SPIS TREŚCI

NUMERU 8 (152)

Czy można odkryć to, co nie może istnieć ...
dr Andrzej Hennel str. 1

Mógł Penrose, możemy i my str. 3

Grupy krystalograficzne str. 4

O grze w domino inaczej
doc. dr Wojciech Guzicki str. 6

Patrz w niebo str. 7

Mała Delta str. 8

Voyager 2 osiągnął Urana str. 9

Synteza termojądrowa
doc. dr Antoni Kuszell str. 10

Kącik olimpijski str. 11

Metoda „wędrującego garbu"
dr Zbigniew Sawoń str. 12

Kosmiczne superwybuchy
doc. dr Paweł Haensel str. 14

Klub 44 str. 16

Zadania str. 17

W następnym numerze:
Informatyka

Nasza okładka:

Kryształ kwarcu oraz jego "zdjęcie" w promieniach X. Wiązka promieniowania X po przejściu przez otwór w kliszy padła na kryształ wzdłuż jednej z osi symetrii i rozproszyła się do tyłu w kierunkach określonych przez strukturę kryształu. Symetria układu plamek na kliszy jest taka sama jak symetria kryształu względem wybranej osi.

Zdjęcie w promieniach X wykonał specjalnie dla Delty mgr J. Makowski z Instytutu Fizyki PAN.

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmokl
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski — przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nacz.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nacz.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacz.
mgr inż. arch. Mariola Łotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch"
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 2432/12/86. P-25.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty" na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch".
3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

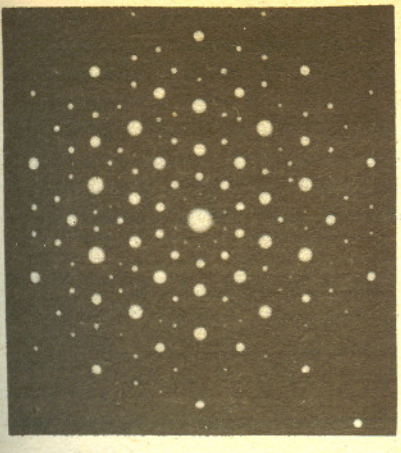
Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Na kopercie listu Joanny /studiującej w Berkeley/ do Pawła /będącego na stypendium w Osace/ napisane było zdanie: "Hipoteza Poincarégo została rozwiązana". Tą drogą, przez USA i Japonię, dowiedziałem się, że w styczniu tego roku rozwiązana została przez angielskiego matematyka Colina Rourke'a i jego studenta z Portugalii Eduardo Rêgo jedna z najsłynniejszych hipotez w matematyce, postawiona w 1904r. przez Henri Poincarégo.

Hipoteza Poincarégo mówi, że każda jednospójna, zamknięta rozmaitość 3-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową. Mniej dokładnie hipotezę można przedstawić tak: każdy obiekt, który lokalnie wygląda tak jak 3-wymiarowa przestrzeń euklidesowa /czyli przestrzeń, w której żyjemy/, w którym każdy ciąg ma podciąg zbieżny oraz każda krzywa zamknięta da się ściągnąć do punktu, jest taki sam jak sfera 3-wymiarowa z dokładnością do zginania, ściskania czy rozciągania /ale bez rozcinania i klejenia/.

Omówieniu hipotezy Poincarégo, jej znaczenia i jej dowodu poświęcony będzie artykuł w jednym z numerów "Delty".

Józef Przytycki

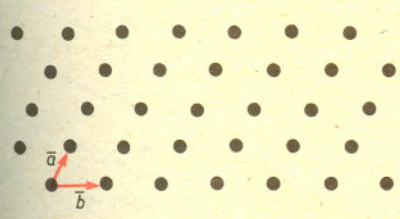


Czy można odkryć to, co nie może istnieć —czyli o kryształach z osią pięciokrotną

Dr Andrzej HENNEL

Przed kilku laty, dokładnie 8 kwietnia 1982 roku, dr Daniel Shechtman z Haify (Izrael) przebywający na stażu w National Bureau of Standards (Maryland, USA) wszedł do pokoju swojego starszego kolegi dr Johna Cahna i pokazał mu otrzymany obraz dyfrakcji elektronów na krysztale Al_6Mn. Zdumiony Cahn ujrzał to, co nasi Czytelnicy mogą zobaczyć na fotografii obok, a mianowicie układ jasnych plam wyznaczających coraz to większe dziesięciokąty foremne. „Przecież to niemożliwe, takich kryształów nie ma" — powiedział do Shechtmana. I taki był początek wielkiej naukowej sensacji.

Periodyczność i dozwolone osie symetrii w kryształach



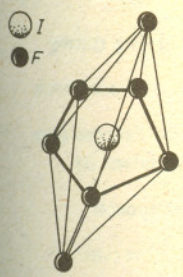
Rys. 1

Aby zrozumieć reakcję Cahna, musimy przypomnieć podstawowe prawa krystalografii. Dla uproszczenia rozpatrzymy tylko przypadek dwuwymiarowy. Sieć krystaliczną na płaszczyźnie budujemy za pomocą dwóch dowolnych wektorów **a** i **b**. Położenia kolejnych atomów w naszej sieci otrzymujemy przez dodawanie dowolnej liczby tych wektorów (rys. 1). Tak otrzymana sieć jest nieskończona i periodyczna, tzn. przesunięcie jej o dowolny wektor, będący kombinacją liniową wektorów **a** i **b**, nie zmienia żadnej własności sieci.

Periodyczność sieci krystalicznych jest cechą tak istotną, iż na ogół służy do zdefiniowania ciał stałych, w odróżnieniu od takich substancji, jak np. szkło, które są przechłodzonymi cieczami.

Następną istotną własnością sieci krystalicznych jest ich symetria obrotowa. Po obrocie wokół osi symetrii o pewien kąt każdy atom sieci trafia w miejsce innego atomu (lub swoje własne). Na przykład sieć kwadratowa może być obracana wokół dowolnego atomu o kąty $\pi/2$, π, $3\pi/2$ i 2π. Taką oś nazywamy czterokrotną. Pod koniec XIX wieku wykazano, że w kryształach możliwe jest istnienie wyłącznie osi symetrii dwukrotnych (obrót o π), trójkrotnych ($2\pi/3$), czterokrotnych ($\pi/2$) i sześciokrotnych ($\pi/3$).

O grupach krystalograficznych piszemy na stronie czwartej.



Rys. 2

Zakaz istnienia pięciokrotnych, siedmiokrotnych czy dziesięciokrotnych osi symetrii w kryształach nie jest oczywiście obowiązujący w przypadku izolowanych cząsteczek, które mogą mieć absolutnie dowolną symetrię. I tak na przykład istnieje szereg cząsteczek z pięciokrotną osią symetrii. Jedna z nich przedstawiona jest na rysunku 2; jest to cząsteczka IF_7 o kształcie podwójnej piramidy pięciokątnej. Gorzej jest z osiami siedmiokrotnymi — jedyna znana cząsteczka o symetrii siedmiokrotnej to jon $C_7H_7^+$.

Bryły platońskie są to wielościany zbudowane z wielokątów foremnych. Z trójkątów równobocznych można zbudować trzy bryły — czworościan foremny (tetraedr), ośmiościan foremny (oktaedr) i dwudziestościan foremny (ikosaedr). Z kwadratów można zbudować sześcian, a z pięciokątów foremnych — dwunastościan. Innych brył regularnych z jednakowych wielokątów foremnych zbudować się nie da.

Od ponad stu lat za najwyższe symetrie w kryształach uważano symetrię tetraedryczną i oktaedryczną, scharakteryzowane przez tzw. bryły platońskie. Trzecia, najbogatsza z symetrii brył platońskich — symetria ikosaedru uznana została za nie istniejącą w ciałach stałych, gdyż cegłami w kształcie ikosaedrów nie można wypełnić przestrzeni. Ten kategoryczny zakaz został nieco osłabiony w XX wieku, gdy stwierdzono, iż atomy niektórych pierwiastków, np. boru, łączą się w ten sposób, że 12 atomów zajmuje wierzchołki ikosaedru. Natura musiała dokonać jeszcze jednego kroku — zbudować z ikosaedrów bryłę, która dobrze wypełnia przestrzeń. I tak ikosaedry boru B_{12} można łączyć na kilka sposobów w gigantyczne (w atomowej skali) komórki elementarne. Tzw. β-romboedryczny bor ma aż 105 atomów w komórce elementarnej. Składa się na nią siedem ikosaedrów i jeszcze 21 atomów wypełniających wolne miejsca między ikosaedrami. Z kolei β-tetraedryczny bor ma 190 atomów w komórce elementarnej. Znane są również przykłady wirusów, krystalizujących w formie ikosaedrów, które następnie łączą się w komórki sześcienne. Oczywiście tak powstałe kryształy nie mają symetrii ikosaedrów, tylko symetrię odpowiednich komórek elementarnych. Dlatego też do roku 1982 nie było znane widmo dyfrakcji elektronów czy promieni X na krysztale, które by miało symetrię inną niż dwu-, trój-, cztero- lub sześciokrotną.

Odkrycie Shechtmana

Shechtman badał cienkie warstwy gwałtownie ochłodzonych stopów glinu z manganem, chromem, żelazem, platyną, rutenem i molibdenem. I właśnie widmo dyfrakcji elektronów na stopie glinu z manganem ku jego zdziwieniu nie pasowało do dotychczas obowiązujących reguł i zostało początkowo zakwestionowane przez Cahna. Shechtman okazał się jednak badaczem cierpliwym i upartym. Mimo nieufności swoich kolegów przekonał ich, że jego rezultaty nie są

Rozwiązanie zadania M 444. Ponieważ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, więc pole figury ograniczonej prostymi $x=0$, $y=1$ oraz wykresem funkcji $\sin^2 x$ jest równe polu figury, o której mowa w zadaniu. Obie te figury dają w sumie prostokąt o bokach $\frac{\pi}{2}$ i 1. Pole każdej z nich wynosi więc $\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie zadania F 202. Przy przejściu od stanu początkowego (objętość V_1 i temperatura T_1) do końcowego (V_2, T_2) ciśnienie zewnętrzne wykonuje nad gazem pracę $W = P_2(V_1 - V_2)$, która jest równa zmianie energii wewnętrznej gazu $U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1)$, gdzie C_v jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Korzystając z równania stanu gazu doskonałego i relacji $C_p - C_v = R$ (C_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu) otrzymujemy

$$T_2 = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{P_2 - P_1}{P_1}\right) T_1,$$

gdzie $\gamma = C_p/C_v$.

W procesie odwracalnym z równania adiabaty $PV^\gamma = \text{const.}$ wynika

$$T_2^{\text{odwr}} = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Porównanie obu wzorów pokazuje, że przy gwałtownym adiabatycznym ściskaniu temperatura gazu wzrasta mniej niż przy ściskaniu odwracalnym.

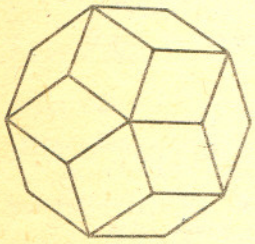
wynikiem tzw. zbliźniaczeń w krysztale czy też błędów eksperymentalnych. Otrzymane widma dla pewnych kierunków padania wiązki elektronów miały symetrię dziesięciokrotną, a przy obrotach kryształu o 63°43′ ponownie obserwowano ten sam obraz. Trzeba dodać, że kąty między osiami pięciokrotnymi w ikosaedrze są równe właśnie 63°43′. Nie wchodząc w szczegóły można stwierdzić, iż obracając próbki w różnych kierunkach i pod różnymi kątami Shechtman zrekonstruował symetrię ikosaedru (sześć osi pięciokrotnych, dziesięć trzykrotnych i piętnaście dwukrotnych). Badane ziarna krystaliczne były bardzo małe (2 μm), ale zawierały dostatecznie wiele atomów, by określić je jako kryształy. Ostrość otrzymanych widm również potwierdzała wysoką jakość uporządkowania badanych struktur.

Shechtman stwierdził, iż faza ikosaedryczna ma skład 14% Mn i 86% Al i jest trwała w temperaturze pokojowej. Po podgrzaniu do 400°C sieć ta przechodzi w „zwykłe" kryształy Al_6Mn. Jest to więc faza metastabilna, podobnie jak np. diament jest metastabilnym kryształem węgla, co nie przeszkadza, by był niezwykle twardy i trwały w temperaturze pokojowej.

Pierwszy komunikat o istnieniu fazy ikosaedrycznej opublikowano ostatecznie (po długotrwałym sprawdzaniu i weryfikowaniu wyników eksperymentalnych) w listopadzie 1984 roku i, jak się okazało, był to początek lawiny prac teoretycznych i eksperymentalnych poświęconych tej nowej klasie ciał stałych. Co ciekawe, okazało się, że już od 10 lat istnieje matematyczny model sieci o symetrii pięciokrotnej — tzw. kafelki Penrose'a.

Kafelki Penrose'a

Roger Penrose jest profesorem fizyki teoretycznej w Oxfordzie, jednakże poza teorią względności i mechaniką kwantową zajmuje się on również nietypowymi problemami matematyki. Jednym z takich problemów, który udało mu się rozwiązać w 1974 roku, było zagadnienie pokrycia płaszczyzny w sposób nieperiodyczny wielokątami możliwie najmniejszej liczby rodzajów. Znalezione przez niego dwa kafelki (latawiec i grot) i sposób ich układania prowadzą do pięknych wzorów geometrycznych i mogą być wykorzystane w różnego rodzaju wzornictwie i produkcji układanek. Dlatego też Penrose wystąpił najpierw o patenty w różnych krajach, a dopiero po ich uzyskaniu pozwolił na udostępnienie swojego pomysłu opinii publicznej na łamach czasopisma *Scientific American*.



Rys. 3

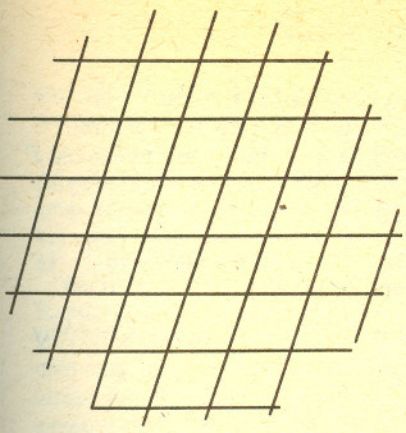
Para kafelków — latawiec i grot nie jest bynajmniej jedyną możliwą. Na przykład dwa romby o kątach ostrych, wynoszących $\frac{2\pi}{5}$ i $\frac{\pi}{5}$, również są „dobrymi" kafelkami (rys. 3). Podobnych par można znaleźć wiele. Najważniejsze cechy wzorów otrzymywanych z kafelków Penrose'a to nieperiodyczność i pojawienie się bardzo często pięciokrotnej osi symetrii, co, jak łatwo się domyślić, wynika z wyboru wartości kąta $\frac{2\pi}{5}$. Przykłady takich wzorów, jak też sposób projektowania różnych kafelków znajdzie Czytelnik w artykule „Mógł Penrose ..." w tym numerze *Delty*.

