W lipcu w Warszawie odbędzie się XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Jej właśnie, a właściwie różnym olimpiadom poświęcamy ten numer.

W XXVII MOM obok reprezentacji ponad 30 krajów wystąpi również nasza reprezentacja (oczywiście poza konkursem). O sposobie wyłonienia reprezentacji spośród członków **Klubu 44** można przeczytać w Lidze. Trzymajmy za nią kciuki.

SPIS TREŚCI

NUMERU 5(149)

W następnym numerze:
150 pozycji

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch"
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd; 2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 2137/12/86. P-28.

WARUNKI PRUNEMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty" na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch".
3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

10 lutego zmarł w Warszawie

profesor JERZY MYCIELSKI

wybitny fizyk teoretyk, wieloletni przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej.

Pracami dotyczącymi fizyki półprzewodników, a zwłaszcza teorii przewodnictwa domieszkowego i teorii półprzewodników półmagnetycznych zdobył szerokie uznanie międzynarodowe.

Odejście Profesora jest wielką stratą dla środowiska fizyków, dla którego był nie tylko autorytetem naukowym, ale i moralnym.

Pierwsza Olimpiada Matematyczna

Prof. dr Stanisław BALCERZYK, Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Minęło ponad 36 lat od zorganizowania I Olimpiady Matematycznej w roku szkolnym 1949/50. Już sam fakt corocznego odbywania zawodów przez tak długi okres i minimalne zmiany dokonane w regulaminie świadczą o tym, że podjęcie przez Polskie Towarzystwo Matematyczne inicjatywy ówczesnego Ministra Oświaty, dr Stanisława Skrzeszewskiego, było decyzją udaną, a formy organizacyjne — opracowane pod kierunkiem prof. Stefana Straszewicza — dobrze przemyślane. Wszyscy biorący udział w prowadzeniu Olimpiad poświęcają tej pracy wiele trudu i czasu, gdyż wiedzą, że ich działanie jest rzeczywiście pożyteczne, służy zarówno podniesieniu poziomu nauczania w szkole, jak też umożliwia odnalezienie uczniów uzdolnionych matematycznie i uświadomienie im, że mają realne szanse zgłębienia wiedzy matematycznej, a czasem nawet możliwości wzbogacenia matematyki.

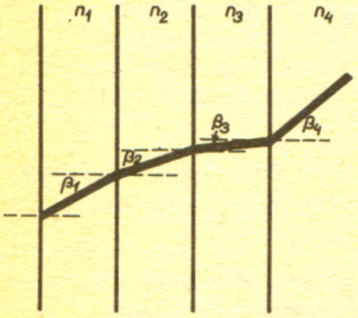
Nie zamierzam podejmować zadania oceny dorobku wszystkich dotychczasowych Olimpiad Matematycznych, a chciałbym jedynie podzielić się wspomnieniami weterana I Olimpiady Matematycznej.

W czasie ubiegłych 35 lat zmieniło się bardzo wiele zarówno w matematyce jako nauce, jak i w sytuacji uczniów i szkół oraz w programach nauczania. Matematyka, w odróżnieniu od wielu innych dziedzin nauki, może poszczycić się wyjątkową trwałością swych osiągnięć. Twierdzenia udowodnione sto, dwieście czy więcej lat temu pozostają nadal prawdziwe i często stają się ponownie przedmiotem badań współczesnych matematyków uzyskując nową, bogatszą treść. Bardzo często konkretne zagadnienia i hipotezy stanowią przez wiele dziesięcioleci tematykę intensywnych badań. Ta ponadczasowość wyników matematycznych wraz z niedostępnością wyników nowszych zaważyła na materiale prezentowanym w programach szkolnych, które dopiero w ciągu ostatnich kilkunastu lat wykroczyły poza dorobek uzyskany w XVII lub na początku XVIII wieku. Ostatnie reformy programów nieco zbliżyły materiał nauczania i przedstawiony w nim zasób pojęć do dzisiejszego stanu wiedzy matematycznej. Mimo to matematyka jest stale w sytuacji znacznie gorszej niż fizyka, chemia czy biologia, których pewne osiągnięcia dokonane w ciągu ostatnich kilkunastu lat można — chociaż w bardzo znacznym uproszczeniu — omówić na lekcjach. Od dzisiejszej matematyki uczeń jest stale odgrodzony trudną do przeniknięcia zasłoną abstrakcji i formalizmu. Nie ma żadnego wyobrażenia, co się za nią kryje: czy jałowe, całkowicie wyeksploatowane składowisko starych, skomplikowanych wzorów, czy może tajne zebrania, na których matematycy uczą się na pamięć wielocyfrowych tablic logarytmicznych. Nie ma żadnych podstaw, aby domyślać się, że za tą zasłoną znajduje się piękny i tętniący życiem świat pełen nowych zagadnień, coraz doskonalszych metod, świat, któremu wielu ludzi potrafi poświęcić wszystkie siły i zdolności przeżywając głęboką satysfakcję (a także klęski) oraz odczucia takiej samej natury jak towarzyszące kontaktowi z dziełami sztuki.

Życie uczniów i szkoły uległo w ciągu 35 lat dużym zmianom. Co prawda stale odczuwa się niedostatek podręczników, jednak w pierwszych latach powojennych naprawdę rozpaczliwie brakowało praktycznie wszystkich podręczników. Cudem zachowane podręczniki przedwojenne były bardzo nieliczne, dwa-trzy w klasie, niektóre przedrukowywano w skróconej wersji, do wielu przedmiotów podręczników nie było wcale. Stopniowo sytuacja się poprawiała, lecz nie mieliśmy praktycznie żadnego dostępu do jakichkolwiek książek popularnonaukowych czy uzupełniających. Nie działały jeszcze koła uczniowskie, przynajmniej w mojej szkole. Jedyną możliwość rozszerzenia wiedzy ucznia stanowiło sięgnięcie po podręcznik starszej klasy, o ile taki był dostępny, a nie zawsze była to możliwość atrakcyjna.

W latach 1948—50 uczęszczałem do Liceum im. Mikołaja Kopernika w Toruniu, do klasy typu matematyczno-fizycznego (były jeszcze klasy typu przyrodniczego i humanistycznego) w ostatnim roczniku, dla którego podział taki był utrzymany.

Rozwiązanie zadania F 199. Dla promienia światła przechodzącego przez układ płytek płaskorównoległych pokazany na rysunku a

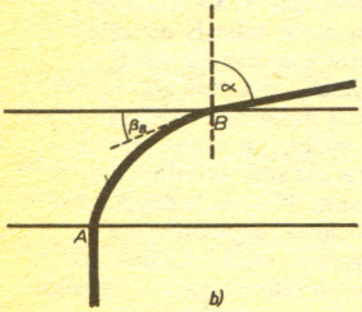


a)

mamy z prawa Snelliusa

$$n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1$$
$$n_3 \sin \beta_3 = n_2 \sin \beta_2 \text{ itd.}$$

Stąd ogólnie $n_i \sin \beta_i =$ const. Związek ten nie zależy od liczby i grubości warstw, można go więc stosować także w przypadku ciągłej zmiany współczynnika załamania.



b)

Rozważmy sytuację pokazaną na rysunku b. W punkcie A kąt β jest równy 90°, a współczynnik załamania $n = n_0$. Mamy więc

$$n_0 \sin \beta = n_B \sin \beta_B.$$

Z prawa Snelliusa w punkcie B mamy dodatkowo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \beta_B)} = n_B.$$

Stąd dostajemy $\sin\alpha = \sqrt{n_B^2 - n_0^2}$.

Zatem $n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2\alpha}$ $(= 1{,}3)$.

Współrzędną x_B wyznaczamy ze wzoru na n w tekście zadania. Dostajemy

$$x_B = R\left(1 - \frac{n_0}{n_B}\right) \quad (= 1 \text{ cm}).$$

Odpowiedź na pytanie zawarte w punkcie 3 wymaga wyznaczenia kształtu toru promienia. Czytelnikowi pozostawiamy do wykazania, że między punktami A i B światło porusza się po łuku okręgu o środku w punkcie $(R, 0)$ i promieniu R. Korzystając z tego faktu bez trudu znajdujemy $d = 5$ cm.

Późniejsze roczniki miały jednolity program, a powrót do klas kierunkowych jest nowością wprowadzoną przed kilkunastoma laty. Szkoła miała ogromne tradycje, gdyż została założona w 1568 r., prezentowała wysoki poziom, co zawdzięczała nie tylko kadrze przedwojennych pedagogów, lecz również studentom Uniwersytetu Mikołaja Kopernika pracującym w tej szkole, którzy swój brak doświadczenia pedagogicznego potrafili na ogół z nawiązką nadrobić oryginalnością podejścia do tematyki i bliższym kontaktem ze swymi uczniami.

Większość kolegów kończących liceum typu matematyczno-fizycznego wybierała studia na różnych wydziałach politechnik. Studia te cieszyły się poważaniem i popularnością, wiedzieliśmy dokładnie, do czego przygotowują, mieliśmy dosyć jasne wyobrażenie o pracy inżyniera; nie ulegało również wątpliwości, że technika szybko posuwa się naprzód i że ktoś ten postęp tworzy. Również o studiach na kierunkach fizyki i chemii mieliśmy mniej więcej poprawne wyobrażenie, zdając sobie sprawę, że wykształcenie w tych specjalnościach daje przygotowanie praktyczne do pracy w różnych dziedzinach, jak również, że nauki te stale rozwijają się. Spektakularne postępy dokonane w fizyce czy chemii nie pozostawiały wątpliwości, że rozwój ten jest bardzo szybki. Nikt z nas, jak sądzę, nie zdawał sobie jednak sprawy z tego, czy w Polsce dokonuje się w tych dziedzinach jakiś postęp, kto ewentualnie jest jego twórcą, a wątpię, aby ktoś myślał o własnych możliwościach w tej dziedzinie.

Jeśli chodzi o matematykę, sprawa wyglądała jeszcze gorzej. Zakres materiału szkolnego nie dawał najmniejszej możliwości dostrzeżenia chociażby najbardziej niejasnych oznak, że matematyka jest żywa, rozwija się i coś nowego w niej się dzieje. Jedynymi matematykami, o których istnieniu wiedzieliśmy, byli nauczyciele, gdyż mimo funkcjonowania w Toruniu uniwersytetu nie mieliśmy z jego pracownikami żadnego kontaktu. Program liceum typu matematyczno--fizycznego przewidywał sporo godzin matematyki, co więcej, nasz nauczyciel, mgr Maksymilian Bylicki, wykorzystywał swoją funkcję wychowawcy klasy dla zwiększenia tej liczby anektując mniej prestiżowe lekcje na rzecz kierunku zasadniczego — matematyki. Dzięki temu poznaliśmy w klasie maturalnej dosyć szczegółowo podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Najważniejsze było jednak zapewne wciągnięcie w bogaty świat pojęć pozwalających dostrzec nie tylko np. zastosowania matematyki do opisu i analizy zjawisk fizycznych, lecz także odczuć prężność, rozległość i głębię poruszanych tematów. Oczywiście nie wszyscy dobrze znosili tak duże dawki matematyki, dodatkowe lekcje matematyki witane były często zbiorowym jękiem. Otrzymaliśmy jednak świetne przygotowanie do studiów, pozwalające łatwo przetrzymać wstrząs, przeżywany zwykle przez studentów na początku pierwszego roku.

