania wielu uczonych, odległość Słońca nie została wyznaczona z większą dokładnością niż ta, którą uzyskano w XVII wieku na podstawie obserwacji Marsa w opozycjach. Podstawową przyczyną niepowodzenia było właśnie istnienie „czarnej kropli”, istotnie obniżające dokładność wyznaczenia momentów odpowiednich kontaktów.

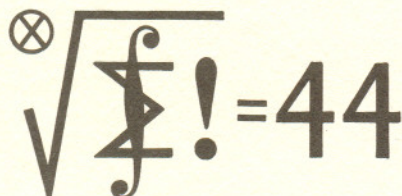


Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986

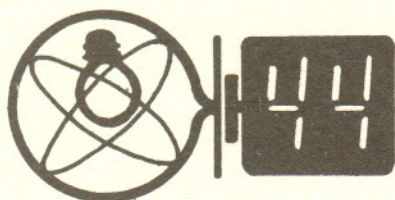
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1986



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 129 /WT=3,18/ i 130 /WT=1,71/  
z numeru 4/1986

Marcin Masur	- Białystok	45,04pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	42,56pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	42,31pkt
Robert Mitraszewski	- Wrocław	41,48pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	41,48pkt
Pan Masur - już po ras drugi.		



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 27 /WT=2,03/ i 28 /WT=1,79/  
z numeru 4/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	36,85 pkt
Aleksander Surma	- Myszków	28,82 pkt
Dzierżysław		
Lipniacki	- Lublin	26,91 pkt
Paweł Rogoż	- Legnica	22,81 pkt
Anna Gluza	- Toruń	20,12 pkt

Zadania z matematyki nr 137, 138

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

137. Na sferze rozmieszczono w dowolny sposób milion punktów. Udowodnić, że można spośród nich wybrać trzy punkty o następującej własności: jeśli  $x, y, z$  oznaczają wzajemne odległości kątowe między tymi punktami, to liczby  $\cos(10^6x), \cos(10^6y), \cos(10^6z)$  są jednakowego znaku (tzn. wszystkie trzy są dodatnie, ujemne lub równe zero) oraz liczby  $\sin(10^6x), \sin(10^6y), \sin(10^6z)$  też są jednakowego znaku. (Przez odległość kątową punktów  $A$  i  $B$  na sferze rozumiemy miarę kąta wypukłego  $AOB$ , gdzie  $O$  jest środkiem sfery).

138. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n \left[ \frac{k^2}{4} \right] = \left[ \frac{1}{24} n(n+2)(2n-1) \right]$$

( $[x]$  jest największą liczbą całkowitą  $\leq x$ ).

Zadanie 138 przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Zadania z fizyki nr 35, 36

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

35. Na unieruchomionym, poziomym walcu o promieniu  $R$  znajduje się jednorodna, prostopadłościenna belka o długości i grubości  $h$ , oparta na walcu w środku swej długości i prostopadła do osi walca (patrz rysunek).

Czy takie położenie belki jest położeniem równowagi trwałej, chwiejnej czy obojętnej? Czy rodzaj równowagi zależy od wymiarów belki, a jeżeli tak, to w jaki sposób? Zakładamy, że między belką a walcem nie ma poślizgu.

36. Jak wygląda świat nadwodny widziany z rybiej perspektywy? Podać rozwartość kąta, pod jakim oko umieszczone na pewnej głębokości pod powierzchnią wody widzi świat nadwodny i opisać ewentualne zniekształcenia obrazu.