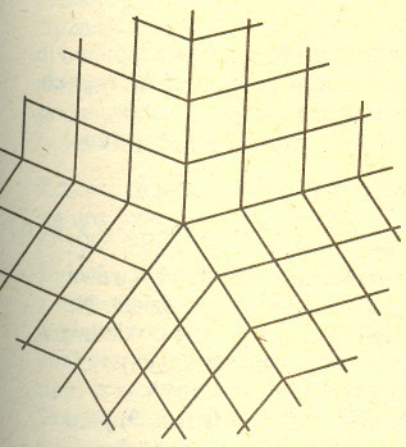
Własności geometryczne układów kafelków Penrose'a są bardzo ciekawe, natomiast z punktu widzenia fizyka interesująca jest możliwość istnienia sieci dwuwymiarowej o określonej symetrii, ale nie periodycznej. Pojawia się więc potrzeba wprowadzenia nowego pojęcia, tzw. kwaziperiodyczności, w celu opisania takiego nieperiodycznego porządku. Narzuca się też pytanie, czy można przenieść te rozważania na przypadek trójwymiarowy, czyli czy mogą istnieć kwazikryształy. Okazuje się, iż odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Para romboedrów, których kąty są wielokrotnościami kąta $\pi/5$, umożliwia nieperiodyczne wypełnienie przestrzeni i prowadzi do występowania symetrii ikosaedrycznej. Taki kwazikryształ mimo braku periodyczności może mieć płaszczyzny krystaliczne i w konsekwencji może dać ostry obraz dyfrakcyjny przy naświetlaniu promieniami X czy elektronami. Wydaje się więc, iż odkryte przez Shechtmana stopy są kwazikryształami.

Zakończenie

Jak należy sądzić, mamy do czynienia z początkiem badań nowej klasy struktur uporządkowanych, która znajdzie swoje miejsce między kryształami a nieuporządkowanymi ciałami, jakimi są szkła. Wiele pytań wymaga jeszcze odpowiedzi — nie wiemy nawet, jak są ułożone atomy w ikosaedrach kwazikryształu. Wiele osób podchodzi do hipotezy kwazikryształu z ogromnym sceptycyzmem. Między innymi Linus Pauling, laureat nagrody Nobla, autorytet w dziedzinie krystalografii, oświadczył ostatnio na jednej z konferencji naukowych, iż model ten budzi jego bardzo poważne wątpliwości. Wydaje się jednak, iż kwazikryształy są czymś realnym. Shechtman przez dwa lata sprawdzał swoje eksperymenty, a teraz inni, zachęceni jego odwagą, zaczynają publikować swoje „nieprawdopodobne i niemożliwe" wyniki. No cóż, nikt nie lubi, kiedy to, co uważał za pewnik, przestaje obowiązywać, ale ile to już razy tak było w historii nauki ... .

Rozwiązanie zadania M 443. Przypuśćmy, że funkcja $\sin x$ jest wielomianem stopnia n. Wtedy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ jest też wielomianem stopnia n. Ale $\cos x = (\sin x)'$, wobec tego funkcja cosinus jest wielomianem stopnia niższego niż n — sprzeczność.
Można i tak:
Jeśli $f(x) = \sin x$ jest wielomianem, to $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ też jest wielomianem.
Ponieważ $f^2 + g^2 \equiv 1$, zatem f i g są wielomianami stopnia zero, co jest niemożliwe.
Można to zadanie rozwiązać na jeszcze wiele sposobów. Wystarczy np. zauważyć, że sinus jest funkcją okresową lub że ma nieskończenie wiele pierwiastków, a takich własności nie ma żaden wielomian niezerowego stopnia.

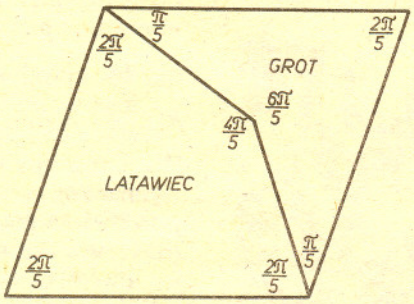


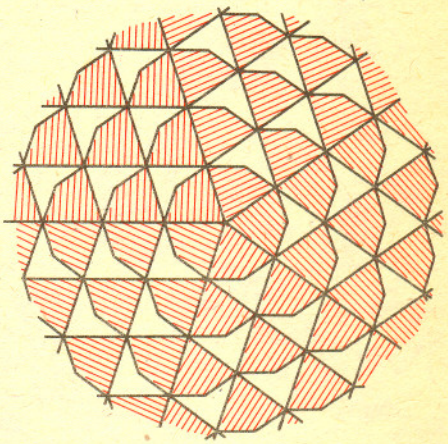


Mógł Penrose, możemy i my

Spróbujmy opisać bliżej wspomniane w artykule Andrzeja Hennela kafelki Penrose'a, a przy okazji prześledźmy drogę do takiego pomysłu. Pozwoli nam to budować mozaiki o różnych, „zabronionych" nawet, symetriach — rzecz jasna — nieregularne (nie krystalograficzne).

Zbudujmy zwykłą rombową mozaikę z rombów o kącie ostrym $\frac{2\pi}{5} = 72°$, czyli o kącie będącym $\frac{1}{5}$ kąta pełnego. Wtedy można ją będzie przełożyć tak, by miała symetrię pięciokrotną, grupując w jednym wyróżnionym punkcie pięć ostrych kątów pięciu rombów. Zauważmy przy tym, że w analogiczny sposób można z rombów o kącie ostrym $\frac{2\pi}{7}$ otrzymać symetrię siedmiokątną itd.

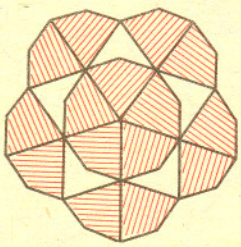


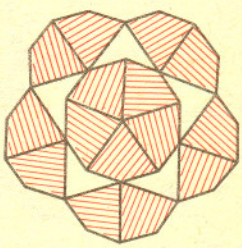


Teraz podzielmy każdy kafelek na dwa tak, żeby otrzymane nowe kąty były możliwie podobne do ostrych kątów rombu. Rozwarte kąty rombu są równe $\frac{3\pi}{5} = 108°$, więc dzielimy je na $\frac{2\pi}{5}$ i $\frac{\pi}{5} = 36°$. Otrzymaliśmy kafelki Penrose'a (latawiec i grot) opatentowane w 1974 roku.

Jak się nimi bawić? Zabawa polega na ułożeniu kafelków w inny sposób, tak jednak, by pokrywały nadal całą płaszczyznę.

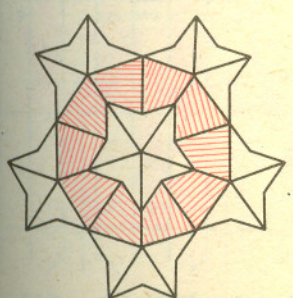
Najprościej przekonamy się, że jest to wykonalne, jeśli zwrócimy uwagę na pięć kafelków w środku mozaiki. Łącznie tworzą one dziesięciokąt foremny. Można go więc obrócić o kąt $\frac{\pi}{5}$ i z powrotem ułożyć na poprzednie miejsce. Otrzymana mozaika jest już inna.





Można oczywiście postawić sobie i ambitniejsze zadanie. Na przykład ułożyć mozaikę tak, by mniejsze kafelki trafiały się w niej częściej niż większe. To też można zrobić — przykład obok. Czy umiałbyś, Czytelniku, przedłużyć tę mozaikę? Zasada jest prosta — w każdym wierzchołku należy tylekroć wykorzystać kąt $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ (tych jest najwięcej), $\frac{4\pi}{5}$ i $\frac{6\pi}{5}$, by ich suma była równa 2π. Na naszych rysunkach występują następujące ich wielokrotności (0, 0, 1, 1), (0, 5, 0, 0) i (2, 4, 0, 0) na dwa sposoby, (2, 2, 1, 0), (0, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 0) i innych nie ma. A czy mogą być?

M. K.



Konkurs

Pracujący obecnie w Massachusets Institute of Technology Andrzej Hennel postanowił ufundować nagrodę (jaką — tajemnica) za najlepszy pomysł ułożenia mozaiki o symetrii różnej od dwu-, trój-, czworo- i sześciokątnej. Ogłaszamy więc konkurs na taką mozaikę. Rysunki z opisem prosimy przysyłać pod adresem redakcji do 1 grudnia 1986 roku. Czekamy!

Grupy krystalograficzne

Zdarza się, że dla grupy G złożonej z izometrii przestrzeni S (np. jedno-, dwu- czy trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej) istnieje figura geometryczna F o niepustym wnętrzu (zwana obszarem podstawowym) spełniająca dwa warunki

1° obrazy obszaru podstawowego we wszystkich przekształceniach z grupy pokrywają całą przestrzeń,

2° obrazy F w różnych przekształceniach mają wspólny co najwyżej brzeg.

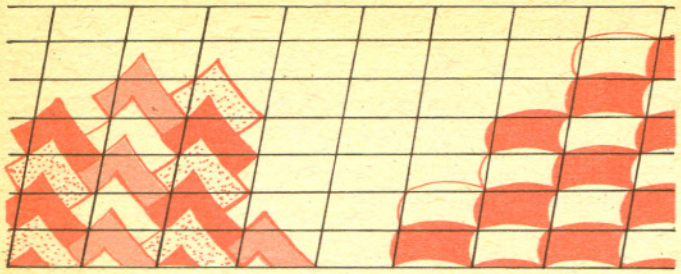
Wówczas mówimy, że grupa G jest grupą krystalograficzną.

Wymiarem grupy krystalograficznej nazywa się maksymalną liczbę niezależnych przesunięć należących do grupy. Przesunięcia o wektory $w_1, w_2, \ldots, w_n$ nazywamy niezależnymi, jeśli spełniony jest warunek

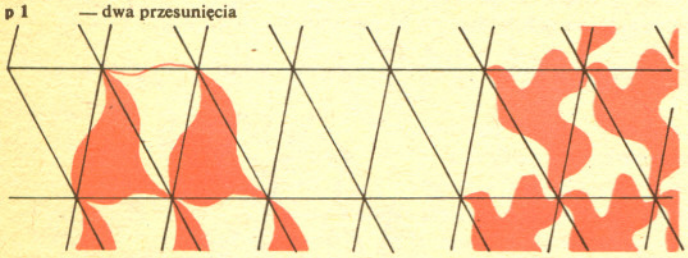
dla dowolnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_n w_n = \mathbf{0} \rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

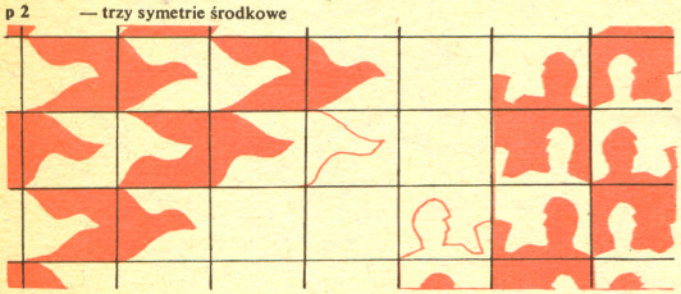
Wymiar grupy krystalograficznej nie musi być równy wymiarowi przestrzeni, w której ta grupa działa. Na przykład na płaszczyźnie euklidesowej jest dokładnie 7 (nieizomorficznych, czyli różnie zbudowanych) jednowymiarowych grup krystalograficznych — przedstawione są one w *Małej Delcie* (str. 8, 9) jako różne sposoby budowania szlaczków literowych (Czytelnik zechce dla każdej z nich znaleźć odpowiedni obszar podstawowy — należy pamiętać, że obszar taki musi być nieograniczony). To, że na płaszczyźnie euklidesowej jest dokładnie 17 dwuwymiarowych grup krystalograficznych, udowodnił dopiero w 1891 roku E. S. Fiodorow. Grupa krystalograficzna nie wyznacza



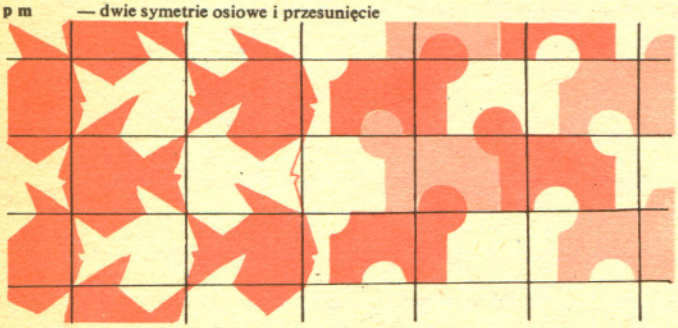
p 1 — dwa przesunięcia



p 2 — trzy symetrie środkowe

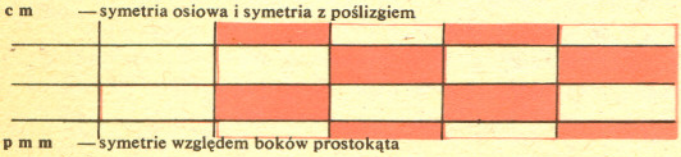


p m — dwie symetrie osiowe i przesunięcie

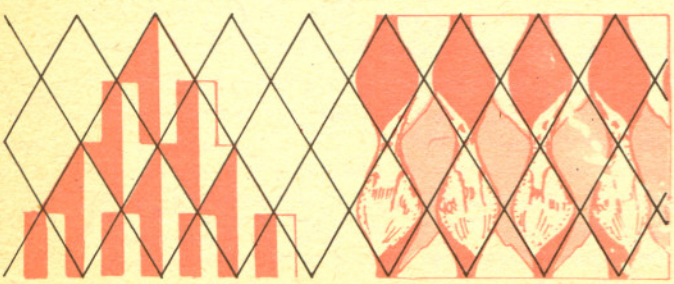


p g — dwie symetrie z poślizgiem o osiach równoległych

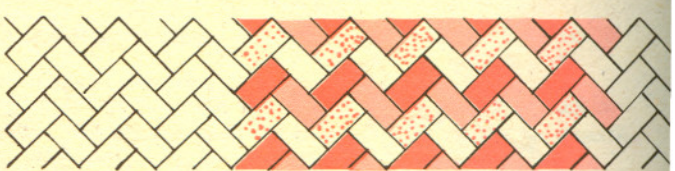
c m — symetria osiowa i symetria z poślizgiem



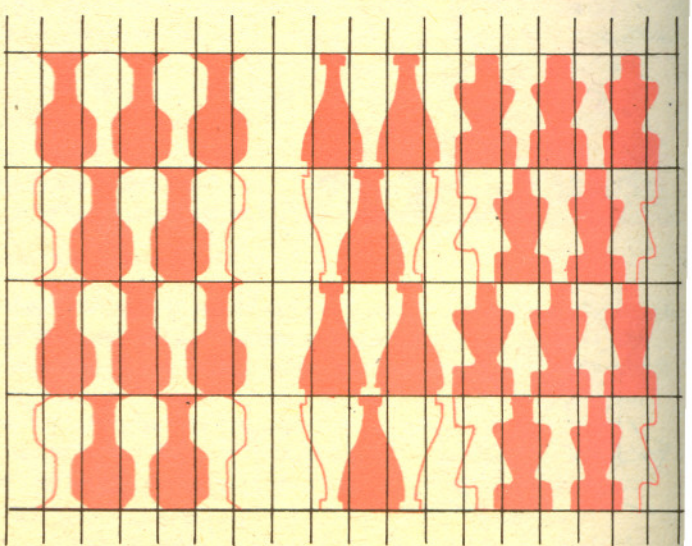
p m m — symetrie względem boków prostokąta



p m g — symetria osiowa i dwie symetrie środkowe



p g g — dwie symetrie z poślizgiem o osiach prostopadłych



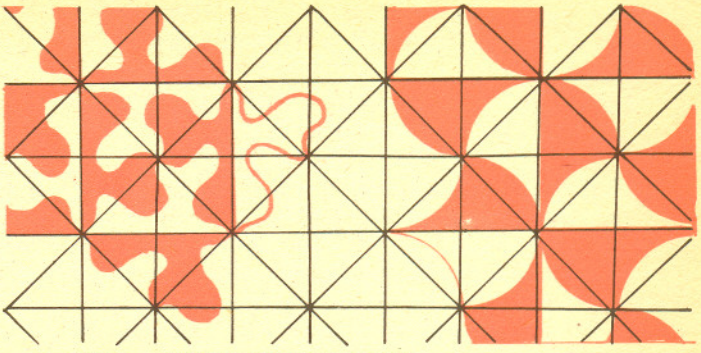
c m m — dwie symetrie osiowe i jedna symetria środkowa

swojego obszaru podstawowego, można go więc wybrać kierując się np. względami estetycznymi i otrzymać z jego obrazów piękną mozaikę. Arabeski Alhambry zawierają przykłady 15 dwuwymiarowych grup krystalograficznych. Wiele przykładów mozaik krystalograficznych można znaleźć w grafikach M. C. Eschera.