W takiej to sytuacji pewnego dnia w końcu 1949 roku mgr Bylicki przyniósł do klasy teksty zadań pierwszego etapu I Olimpiady Matematycznej. Jak później wspominał, znalazł je przypadkowo na ulicy, mimo że powinny dotrzeć pocztą do wszystkich szkół ogólnokształcących. Bardzo energicznie zachęcał, namawiał do rozwiązywania zadań i nie pozostawiał możliwości uniku tym, na których liczył. Rozwiązywanie zadań pozostawiał jednak całkowicie naszej samodzielności. Zadania stanowiły oczywiście pewne wyzwanie nie tylko dlatego, że odbiegały swym stylem od „zadań domowych", ale głównie dzięki niezwykłości pomysłu zawodów matematycznych, nazwanych w dodatku Olimpiadą. Nigdy o niczym takim nie słyszeliśmy. Wszystkie te czynniki razem stanowiły dostatecznie silny impuls do rozmyślania nad zadaniami. Cel przedstawiony w komunikacie Komitetu Olimpiady — wyłonienie dwudziestu laureatów (którym przyznano prawo wstępu na wydziały matematyczno--przyrodnicze uniwersytetów i na dowolny wydział wyższych szkół technicznych — ale po zdaniu egzaminu z nauki o Polsce i świecie współczesnym) — wydawał się bardzo odległy i nierealny. Nie przypuszczam, aby wielu uczestników od początku liczyło na znalezienie się w tej dwudziestce.

Dobrze pamiętam emocje towarzyszące rozwiązywaniu zadań, wymianę poglądów, a także nieoczekiwane trudności związane z opisaniem rozwiązań. Wezwanie na zawody II stopnia w Łodzi, otrzymane wspólnie z czterema kolegami z mej szkoły, było miłą niespodzianką. Kontakt z większą grupą uczestników, podniecenie w czasie rozwiązywania zadań, wreszcie sam fakt, że interesuje się nami ktoś spoza szkoły, stanowiły duże przeżycie. Takie same są z pewnością przeżycia uczestników obecnych Olimpiad. Sądzę jednak, że mają oni znacznie gruntowniejsze przygotowanie do zawodów dzięki nowocześniejszym

programom nauczania, rozpowszechnianiu pracy kół matematycznych czy nawet klas matematycznych, wreszcie dzięki znajomości całej tradycji i dorobku Olimpiad, opublikowanego w specjalnej serii książek. Z drugiej strony, w tych dawnych latach nie było wielu dzisiejszych atrakcji i rozrywek, jak telewizja, płyty itp., które znacząco wpływają na zainteresowania i program dnia dzisiejszych uczniów. Nie było też informatyki, która potrafi fascynować młodych ludzi i, być może, przybliżyć ich do matematyki.

Zarówno po zawodach I etapu, jak i II etapu w Łodzi, czy III etapu w Warszawie nie miałem żadnego poglądu na szanse własnego powodzenia. List Komitetu Głównego Olimpiady zawiadamiający o przyznaniu nagrody był zaskoczeniem i oczywiście sprawił mi ogromną radość. Jeszcze stale uważam ten, tak już dawno otrzymany, dyplom laureata Olimpiady Matematycznej za jedno z najcenniejszych swych osiągnięć. Ważne także dlatego, iż bez niego zapewne nie zdecydowałbym się na podjęcie studiów matematycznych.

Uroczystość zakończenia Olimpiady w dniu 20 czerwca 1950 roku rozpoczęła się w Seminarium Matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego, które mieściło się wówczas w gmachu Obserwatorium Astronomiczego przy Alejach Ujazdowskich. Profesor Wacław Sierpiński wygłosił odczyt na temat teorii liczb. Uroczystość wręczenia dyplomów i nagród odbyła się w Ministerstwie Oświaty pod przewodnictwem ówczesnego podsekretarza stanu, prof. dr. Henryka Jabłońskiego, uczestniczył również Minister Szkół Wyższych i Nauki, Adam Rapacki. Matematyków reprezentowali prof. dr Wacław Sierpiński — Prezes Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, prof. dr Kazimierz Kuratowski — Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego, prof. dr Stefan Straszewicz — Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady, prof. dr Kazimierz Zarankiewicz — Kierownik Olimpiady. Przemówienia, dyplomy, nagrody — wielka ceremonia. Niezwykłe wrażenie wywarł na mnie fakt, że jako nagrody otrzymaliśmy dwie książki napisane przez prof. Sierpińskiego i jedną — przez prof. Kuratowskiego, a autorzy byli tuż obok, podpisywali swe książki. Szczególnie serdecznie zabrzmiały końcowe słowa przemówienia prof. Kuratowskiego: „W imieniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego witam was jako nowych członków rodziny matematycznej".

Gdy dokładnie w 30 lat później, 20 czerwca 1980 roku uczestniczyłem w pogrzebie prof. Kuratowskiego, wspominałem to jego przemówienie, z którego przytoczę jeszcze jedno zdanie: „Starać się będziemy jak najbardziej udostępnić wam poznanie tej wspaniałej nauki przez was i przez nas umiłowanej". Jak wiele znaczyła ta deklaracja wspólnoty, mogłem docenić dopiero po latach, gdy byłem w stanie stwierdzić, jaka była pozycja prof. Kuratowskiego w światowej matematyce.

Co dała I Olimpiada Matematyczna swym uczestnikom? Sądzę, że głównie okazję sprawdzenia uzdolnień, przekonanie, że ponieważ istnieją tu w kraju ludzie, którzy znajdują w kontakcie z matematyką tak wiele satysfakcji, to, być może, mamy szansę dołączenia do nich. O sobie mogę powiedzieć tyle, iż w czasach szkolnych lubiłem matematykę, dostrzegałem walory rozumowania matematycznego, jednak przed decyzją wyboru matematyki jako kierunku studiów powstrzymywała mnie obawa, iż odnajdywanie i dostrzeganie uroków i piękna matematyki może nie trwać długo. Przypuszczałem, że zastosowania techniczne pozwalają poznawać i owocnie stosować dorobek matematyki. Dziś wiem, że odnosi się to jedynie do niewielkiej jej części. Wiem też, że matematyka jest wiecznie młoda, żywotna i stale ukazuje swym poddanym fascynujące zagadnienia i wspaniałe nowe wyniki.

Na przełomie XIX i XX wieku bogaty patron astronomii H. H. Warner z Rochester (stan Nowy Jork) nagradzał odkrycie każdej nowej komety przez obserwatora amerykańskiego sumą 200 dolarów. Szczególnie zasłużonymi łowcami komet w owych czasach byli Amerykanie Barnard i Brooks. Każdy z nich ma na swym koncie odkrycie 22 komet. Barnard pięciokrotnie otrzymał nagrodę ufundowaną przez Warnera, a za uzyskane w ten sposób pieniądze kupił dom, który stał się znany jako „Dom Komet". Rekord liczby odkrytych komet osiągnął Francuz Pons, który w latach 1801—1827 odkrył ich aż 29.

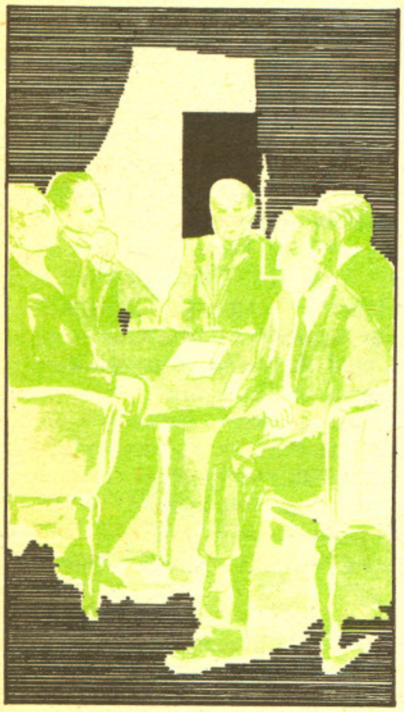
Dawniej komet szukało zaledwie kilkunastu ludzi na całym świecie, toteż szczególna wytrwałość nagradzana była zwykle sukcesem.

Obecnie poszukiwaniami takimi zajmują się setki astronomów i miłośników nieba, a więc odkryć kometę coraz trudniej. Dzisiejsze współzawodnictwo jest raczej innego rodzaju. Polega ono na odszukiwaniu komet periodycznych w przewidywanych teoretycznie okolicach nieba, sukcesem jest najwcześniejsze dostrzeżenie określonej komety.

J. U.

Byłem koordynatorem

Dr Marcin E. KUCZMA



Zawodowy matematyk, jeśli chce, by jego prace były czytane, pisze je w jednym z kilku języków które zyskały rangę międzynarodowych. Jaka taka ich znajomość należy do elementarza wykształcenia każdego, kto chce pracować naukowo. Trudno wszelako byłoby wymagać od tak młodych adeptów matematyki, jakimi są uczestnicy olimpiad, żeby i oni operowali biegle obcym językiem. Piszą więc swoje rozwiązania w swoich językach ojczystych. Trzeba potem przecież te rozwiązania jednolicie i sprawiedliwie ocenić. Wśród jurorów nie ma nikogo, kto byłby w stanie czytać i tekst polski, i fiński, i mongolski.

Spróbujmy spojrzeć ,,od kuchni'' na pracę Jury Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Kto wchodzi w skład jury? Oczywiście matematycy, reprezentujący państwa uczestniczące w olimpiadzie — po prostu opiekunowie poszczególnych ekip. Każdy z nich czyta więc prace swoich podopiecznych. Jak to zrobić, żeby było sprawiedliwie? Trzeba tu jasno powiedzieć, że nikt nie kwestionuje uczciwości ocen, nie w tym rzecz. Rozwiązanie bezbłędne otrzymuje ocenę maksymalną, rozwiązanie całkiem błędne otrzymuje ocenę zero. Kłopoty zaczynają się przy rozwiązaniach częściowo poprawnych: luki w dowodach, przeoczenia przypadków, błędy rachunkowe, brak precyzji, zrobienie tylko części zadania.
Rozwiązanie z analogiczną usterką może być przecież całkiem różnie ocenione przez różnych czytających.

W ciągu pierwszego dnia po zawodach jurorzy mają obowiązek zapoznać się z pracami swoich podopiecznych (większości ekip towarzyszy dwóch opiekunów, ale formalnie tylko jeden z nich wchodzi w skład jury, drugi jest zastępcą; prace uczniów czytają i oceniają jednak obaj). Tu zaczyna się rola koordynatorów. Są to matematycy z kraju organizującego olimpiadę, wchodzą w skład zespołu obsługi imprezy. Ich zadaniem jest, jak nietrudno zgadnąć, koordynacja. Każdy koordynator ma przydzielone jedno z zadań konkursowych i w toku pracy staje się ,,specjalistą'' od tego zadania. Musi porozmawiać z wszystkimi jurorami, gdy tylko zakończą oni pierwsze czytanie prac uczniowskich. Z tej rozmowy dowiaduje się, jakie są typowe metody rozwiązania danego zadania, jakie są typowe (a także nietypowe) błędy i usterki, i wreszcie, jak każdy z jurorów proponuje oceniać rozwiązania obarczone tymi usterkami.