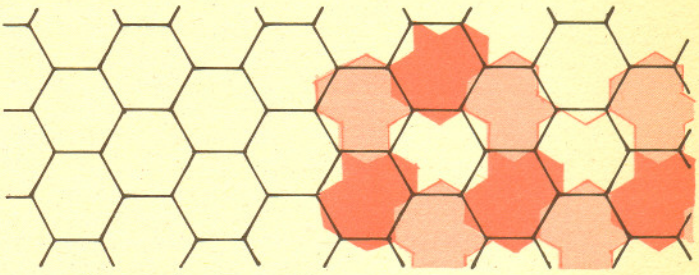
Każda grupa krystalograficzna ma skończony układ generatorów. Generatorami grupy nazywa się takie jej elementy, że każde przekształcenie w grupie jest złożeniem skończonej liczby tych elementów. Np. przesunięcia o wektor w i v są generatorami grupy złożonej ze wszystkich przesunięć o wektory $k\,w+l\,v$, dla całkowitych k i l. Obok przedstawiamy wszystkie dwuwymiarowe grupy płaszczyzny euklidesowej podając ich generatory (Czytelnik zechce sprawdzić, czy podaliśmy je dobrze).

Zdziwienie mogą wzbudzić symbole tych grup. Wzięły się one jednak nie z matematyki, lecz z mineralogii i fizyki. Do niedawna panowało bowiem przekonanie, że każdy rzeczywisty kryształ jest zbudowany z komórek będących obszarami podstawowymi jakiejś trójwymiarowej grupy krystalograficznej przestrzeni euklidesowej. Stąd nazwa tych grup i zainteresowanie nimi przyrodników (nawet tymi dwuwymiarowymi). Trójwymiarowych grup krystalograficznych przestrzeni euklidesowej jest 230 (ustalili to niezależnie Fiodorow — 1890, Schoenflies — 1891 i Barlow — 1894). Nie każdej z nich (tylko trzydziestu dwóm) odpowiada jakiś kryształ, a co ciekawsze — są kryształy nie odpowiadające żadnej grupie krystalograficznej, o czym pisze Andrzej Hennel na stronie pierwszej.

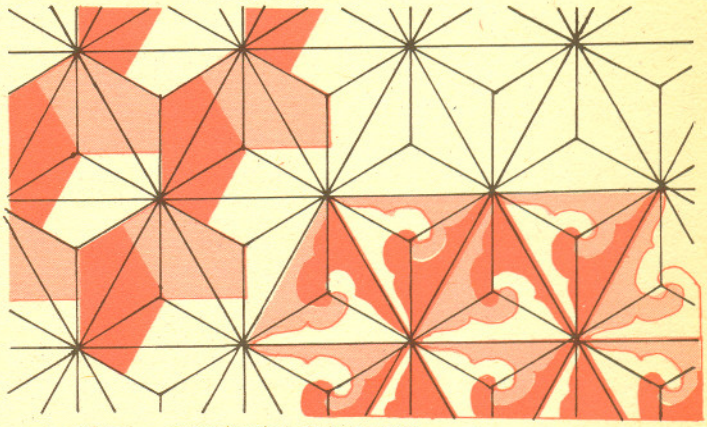
M. K.



p 4 g — symetria osiowa i obrót o 90°

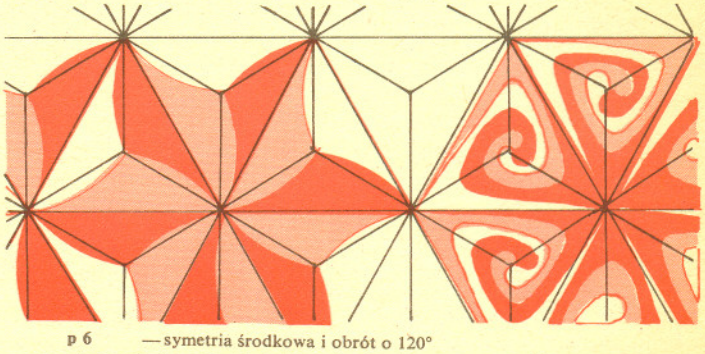


p 3 — dwa obroty o 120°

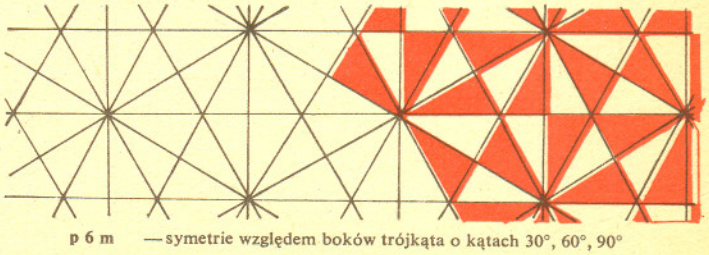


p 3 m 1 — symetria osiowa i obrót o 120°

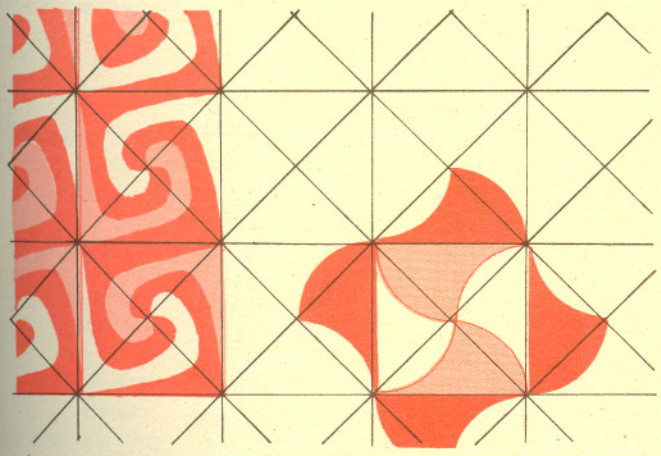
p 3 1 m — symetrie względem boków trójkąta równobocznego



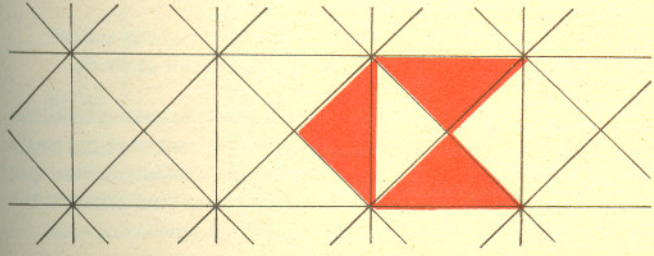
p 6 — symetria środkowa i obrót o 120°



p 6 m — symetrie względem boków trójkąta o kątach 30°, 60°, 90°



p4 — symetria środkowa i obrót o 90°

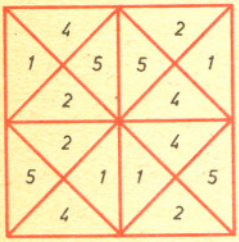


p 4 m — symetrie względem boków trójkąta równoramiennego prostokątnego

O grze w domino inaczej

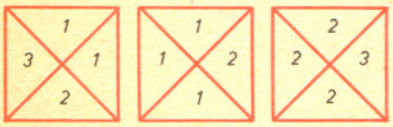
Doc. dr Wojciech GUZICKI

Rys. 1. Sposób napisania liczb na kamieniu wskazuje, gdzie jest góra kamienia.

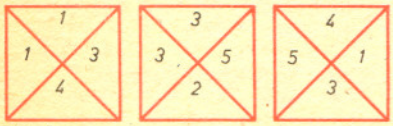


Rys. 2

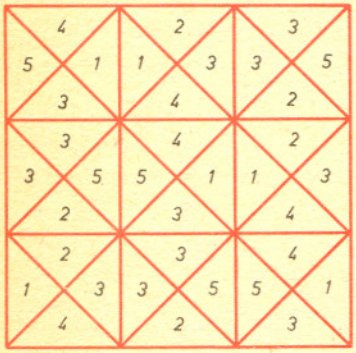
Rys. 3



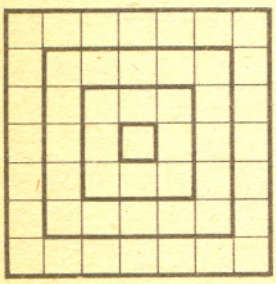
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Każdy potrafi grać w domino. Można jednak tę grę urozmaicić. W listopadowym numerze *Scientific American* z 1965 r. znany logik Hao Wang zaproponował następujące urozmaicenie.

Kamienie domina mają teraz kształt kwadratu 1×1 podzielonego przekątnymi na cztery części, w każdej z tych części znajduje się liczba naturalna, jak np. na rysunku 1. Będziemy dysponować kamieniami różnych typów (mówimy, że dwa kamienie mają ten sam typ, jeśli są na nich napisane te same liczby w tych samych miejscach), przy czym mamy nieskończenie wiele kamieni każdego z posiadanych typów.

Celem gry, tym razem dla jednego gracza, a nie dla kilku (może więc raczej pasjansa, a nie gry?) będzie ułożenie posiadanych kamieni tak, aby zapełnić nimi całą płaszczyznę. Musimy przy tym przestrzegać zasad gry w domino — kamienie stykające się bokami muszą mieć przy tych bokach napisaną tę samą liczbę.

Zadanie to jest bardzo łatwe, jeśli dopuścimy możliwość obracania kamieni. Dla przykładu rysunek 2 pokazuje, jak z kamieni takich jak na rysunku 1 można ułożyć kwadrat 2×2 mający te same liczby na górnej i dolnej oraz na prawej i lewej krawędzi. Taki duży kwadrat można teraz układać obok siebie nieskończenie wiele razy.

To banalne rozwiązanie jest więc, oczywiście, mało interesujące. Przyjmiemy zatem jako regułę gry, że kamieni nie wolno obracać ani przewracać na drugą stronę. Wprowadzimy ponadto dwie definicje. Powiemy, że zbiór typów kamieni jest rozwiązalny, jeśli kamieniami tych typów można zapełnić całą płaszczyznę. Rozwiązanie nazwiemy powtarzalnym, jeśli powstaje w wyniku wielokrotnego powtarzania pewnego prostokąta mającego takie same pary krawędzi: górnej i dolnej oraz prawej i lewej.

Nasuwa się teraz cały szereg pytań, na przykład: czy każdy zbiór typów jest rozwiązalny? Kamień z rysunku 1 daje, oczywiście, przykład zbioru nierozwiązalnego — po położeniu tego kamienia nie można, zgodnie z regułami gry, dołożyć do niego następnego z żadnej strony. Może jednak jeden kamień to za mało, by stanowił zbiór rozwiązalny? Okazuje się, że rozwiązalność zbioru nie zależy od jego wielkości — istnieją nierozwiązalne zbiory nieskończone. Kamienie z rysunku 3 dla kolejnych liczb naturalnych n dają przykład nieskończonego zbioru nierozwiązalnego. Zauważmy jednak, że za ich pomocą z łatwością zapełnimy prawą górną ćwiartkę płaszczyzny.

Po rozpatrzeniu przypadków skrajnych: zbiorów jednoelementowych i nieskończonych zastanówmy się nad możliwymi sytuacjami dotyczącymi zbiorów skończonych. Niektóre z tych zbiorów są rozwiązalne, inne nie. Dla przykładu zbiór trójelementowy z rysunku 4 nie jest rozwiązalny (niech Czytelnik wykaże to!), natomiast zbiór z rysunku 5 jest rozwiązalny. Przykładowe rozwiązanie powtarzalne jest pokazane na rysunku 6. Teraz oczywiście nasuwa się pytanie, czy każdy skończony zbiór rozwiązalny ma rozwiązanie powtarzalne. Odpowiedź brzmi nie i spróbujemy pokazać, dlaczego tak jest. Najpierw pokażemy, że zbiór skończony jest rozwiązalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy kwadrat o boku n można pokryć kamieniami o typach z tego zbioru. Implikacja w prawo jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że każdy kwadrat o boku n można pokryć kamieniami z naszego zbioru. Skonstruujemy nieskończony ciąg pokryć kwadratów o bokach $2n+1$ takich, że kwadrat o boku $2n+1$ znajduje się w środku kwadratu o boku $2n+3$ (por. rysunek 7), przy czym pokrycie kwadratu większego jest rozszerzeniem pokrycia kwadratu mniejszego.

Wybierzmy najpierw najmniejszy kwadrat. Otóż — istnieje nieskończenie wiele pokryć wszystkich rozważanych kwadratów dla wszystkich n (bo każdy kwadrat daje się pokryć i jest ich nieskończenie wiele), ale jest tylko skończenie wiele typów kamieni. Jeden typ musi zatem powtórzyć się nieskończenie wiele razy jako typ kamienia leżącego „w samym środku" rozważanego kwadratu o boku $2n+1$. Ten kamień wybieramy jako pokrycie kwadratu o boku 1.

Teraz rozważamy kwadrat o boku 3. Istnieje tylko skończenie wiele sposobów pokrycia go skończoną liczbą typów kamieni. Jednocześnie istnieje nieskończenie wiele sposobów pokryć kwadratów o bokach $2n+1$ zawierających w środku wybrany przez nas kamień (bo tak ten kamień został wybrany). Zatem pewien sposób pokrycia kwadratu o boku 3 powtarza się nieskończenie wiele razy w środku pokryć kwadratów większych. Wybieramy to pokrycie kwadratu o boku 3 (zauważmy, że rozszerza ono wybrane przez nas pokrycie kwadratu o boku 1) i w analogiczny sposób analizujemy następnie sposoby pokrycia kwadratu o boku 5.

Łatwo zauważyć, że kontynuując to rozumowanie skonstruujemy nieskończony ciąg pokryć kolejnych kwadratów, a w konsekwencji pokrycie całej płaszczyzny. Nasz zbiór okaże się rozwiązalny.

Twierdzeniu, które przed chwilą udowodniliśmy, Hao Wang nadał bardziej spektakularną postać: jeśli za pomocą kamieni skończenie wielu typów można pokryć prawą górną ćwiartkę płaszczyzny (skąd łatwo wynika, że można pokryć kwadrat o dowolnym boku), to można tymi kamieniami zapełnić całą płaszczyznę. Pokazuje to istotną różnicę między skończonymi i nieskończonymi zbiorami typów kamieni.

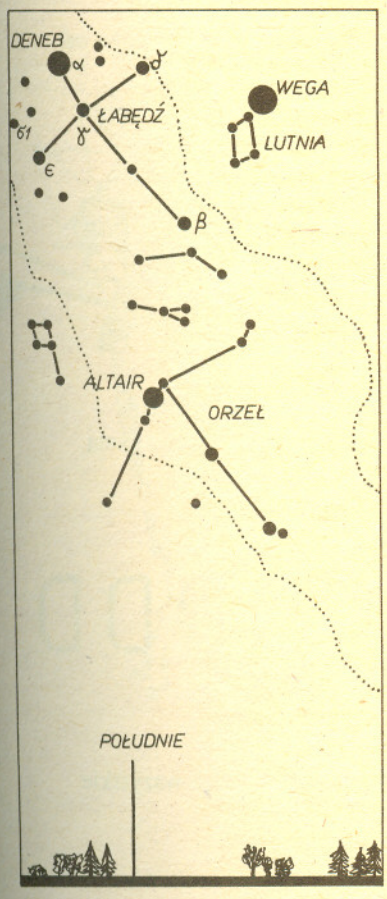
Rozwiązanie zadania F 203. W czasie swobodnego spadku gaz znajduje się w stanie nieważkości. Tuż po przecięciu nici gaz nie jest w równowadze termodynamicznej (różne gęstości na dole i na górze). Średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu, określająca jego temperaturę, jest jednak wszędzie jednakowa. Przy przejściu do stanu równowagi gęstości wyrównają się, ale średnia energia kinetyczna cząsteczek pozostanie taka jak na początku.

Teraz przypuśćmy, że każdy zbiór rozwiązalny ma rozwiązanie powtarzalne. Opiszemy algorytm pozwalający na stwierdzenie w skończonej liczbie kroków, czy dany zbiór jest rozwiązalny. Otóż będziemy kolejno analizowali wszystkie możliwe pokrycia kolejnych kwadratów o boku n. Dla pewnego n musimy stwierdzić, że zachodzi jedna z dwóch możliwości:
(1) Kwadrat o boku n nie daje się pokryć. Zgodnie z udowodnionym twierdzeniem ten przypadek zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy nasz zbiór jest nierozwiązalny.
(2) Wewnątrz kwadratu o boku n znajduje się powtarzalny prostokąt. Zgodnie z uczynionym przed chwilą założeniem ten przypadek zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy nasz zbiór jest rozwiązalny (a więc gdy ma rozwiązanie powtarzalne).
Przypadki (1) i (2) wykluczają się wzajemnie i napotkanie jednego z nich określa, czy zbiór jest rozwiązalny, czy też nie jest. Zauważmy wreszcie, że analiza wszystkich pokryć kwadratu o boku n wymaga tylko skończenie wielu kroków — bo takich pokryć jest skończenie wiele. Podobnie skończenie wielu kroków wymaga sprawdzenie, czy dany kwadrat zawiera powtarzalny prostokąt, bo zawiera on tylko skończenie wiele prostokątów.

Dla wykazania, że istnieją zbiory rozwiązalne nie mające rozwiązań powtarzalnych, wystarczy teraz zacytować za Hao Wangiem twierdzenie mówiące, że nie istnieje żaden algorytm pozwalający w skończonej liczbie kroków stwierdzić, czy dany zbiór skończony jest rozwiązalny, czy nie jest. Jako ćwiczenie (trudne!) pozostawmy Czytelnikowi znalezienie zbioru rozwiązalnego, bez rozwiązania powtarzalnego. Autorowi znany jest przykład takiego zbioru składającego się z 92 typów kamieni. Może ktoś znajdzie mniejszy?

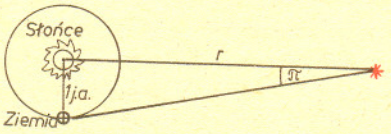
Zainteresowanym podamy jeszcze, że niemożność skonstruowania algorytmu stwierdzającego rozwiązalność zbioru wynika stąd, że dla każdej maszyny Turinga można znaleźć taki skończony zbiór typów, że ta maszyna zatrzymuje się wtedy i tylko wtedy, gdy dany zbiór nie jest rozwiązalny, ale to jest już całkiem inna historia.

Patrz w niebo



Rys. 1. Gwiazdozbiór Łabędzia i jego najbliższa okolica, widziane na przełomie sierpnia i września około godziny 21.

Późnym latem w godzinach wieczornych na południe od zenitu góruje gwiazdozbiór Łabędzia. Bywa on również zwany Krzyżem Północy, ponieważ jego najjaśniejsze gwiazdy układają się niemal dokładnie w kształt krzyża. Łatwiej nawet dopatrzeć się tego kształtu niż w przypadku Krzyża Południa. Prawdziwa nazwa sugeruje jednak wyobrażenie lecącego po Drodze Mlecznej łabędzia o smukłej, wyciągniętej szyi.
Charakterystyczny kształt gwiazdozbioru tworzy pięć jasnych gwiazd (α, β, γ, δ i ε — rys. 1). Najjaśniejsza z nich — Deneb — jest w rzeczywistości gwiazdą-nadolbrzymem o bardzo silnym blasku. Mimo dzielącej nas od niego odległości 1800 lat świetlnych świeci na niebie jako obiekt pierwszej wielkości gwiazdowej.
Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku południowo-wschodniej sąsiadki Deneba — gwiazdy oznaczonej symbolem 61 *Cygni*. Jest to układ podwójny o łącznej, obserwowanej jasności składników zaledwie 4,8 mag. Zaledwie, ponieważ układ znajduje się w stosunkowo niewielkiej odległości od Słońca (11 lat świetlnych), a więc jego rzeczywista jasność jest bardzo mała.
Ta niepozorna gwiazdka zajmuje jednak poczesne miejsce w historii astronomii. W końcu lat trzydziestych ubiegłego stulecia Friedrich Bessel wyznaczył jako jedną z pierwszych jej heliocentryczną paralaksę. Zagadnienie przesunięć paralaktycznych gwiazd wystąpiło dopiero w czasach pokopernikańskich, gdy Ziemi przypisano ruch orbitalny dookoła Słońca. Wysiłki astronomów w kierunku obserwacyjnego wykrycia paralaks gwiazdowych przez trzy wieki były daremne, ponieważ technika obserwacyjna nie pozwalała na pomiary tak małych kątów. Ciekawe, że po tylu latach niepowodzeń przedsięwzięcie to powiodło się niemal jednocześnie niezależnie trzem astronomom. Oprócz Bessela Wilhelm Struve zmierzył paralaksę Wegi (α *Lyrae*), a Thomas Henderson w południowej Afryce wyznaczył tą metodą odległość gwiazdy α *Centauri*.



Rys. 2. Paralaksa gwiazdy jest to kąt, pod którym z gwiazdy „widać" średni promień orbity ziemskiej. Nawet dla najbliższych gwiazd kąt ten jest mniejszy od jednej sekundy łuku. Paralaksa π jest wygodną miarą odległości, gdyż wielkości te związane są prostą zależnością: $r = \frac{1}{\sin \pi}$, gdzie r wyraża się w jednostkach astronomicznych (j.a.).

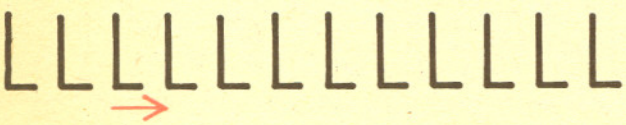
Przy doborze gwiazdy, której paralaksa ma być zmierzona, należy kierować się pewnymi kryteriami wskazującymi na jej względną bliskość. Struve i Henderson zakładali, że gwiazdy jaśniejsze leżą bliżej niż słabsze, w związku z czym wybrali gwiazdy o dużych jasnościach obserwowanych. Bessel kierował się kryterium, według którego o bliskości gwiazdy świadczy jej duży ruch własny. Jak się później okazało, drugie kryterium jest trafniejsze, o czym świadczy choćby porównanie Deneba i 61 *Cygni*.
Do końca ubiegłego stulecia zmierzono około 100 paralaks gwiazd, co jest wynikiem dobrym, jeśli wziąć pod uwagę, jakie przyrządy były wówczas dostępne obserwatorom. Istotny postęp w tej dziedzinie nastąpił po 1905 roku, gdy Frank Schlesinger opracował stosowaną do czasów współczesnych technikę fotograficzną wyznaczania paralaks gwiazdowych. Liczba gwiazd o dokładnie wyznaczonych tą metodą odległościach sięga około 1000 i wydaje się, że jest to kres obecnych możliwości. Poprawienie dokładności można by osiągnąć stosując teleskop wyniesiony na możliwie daleką orbitę okołosłoneczną, co z jednej strony zwiększyłoby bazę obserwacji, a z drugiej wyeliminowałoby błędy wynikające z niekorzystnego wpływu atmosfery ziemskiej. Paralaksy heliocentryczne są pierwszym ogniwem w łańcuchu wzajemnie połączonych metod wyznaczania odległości obiektów niebieskich. Błędy tej metody pociągają za sobą istotne błędy w określaniu większych odległości: dalszych gwiazd (np. Deneb), galaktyk czy kwazarów.

mgr Joanna UDALSKA

mała delta

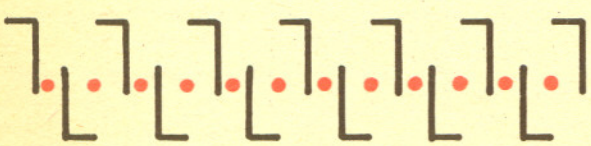
Szlaczki z liter

Napiszmy (narysujmy) szlaczek złożony z samych liter L.

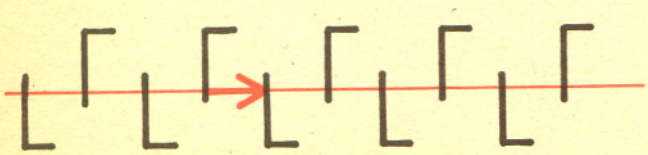


I zapytajmy, jak można przemieścić ten szlaczek (zakładamy, że jest on z obu stron nieskończenie długi), by nikt nie zauważył zmiany. Odpowiedź jest prosta. Dobre przemieszczenia to przesunięcia w prawo lub w lewo o całkowitą wielokrotność odstępu między literami.

Czy są szlaczki, dla których można to zrobić na więcej sposobów? Oczywiście. Na przykład szlaczek złożony z pisanych prosto i do góry nogami liter L może pozwalać również na obracanie o 180° względem „środków" między literami.

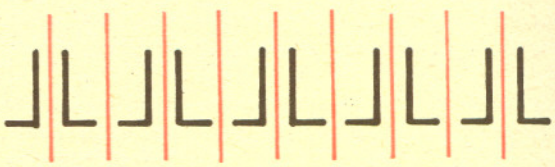


A jeśli go napisać inaczej — to ma symetrię względem „środkowej" prostej z równoczesnym równoległym przesunięciem (nazywa się to symetria z poślizgiem).



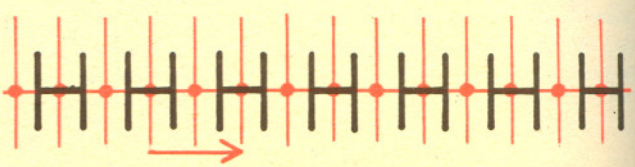
Kombinując oba szlaczki otrzymujemy szlaczek, który ma dużo osi symetrii i dużo środków symetrii.

Od razu wpadamy na następny pomysł — dużo osi i żadnego środka.



Prosty szlaczek z liter D poddaje się symetrii z poślizgiem, ale można też wykonać tylko samą symetrię albo tylko samo przesunięcie.

Na koniec szlaczek z liter H dopuszcza wszystkie omówione możliwości.



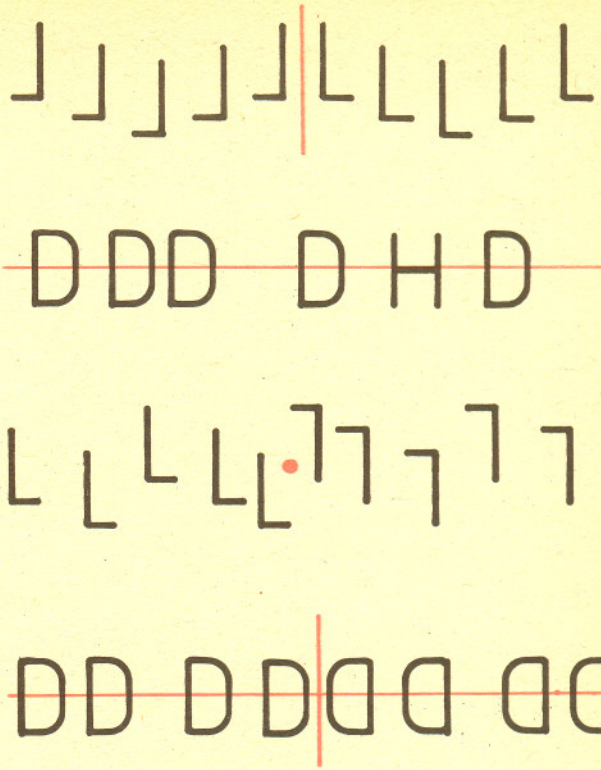
Dlaczego „na koniec”? Dlatego, że innych możliwości (niż któraś z wymienionych) dla przesuwalnego szlaczka nie ma. Mówi się fachowo, że są to wszystkie jednowymiarowe grupy krystalograficzne.

Spróbujcie stwierdzić, która z tych grup odpowiada szlaczkowi z liter A, która B itd.

Są oczywiście szlaczki nieprzesuwalne, a mimo to dające się poruszyć bez zmiany wyglądu szlaczka. Jest ich cztery rodzaje. Obok przykłady.

Odpowiednie ruchy to: jedna symetria osiowa zamieniająca strony albo zamieniająca górę i dół, jedna symetria środkowa albo też wszystko jednocześnie.

Malą Deltę przygotował Marek KORDOS



Voyager 2 osiągnął Urana

W końcu stycznia 1986 r. Voyager 2 zbliżył się do Urana. Jego misja zakończyła się pełnym sukcesem — telewizyjne obrazy planety i jej satelitów oraz wyniki pomiarów zostały przesłane na Ziemię. Wiemy o tym na razie tylko z prasy codziennej, a na szczegóły naukowe trzeba będzie jeszcze poczekać.