Na plenarnym posiedzeniu jury każdy koordynator opowiada o ,,swoim'' zadaniu, o efektach przeprowadzonych wywiadów, przedstawia propozycje ocen za nie w pełni poprawne rozwiązania i wywołuje tym lawinę wypowiedzi. Ktoś spośród członków jury, o liberalnym spojrzeniu na świat, uważa, że omawiane przeoczenie nie powinno ważyć zbyt wiele; inny, patrzący ostrzej, ripostuje, że termin ,,przeoczenie'' jest tu eufemizmem, że takie rozwiązanie jest bezwartościowe. Dać jeden punkt czy sześć punktów? Demokracja: dyskusje, wnioski, głosowanie. Przeważa opinia, że należą się cztery punkty. Jest bezwzględna większość głosów? To całe szczęście...

Co dalej? Zamiast ogólnikowo, może lepiej opowiedzieć przykładem. XIV MOM odbyła się w Polsce, w 1972 roku. Byłem koordynatorem zadania nr 5. Oto jego treść: Funkcje f, g $:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ spełniają równanie $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)g(y)$ dla $x, y \in \mathbf{R}$; $f \not\equiv 0, |f(x)| \leqslant 1$ dla $x \in \mathbf{R}$; dowieść, że $|g(y)| \leqslant 1$ dla $y \in \mathbf{R}$. Zadanie, jak za chwilę zobaczymy, jest bardzo łatwe. A jednak...
A jednak na 107 uczestników aż 49 otrzymało ocenę zero. Jak to wyjaśnił szef jednej z ekip, członek jury: ,,U nas w szkołach rozpatruje się tylko konkretne funkcje: ax^2+bx+c, $\log x$, $\sin x$ itp. Ale funkcje tak w ogóle? To abstrakcja. Każdy uczeń zna definicję funkcji, ale gdy trzeba coś udowodnić, nie mając w ręce konkretnej funkcji, danej jawnym wzorem, staje bezradny''.

Z podanego równania widać od razu, że spełniają je na przykład funkcje $f(x) = \sin x$, $g(y) = \cos y$. I wszystko się zgadza: i założenie ($|\sin x| \leqslant 1$), i teza ($|\cos y| \leqslant 1$). To zauważyli chyba wszyscy uczestnicy, ale u wielu na tym się skończyło. Niektórzy zauważali, że istnieją i inne dobre pary funkcji — na przykład $f(x) = \cos x$, $g(y) = \cos y$, czy choćby po prostu $f \equiv 1$, $g \equiv 1$. Wykonując proste podstawienia można uzyskać pewne informacje o funkcji g; na przykład podstawienie $y = 0$ prowadzi do wniosku, że $g(0) = 1$, a podstawienia $y = x$ i $y = -x$ pozwalają przekonać się, że funkcja g musi być parzysta. Wszystkie te obserwacje, razem wzięte, niewiele przybliżają do rozwiązania zadania. Jednakże, choć może trudno w to uwierzyć, uczniowie, którzy odnotowali w swej pracy te właśnie spostrzeżenia (i nic ponadto), zostali nagrodzeni jednym punktem (skala ocen za to zadanie przewidywała maksimum siedem punktów).

Jak do tego mogło dojść? Ano, w ekipach kilku państw nikt z uczestników nie osiągnął nic więcej ponad te prościutkie stwierdzenia. Trudno się dziwić, że szefowie tych ekip postawili wniosek, by uznać to za przyczynek do rozwiązania zasługujący na dodatnią punktację (,,u nas w szkołach itd.''). Wniosek, choć z oporami — przeszedł!

Przy okazji, jest to wskazówka taktyczna dla uczestników olimpiad międzynarodowych: pisać w pracy wszystkie uwagi i spostrzeżenia na temat danego zadania, nawet całkiem trywialne i we własnej opinii bezwartościowe. Zawsze się tak może zdarzyć, że przez kurtuazję dla słabszych ekip jury przyzna za to jeden lub dwa punkciki. A końcowa klasyfikacja powstaje przez zsumowanie ocen za wszystkie zadania...

Rozwiązanie zadania F 198. Gęstość można określić jako stosunek masy atomów przypadających na komórkę do objętości tej komórki. Łatwo przekonać się, że na rozważaną komórkę przypadają 4 atomy chloru i 4 atomy sodu. Zatem gęstość soli kuchennej wynosi

$$\varrho = \frac{4m_{\mathrm{H}}(A_{\mathrm{Cl}}+A_{\mathrm{Na}})}{a^3},$$

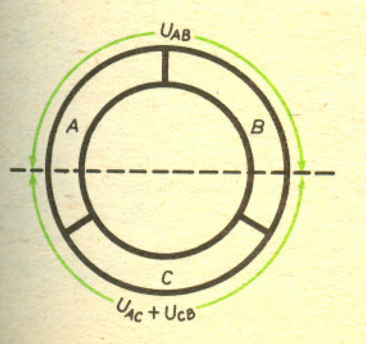
gdzie m_{H} oznacza masę atomu wodoru, a A_{Cl} i A_{Na} — masy atomowe chloru i sodu. Stąd

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{\varrho a^3}{4(A_{\mathrm{Cl}}+A_{\mathrm{Na}})} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}.$$

Rozwiązanie zadania M 436. Rozpatrzmy ścianę o największej liczbie boków n. Ma ona n sąsiadów o liczbach boków zawartych między 3 i n. W takim razie (zasada szufladkowa Dirichleta) pewne dwie ściany muszą mieć tę samą liczbę boków.

Rozwiązanie zadania M 437. Ponieważ suma dowolnych pięciu liczb napisanych na kartkach nie przekracza $2^2 + \ldots + 2^6 = 124$, losowań musi być co najmniej sześć. Każde ze zdarzeń, polegających na tym, że kartka z liczbą 2^{n-1}, $n = 1,2,\ldots, 7$ nie została wylosowana, ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{7}$. Jeśli $n = 3, 4, 5, 6$ lub 7, to suma liczb na wylosowanych kartkach jest mniejsza od 124, a po siódmym losowaniu wynosi 127. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania liczby 127 wynosi $\frac{5}{7}$ i jest większe niż prawdopodobieństwo otrzymania 125 i 126.

Rozwiązanie zadania F 197. Połączmy ciała w pierścień pokazany na rysunku. Gdyby napięcie U_{AB} było różne od $U_{AC}+U_{CB}$, w pierścieniu płynąłby prąd. Załóżmy, że rozważane przewodniki (co najmniej jeden z nich) nie są nadprzewodnikami. Przepływowi prądu towarzyszą wtedy różnego rodzaju zjawiska cieplne, np. zjawisko Joule'a-Lenza, chłodzenie co najmniej jednego złącza, ogrzewanie co najmniej jednego złącza itp. Ze względu na zachowanie energii pierścień nie może być w każdym swym punkcie cieplejszy od otoczenia. Jeżeli gdzieś jest cieplejszy (a z pewnością takie miejsca są ze względu na zjawisko Joule'a-Lenza), to muszą też być gdzieś obszary o temperaturze mniejszej niż temperatura otoczenia. W takim razie umieszczając chłodnicę silnika cieplnego w chłodniejszym miejscu pierścienia, a grzejnik na zewnątrz pierścienia moglibyśmy, jako jedyny skutek, zamieniać bez ograniczenia ciepło z otoczenia na pracę mechaniczną, co jest sprzeczne z II zasadą termodynamiki. Gdyby A, B i C były nadprzewodnikami i gdyby przynajmniej na początku U_{AB} było różne od $U_{AC}+U_{CB}$, to płynący początkowo bardzo duży prąd zniszczyłby stan nadprzewodzący.



Ożywioną dyskusję wzbudził sposób rozwiązania, który pojawił się w kilku pracach, a polegał na sprowadzeniu do równania różniczkowego. Dwukrotne zróżniczkowanie lewej strony danego równania względem zmiennej x, a także względem zmiennej y, daje ten sam wynik. Podobnie musi więc być i z prawą stroną; zatem $f''(x)g(y) = f(x)g''(y)$ i wobec dowolności x i y iloraz f''/f musi być wielkością stałą (zresztą g''/g też). Z teorii równań różniczkowych liniowych wynika teraz, że f, jako funkcja ograniczona, musi być postaci $A \cos ax + B \sin ax$, co po podstawieniu do danego równania daje $g(y) = \cos ay$, a więc faktycznie $|g(y)| \leqslant 1$. No, dobrze; ale kto pozwolił różniczkować? W założeniach zadania nie ma ani słowa o różniczkowalności f i g!

Głosy w dyskusji:

— Co z tego? Branie pod uwagę funkcji nieróżniczkowalnych (czy wręcz nieciągłych) to kwestia pewnej kultury matematycznej, której nie można żądać od uczniów.
— Nie przesadzajmy. Zadanie ma założenie i tezę i należy przeprowadzić dowód. Różniczkowalność jako mało znaczący warunek dodatkowy? Tak się akurat składa, że wśród par funkcji f, g spełniających dane równanie funkcje nawet tylko ciągłe są „w ogromnej mniejszości", można powiedzieć, wyjątkowe.
— Ale zauważmy, że w omawianych pracach zostało zrobione (wprawdzie pod dodatkowym założeniem) znacznie więcej, niż zadanie wymaga: zostały znalezione wzory na funkcje f i g.
— Może i więcej, ale nie na temat!

W końcu ustalono, że rozwiązanie takie kwalifikuje się na trzy punkty...

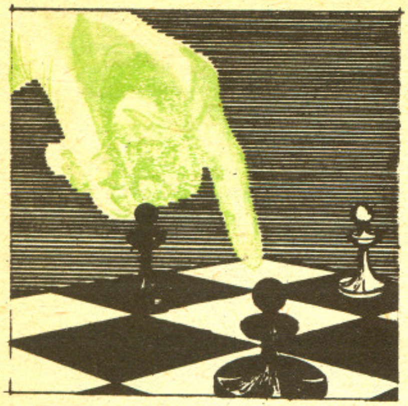
[Tu dygresja: rozważane równanie funkcyjne to tzw. równanie Wilsona. W klasie funkcji ciągłych i ograniczonych ma tylko rozwiązanie trygonometryczne podane powyżej. Gdy się odrzuci ograniczoność, dochodzą rozwiązania hiperboliczne (cosh i sinh zamiast cos i sin) oraz pary: $g \equiv 1$, f liniowa. Ale jest jeszcze mnóstwo (2^c) rozwiązań nieciągłych.]

Podobnie było i z innymi zadaniami. Dalsze dwa dni to dopracowywanie ocen. Jurorzy czytają prace „swoich" zawodników, teraz już bardzo starannie, koordynatorzy składają im wizyty. Po uzgodnieniu ocen, według ustaleń z posiedzenia jury, podpisuje się wspólny protokół i gotowe. Tylko że znów nie wszystko jest proste. Z rozwiązaniami bezbłędnymi oraz bezwartościowymi, a także z tymi, które podpadają pod schematy omówione na plenum jury, sprawa jest jasna. Ale jest masa przypadków indywidualnych. Na przykład, rozwiązanie w zasadzie poprawne, tylko że — coś przykuwa uwagę koordynatora. Przejście od którejś formułki do następnej wymaga uzasadnienia, a w pracy, którą mam przed oczami, formułki te oddziela trochę za krótka linijka tekstu. Proszę rozmówcę, by przetłumaczył ten tekst słowo po słowie — no, nie ma tego uzasadnienia, prawda? No, nie ma... Więc luka. Jaką ocenę Pan proponuje? Max minus jeden — więc sześć? Zgoda... Czasem jednak trafia się kontrowersja bardziej zasadnicza. Przypadki, gdy nie udaje się koordynatorowi osiągnąć porozumienia z jurorem, stają się przedmiotem dyskusji na kolejnym plenarnym posiedzeniu jury.

Utkwił mi w pamięci jeden taki przypadek. Uczeń wybrał metodę bardzo okrężną i zawiłą, a gdy był już prawie „w domu" i pozostawało tylko uczynić jakieś jedno drobne spostrzeżenie — on tego spostrzeżenia nie uczynił i zamiast tego powołał się na mocne i nieoczywiste twierdzenie; treści tego twierdzenia nie pamiętam dokładnie i zresztą nie ma to tu znaczenia. Na plenum jury staje kwestia: jak to ocenić? Okazuje się, że nikt z jurorów (zawodowych matematyków, bądź co bądź) nie jest pewien, czy to twierdzenie jest w ogóle prawdziwe, nikt nie jest w stanie od ręki je udowodnić lub obalić. Ale czy to ma mieć wpływ na ocenę? Przecież uczeń nie może mieć pojęcia o teorii, o którą zahaczył. Więc albo bluffował, albo wydało mu się oczywiste coś, co bynajmniej oczywiste nie jest. Ale jednak — jeśli to twierdzenie jest prawdziwe, to nie można wykluczyć, że naszemu uczniowi zdarzyło się coś takiego kiedyś spotkać w literaturze i jego szczęście, że akurat na olimpiadzie trafiła się okazja do popisania się zdobytą, choćby wyrywkowo, wiedzą. No, a wtedy — ocena max? Sprawę wyjaśnił dopiero telefon do eksperta, profesora mieszkającego w innym mieście, specjalisty od tych zagadnień (dobrze, że nie był na urlopie). Twierdzenie okazało się błędne!

Na tymże posiedzeniu jury padają też wnioski o wyróżnienie rozwiązań szczególnie zgrabnych lub pomysłowych. W naszym zadaniu wyróżnienia doczekało się rozwiązanie takie: Przypuśćmy, wbrew tezie, że $|g(y_0)| = a > 1$ dla pewnego y_0. Niech $M = \sup|f|$; istnieje x_0 takie, że $|f(x_0)| > M/a$. Oznaczmy $u = f(x_0+y_0)$, $v = f(x_0-y_0)$. Wtedy $|u+v| = 2|f(x_0)g(y_0)| > 2a\cdot M/a = 2M$, skąd $|u| > M$ lub $|v| > M$, co jest niemożliwe, bo $M = \sup|f|$. Prawda, że proste? Standard, rutyna. Nie do wiary, ale rozwiązanie to podał tylko 1 (słownie jeden) uczestnik, Paweł Traczyk z Polski. Inne bezbłędne rozwiązania opierały się na podobnym pomyśle, jednak mniej zgrabnie opracowanym, z indukcyjną konstrukcją ciągu punktów.

Praca jury dobiega końca. Ostatnie posiedzenie: ustalenie barier punktowych, przyznanie nagród I, II, III stopnia oraz wyróżnień. Komunikat końcowy i ustalenie miejsca następnej MOM. Do zobaczenia za rok!



Metoda niezmienników

Grzegorz ŚWIĄTEK

Czy zdarzyło się Wam kiedyś myśleć nad rozwiązaniem jednego tylko zadania przez, powiedzmy, pół roku? Myślę, że wielu z Was już się kiedyś z takim problemem spotkało. Dla autora niniejszego artykułu takim ,,nierozwiązalnym'' zadaniem był przykład, zamieszczony dalej do samodzielnego rozwiązania z numerem 2. Sądzę jednak, że zadanie poniższe jest jeszcze ciekawsze. Oto ono:

Na nieskończonej szachownicy jest wydzielony prostokąt, którego jeden bok ma długość podzielną przez 3. Prostokąt ten wypełniony jest pionkami. Ruchem dozwolonym jest bicie podobne jak w warcabach, tyle że bić można tylko w czterech kierunkach ,,na wprost'', a nie po przekątnej. Pionek może zatem przeskoczyć swego bezpośredniego sąsiada z dołu, góry, prawa lub lewa, o ile tylko następne pole w tym kierunku jest wolne. Pionka przeskoczonego zdejmujemy wówczas z szachownicy. Dowieść, że nie można poprowadzić gry w ten sposób, aby pozostał tylko jeden pionek.

Proponuję chwilę zastanowić się nad tym zadaniem, aby dostrzec, że jest ono naprawdę warte półrocznego rozmyślania.

Był to przykład gry w samotnika, która nie może zakończyć się sukcesem. Dla odmiany prezentuję grę, w której musimy wygrać.

Na stole leży 13 kart czerwonych i tyleż samo czarnych. W każdym kroku losujemy dwie karty, po czym zamiast kart wylosowanych zwracamy na stół inne, według następujących reguł:

zamiast dwóch czarnych kładziemy czarną i dwie czerwone,

zamiast czarnej i czerwonej — jedną czerwoną,

w przypadku dwóch czerwonych nie zwraca się nic.

Gra toczy się do momentu, gdy na stole pozostaną mniej niż dwie karty lub gdy liczba kroków przekroczy 40. Wygrywamy, o ile w chwili zakończenia gry na stole leży jedna czerwona karta.

Dowieść, że nasza wygrana jest pewna.

To zadanie naprawdę nie jest trudne i warto je samodzielnie rozwiązać.

A oto rozwiązanie przykładowe:

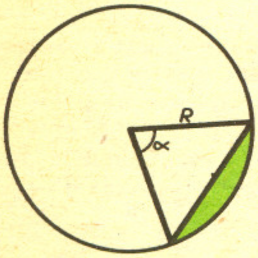
Oznaczmy przez c_i i r_i liczbę kart odpowiednio czarnych i czerwonych leżących na stole po i-tym kroku. Mamy $r_0 = c_0 = 13$. W myśl reguł gry zachodzą następujące związki:

1° $r_{i+1} \equiv r_i (\mathrm{mod}\ 2)$,
2° $2c_{i+1} + r_{i+1} < 2c_i + r_i$.

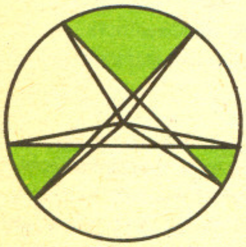
Początkowo mamy $2c_0 + r_0 = 39$. Z warunku 2° wynika zatem, że $2c_{38} + r_{38} \leqslant 1$. Tak więc po 38 ruchach gra musi się zakończyć. Z warunku 1° wynika z kolei, że na stole będzie nieparzysta liczba kart czerwonych, zatem... koniec dowodu.

Ciekaw jestem, czy wybraliście podobną metodę rozwiązania? Zadanie jest co prawda łatwe, ale prostota rozwiązania, które przedstawiłem, jest chyba zaskakująca. Zwróćmy uwagę na istotne elementy tej metody. Pojawiły się dwie wielkości arytmetyczne, z których jedna pozostawała stała przez cały czas gry, druga natomiast zmieniała się w sposób monotoniczny — ściśle malejący. Ta pierwsza to właśnie ów niezmiennik, o którym mowa w tytule artykułu. Drugą możemy nazwać półniezmiennikiem, gdyż zmienia się tylko w jedną stronę. W fizyce takim niezmiennikiem jest energia, a półniezmiennikiem entropia, zwana też sugestywnie ,,strzałą czasu''. Czytelnicy, którzy interesują się fizyką, zauważyli zapewne, że również wiele zadań z tej dziedziny daje się zadziwiająco prosto rozwiązać, gdy się skorzysta z prawa zachowania energii lub z innych praw zachowania.

Rozwiązanie zadania M 433. Przypuśćmy, że pewne trzy cięciwy dzielą koło na siedem części o równych polach. Każda z nich dzieli wtedy pole koła w stosunku 3:4 (przy podziale 2:5 lub 1:6 pozostałe cięciwy nie podzielą większej części ani na pięć, ani na sześć kawałków).



Rys. 1



Rys. 2

Oznaczmy przez R promień koła, a przez α kąt środkowy, oparty na cięciwie. Pole odcinka kołowego (część zakreskowana na rysunku 1) wynosi $\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha = \frac{3}{7}\pi R^2$, stąd $\alpha - \sin\alpha = \frac{6}{7}\pi$. Z drugiej strony, $3\frac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 \geqslant \pi R^2 + \frac{3}{7}\pi R^2$, ponieważ trzy wycinki kołowe, odpowiadające cięciwom, dają w sumie całe koło, przy czym każda z zakreskowanych na rysunku 2 figur o polu $\frac{1}{7}\pi R^2$ jest zawarta w dwóch takich wycinkach. Zatem $\alpha \leqslant \frac{20}{21}\pi$; ponadto $\alpha < \pi$. Ponieważ funkcja sinus maleje w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ oraz $\sin x \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$, mamy

$$\frac{6}{7}\pi = \alpha - \sin\alpha \geqslant \frac{20}{21}\pi - \sin\frac{20}{21}\pi =$$
$$= \frac{20}{21}\pi - \sin\frac{1}{21}\pi \geqslant \frac{20}{21}\pi - \frac{1}{21}\pi = \frac{19}{21}\pi.$$

Ale $\frac{6}{7} < \frac{19}{21}$, stąd sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 435. Przypuśćmy, dla ustalenia uwagi, że $x \leqslant y$. Wtedy $x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + zy^{n-2} + y^{n-1})$. Stąd $x^n \geqslant nx^{n-1}$, czyli $x \geqslant n$ c.n.d.

Oto kolejny przykład:

Oznaczmy przez P wnętrze kąta prostego, a przez $\mathcal{F}$ rodzinę wszystkich funkcji $f: P \to \mathbb{N}$ przyjmujących wartości różne od 0 tylko w skończenie wielu punktach. Krokiem nazwijmy przejście od funkcji $f \in \mathcal{F}$ do innej funkcji $h \in \mathcal{F}$ w sposób następujący. Wybieramy $n \geqslant 3$ i punkty $A_0, A_1, \ldots, A_n \in P$ tak, by $f(A_0) \geqslant n$ oraz punkty $A_1, \ldots, A_n$ były wierzchołkami n-kąta foremnego o środku A_0, przy czym $A_0A_1 \geqslant 1$. Nową funkcję h tworzymy następująco

$$h(A_0) = f(A_0) - n,$$
$$h(A_i) = f(A_i) + 1 \text{ dla } i = 1, \ldots, n,$$
$$h(X) = f(X) \text{ dla } X \in P \setminus \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}.$$

Należy udowodnić, że zaczynając od dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ możemy w powyższy sposób wykonać tylko skończoną liczbę kroków.

Wskazówka: Narzucającym się niezmiennikiem jest suma wartości funkcji f w punktach, w których f jest różna od zera. Jednak ten oczywisty niezmiennik nie przybliży nas do rozwiązania. Należy dobrać wielkości geometryczne. Przypuśćmy, że wartość funkcji w punkcie y oznacza liczbę punktów materialnych o masie 1 umieszczonych w y. Wówczas przy przejściu do funkcji z niej powstającej niezmiennikiem jest środek ciężkości, a moment bezwładności względem środka ciężkości jest półniezmiennikiem zwiększającym się co najmniej o 1. Dokończenie rozwiązania pozostawiam Czytelnikom.