Uran, siódma planeta Układu Słonecznego, obiega Słońce w odległości 19,3 j. a. (1 j.a. = = 150 mln km), ma układ słabych pierścieni w płaszczyźnie równika oraz pięć dużych satelitów — około dziesięciu mniejszych odkrył właśnie Voyager 2. Promień równikowy Urana wynosi 25 400 km. Jego jasność na niebie pozwala w zasadzie zauważyć go gołym okiem, jednak odkryty został dopiero w 1781 r. przez Williama Herschela. Uran jest planetą typu Jowisza, jednak żadne obserwacje naziemne ani nawet balonowe, prowadzone z wysokich warstw atmosfery, nie wykazały istnienia jakichkolwiek „pasów” chmur tak wyraźnie prezentujących się na Jowiszu czy nawet na Saturnie.

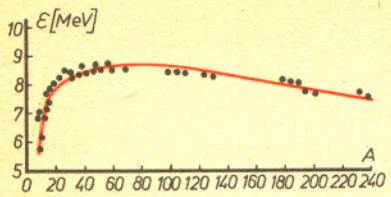
Voyager 2 wystartował z Ziemi 20 sierpnia 1977 r. Jowisza osiągnął 9 lipca 1979 r., a Saturna 25 sierpnia 1981 r. Voyager 2 wyposażony jest w kamery telewizyjne, fotopolarymetr, spektrometry podczerwieni i nadfioletu, magnetometr, miernik gęstości plazmy i promieniowania kosmicznego. Pierwszy obraz Urana został przekazany na Ziemię 15 lipca 1985 r. Sonda znajdowała się wtedy w odległości 246 mln km od planety. Z takiej odległości kamera była zdolna rozróżniać szczegóły o rozmiarach 4000 km — nadal jednak żadnych szczegółów nie zaobserwowano. Zbliżenie Voyagera 2 do Urana nastąpiło w sytuacji, gdy oświetlona przez Słońce była północna lub południowa półkula planety; nie warto rozstrzygać która formalnie, ponieważ oś obrotu Urana leży praktycznie w płaszczyźnie jego orbity. W każdym razie w styczniu 1986 r. oś obrotu planety skierowana była dość dokładnie w Słońce. Sonda zbliżyła się do planety oczywiście od strony oświetlonej i według planów miała przelecieć w odległości 107 000 km od centrum planety. Niejako przy okazji obserwowane były satelity Urana, przy czym np. do Mirandy sonda miała zbliżyć się na 29 000 km. Na powierzchni tego satelity miały być wtedy rozróżnialne szczegóły o rozmiarach rzędu pół kilometra.

Prawdopodobnie za kilka miesięcy pojawią się publikacje omawiające wyniki obserwacji Urana przez Voyagera 2. Przedstawimy je w skrócie w *Delcie*. Ponadto zbliżenie do Urana nie jest końcem działalności sondy. Przewiduje się, że w sierpniu 1989 r. zbliży się ona do Neptuna i jego największego satelity, Trytona. Poczekajmy i na to.

T. K.

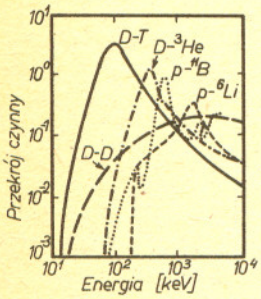
Synteza termojądrowa

Doc. dr Antoni KUSZELL

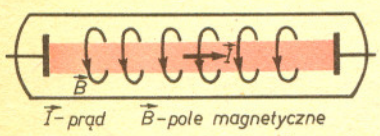


Rys. 1. Zależność średniej energii wiązania jednego nukleonu ε od liczby masowej jądra A.

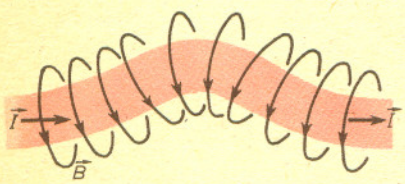
$D + T \rightarrow {}^4He\ (3{,}5\ MeV) + n(14{,}1\ MeV)$
$D + D \rightarrow T\ (1\ MeV) + p(3\ MeV)$
$D + D \rightarrow {}^3He\ (0{,}8\ MeV) + n\ (2{,}5\ MeV)$
$n + {}^6Li \rightarrow {}^4He\ (2{,}1\ MeV) + T\ (2{,}7\ MeV)$
n — neutron, p — proton, D — deuter, T — tryt



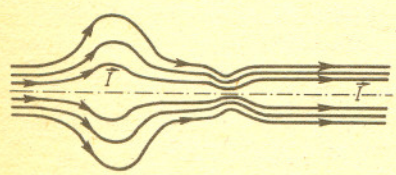
Rys. 2



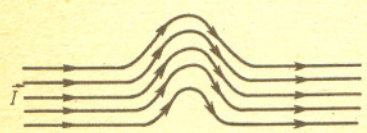
Rys. 3



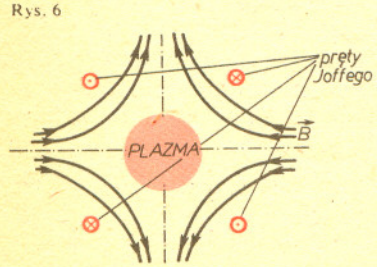
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Jądra atomowe oddziałują między sobą za pośrednictwem dwóch typów sił o zupełnie odmiennych własnościach: sił jądrowych przyciągających i działających tylko na bardzo małych odległościach oraz sił elektrostatycznych, odpychających i o dużym zasięgu. Przy odległościach większych od średnicy jąder dominuje odpychanie, przy mniejszych zaś przyciąganie. Współgranie tych sił powoduje, że najsilniej związane są jądra z okolic środka tablicy Mendelejewa (rys. 1). Dlatego rozpadowi jąder najcięższych oraz syntezie jąder lekkich towarzyszy uwolnienie pewnej energii kinetycznej kosztem energii wiązania. Pierwszą z tych metod uzyskiwania energii potrafimy już wykorzystać zarówno w sposób niekontrolowany (bomba atomowa), jak i kontrolowany (reaktor jądrowy). Drugą metodą zajmiemy się w tym artykule.

Kilka typowych reakcji syntezy przedstawiono na marginesie. Energie w megaelektronowoltach ($1\ MeV = 1{,}6 \times 10^{-13}\ J$) są to energie kinetyczne produktów uzyskane dodatkowo w każdej z reakcji. Widać, że zysk energii może mieć znaczenie praktyczne dopiero wtedy, gdy uda się doprowadzić do przereagowania („spalenia") bardzo wielu jąder.

Warunkiem koniecznym dla zajścia reakcji jest zderzenie jąder. Jednak nie każde zderzenie prowadzi do syntezy. Przekrój czynny, będący miarą prawdopodobieństwa zajścia danej reakcji, zależy od energii jąder. Rysunek 2 przedstawia tę zależność dla kilku reakcji syntezy. Widać, że aby osiągnąć optymalne warunki, trzeba nadać jądrom energię kinetyczną co najmniej rzędu 50 keV. Przy takich energiach wszystkie substancje mają postać gazu składającego się z całkowicie zjonizowanych atomów i elektronów. Ten stan materii nazywamy plazmą. Bezładny, nieuporządkowany ruch cząstek w gazie dodatkowo sprzyja zderzeniom. Ponieważ temperatura gazu jest proporcjonalna do średniej energii kinetycznej jąder, w dalszym ciągu zamiast o energii jąder mówić będziemy o ich temperaturze (energia 100 keV odpowiada temperaturze 10^9 K).

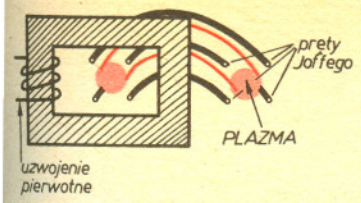
Przy ustalonej temperaturze liczba zderzeń w jednostce czasu rośnie proporcjonalnie do gęstości plazmy. Dlatego ilość spalonych jąder zależy od iloczynu gęstości i czasu (tzw. liczba Lawsona). Widać stąd, że reakcja syntezy może stać się źródłem użytecznej energii pod warunkiem, że uda się pokonać dwie trudności — ogrzać gaz do temperatury 10^8—10^9 K i uzyskaną gęstą, gorącą plazmę utrzymać odpowiednio długo w ograniczonym obszarze. Zadania te są przeciwstawne, bo w gazie o tak wysokiej temperaturze panują ogromne ciśnienia. Oczywiście w przypadku plazmy nie może być zastosowana tradycyjna metoda zamknięcia gazu w zbiorniku. Trzeba więc szukać innych metod.

Pierwsza wykorzystuje fakt, iż jądra przyciągają się grawitacyjnie. Jeśli plazmy jest odpowiednio dużo, siły grawitacyjne mogą utrzymać ją w stanie stacjonarnym. Sytuacja taka ma miejsce w gwiazdach.

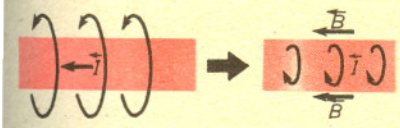
Drugi skuteczny sposób ograniczenia plazmy wykorzystuje fale uderzeniowe. Wyobraźmy sobie cztery silne ładunki wybuchowe umieszczone w wierzchołkach czworościanu foremnego, które eksplodują równocześnie. Powstające przy eksplozji fale uderzeniowe powodują skupienie materii w środku czworościanu i jej ogrzanie przez adiabatyczne sprężenie oraz przekazują jej część energii wybuchu. Okazuje się jednak, że dopiero wybuchy jądrowe są dostatecznie silne, by stworzyć warunki wystarczające do „zapalenia się" plazmy. Tak zbudowano bombę wodorową. Jak dotąd, nie udało się wytworzyć odpowiednich fal uderzeniowych w mniej brutalny sposób. Prowadzone są jednak badania mające na celu wywoływanie mikrowybuchów termojądrowych, które można byłoby kontrolować, tak jak np. kontroluje się wybuch mieszanki w silniku spalinowym. W tym celu małe ilości paliwa jądrowego oświetla się laserami dużej mocy lub wiązkami wysokoenergetycznych cząstek. W obu przypadkach pochłonięcie energii powoduje powstanie fal ograniczających plazmę.

Trzecia, najbardziej obiecująca z praktycznego punktu widzenia, metoda utrzymywania plazmy wykorzystuje fakt, iż cząstki plazmy są naładowane, a więc ich tory ulegają zakrzywieniu w polu magnetycznym. Najstarszą koncepcją jest tzw. z-pinch (od ang. pinch — zacisnąć). W rurze wypełnionej gazem umieszczone są dwie elektrody, do których przykłada się bardzo wysokie napięcie. Następuje jonizacja gazu i wyładowanie w postaci tzw. sznura plazmowego. Płynący w nim prąd elektryczny grzeje plazmę przez efekt Joule'a. Ponadto jest on źródłem pola magnetycznego o symetrii osiowej (rys. 3). Siła Lorentza, działająca w tym polu na naładowane cząstki, powoduje ściskanie sznura plazmowego. Proces ten jest adiabatyczny, bo trwa zbyt krótko, by zdążyła zajść wymiana ciepła z otoczeniem. Dlatego ściskaniu towarzyszy dodatkowe podgrzanie plazmy.

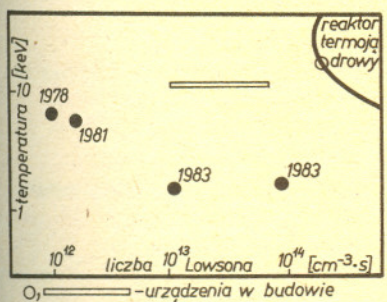
Okazało się jednak, że z-pinch podatny jest na szereg niestabilności, które powodują zniszczenie struktury sznura. Rozważmy najpierw pojedynczą linię prądu elektrycznego. Jeśli linia wskutek fluktuacji nieznacznie się wygnie (rys. 4), to od strony wypukłości linie pola magnetycznego ulegną rozrzedzeniu, a od strony wklęsłości zagęszczeniu. Wypadkowa siła Lorentza, jaka się wtedy pojawi, spowoduje zwiększenie wygięcia linii prądu, czyli wzmocnienie fluktuacji. Wynika



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

stąd, że wypukłe zaburzenie sznura plazmowego prowadzi do rozszerzania się sznura, a wklęsłe do zaciskania. Możliwe jest także jego wygięcie. Pierwszy typ niestabilności (tzw. niestabilność „serdelkowa") przedstawiony jest na rysunku 5, drugi (niestabilność wyboczeniowa) — na rysunku 6.

Obliczenia teoretyczne wykazały, że niestabilności jest nieskończenie wiele, ale opisane niestabilności podstawowe narastają najszybciej i dlatego są najbardziej niekorzystne. Znaleziono również proste kryterium stabilności układu naładowanych cząstek i pól magnetycznych. Okazało się mianowicie, że pełna stabilność byłaby zapewniona tylko wtedy, gdyby plazmę udało się ograniczyć polem magnetycznym o liniach wypukłych do wnętrza obszaru uwięzienia. Jest to jednak zadanie niewykonalne. Kryterium daje jednak pewną orientację, jak należy projektować elektromagnesy mające więzić plazmę. Należy dążyć do zminimalizowania obszarów, w których linie pola magnetycznego nie są wypukłe. Tak powstała koncepcja tzw. prętów Joffego. Na zewnątrz z-pinchu układa się równolegle do osi sznura plazmowego cztery pręty, w których płynie prąd w kierunkach zaznaczonych na rysunku 7. Pozostały wprawdzie cztery obszary, w których plazma może opuszczać układ (tzw. stożki ucieczki), ale pręty zlikwidowały podstawowe niestabilności i znacznie poprawiły parametry pinchu.

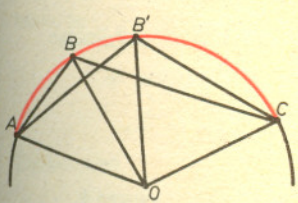
Aby uniknąć strat plazmy na elektrodach, pinch zwinięto w torus. Taki toroidalny z-pinch pobudza się w układzie pokazanym na rysunku 8, gdzie sznur plazmowy stanowi po prostu wtórne uzwojenie dużego transformatora.

Okazało się, że jeszcze bardziej stabilna jest konfiguracja zwana θ-pinchem. Jest to układ podobny do z-pinchu (bez prętów Joffego), w którym zamieniono linie pola magnetycznego liniami prądu i odwrotnie (rys. 9). Przy odpowiednim doborze kierunku prądów siły Lorentza działające na plazmę będą takie jak w z-pinchu i sznur plazmowy będzie znów adiabatycznie ściskany.

Poza omówionymi buduje się wiele innych urządzeń (tokamak, stellarator itp.) służących do podgrzewania i utrzymywania plazmy. Wszystkie działają na podobnej zasadzie. Najbardziej obiecujący jest tokamak, w którym osiągnięto już warunki bliskie spełnienia tzw. kryterium Lawsona. Kryterium to orzeka, że ilość energii otrzymywanej w wyniku reakcji syntezy przewyższy energię konieczną do podgrzewania i utrzymania plazmy wtedy, gdy liczba Lawsona będzie większa od 10^{14} cm^{-3} · s. Rysunek 10, przedstawiający temperatury plazmy i wartości liczby Lawsona w kilku istniejących i budowanych urządzeniach plazmowych, pokazuje, jak niewiele brakuje do osiągnięcia sukcesu.

Kącik olimpijski

Rozwiążmy zadanie: Pokazać, że wśród n-kątów wpisanych w ustalony okrąg największe pole ma n-kąt foremny.