Środkiem ciężkości układu punktów materialnych o masach 1 znajdujących się w punktach $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy taki punkt O, że $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OX_i} = \vec{O}$. Wówczas momentem bezwładności tego układu punktów względem środka ciężkości jest suma kwadratów odległości tych punktów od punktu O.

Inwersją względem sfery o środku O i promieniu r nazywamy przekształcenie, które punktowi X, różnemu od O, przyporządkowuje punkt $f(X)$ należący do półprostej OX i taki, że $|Of(X)| \cdot |OX| = r^2$. Analogicznie definiujemy inwersję względem okręgu na płaszczyźnie. Przekształcenia te mają wiele interesujących niezmienników — na przykład rozwartość kątów między krzywymi.

O ile niezmiennik w pierwszym przykładzie miał charakter arytmetyczny i rozwiązywał problem kombinatoryczny, o tyle w drugim przykładzie zarówno niezmiennik, jak i półniezmiennik miały charakter geometryczny i służyły do rozwiązania problemu geometryczno-kombinatorycznego.

Z kolei przykład typowo już geometryczny:

W przestrzeni dana jest sfera S i punkt P wewnątrz niej. Jeśli $X \in S$, to $f(X)$ określamy jako taki punkt na sferze S, że $P \in \overline{f(X)X}$. Dowieść, że f przekształca dowolny okrąg zawarty w S na okrąg.

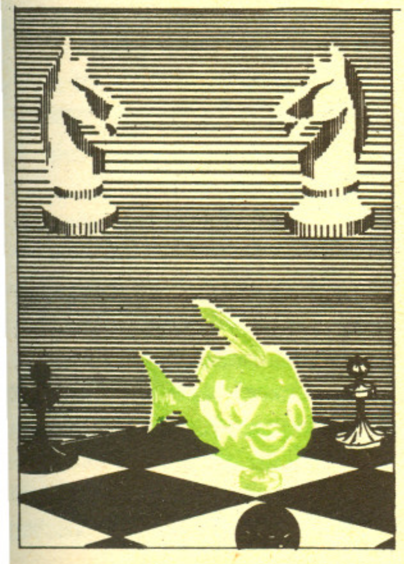
Wskazówka: Niezmiennikiem jest $|PX| \cdot |Pf(X)|$ (potęga punktu względem sfery). Łatwo sprawdzić, że wielkość ta nie zależy od położenia punktu X na sferze. Oznaczmy przez I symetrię o środku w punkcie P. Wtedy $I \circ f$ jest obcięciem pewnej inwersji do sfery S. Jak wiadomo, inwersja przekształca sfery i płaszczyzny na sfery lub płaszczyzny. Chciałbym zwrócić tu uwagę Czytelników na to, że własność polegająca na przekształcaniu pewnych figur na figury podobne może pełnić w rozumowaniu rolę analogiczną, jak posiadanie niezmiennika.

Dokończenie rozwiązania jest już bardzo proste, pozostawiam je Czytelnikom.

Czy pamiętacie zadanie o grze w samotnika? Spróbujcie może rozwiązać je teraz, poszukując odpowiedniego niezmiennika.

A	C	B	A	C
B	A	C	B	A
C	B	A	C	B
A	C	B	A	C
B	A	C	B	A
C	B	A	C	B
A	C	B	A	C
B	A	C	B	A

A oto rozwiązanie. W pola szachownicy wpiszmy litery A, B, i C tak, jak to pokazano na rysunku. Zauważmy, że po dowolnym ruchu zgodnym z regułami gry liczba pionków stojących na polach oznaczonych jedną z liter zwiększy się o jeden, a liczby pionków stojących na polach oznaczonych każdą z pozostałych liter zmniejszą się o jeden. Jeśli więc liczby te były jednakowej parzystości (tzn. wszystkie trzy parzyste lub wszystkie trzy nieparzyste), to po ruchu nadal będą mieć tę własność. To jest właśnie nasz niezmiennik. Początkowo liczby te były równe, gdyż jeden z boków prostokąta wypełnionego pionkami był podzielny przez 3, miały więc jednakową parzystość. Niemożliwe jest więc osiągnięcie trójki liczb 1, 0, 0 mających różne parzystości.



Tyle wykładu. Serdecznie zachęcam do sprawdzenia zalet metody niezmienników już w samodzielnej pracy nad podanymi przykładami.

1) Szachownica to kwadratowa plansza złożona z $n \times n$ pól. Obiegiem zamkniętym szachownicy nazwiemy ciąg ruchów pewnej figury taki, że w ostatnim ruchu figura powraca na pole wyjściowe, po drodze odwiedziwszy każde inne pole dokładnie raz. Dowieść, że jeśli istnieje zamknięty obieg pewnej szachownicy skoczkiem, istnieje też obieg zamknięty tej szachownicy leniwą wieżą (leniwa wieża porusza się tak, jak zwyczajna wieża szachowa, to znaczy po liniach poziomych i kolumnach pionowych, ale zawsze tylko o jedno pole).

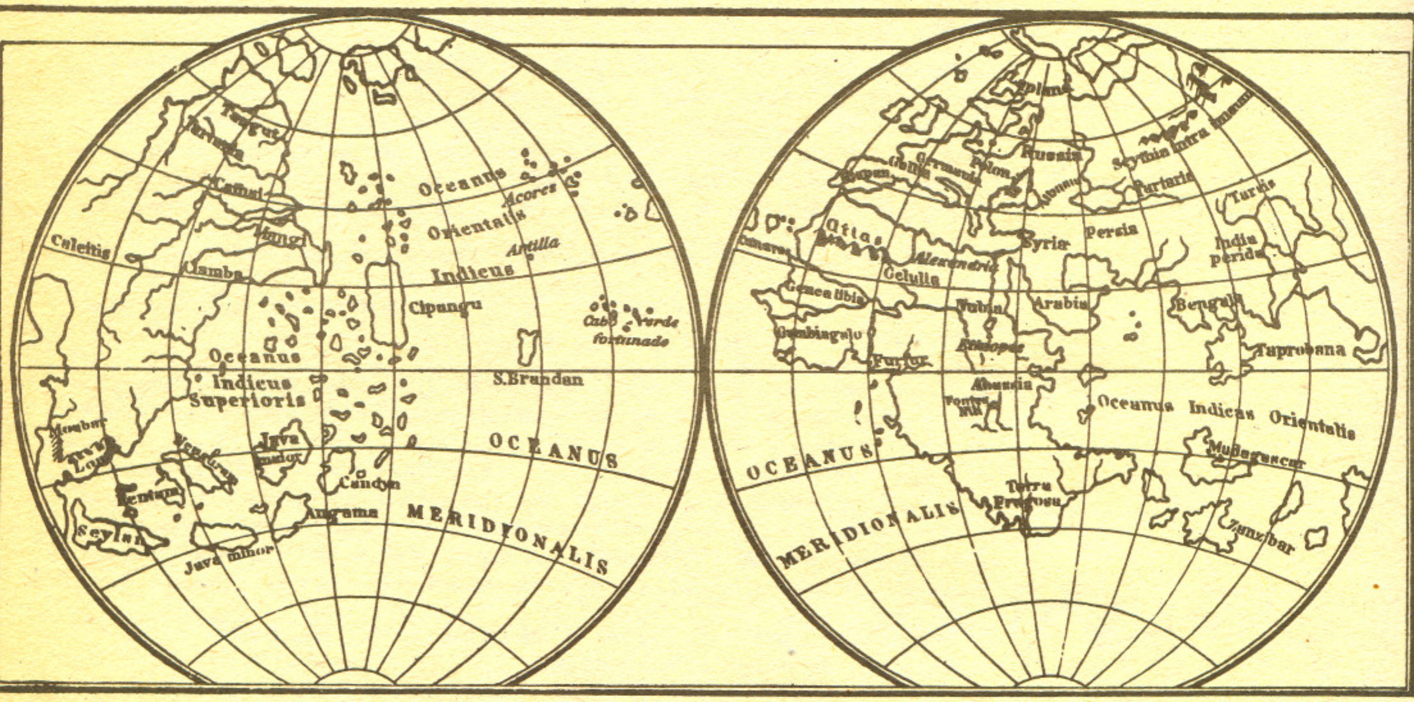
2) Na okręgu znajduje się $3n$ miejsc, na których stoją jedynki lub zera. W każdym kroku zmieniamy pewną jedynkę na zero i zmieniamy cyfry na dwóch miejscach sąsiednich. Dowieść, że nie uda się w ten sposób przejść od konfiguracji z jedną jedynką do ustawienia z samymi zerami.

3) W przestrzeni dany jest taki skończony zbiór X, że dla każdej pary punktów $x, y \in X$ istnieje izometria zbioru X przekształcająca x na y. Dowieść, że zbiór X jest zawarty w pewnej sferze.

mała delta

Jak powstała nowoczesna nawigacja

Jest bardzo prawdopodobne, że gdyby Kolumb znał rzeczywistą odległość wschodnich wybrzeży Indii od zachodnich wybrzeży Europy, to nigdy nie odważyłby się na morską wyprawę do Indii (1492). Był on przekonany, że wyprawa taka będzie musiała pokonać w przybliżeniu ćwierć obwodu Ziemi, a przyczyną tego przekonania był brak metody choćby przybliżonego wyznaczania długości geograficznej.

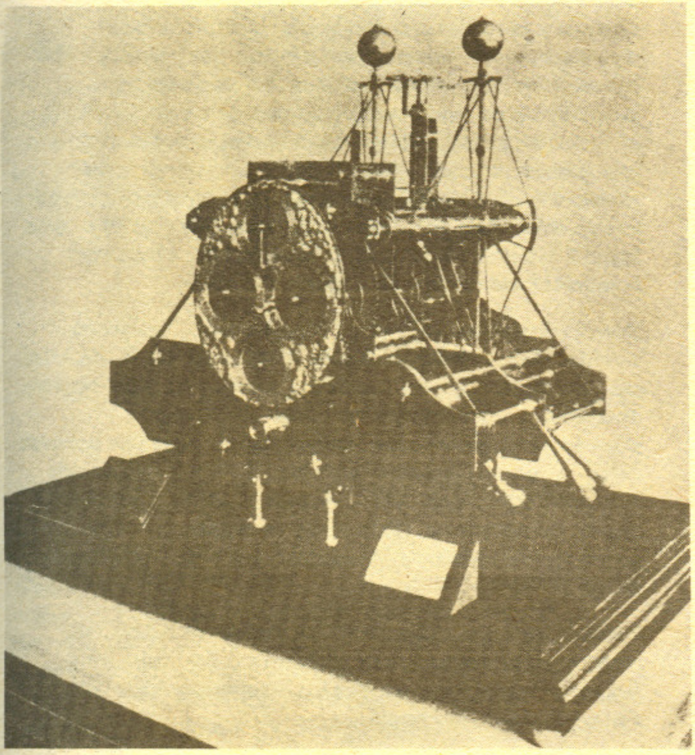


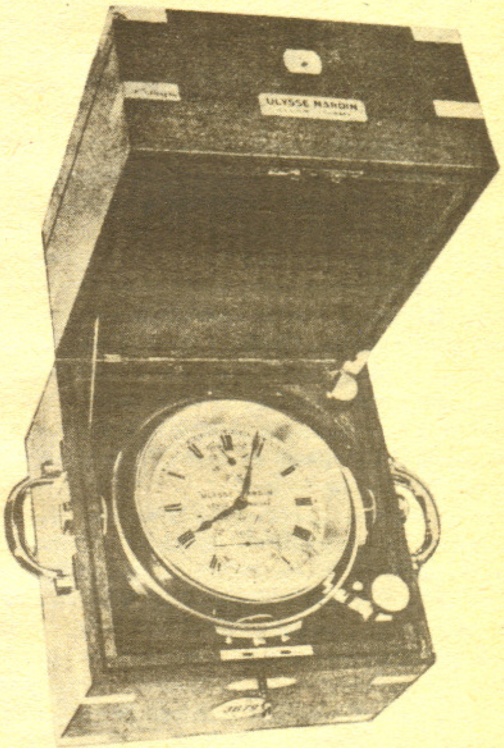
Mapa świata Behaima z 1492 r.