Dość łatwo wykazać, że jeśli wielokąt wpisany w okrąg nie jest foremny, to pewien inny wielokąt o tej samej liczbie boków (i wpisany w ten sam okrąg) ma większe pole. (Patrz rysunek — jeśli $AB \neq BC$ i $AB' = B'C$, to $S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} < S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle B'OC}$.) Jeśliby było wiadomo, że wśród interesujących nas wielokątów istnieje wielokąt o największym polu, to musiałby być foremny i koniec rozwiązania.

Skorzystamy z twierdzenia:

Funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest ograniczona i osiąga kresy, tzn. jeśli K jest zbiorem zwartym, a $f\colon K \to \mathbf{R}$ funkcją ciągłą, to istnieją takie punkty $a, b \in K$, że dla dowolnego $x \in K$ mamy $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

W przypadku, gdy zbiór K jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^m$, jest on zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony (tzn. gdy istnieje taka liczba M, że dla każdego $(x_1, \ldots, x_m) \in K$ mamy $|x_i| \leqslant M$ dla $i = 1, \ldots, m$) i domknięty (tzn. jeśli $(x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}) \in K$ dla $k = 1, 2, \ldots$ i $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ dla $i = 1, \ldots, m$, to $(x_1, \ldots, x_m) \in K$).

Wróćmy do zadania. Oznaczmy przez K zbiór n-tek punktów z okręgu. Każdy punkt okręgu to para współrzędnych, a więc każdy element zbioru K może być traktowany jako punkt $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ przestrzeni $2n$-wymiarowej $\mathbf{R}^{2n}$. Łatwo udowodnić, że zbiór K jest ograniczony i domknięty, a więc zwarty. Funkcja f przyporządkowuje elementowi $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ pole najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego punkty $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, tzn. wielokąta wypukłego, którego wierzchołkami są te punkty. Znów łatwo wykazać, że funkcja f jest ciągła oraz, podobnie jak na początku, że jeśli wielokąt odpowiadający punktom $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ nie jest foremny, to jego pole nie jest maksymalne. Tak więc układ punktów $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ dający kres górny funkcji f musi odpowiadać wielokątowi foremnemu.

Metoda powyższa daje się stosować do rozwiązywania zadań, w których należy pokazać, że pewna funkcja f osiąga w jakimś punkcie a kres górny (dolny). Korzystając z podanego twierdzenia stwierdzamy, że funkcja f musi osiągać kres górny (dolny), a następnie pokazujemy, że w punktach różnych od punktu a funkcja f kresu nie osiąga.

Oto przykłady zadań, w których można skorzystać z powyższego sposobu.

1) W czworościanie $abcd$ mamy $db \perp dc$ i spodkiem prostopadłej opuszczonej z punktu d na płaszczyznę trójkąta abc jest punkt przecięcia wysokości tego trójkąta. Udowodnić, że $(ab+bc+ca)^2 \leqslant 6(ad^2+bd^2+cd^2)$. Dla jakich czworościanów zachodzi równość? (XII MOM zadanie 5)

2) Dowieść, że ze wszystkich czworokątów opisanych na danym kole najmniejszy obwód ma kwadrat. (IX OM etap III zadanie 6)

3) Udowodnić, że dla dowolnych $n, k \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\text{zachodzi} \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n+k}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k} \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_i. \qquad \text{(XIV-I-10)}$$

4) Udowodnić, że jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, to

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \leqslant$$
$$\leqslant n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n),$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ lub $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. (XV-III-2)

Michał WOJCIECHOWSKI

Metoda „wędrującego garbu"

Dr Zbigniew SAWOŃ

W Analizie Matematycznej, w szczególności w dowodach nie wprost, często stosuje się pewną metodę, którą żargonowo nazywa się metodą wędrującego garbu. Jest ona matematycznie finezyjna i nawet jeżeli jest stosowana w podręcznikach Analizy Matematycznej, to autorzy nie zaznaczają tego. Dlatego wydaje się celowe zapoznanie z nią Czytelnika przez podanie przykładu jej zastosowania. Autor sięgnął do przykładu z dziedziny bliskiej jego zainteresowaniom, a mianowicie do Teorii Limesowalności. Autor pozostawia domyślności Czytelnika to, dlaczego ta metoda nosi taką, a nie inną nazwę.

Zaczniemy od rozwiązania pewnego problemu z teorii szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Pytanie: Jakie warunki musi spełniać ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, aby dla każdego ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ (tj. ciągu zbieżnego do zera) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n$ był zbieżny?

Oczywiście każdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ jest „dobry".

Przypuśćmy więc, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest „dobry" i że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Istnieje takie k_1, że $\sum_{n=1}^{k_1} |a_n| > 2^1$, ale $\sum_{n=k_1+1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, więc istnieje takie k_2, że $\sum_{n=k_1+1}^{k_2} |a_n| > 2^2$ i znowu $\sum_{n=k_2+1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, istnieje więc k_3 takie, że $\sum_{n=k_2+1}^{k_3} |a_n| > 2^3$ itd. Można więc określić rosnący ciąg liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ taki, że

$$\sum_{n=k_l+1}^{k_{l+1}} |a_n| > 2^{l+1} \text{ dla } l = 0, 1, 2, \ldots \text{ (przyjmując } k_0 = 0).$$

Określimy teraz pewien ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty}$.
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $i(n)$ taka, że $k_{i(n)} < n \leqslant k_{i(n)+1}$. Zdefiniujemy

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{i(n)+1} \operatorname{sgn} a_n.$$

sgn a oznacza znak a, tzn. $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Jest rzeczą oczywistą, że $t_n^{(0)} \to 0$, tzn. $x_0 \in c_0$. Ale

$$\left| \sum_{n=k_l+1}^{k_{l+1}} t_n^{(0)} a_n \right| = \frac{1}{i+1} \sum_{n=k_l+1}^{k_{l+1}} |a_n| \geqslant \frac{1}{i+1} \cdot 2^{l+1} \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n^{(0)}$ nie jest zbieżny (nie spełnia warunku Cauchy'ego).

Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ spełnia warunek Cauchy'ego, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę naturalną N, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k, przy czym $n > N$, zachodzi $\left| \sum_{j=n}^{n+k} c_j \right| < \varepsilon$.
Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

W ten sposób otrzymaliśmy

Twierdzenie 0. Dla ciągu liczbowego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ następujące warunki są równoważne

(a) dla każdego ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n$ jest zbieżny,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ (tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny).

Definicja. Mówimy, że macierz liczbowa $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza, jeżeli dla każdego ciągu $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

(1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n$ jest zbieżny, gdy $k = 1, 2, \ldots$

(2) $\lim_{k\to\infty} A_k(x) = 0$, gdzie $A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n$.

Czytelniku, sprawdź, które z następujących macierzy są macierzami Toeplitza.

1) $a_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k \\ 0 & \text{dla } n > k \end{cases}$

2) $a_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}} & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k \\ 1 & \text{dla } n = k+1 \\ 0 & \text{dla } n > k+1 \end{cases}$

3) $a_{k,n} = (1-\varrho_k) \cdot \varrho_k^n$, gdzie $(\varrho_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach z przedziału $(0, 1)$ i jest zbieżny do zera.

4) $a_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha_k^{-1} \cdot \varrho_n & \text{dla } n \geqslant k \end{cases}$

gdzie $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich i takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n < +\infty$, a α_k oznacza $\sum_{n=k}^{\infty} \varrho_k$.

Na mocy twierdzenia 0 warunek (1) powyższej definicji jest równoważny warunkowi

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| < +\infty \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Oznaczmy przez $e_n \in c_0$ ciąg, którego n-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe są zerami. Wówczas $A_k(e_n) = a_{k,n}$, więc z punktu (2) definicji wynika następujący warunek

(ii) $$\lim_{k\to\infty} a_{k,n} = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Warunki (i) oraz (ii) nie są jednak dostateczne. Świadczy o tym następujący przykład

$$a_{k,n}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad k \neq n \\ n^2 & \text{gdy} \quad k = n \end{cases}$$

Warunki (i) oraz (ii) są oczywiście spełnione, ale przyjmując $t_n^{(0)} = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ stwierdzamy z łatwością, że

$$A_k(x_0) = k \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

W tym przykładzie mamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}^{(0)} = k^2$ dla dowolnego k.

Przypuśćmy teraz, że ciąg $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego j ciąg $\left(\sum_{n=j+1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, gdyż $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{j} |a_{k,n}| = 0$ dla każdego j.

Teraz przystępujemy do właściwej pracy.

Istnieje liczba naturalna k_1 taka, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_1,n}| > 2^2$. Istnieje również j_1 takie, że

$$\sum_{n=1}^{j_1} |a_{k_1,n}| > 2 \text{ i } \sum_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k_1,n}| < 1.$$

Zaczniemy teraz po kawałku określać pewien ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Zdefiniujmy $t_n^{(0)} = \frac{1}{1} \operatorname{sgn} a_{k_1,n}$, dla $1 \leqslant n \leqslant j_1$.

Wtedy oczywiście spełniona jest nierówność

$$\left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_1,n} t_n^{(0)}\right| \geqslant \frac{1}{1} \cdot 2^1.$$

Ale $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{j_1} a_{k,n} t_n^{(0)} = 0$; istnieje więc k_2' takie, że gdy $k > k_2'$, to $\left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k,n} t_n^{(0)}\right| < 1$. Ponieważ ciąg $\left(\sum_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, więc istnieje k_2 większe od k_2' i k_1 takie, że $\sum_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k_2,n}| > 2^3+2\cdot 2$. Istnieje teraz $j_2 > j_1$ takie, że

$$\sum_{n=j_2+1}^{\infty} |a_{k_2,n}| > 2^2+2 \text{ i } \sum_{n=j_2+2}^{\infty} |a_{k_2,n}| < 1.$$

Definiujemy dalej ciąg x_0:

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} a_{k_2,n} \quad \text{dla } j_1 < n \leqslant j_2.$$

Otrzymujemy teraz

$$\left|\sum_{n=1}^{j_2} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)} + \sum_{n=j_1+1}^{j_2} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{n=j_1+1}^{j_2} |a_{k_2,n}|\right| \geqslant \frac{1}{2}(2^2+2) -$$

$$-\left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| \geqslant \frac{1}{2} 2^2 + 1 - 1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2.$$

Wykonamy dla wygody czytającego jeszcze jeden krok dla określenia rosnących ciągów liczb naturalnych $(k_l)_{l=1}^{\infty}$ i $(j_l)_{l=1}^{\infty}$ oraz ciągu $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty}$ mając nadzieję, że pozwoli to uchwycić pewne prawidłowości potrzebne do indukcyjnego zdefiniowania tych trzech ciągów.

Wiemy, że $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{j_2} a_{k,n} t_n^{(0)} = 0$, istnieje więc k_3' takie, że gdy $k > k_3'$, to $\left|\sum_{n=1}^{j_2} a_{k,n} t_n^{(0)}\right| < 1$. Ciąg $\left(\sum_{n=j_2+1}^{\infty} a_{k,n}\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, można więc znaleźć k_3 większe od k_3' i k_2 takie, że $\sum_{n=j_2+1}^{\infty} |a_{k_3,n}| > 2^4+2\cdot 3$. Istnieje $j_3 > j_2$ spełniające

$$\sum_{n=j_2+1}^{j_3} |a_{k_3,n}| > 2^3+3 \text{ i } \sum_{n=j_3+1}^{\infty} |a_{k_3,n}| < 1$$

Definiujemy

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{3}\operatorname{sgn} a_{k_3,n} \quad \text{dla } j_2 < n \leqslant j_3.$$

Postępując jak poprzednio stwierdzamy z łatwością, że

$$\sum_{n=1}^{j_3} a_{k_3,n} t_n^{(0)} \geqslant \frac{1}{3}\cdot 2^3.$$

W ten sposób można indukcyjnie określić dwa ciągi liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_l < \ldots$ oraz ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty} \in c_0$ tak, aby

$$\left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| \geqslant \frac{1}{l} 2^l \text{ i } \sum_{n=j_l+1}^{\infty} |a_{k_l,n}| < 1 \quad \text{dla } l = 1, 2, \ldots$$

Mamy więc

$$|A_{k_l}(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)} + \sum_{n=j_l+1}^{\infty} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| - \sum_{n=j_l+1}^{\infty} |a_{k_l,n}| \cdot |t_n^{(0)}| \geqslant \frac{2^l}{l} - 1 \quad \text{dla } l = 1, 2, \ldots$$

Zatem $\lim_{l\to\infty} A_{k_l}(x_0) = +\infty$, wbrew założeniu, że A jest macierzą Toeplitza.

W ten sposób otrzymaliśmy trzeci warunek konieczny

(iii) ciąg $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Ponieważ warunek (iii) zawiera warunek (ii), to rekapitulując można powiedzieć, że jeżeli $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza, to

(*) $\lim_{k\to\infty} a_{k,n} = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots$,

(**) istnieje $M > 0$ takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| \leqslant M$ dla $k = 1, 2, \ldots$

Wykażemy teraz, że warunki te są również dostateczne.

Rozważmy $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ i $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $|t_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n > n_0$. Wtedy też dla dowolnych k mamy

$$|A_k(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{k,n} t_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{k,n}| \cdot |t_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zarazem — ponieważ $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n = 0$, to istnieje k_0 takie, że dla $k > k_0$ mamy $\left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, czyli $|A_k(x)| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie Toeplitza. Macierz $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\lim_{k\to\infty} a_{k,n} = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$,

2) ciąg $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Teraz już z łatwością Czytelnik stwierdzi, że wszystkie podane wcześniej macierze poza jedną były macierzami Toeplitza. A czy następująca modyfikacja przykładu (4)

$a_{k,n} = \alpha_k^{-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \varrho_n$

daje macierz Toeplitza? A może to jest macierz Toeplitza, gdy nałoży się jakieś dodatkowe warunki na ciąg $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}$?

Definicję macierzy Toeplitza można uogólnić żądając w punkcie (2) zamiast tego, żeby $\lim_{k\to\infty} A_k(x) = 0$ warunku, by $\lim_{k\to\infty} A_k(x)$ istniała dla dowolnych $x \in c_0$. Analiza funkcjonalna dostarcza metod, które w bardzo łatwy sposób pozwalają uogólnić twierdzenie Toeplitza. Okazuje się mianowicie, że warunek 1) trzeba wtedy sformułować w następujący sposób

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,n} = \beta_n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Można też wykazać, że w tym przypadku dla każdego $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ jest

$$\lim_{k\to\infty} A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t_n.$$

Autorowi nie jest znany żaden dowód tego faktu wykorzystujący tylko metody Analizy Matematycznej i byłby bardzo wdzięczny Czytelnikom, gdyby któryś z nich zechciał oświecić go nieco w tym względzie.

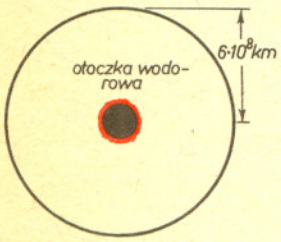
Na zakończenie autor chciałby jeszcze powiedzieć, że twierdzenie Toeplitza jest fundamentalnym twierdzeniem macierzowej Teorii Limesowalności, ale to będzie, być może, tematem innego artykułu.

Kosmiczne superwybuchy

Doc. dr Paweł HAENSEL

Pokryte gwiazdami nocne niebo jest symbolem spokoju. Jednak ewolucja gwiazd, mówiąc obrazowo: ich życie, zawiera czasem momenty, które śmiało można nazwać dramatycznymi. Życie gwiazdy to nieustanne zmaganie między siłami grawitacji dążącymi do ściśnięcia kuli gazowej, jaką jest gwiazda, do jak najmniejszej objętości oraz ciśnienia, które przeciwstawiając się siłom grawitacji dąży do zwiększenia objętości i promienia gwiazdy. Spokojne życie gwiazdy to efekt równowagi między tymi dwiema przeciwstawnymi siłami.

Badania astrofizyczne rozpoczęte w latach pięćdziesiątych i rozwijane w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych doprowadziły do wniosku, że okres, w którym gwiazda prowadzi spokojny żywot zachowując — w przybliżeniu — stałą jasność, a więc — jak mówimy — znajdując się na tzw. ciągu głównym cyklu ewolucyjnego, w istotny sposób zależy od jej masy.

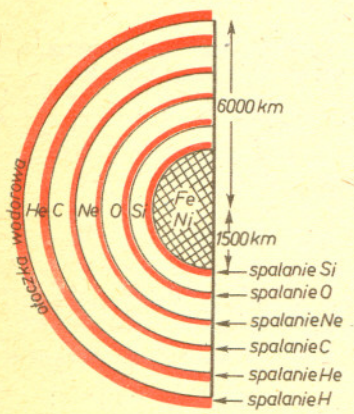


Rys. 1. Czerwony nadolbrzym o masie 15 $M_\odot$ ma promień $6 \cdot 10^8$ km. Składa się z rzadkiej otoczki wodorowej oraz rdzenia zbudowanego z produktów syntezy termojądrowej. Palenie wodoru odbywa się na brzegu rdzenia. W rzeczywistości promień rdzenia stanowi 10^{-5} promienia otoczki.

Dobrą jednostką masy gwiazd jest masa naszego Słońca, oznaczana symbolem $M_\odot$. Wartość liczbowa $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{33}$ g. Jak wynika z badań teoretycznych, przeprowadzonych w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych, dla gwiazd masywnych — o masie większej niż około 8 $M_\odot$, a mniejszej niż około 20 $M_\odot$ — czas spokojnego życia na ciągu głównym jest rzędu 10^7 lat. Czas ten maleje wraz ze wzrostem masy. Gwiazdy masywne przebywają w stadium ciągu głównego tysiąc razy krócej niż gwiazdy takie jak nasze Słońce!

Rozważmy gwiazdę o masie 15 $M_\odot$, której wiek liczony od momentu jej powstania z obłoku materii międzygwiezdnej (zakładamy, że materia ta składała się głównie z wodoru) wynosi 10^7 lat.

Przez 10 milionów lat świeciła ona z prawie niezmienną jasnością, czerpiąc energię z reakcji syntezy wodoru na hel. To spalanie termojądrowe zachodziło w rdzeniu gwiazdy, gdzie panowała temperatura ponad 10^7 K. Rośnie masa produktu reakcji syntezy, helu. Wodoru do spalania jest coraz mniej. Z powodu braku paliwa wodorowego spalanie w centrum gwiazdy w końcu ustaje. Wodór spalany jest już tylko na zewnętrznym brzegu jądra zbudowanego z helowego „popiołu". Hel zgromadzony w rdzeniu gwiazdy nie może być spalany, gdyż do tego potrzebna jest temperatura około $1{,}5 \cdot 10^8$ K. Zahamowanie spalania wodoru narusza równowagę w centralnej części gwiazdy, gdzie w wyniku ustania procesu produkcji ciepła grawitacja zaczyna przeważać nad ciśnieniem. Rdzeń helowy zaczyna się kurczyć. W konsekwencji prowadzi to do jego zgęszczenia i ogrzania. W momencie, gdy temperatura w środku rdzenia osiągnie wartość $1{,}5 \cdot 10^8$ K, rozpoczyna się proces syntezy helu na węgiel, tlen i neon. Jak wykazały badania teoretyczne, kurczeniu się rdzenia helowego towarzyszy gwałtowne rozdymanie otoczki wodorowej. Gwiazda gwałtownie zwiększa blisko stokrotnie swój promień — do ponad 10^8 km. Dla porównania: promień Słońca wynosi $7 \cdot 10^5$ km, a odległość Ziemi od Słońca — $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Słusznie więc gwiazdę taką nazywamy *nadolbrzymem*. Ponieważ barwa widzialnego promieniowania, emitowanego przez rozdętą wodorową otoczkę gwiazdy, jest czerwona, pełna nazwa nadana gwiazdom tej klasy brzmi: *czerwony nadolbrzym*. O dalszych losach gwiazdy decydują procesy zachodzące w jej rdzeniu. Proces kurczenia się jądra złożonego z produktów syntezy jądrowej — prowadzący do zagęszczenia i rozgrzania rdzenia gwiazdy i w konsekwencji do zapalenia „popiołu" — powtarza się kilka razy, aż do momentu, w którym „popiołem" będą jądra żelaza i niklu. Rosnący rdzeń żelazno-niklowy jest plazmą złożoną z jąder żelaza, niklu i elektronów; jego temperatura przekracza $3{,}5 \cdot 10^9$ K, gęstość zaś wynosi ponad 10^8 g/cm^3. Gęstość jest rzeczywiście astronomiczna: 1 cm^3 takiej plazmy ważyłby na Ziemi 100 ton! Schematyczny obraz struktury czerwonego nadolbrzyma na tym etapie życia gwiazdy przedstawiony jest na rysunkach 1 i 2. Materia, z której zbudowany jest rdzeń żelazno-niklowy, jest *zdegenerowana*: jej ciśnienie zależy tylko od gęstości elektronów w plazmie, a nie zależy od temperatury. Wraz z upływem czasu masa rdzenia żelazno-niklowego rośnie, wzrasta jego gęstość i temperatura. Zapalenie tej plazmy jest jednak niemożliwe. Plazma żelazno-niklowa to ostateczny produkt nukleosyntezy, bowiem jądra Fe i Ni mają największą energię wiązania ze wszystkich jąder atomowych. „Popiół" Fe-Ni nie może się zapalić, ponieważ wszelkie przemiany jąder Fe i Ni mają charakter endotermiczny. Równowaga rdzenia Fe-Ni zapewniona jest przez zrównoważenie gigantycznych sił grawitacji dążących do zmniejszenia promienia rdzenia i ciśnienia gazu zdegenerowanych elektronów w plazmie.



Rys. 2. Struktura rdzenia czerwonego nadolbrzyma w okresie bezpośrednio poprzedzającym implozję.

Rachunki teoretyczne wykazują, że w momencie, gdy masa rdzenia Fe-Ni wzrośnie do około 1,4 $M_\odot$, temperatura w centrum gwiazdy osiągnie $7 \cdot 10^9$ K, gęstość zaś wyniesie $5 \cdot 10^9$ g/cm^3 (5 000 ton/cm^3!). W tak wysokiej temperaturze rozpoczyna się *dysocjacja* jąder Fe i Ni na cząstki alfa (jądra helu) i neutrony. Reakcja jest endotermiczna:

$$(1) \qquad {}^{56}\mathrm{Fe} \rightarrow 13\alpha + 4\mathrm{n} - 124{,}4 \text{ MeV}$$

w związku z tym prowadzi do obniżenia temperatury plazmy. Dysocjacja jednego jądra żelaza pochłania ponad 124 MeV. Po drugie, przy tak dużej gęstości możliwy jest tzw. odwrotny rozpad beta — *wychwyt elektronów* przez jądra żelaza i niklu. Symboliczny zapis reakcji wychwytu elektronów na jądrze o liczbie atomowej Z i liczbie masowej A ma postać:

$$(2) \qquad (A, Z) + \mathrm{e}^- \rightarrow (A, Z-1) + \nu_e.$$

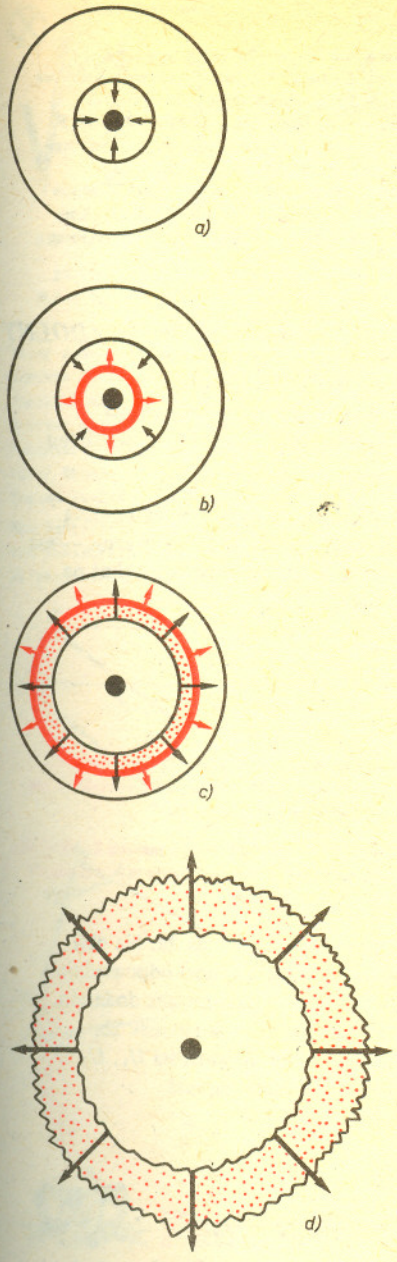
Każdemu wychwytowi towarzyszy więc zmniejszenie liczby protonów o jeden oraz emisja neutrina. Wychwyty elektronów prowadzą do zwiększenia liczby neutronów (*neutronizacja* materii) oraz do produkcji neutrin. Oba procesy: dysocjacja i wychwyt elektronów prowadzą do obniżenia ciśnienia plazmy. Narusza to delikatną równowagę między siłami grawitacji i ciśnienia: siły grawitacji zwyciężają i rdzeń Fe-Ni ulega gwałtownej *implozji*. W ciągu około 0,3 sekundy wewnętrzna część rdzenia zmniejsza swoje wymiary ponad 100-krotnie.

Zgęszczenie kurczącego się rdzenia i jego rozgrzanie prowadzi do całkowitej dysocjacji jąder Fe i Ni na nukleony. Elektrony supergęstej plazmy wychwytywane są na protonach w reakcji

$$(3) \qquad \mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_e,$$

w której wyniku powstaje ogromna ilość neutrin elektronowych. Wzrostowi gęstości aż do ponad 10^{14} g/cm^3 towarzyszy ogrzanie do około 10^{11} K. Produkowane w wielkich ilościach neutrina są cząstkami bezmasowymi (o zerowej masie spoczynkowej) i w normalnych warunkach niezwykle słabo oddziałują z materią. Aby tę własność zilustrować, wystarczy wspomnieć, że średnia droga

Rozwiązanie zadania M 442. Niech X oznacza liczbę rzutów potrzebną do otrzymania orła. Rozpatrzmy sytuację po pierwszym rzucie. Z prawdopodobieństwem p otrzymaliśmy orła (wtedy $X = 1$) a z prawdopodobieństwem $1-p$ reszkę. W drugim przypadku średnio potrzeba $1 + EX$ rzutów do zakończenia gry, jako że poszczególne rzuty są niezależne. Zatem $EX = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (1 + EX)$, stąd $p \cdot EX = 1$, czyli $EX = \frac{1}{p}$.



Rys. 3. Najważniejsze etapy wybuchu. Nie jest zachowana rzeczywista skala elementów rysunków.
a) Po implozji rdzenia Fe-Ni (czarne kółko) spadają nań kolejne warstwy gwiazdy. Czarne kółko to protoplasta gwiazdy neutronowej.
b) Po odbiciu od powierzchni zapadniętego rdzenia najbardziej wewnętrzne warstwy poruszają się na zewnątrz, zderzając się z opadającymi bardziej zewnętrznymi warstwami. Powstaje fala uderzeniowa, zaznaczona jako czerwony, rozszerzający się pierścień.
c) Fala uderzeniowa pociąga za sobą kolejne warstwy otoczki.
d) Rozszerzająca się otoczka tworzy świecącą mgławicę. Wewnątrz mgławicy znajduje się gwiazda neutronowa.

swobodna neutrin o energii 10 MeV w materii, z której zbudowana jest Ziemia, wynosi 10^{15} km $\approx$ 1 rok świetlny! Neutrino takie przeleci przez Ziemię po torze przechodzącym przez jej środek nie ulegając w praktyce ani razu rozproszeniu na nukleonach i elektronach, z których zbudowana jest nasza planeta. Ale w niezwykłych warunkach, gdy materia ma gęstość ponad 10^{12} g/cm^3 i temperaturę ponad 10^{10} K, zderzenia neutrin z nukleonami i elektronami będą znacznie częstsze. Rachunki teoretyczne wskazują, że zderzenia te są wówczas tak częste, że od momentu, w którym gęstość rdzenia osiągnie wartość 10^{12} g/cm^3, neutrina są „uwięzione": ich droga swobodna zmniejsza się do kilkudziesięciu metrów i czas potrzebny na wydostanie się z kurczącej się materii jest dłuższy od czasu implozji rdzenia gwiazdy, w którym powstają.

Gdy gęstość kurczącego się rdzenia osiągnie wartość około $2{,}4 \cdot 10^{14}$ g/cm^3, równą w przybliżeniu gęstości materii jądrowej, z której zbudowane są jądra atomowe, materia staje się tak sztywna (twarda), że ogromne ciśnienie jest w stanie w końcu zrównoważyć siły grawitacyjne. Oszacujmy promień rdzenia w momencie, gdy jego „zapadanie się" zostało zatrzymane. Zakładając, że jego gęstość wynosi $\varrho_r = 2{,}4 \cdot 10^{14}$ g/cm^3 przy masie $M_r = 1{,}4\ M_\odot$ otrzymujemy

$$R_r = \left(\frac{3M_r}{4\pi\varrho_r}\right)^{\frac{1}{3}} = 13 \text{ km}. \tag{4}$$

Na ten niezwykle gęsty rdzeń gwiazdy spadają pod wpływem siły ciężkości kolejne jej warstwy, co zostało uwidocznione na rysunku 3a. Pod ich ciężarem rdzeń ulegnie jedynie lekkiemu ściśnięciu, a następnie gwałtownie „zasprężynuje" odbijając od siebie stykającą się z nim bezpośrednio warstwę materii. To niezwykle gwałtowne odbicie wewnętrznej części otoczki rdzenia od jego powierzchni prowadzi do powstania — wskutek zderzenia ze spadającymi bardziej zewnętrznymi warstwami gwiazdy — *fali uderzeniowej*, która rozchodzi się od środka gwiazdy ku jej powierzchni (rys. 3b). Szczegółowe obliczenia wskazują, że fala uderzeniowa rozchodzi się z prędkością początkową ponad 60 000 km/s, odrzucając na zewnątrz kolejne, coraz rzadsze warstwy otoczki (rys. 3c). Dużą rolę w procesie propagacji fali uderzeniowej odgrywają neutrina, które dopiero teraz wydostają się z gorącego i gęstego rdzenia. W warstwie położonej tuż za czołem fali uderzeniowej panuje temperatura około 10^{11} K. W takiej temperaturze typowa (średnia) energia ruchu cieplnego cząstek (w tym również neutrin) wynosi 10 MeV. Fala uderzeniowa i neutrina przekazują otoczce, która w przypadku naszej gwiazdy stanowi 90% masy, część ogromnej energii, która wydzieliła się w wyniku implozji rdzenia.