Poznanie właściwych proporcji kontynentów i oceanów przyniosła dopiero wyprawa Magellana (1521), ale ciągle metody wyznaczania długości geograficznej pozostawiały wiele do życzenia. Jak wiadomo (*Mała Delta*, *Delta* 3/1986), potrzebny jest do tego zegar i właśnie cały kłopot polegał na braku dostatecznie dokładnego zegara mogącego działać nawet w niesprzyjających warunkach. Skonstruowanie zegara wahadłowego przez Huygensa (1658) ze zrozumiałych powodów nie rozwiązało sprawy, która stawała się coraz pilniejsza, bowiem rozwój transportu morskiego przy braku orientacji na oceanie zaczął coraz częściej powodować katastrofy okrętów. Wreszcie uczeni angielscy (Newton, Halley, Flamsteed) zaproponowali Parlamentowi ogłoszenie konkursu na wynalezienie niezawodnej metody wyznaczania długości geograficznej. W 1714 r. Parlament angielski ogłosił uchwałę o przyznaniu nagrody 10, 15 lub 20 tysięcy funtów szterlingów temu, kto poda praktyczną metodę wyznaczania długości geograficznej z dokładnością odpowiednio 1, 2/3 lub 1/2 stopnia.


John Harrison

Do konkursu zgłosił się w 1726 r. John Harrison (1693—1776), samouk, i — jak powiedzielibyśmy dzisiaj — majsterkowicz, z zamiłowania zegarmistrz. Nie od razu zyskał zaufanie i poparcie — dopiero — gdy przedstawił wahadło, które dzięki specjalnej konstrukcji z prętów o różnym współczynniku rozszerzalności cieplnej miało okres wahań niezależny od temperatury otoczenia. Co więcej, otrzymał też wtedy od uczonego i konstruktora George'a Grahama wsparcie pieniężne, tak, że mógł przystąpić do budowy zegara własnego pomysłu.


Pierwszy zegar Harrisona



Współczesny chronometr morski

Pierwszy model został ukończony w 1735 r. Ważył 35 kg i miał dwa balanse o wadze 2 kg każdy. Próby wypadły pomyślnie i Harrison dostał fundusze na prowadzenie dalszych badań. Dopiero w 1761 r. doszło do sprawdzenia kolejnego chronometru na morzu. Po podróży na Jamajkę i z powrotem okazało się, że błąd wskazania chronometru zmieścił się w granicach wymaganych do uzyskania najwyższej nagrody, jednak komisja opiniująca wynalazek okazała podejrzliwość i nakazała dalsze sprawdziany. Tak rozpoczął się wieloletni zatarg Harrisona z komisją, zakończony wreszcie w 1773 r. po interwencji samego króla Jerzego III. Uznano pełną sprawność chronometrów Harrisona i wypłacono mu nagrodę. Harrison miał wtedy 80 lat. Umarł w trzy lata później.

O konkurentach Harrisona właściwie niewiele wiadomo. We wszystkich proponowanych metodach wyznaczania długości potrzebny był zegar i dopiero Harrison zbudował mechanizm o żądanej (a nawet wyższej) precyzji. Poświęcił na to 47 lat i teraz, z perspektywy czasu, trzeba przyznać, że chyba nie trzeba było aż tyle. Z drugiej strony, trudno posądzać członków komisji opiniującej o złą wolę — oni chcieli wynalazek rzetelnie zbadać we wszelkich możliwych warunkach, a to wymagało czasu. W rezultacie, chociaż współczesne chronometry mocno różnią się od mechanizmów Harrisona, to zegarowa metoda wyznaczania długości geograficznej jest powszechnie stosowana do dziś.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Olimpiady Matematyczne w Polsce

Pierwszą Olimpiadę Matematyczną w Polsce zorganizowano w roku szkolnym 1949/50. Obecnie kończy się XXXVII Olimpiada; zasady jej organizacji są w zasadzie takie same, jak były 36 lat temu.
W Olimpiadzie mogą uczestniczyć uczniowie szkół średnich. Zawody stopnia I polegają na rozwiązywaniu w domu 12 zadań w okresie od 16 września do 15 grudnia. Teksty zadań są rozsyłane do wszystkich szkół średnich w kraju. Rozwiązania są oceniane przez komitety okręgowe Olimpiady Matematycznej, które działają w Gdańsku, Katowicach, Krakowie, Lublinie, Łodzi, Poznaniu, Toruniu, Warszawie i Wrocławiu. Na podstawie wyników zawodów stopnia I komitety okręgowe kwalifikują uczestników do zawodów stopnia II, które odbywają się w lutym w siedzibach komitetów okręgowych. Polegają one na rozwiązywaniu 6 zadań w warunkach egzaminacyjnych w ciągu dwóch kolejnych dni (3 zadania na 5 godzin każdego dnia). Wyniki tych zawodów są podstawą klasyfikacji do zawodów stopnia III, które odbywają się w kwietniu w Warszawie lub jej okolicy i mają przebieg taki, jak zawody stopnia II. Prace z zawodów stopnia II są oceniane przez dwóch członków komitetu okręgowego i dwóch członków Komitetu Głównego, prace z zawodów stopnia III — przez czterech członków Komitetu Głównego. Na podstawie wyników zawodów stopnia III wyłania się laureatów Olimpiady.
Olimpiada organizowana jest przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i finansowana przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania. Komitet Główny jest powoływany na wniosek Towarzystwa przez Ministra Oświaty i Wychowania. Komitet Główny i komitety okręgowe składają się w większości z nauczycieli akademickich i nauczycieli szkół średnich. Do zawodów stopnia I przystępuje przeciętnie 1500 uczniów, do zawodów stopnia II kwalifikuje się około 350, do III — 70. Liczba laureatów waha się około 15.
Laureaci otrzymują nagrody oraz dyplomy upoważniające do przyjęcia (po uzyskaniu świadectwa dojrzałości) bez egzaminu na studia matematyczne, informatyczne, fizyczne, chemiczne i techniczne. Uczestnicy zawodów stopnia III są zwolnieni z egzaminu maturalnego i wstępnego z matematyki oraz mogą być przyjęci bez egzaminów na studia matematyczne. Na podstawie wyników Olimpiady ustala się skład drużyny polskiej na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną i Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne.

mgr Andrzej MĄKOWSKI

Polsko-Austriackie Zawody Matematyczne

Polsko-Austriackie Zawody Matematyczne weszły już do tradycji imprez dla laureatów krajowej Olimpiady Matematycznej.

Zostały zorganizowane z inicjatywy ministrów oświaty Austrii i Polski. Po raz pierwszy rozegrano je w Koszalinie w 1978 r. Od tego czasu odbywają się co roku na zmianę w Polsce lub Austrii. Ze strony polskiej zawody organizuje Ministerstwo Oświaty i Wychowania oraz Komitet Główny Olimpiady Matematycznej i podobne instytucje ze strony austriackiej.

Reprezentację Polski stanowi druga szóstka laureatów Olimpiady krajowej (pierwsza szóstka jedzie na Olimpiadę Międzynarodową). Zawody mają charakter indywidualny i zespołowy.

Zawody indywidualne trwają dwa dni. Każdego dnia uczestnik ma do rozwiązania 3 zadania w ciągu 4,5 godziny (zadania z zawodów oraz sprawozdania są drukowane w dwumiesięczniku „Matematyka"). Potem przewodniczący obu delegacji wraz z zastępcami ustalają listy nagrodzonych zawodników, od 5 do 8 osób. Dotychczas nagrodzono 30 zawodników z Polski i 24 z Austrii, w tym I miejsca zajęło 4 zawodników polskich i 4 austriackich, II miejsca przypadły 7 zawodnikom polskim i 2 austriackim (w tym przypadku dwóch zawodników miało jednakową liczbę punktów) oraz III miejsca zajęło 2 zawodników polskich i 7 austriackich. Niektórzy uczniowie dwukrotnie brali udział w zawodach.

Zawody drużynowe odbywają się zwykle trzeciego dnia po zawodach indywidualnych. Każda drużyna pracuje w oddzielnej sali i ma do rozwiązania 3 problemy w ciągu 4 godzin. Nagrody drużynowe przyznaje jury z udziałem honorowego przewodniczącego zawodów. Dotychczas zwyciężali na przemian Polacy w Austrii i Austriacy w Polsce. Ciekawym zdarzeniem zawodów zespołowych było rozwiązanie zadania przez oba zespoły jednakowo źle. Oba zespoły twierdziły, że istnieje pozytywne rozwiązanie problemu, które w rzeczywistości nie istniało.

Poza oficjalnymi zawodami młodzież wprowadziła zwyczaj rozgrywania co roku meczów piłki nożnej. Realizuje się też ciekawy program turystyczny, a także zapoznaje się młodzież z zabytkami kultury i sztuki.

mgr Jerzy KOBYLIŃSKI

Tradycja olimpiad wywodzi się ze starożytnej Grecji, gdzie organizowano igrzyska sportowo-artystyczne, połączone z uroczystościami na cześć różnych bogów. Największe znaczenie osiągnęły igrzyska w Olimpii — w miejscu kultu Zeusa. Odbywały się one co cztery lata w sąsiedztwie daty letniego przesilenia Słońca. Czteroletni odstęp między kolejnymi igrzyskami, zwany olimpiadą, podyktowany był koniecznością przygotowania rozrzuconego po świecie narodu greckiego do tak ważnych uroczystości. W międzyczasie odbywały się igrzyska w innych miastach, np. w Delfach — na rok przed olimpijskimi.
Kolejność olimpiad — okresów czteroletnich — stała się dla Greków podstawą rachuby czasu. Za pierwsze ogólnogreckie igrzyska w Olimpii uznaje się te, które odbyły się w 776 r.p.n.e. W czasach przed naszą erą kolejne igrzyska przypadały na lata, których liczba jest podzielna przez 4. Brak roku „zerowego" przy przejściu do naszej ery spowodował pewną nieciągłość. Po 194 igrzyskach w roku 4 p.n.e. następne — 195 odbyły się w roku 1 n.e. Później wypadały one na lata nieparzyste aż do roku 393, w którym cesarz rzymski Teodozjusz Wielki wydał zakaz organizowania igrzysk, uznając je za przeżytek z czasów pogaństwa.
Od pierwszych igrzysk w Olimpii do 1896 roku, w którym odbyły się pierwsze igrzyska nowożytne, upłynęło 2671 lat, tzn. 667 olimpiad i 3 lata. Bieżący rok jest drugim rokiem 690 olimpiady.
Korelacja między olimpijską rachubą czasu a kalendarzem współczesnym odbywa się na podstawie wzmianek o zaćmieniach Słońca, przypadających równocześnie z różnymi wydarzeniami, których daty podane są według olimpiad. Dziś niezbyt ściśle olimpiadą nazywa się same Igrzyska Olimpijskie.
Pojawiły się również w naszym słownictwie „olimpiady" naukowe — matematyczna, fizyczna, astronomiczna i inne, tj. coroczne konkursy wiedzy dla uczniów szkół średnich. *J. U.*

Międzynarodowe Olimpiady Matematyczne

Z inicjatywą zorganizowania międzynarodowych zawodów matematycznych dla uczniów szkół średnich wystąpili matematycy rumuńscy. Pierwsza Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna odbyła się w roku 1959 w Rumunii i uczestniczyło w niej 7 państw. W ostatniej, XXVI MOM, która odbyła się w ubiegłym roku w Finlandii, uczestniczyło 38 państw. W roku 1980 MOM nie odbyła się. Początkowo uczestniczyły w MOM tylko europejskie kraje socjalistyczne, obecnie uczestniczą państwa o różnych ustrojach ze wszystkich kontynentów (prócz Antarktydy). Ze względu na wzrost liczby państw uczestniczących w olimpiadach trzeba było zmniejszyć liczbę uczestników z poszczególnych państw. Początkowo wynosiła ona 8, w roku 1982 — tylko 4, a od roku 1983 — 6.