Rozważmy proces implozji rdzenia o masie $1{,}4\ M_\odot$. Przed implozją, przy założeniu stałej gęstości, jego energia potencjalna wynosiła:

$$E_1 = -\frac{3GM_r^2}{5R_1} = -2 \cdot 10^{51} \text{ ergów}. \tag{5}$$

Podobnie jak na rysunku 2 założyliśmy, że $R_1 = 1\,500$ km. Po implozji $R = R_r = 13$ km (patrz równanie (4)), energia potencjalna równa jest

$$E_2 = -\frac{3GM_r^2}{5R_r} = -2{,}4 \cdot 10^{53} \text{ ergów}. \tag{6}$$

W wyniku implozji wydzieli się więc energia

$$\Delta E = E_1 - E_2 = 2{,}3 \cdot 10^{53} \text{ ergów}. \tag{7}$$

Ogromna większość tej energii (98%) zostanie uniesiona przez neutrina. Neutrina wyemitowane przez falę uderzeniową bez trudności przelatują przez otoczkę nadolbrzyma. Ich typowa energia równa się energii cieplnej cząstek przy temperaturze 10^{11} K, a więc $E_\nu = 10$ MeV. W wyniku implozji zostanie zatem w ciągu kilkunastu sekund wyemitowany na zewnątrz gwiazdy potężny impuls neutrin o energii około 10 MeV. Ilość ich wynosi

$$\Delta E/E_\nu = 10^{58}. \tag{8}$$

Zaledwie około 2% energii ΔE, a więc w naszym przypadku około $4 \cdot 10^{51}$ ergów, będzie przekazane przez falę uderzeniową otoczce, która zostanie wyrzucona z dużą prędkością na zewnątrz. Reszta energii zostaje użyta na emisję różnego typu promieniowania, w tym także widzialnego, oraz na ogrzanie materii.

Implozja rdzenia gwiazdy zamienia się więc w wybuch otoczki (rys. 3d), która rozszerza się w ciągu setek lat z prędkością tysięcy km/s. Promieniowanie otoczki wodorowej widzimy na Ziemi jako rozbłysk *supernowej* (dokładniej: supernowej typu II). Jasność supernowej w ciągu pierwszych kilku tygodni może dorównywać jasności galaktyki, w której supernowa rozbłysła. Tak więc bezpośrednio po eksplozji czerwonego olbrzyma jasność supernowej może być miliard razy większa od jasności typowej gwiazdy, takiej jak nasze Słońce! Supernowe, które rozbłysły w naszej Galaktyce, wzbudzały ogromne zainteresowanie z powodu swej ogromnej jasności oraz nagłości, z jaką się pojawiały. Najsławniejsza chyba supernowa była obserwowana w 1054 roku przez astronomów chińskich i została przez nich nazwana gwiazdą-gościem.

Stopniowo, w ciągu setek lat, otoczka rozszerza się tworząc świecącą mgławicę. Wybuch supernowej z 1054 roku pozostawił po sobie Mgławicę Krab. Bezpośrednim produktem implozji, która dała początek supernowej, jest w omawianym przez nas przypadku kula o masie nieco większej od masy Słońca i promieniu kilkunastu kilometrów, która w konsekwencji neutronizacji materii składa się głównie z neutronów. Ten zadziwiający twór — to *gwiazda neutronowa* (patrz *Delta* 7/1980), obserwowana w przypadku Mgławicy Krab jako *pulsar* (patrz *Delta* 8/1980).

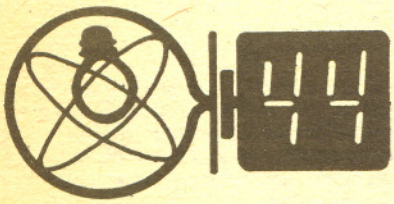
Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 23 /WT=2,40/ i 24 /WT=2,19/ z numeru 2/1986

Piotr Bała	- Toruń	47,54pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	32,53pkt
Aleksander Surma	- Myszków	22,37pkt

Witamy pierwszego członka Klubu 44 F, którym został pan Piotr Bała.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1986

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z fizyki nr 31, 32

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

31. Obliczyć stosunek E_a/E_b wartości natężenia pola elektrycznego, występującego w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ, gdy E_a i E_b odpowiadają nieskończonej powierzchni płaskiej i powierzchni kuli.

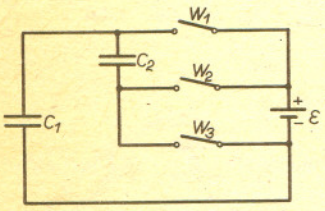
32. W badaniach dna oceanicznego wykorzystuje się między innymi prowadzone za pomocą sztucznych satelitów Ziemi pomiary kształtu powierzchni oceanu, która — jak się okazuje — ma lokalne wzniesienia oraz depresje. Jakie informacje dotyczące dna oceanu można uzyskać na podstawie wyników takich pomiarów? Przytoczyć tok rozumowania.
Zadanie **31** nadesłał pan Robert Repucha z Gołdapi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1986

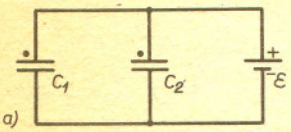
Przypominamy treść zadań:

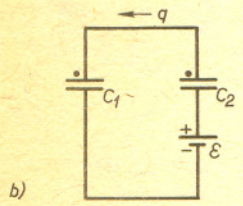
27. W chwili początkowej wszystkie włączniki w obwodzie z rysunku 1 są rozwarte, a kondensatory (pojemność C_1 i C_2) nie naładowane. Zwieramy W_1 i W_3, po pewnym czasie rozwieramy i zwieramy W_2. Wyznaczyć wartość i znak końcowego napięcia na C_2. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi $\mathscr{E}$, opór wewnętrzny zaniedbać.

28. Traktując cząsteczkę jodku cezu (CsI) jako sztywny układ dwóch ładunków ($\pm 1{,}6\cdot 10^{-19}$C) o masach $2\cdot 10^{-25}$ kg, oddalonych od siebie o $3\cdot 10^{-10}$ m, obliczyć częstotliwość drgań, jakie cząsteczka będzie wykonywała w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $3\cdot 10^{6}$ V/m po nagłej zmianie kierunku pola o niewielki kąt.



Rys. 1





Rys. 2

27. Schemat układu przy zwartych wyłącznikach W_1 i W_3 przedstawia rysunek 2a. Na obu kondensatorach panuje napięcie $U = \mathscr{E}$, a zgromadzony w nich ładunek wynosi odpowiednio $Q_1 = C_1\mathscr{E}$ oraz $Q_2 = C_2\mathscr{E}$, przy czym okładki oznaczone kropkami są naładowane dodatnio. Sytuację końcową — po rozwarciu W_1 i W_2 oraz zwarciu W_3 — przedstawia rysunek 2b. Oznaczając panujące na kondensatorach napięcia przez U_1, U_2 (dodatnie wartości U_1, U_2 odpowiadają polaryzacji napięcia jak w poprzednim przypadku) możemy napisać

$$U_1 = U_2 + \mathscr{E}. \tag{1}$$

Ładunki na obu kondensatorach wynoszą teraz odpowiednio

$$Q_1' = C_1U_1 = Q_1 + q \quad \text{oraz} \quad Q_2' = C_2U_2 = Q_2 - q,$$

gdzie q jest ładunkiem, który przepłynął w obwodzie po zwarciu wyłącznika W_3. Suma tych ładunków jest równa

$$C_1U_1 + C_2U_2 = (C_1 + C_2)\mathscr{E}. \tag{2}$$

Rozwiązując układ równań (1) i (2) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie

$$U_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\mathscr{E}$$

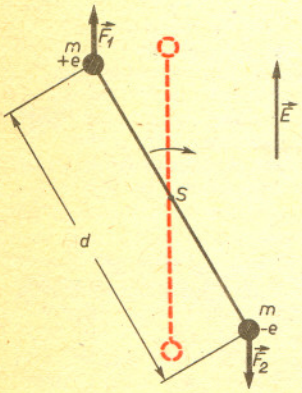
(dodatni biegun na okładce oznaczonej kropką).

28. Przyjmijmy, że dipolowa cząsteczka CsI znajdowała się pierwotnie w położeniu równowagi trwałej, tzn. była skierowana równolegle do wektora natężenia pola elektrycznego E. Nagła zmiana kierunku wektora E odpowiada wychyleniu cząsteczki z położenia równowagi. Działające na ładunki $+e$, $-e$ siły elektryczne F_1 i F_2 (patrz rysunek 3) powodują obrót cząsteczki dookoła jej środka masy S. W wyniku tego cząsteczka zaczyna drgać wokół swego położenia równowagi (na rysunku zaznaczone linią przerywaną). Sytuacja każdego z drgających ładunków jest analogiczna, jak punktu materialnego w wahadle matematycznym o długości $d/2$ (d — odległość między jonami w cząsteczce) z tą różnicą, że zamiast siły przyciągania ziemskiego mg na każdą z mas m działa siła eE. Wobec tego we wzorze na okres drgań wahadła matematycznego

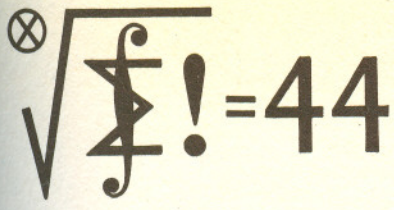
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d/2}{g}}$ zastępujemy przyspieszenie ziemskie g wyrażeniem $\dfrac{eE}{m}$, otrzymując

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{dm}{2eE}}$. Częstotliwość omawianych drgań wynosi zatem $\nu = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{eE}{2dm}}$.

Po podstawieniu danych otrzymujemy $\nu = 2\cdot 10^{10}$ Hz.



Rys. 3

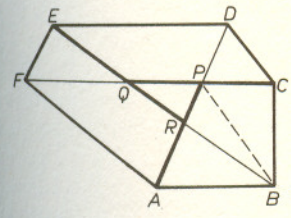


Czołówka listy zadaniowej "Klub 44 M"

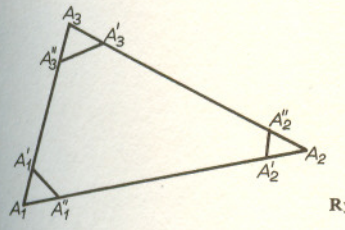
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 125 /WT=2,94/ i 126 /WT=2,32/ z numeru 2/1986

Piotr Jędrzejewicz	– Toruń	48,99pkt
Dariusz Sowizdrzał	– Szczecin	44,46pkt
Marian Roman	– Ełk	43,09pkt
Andrzej Sudoł	– Nowy Sącz	42,56pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	42,54pkt
Marek Prauza	– Poraj	41,30pkt
Tomasz Rawlik	– Gliwice	41,03pkt

Pan Jędrzejewicz to numer 42 w Klubie 44.
Pan Sowizdrzał – już po raz trzeci /i jest szóstym Weteranem Klubu 44/.



Rys. 1



Rys. 2

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Zadania z matematyki nr 133, 134

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

133. Dać przykład wielościanu wypukłego o następujących własnościach:
a) wszystkie krawędzie mają równe długości oraz są styczne do pewnej sfery;
b) nie istnieje sfera opisana na tym wielościanie.
Rozwiązanie będzie uważane za tym lepsze, im mniej krawędzi będzie miał wielościan.

134. Rozwiązać równanie

$$x = 5+(5+(5+\ \dots\ +(5+(5+x^{-1})^{-1})^{-1}\ \dots)^{-1})^{-1};$$

po prawej stronie występuje n piątek i n znaków odwrotności oraz $n-1$ par nawiasów; n jest ustaloną liczbą naturalną.
Zadanie **134** przysłał pan Stanisław Wróbel z miejscowości Mroczeń w woj. kaliskim.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1986

Przypominamy treść zadań:

129. Czy sześciokąt wypukły o polu S musi mieć trzy kolejne wierzchołki takie, że pole T trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki spełnia nierówność: a) $T \leqslant S/6$, b) $T \geqslant S/6$?

130. Znaleźć kres dolny liczb postaci $m^{-1/n}+n^{-1/m}$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

129. Odpowiedź: a) tak, b) nie. Uzasadnienie:
a) Przy oznaczeniach z rysunku 1 któryś z czworokątów $ABCP$, $CDEQ$, $EFAR$ ma pole $\leqslant S/3$. Przypuśćmy, że jest to czworokąt $ABCP$. Przekątna $\overline{BP}$ dzieli go na dwa trójkąty i któryś z nich ma pole $\leqslant S/6$. Niech to będzie trójkąt BCP. Jego pole jest niemniejsze od pola któregoś z trójkątów ABC, BCD. Stąd teza.
b) Weźmy dowolny trójkąt $A_1A_2A_3$ o polu S. Na bokach wychodzących z każdego wierzchołka A_i obierzmy w niewielkiej od niego odległości punkty A_i', A_i'' (rysunek 2). Gdy punkty A_i', A_i'' zbliżają się do A_i $(i = 1, 2, 3)$, pole sześciokąta $A_1'A_1''A_2'A_2''A_3'A_3''$ dąży do S, podczas gdy pole każdego z trójkątów wyznaczonych przez trzy kolejne wierzchołki tego sześciokąta dąży do zera.

130. $\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{m\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\ \dots\ \cdot1}_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}(m+n-1)$ i podobnie $\sqrt[m]{n} \leqslant \frac{1}{m}(n+m-1)$.

Zatem rozważane wyrażenie jest $\geqslant \frac{n}{m+n-1}+\frac{m}{m+n-1} > 1$. Przy tym liczba 1 jest kresem dolnym: gdy $m = 1$ i $n \to \infty$, badane wyrażenie dąży do 1.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 442. Rzucamy monetą, dopóki nie wypadnie orzeł. Ile średnio prób trzeba wykonać, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie wynosi p? Zakładamy, że wartość średnia ilości prób istnieje.
Rozwiązanie na str. 14

M 443. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sin x$ nie jest wielomianem.
Rozwiązanie na str. 2

M 444. Znaleźć pole figury ograniczonej wykresem funkcji $\sin^2 x$ i prostymi $x = \frac{\pi}{2}$, oraz $y = 0$.
Rozwiązanie na str. 1

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 202. Gaz doskonały o temperaturze T_1 zamknięty jest w elastycznej, nie przewodzącej ciepła powłoce pod ciśnieniem P_1. Wyznaczyć temperaturę gazu T_2 po gwałtownej zmianie ciśnienia do wartości P_2. Jaka byłaby zmiana temperatury, gdyby proces zachodził odwracalnie?
Rozwiązanie na str. 2

F 203. Izolowany cieplnie pojemnik z gazem doskonałym zawieszono na nici. Działanie siły ciężkości powoduje, że gęstość gazu w dolnej części naczynia jest większa niż w górnej. Nić przecięto. Czy temperatura gazu po dojściu do stanu równowagi termodynamicznej w czasie swobodnego spadku będzie inna niż przed przecięciem nici?
Rozwiązanie na str. 7