Koszty organizacji olimpiady łącznie z kosztami pobytu uczestników ponosi państwo organizujące olimpiadę. Kraje uczestniczące pokrywają tylko koszty podróży do i z kraju organizującego.

Wyniki olimpiady ustala międzynarodowe jury złożone z przewodniczących delegacji poszczególnych państw. Przed zawodami, które trwają 2 dni i polegają na rozwiązywaniu każdego dnia 3 zadań w ciągu 4,5 godziny, jury ustala teksty zadań. Wybiera się je z zestawu około 20 zadań przygotowanych przez organizatorów, którzy wybierają je spośród propozycji nadesłanych przez kraje uczestniczące. Jury ustala również maksymalne oceny za rozwiązanie poszczególnych zadań. Dawniej oceny te były zróżnicowane i wahały się od 5 do 8 punktów. W ostatnich latach za rozwiązanie każdego zadania można uzyskać 7 punktów. Oceny ustala się w ten sposób, że przewodniczący delegacji i/lub jego zastępca tłumaczą tekst rozwiązania na jeden z języków kongresowych (angielski, francuski, niemiecki, rosyjski) tzw. koordynatorom, którzy są matematykami pochodzącymi z kraju organizującego olimpiadę. Przewodniczący i koordynatorzy ustalają oceny za poszczególne rozwiązania (w pełnych punktach). Następnie szereguje się uczestników według sumy uzyskanych punktów i jury decyduje o przyznaniu nagród I, II, III stopnia. Na ogół jury przestrzega następujących zasad:
1/ nagrody otrzymuje mniej więcej połowa uczestników,
2/ liczby nagród I, II i III stopnia pozostają w stosunku 1 : 2 : 3.
Bywają również przyznawane nagrody specjalne za szczególnie interesujące rozwiązania. Nagrodzeni otrzymują dyplomy i na niektórych olimpiadach nagrody rzeczowe.

W czasie olimpiady są organizowane wycieczki umożliwiające poznanie kraju, a czasem także sympozja, w których uczestniczą przewodniczący delegacji.

mgr Andrzej MĄKOWSKI

Międzynarodowe Olimpiady Fizyczne

Pierwsza Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna odbyła się w Warszawie w 1967 roku. Główną rolę w jej organizacji odegrał nieżyjący już dr Czesław Ścisłowski, ówczesny kierownik Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej. Pierwszy Statut MOF został przyjęty przez kraje uczestniczące wiosną 1969 roku. Określono wtedy także „urzędowy" zakres materiału obowiązujący uczestników zawodów. Obecnie obowiązuje statut zatwierdzony w 1984 roku w Sigtunie (Szwecja). Oto zawarte w nim zasady organizacji MOF:
1. Kraj organizujący zawody jest zobowiązany zaprosić do udziału wszystkie kraje, które uczestniczyły w poprzednich zawodach. Poza tym kraj ten może zaprosić jeszcze inne kraje (ale nie musi!).
2. Zawody w zasadzie są organizowane corocznie. Niestety, koszt organizacji przede wszystkim z powodu zadań doświadczalnych bardzo szybko wzrasta i czasami trudno było znaleźć organizatora. Stąd zdarzające się od czasu do czasu roczne przerwy.
3. W zawodach bierze udział z każdego kraju 5 zawodników i 2 opiekunów. Drużynę polską wyłania się na podstawie wyników kolejnej Olimpiady Fizycznej (krajowej).
4. Koszt pobytu uczestników, koszt nagród, wycieczek itp. od przyjazdu na miejsce zawodów do odjazdu z tego miejsca ponosi państwo organizujące zawody.
5. Zawody zwykle trwają 8—10 dni w czerwcu bądź lipcu. Rozwiązywanie zadań trwa dwa dni. Jednego dnia zawodnicy rozwiązują 3 zadania teoretyczne, a drugiego 1 lub 2 zadania doświadczalne. Między częścią teoretyczną i doświadczalną musi być co najmniej jeden dzień wolny.
6. Pracami MOF w czasie trwania zawodów kieruje Komisja Międzynarodowa złożona z przedstawicieli wszystkich krajów uczestniczących w Olimpiadzie.
7. Zadania i rozwiązania zadań są przygotowywane przez organizatorów w formie pisemnej w 4 językach. Zadania te na języki krajów uczestniczących w zawodach tłumaczą opiekunowie wchodzący w skład Komisji Międzynarodowej. Tak więc każdy zawodnik otrzymuje zadania we własnym języku (i w tym języku je rozwiązuje).
8. Rozwiązania zadań oceniają organizatorzy przy pomocy własnych tłumaczy. Wystawione oceny są uzgadniane z opiekunami delegacji. Kryteria ocen ustala Komisja Międzynarodowa, która ostatecznie zatwierdza wszystkie oceny.
9. Nagrody są przyznawane według następujących zasad. Liczbę punktów zdobytą przez najlepszego zawodnika uznaje się za 100%. Osoby, które uzyskały liczbę punktów z przedziału (90%, 100%] uzyskują I nagrodę. Drugie nagrody uzyskują zawodnicy mający wyniki z przedziału (78%, 90%], trzecie zaś z przedziału (65%, 78%]. Wyróżnienia otrzymują zawodnicy, którzy osiągnęli wynik z przedziału [50%, 65%]. Pozostali zawodnicy otrzymują zaświadczenia o uczestnictwie.
10. Między zawodami pracami MOF kieruje stały sekretariat powołany w roku 1983. Znajduje się on w Polsce, co niewątpliwie jest wyrazem uznania naszego wkładu w rozwój MOF i dla naszej corocznej aktywności w czasie zawodów.

W bieżącym roku XVII MOF ma odbyć się w Wielkiej Brytanii w dniach 13—20 lipca.

dr Waldemar GORZKOWSKI

Poniżej podajemy tabelę najlepszych sześciu zespołów w każdej z dotychczasowych Międzynarodowych Olimpiad Matematycznych. W pierwszej kolumnie podany jest numer olimpiady, następnie kraj, w którym się odbywała oraz (w nawiasach) liczba państw uczestniczących. Nazwy krajów są kodowane zgodnie z normą PN-83/N-09010. Kraje uszeregowane są według zdobytej przez zespoły liczby punktów (oficjalnie nie prowadzi się klasyfikacji zespołowej). Występujący między kodami krajów znak = oznacza, że kraje te zdobyły jednakową liczbę punktów.

			1	2	3	4	5	6
I	RO	(7)	RO	HU	CS	BG	PL	SU
II	RO	(5)	CS	HU=	RO	BG	DD	
III	HU	(6)	HU	PL	RO	CS	DD	BG
IV	CS	(7)	HU	SU	RO	CS	=PL	BG
V	PL	(8)	SU	HU	RO	YU	CS	BG
VI	SU	(9)	SU	HU	RO	PL	BG	DD
VII	DD	(10)	SU	HU	RO	PL	DD	CS
VIII	BG	(9)	SU	HU	DD	PL	RO	BG
IX	YU	(13)	SU	DD	HU	GB	RO	BG=CS
X	SU	(12)	DD	SU	HU	GB	PL	SE
XI	RO	(14)	HU	DD	SU	RO	GB	BG
XII	HU	(14)	HU	DD=	SU	YU	RO	GB
XIII	CS	(15)	HU	SU	DD	PL	GB=	RO
XIV	PL	(14)	SU	HU	DD	RO	GB	PL
XV	SU	(16)	SU	HU	DD	PL	GB	FR
XVI	DD	(18)	SU	US	HU	DD	YU	AT

W XVI MOM uczestniczyła po raz pierwszy delegacja wietnamska; przyjechała ona w mniejszym składzie niż pozostałe ekipy (5 uczniów zamiast 8); gdyby zastosować do uzyskanego przez nią wyniku mnożnik 8/5, byłaby na piątym miejscu.

XVII	BG	(17)	HU	DD	US	SU	GB	AT
XVIII	AT	(18)	SU	GB	US	BG	AT	FR
XIX	YU	(21)	US	SU	GB=	HU	NL	BG
XX	RO	(17)	RO	US	GB	VN	CS	DE
XXI	GB	(23)	SU	RO	DE	GB	US	DD
XXII	US	(27)	US	DE	GB	AT	BG	PL
XXIII	HU	(30)	DE	SU	DD=	US	VN	HU
XXIV	FR	(32)	DE	US	HU	SU	RO	VN
XXV	CS	(34)	SU	BG	RO	HU=	US	GB
XXVI	FI	(38)	RO	US	HU	BG	VN	SU

W XXVI MOM uczestniczyły następujące państwa:

AT — Austria, AU — Australia, BE — Belgia, BG — Bułgaria, BR — Brazylia, CA — Kanada, CN — Chiny, CO — Kolumbia, CS — Czechosłowacja, CU — Kuba, CY — Cypr, DD — NRD, DE — RFN, DZ — Algieria, ES — Hiszpania, FI — Finlandia, FR — Francja, GB — Wielka Brytania, GR — Grecja, HU — Węgry, IL — Izrael, IR — Iran, IS — Islandia, IT — Włochy, KW — Kuwejt, MA — Maroko, MN — Mongolia, NL — Holandia, NO — Norwegia, PL — Polska, RO — Rumunia, SE — Szwecja, SU — ZSRR, TN — Tunezja, TR — Turcja, US — Stany Zjednoczone, VN — Wietnam, YU — Jugosławia.

Lista uczestników polskich, którzy zdobyli nagrodę pierwszego stopnia w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej lub uczestniczyli co najmniej dwukrotnie w Międzynarodowych Olimpiadach (w nawiasach podane są numery olimpiad i stopnie zdobytych nagród).

Maciej Skwarczyński	(III, 1)		
Marcin Kuczma	(III, -;	IV, 2)	
Jerzy Jurkiewicz	(III, -;	V, -)	
Marian Orłowski	(V, -;	VI, 2)	
Bronisław Wajnryb	(V, 3;	VI, -)	
Krzysztof Nowiński	(VI, 3;	VII, 2)	
Tadeusz Figiel	(VI, 1;	VII, 3;	VIII, 2)
Zenon Fortuna	(VII, 3;	VIII, 2)	
Henryk Iwaniec	(VII, -;	VIII, 2)	
Tadeusz Iwaniec	(VII, -;	VIII, 2)	
Michał Misiurewicz	(VII, 3;	VIII, 1)	
Zygmunt Ratajczyk	(VIII, -;	IX, -)	
Bolesław Szymański	(X, 1)		
Jerzy Dydak	(X, 1;	XI, 2)	
Aleksander Rusiecki	(XI, -;	XII, -)	
Józef Przytycki	(XII, -;	XIII, 3;	XIV, -)
Stanisław Szarek	(XII, -;	XIII, 1;	XIV, 2)
Paweł Traczyk	(XIII, 3;	XIV, 3)	
Grzegorz Andrzejczak	(XIII, -;	XIV, 1;	XV, 2)
Maciej Lewenstein	(XIV, -;	XV, 3)	
Jan Dereziński	(XVI, -;	XVII, -)	
Piotr Syrczyński	(XVI, -;	XVII, 3)	
Jerzy Grzybowski	(XVIII, 3;	XIX, 1)	
Adam Parusiński	(XVIII, 3;	XIX, 2)	
Jan Wehr	(XVIII, 3;	XIX, 2)	
Jerzy Wojciechowski	(XVIII, 3;	XX, -)	
Andrzej Nędzusiak	(XIX, 3;	XX, 3)	
Jerzy Sawa	(XIX, -;	XX, -)	
Ludomir Newelski	(XX, -;	XXI, 3)	
Jarosław Wróblewski	(XX, -;	XXI, 3;	XXII, 1)
Tomasz Hrycak	(XXII, 1;	XXIII, 2;	XXIV, 3)
Cezary Juszczak	(XXIII, 3;	XXIV, 3)	

Polscy laureaci pierwszych nagród Międzynarodowych Olimpiad Fizycznych

I	Bogdan Cichocki*	Warszawa	1967
II	Tomasz Kręglewski (A)	Budapeszt	1968
IV	Marek Ziółkowski	Moskwa	1970
VII	Jarosław Deminet (A)	Warszawa	1974
VII	Jerzy Tarasiuk (A)	Warszawa	1974
IX	Rafał Łubis (A)	Budapeszt	1976
IX	Krzysztof Kulpa	Budapeszt	1976
XI	Andrzej Praszmo	Moskwa	1979
XII	Wojciech Lerch	Warna	1981
XIII	Aleksander Żarnecki	Malente	1982
XIII	Dariusz Wieczorek	Malente	1982
XIII	Michał Kiełkowski	Malente	1982

* Podczas I i II MOF nie było podziału na trzy nagrody. B. Cichocki zajął wówczas trzecie miejsce z liczbą punktów, która według obecnie przyjętych zasad kwalifikowałaby go do grupy zdobywców I nagrody.

(A) — w ten sposób zaznaczono, że zawodnik uzyskał wynik bezwzględnie najlepszy.

Zadania olimpijskie

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 433. Czy koło da się podzielić trzema cięciwami na siedem części o równych polach?
Rozwiązanie na str. 6

M 434. Pokazać, że jeśli (a_n) jest ciągiem różnych liczb naturalnych, które w rozwinięciu dziesiętnym nie mają cyfry 0, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 29.$$

Rozwiązanie na str. 15

M 435. Pokazać, że jeśli x, y, z i n są naturalne i $x^n+y^n = z^n$, to $x \geqslant n$ i $y \geqslant n$.
Rozwiązanie na str. 7

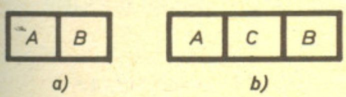
M 436. Pokazać, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.
Rozwiązanie na str. 5

M 437. Jest siedem kartek i na n-tej kartce napisana jest liczba 2^{n-1}. Losujemy (bez zwracania) kartki, dopóki suma liczb na wylosowanych kartkach nie przekroczy 124. Jaka wartość sumy jest najbardziej prawdopodobna?
Rozwiązanie na str. 5

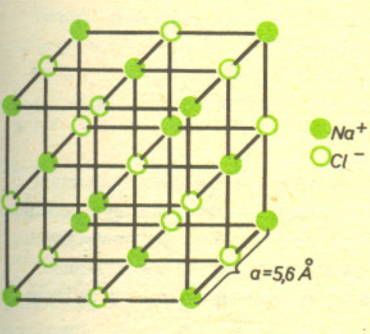
M 438. Dowieść, że dla żadnego n wielomian $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ nie ma pierwiastków wielokrotnych.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

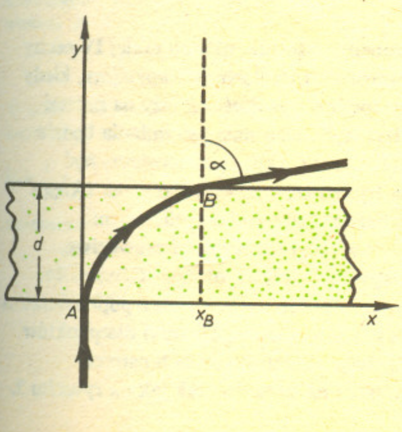
F 196. Dysponując zaciemnionym pokojem oraz mając: 1) źródło światła (świeczka lub żaróweczka), 2) płytkę szklaną, 3) arkusz papieru, 4) linijkę, 5) kątomierz, 6) statyw z uchwytami, 7) butelkę od lemoniady, wyznacz współczynnik załamania szkła butelki i szkła płytki. Uzasadnij metodę pomiaru i oszacuj błąd wyniku. Opisz sposób wykonania pomiarów.
Rozwiązanie na str. 15



F 197. Jeżeli dowolne dwa, początkowo elektrycznie obojętne, różne przewodniki o tej samej temperaturze zetkniemy, to jeden z nich naładuje się dodatnio, a drugi ujemnie. W stanie równowagi między przewodnikami wystąpi pewna różnica potencjałów zwana napięciem kontaktowym. Napięcie kontaktowe zależy od rodzaju stykających się ciał oraz od temperatury. Korzystając z II zasady termodynamiki wykaż, że napięcie kontaktowe między przewodnikami A i B nie zależy od tego, czy przewodniki te są zetknięte bezpośrednio (rys. a), czy poprzez trzeci przewodnik C (rys. b). Zakładamy, że wszystkie przewodniki mają tę samą temperaturę.
Rozwiązanie na str. 5



F 198. Komórka krystaliczna kryształu soli kuchennej (NaCl) ma kształt sześcianu przedstawionego na rysunku, którego krawędź ma długość a = 5,6Å. Kryształ soli kuchennej jest powtarzającą się strukturą takich komórek krystalicznych. Masa atomowa sodu wynosi 23, a chloru — 35,5. Gęstość soli kuchennej wynosi ϱ = 2,22 g/cm^3. Oblicz masę atomu wodoru.
Rozwiązanie na str. 4



F 199. Na płytkę płaskorównoległą, której współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem

$$n = \frac{n_0}{1-\frac{x}{R}}, \quad n_0 \text{ i } R \text{ są stałe,}$$

w punkcie A (o współrzędnej $x = 0$) prostopadle do płytki pada wąski promień światła. Promień ten wychodzi z płytki w punkcie B pod kątem α do kierunku pierwotnego.
1) Ile wynosi współczynnik załamania w punkcie B?
2) Ile wynosi współrzędna x_B punktu B?
3) Ile wynosi grubość płytki d?
Dane: n_0 = 1,2, R = 13 cm, α = 30°.
Rozwiązanie na str. 2

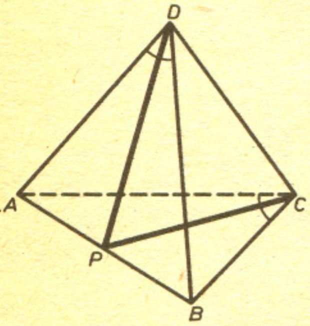
Zadanie — pułapka

Mgr Piotr MORMUL

W szkole czasami zdarzają się zadania, w których nauczyciel nie przewidział pewnych dodatkowych wariantów rozwiązania, stawiających niekiedy pod znakiem zapytania kategoryczność stwierdzeń z treści samego zadania. Jeśli takie zadanie z „drugim dnem” nauczyciel podaje świadomie, chodzi mu o zastawienie swoistej pułapki na uczniów. Jeśli jednak nieświadomie, to mimowolnie zastawia też pułapkę na siebie. Do zupełnych wyjątków należą takie zadania na prawdziwych zawodach matematycznych, jakimi są Olimpiady Matematyczne. Kronikarze amatorzy wspominający dawniejsze Olimpiady nie mogli sobie przypomnieć takich pułapek nieświadomie zastawionych na uczniów — zawodników. Ślepy los zadecydował, że taka pułapka znalazła się w finale XXV krajowej Olimpiady w roku szkolnym 1973/74. Wspomnienie to spisane jest przez byłego zawodnika.

Pierwszy dzień zawodów finałowych otworzyło następujące zadanie geometryczne:

W czworościanie $ABCD$ krawędź $\overline{AB}$ jest prostopadła do krawędzi $\overline{CD}$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnić, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź $\overline{AB}$ i środek krawędzi $\overline{CD}$ jest prostopadła do krawędzi $\overline{CD}$.



Rys. 1

Przyjrzyjmy się, jak w naturalny sposób rozwiązywała to zadanie zdecydowana większość zawodników, nie wyłączając wspominającego tamte zawody.

Zaczynano zwykle od rysunku. Po wykonaniu szkicu czworościanu (rys. 1) zastanawiano się, w który punkt P na krawędzi $\overline{AB}$ rzutuje się prostokątnie (założenie!) cała krawędź $\overline{CD}$. Następnie dorysowując odcinki $\overline{PC}$ oraz $\overline{PD}$ (wysokości odpowiednich ścian czworościanu!) starano się udowodnić ich równość. Do tego bowiem instynktownie skłaniało założenie o równości kątów $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. I istotnie, taki rysunek narzucał sformułowanie nowej, IV „cechy przystawania trójkątów”:

Trójkąty mające jednakowe podstawy i kąty leżące naprzeciw nich oraz jednakowo położone spodki wysokości opuszczonych na te podstawy są przystające.

Teraz każdy potrafiłby sam kontynuować rozumowanie. Mianowicie, w trójkątach przystających wysokości opuszczone na odpowiadające sobie boki są równe, zatem $|\overline{PC}| = |\overline{PD}|$. Oznaczając przez Q środek krawędzi $\overline{CD}$ otrzymywano, iż PQ jest symetralną odcinka $\overline{CD}$. Prosta CD okazywała się zatem być prostopadła i do AB (z założenia), i do PQ. Także więc — prostopadłą do płaszczyzny rozpiętej na tych dwóch prostych AB oraz PQ, a o to przecież chodziło w zadaniu olimpijskim.

Takie też rozwiązanie przedstawił jeden z zawodników, ochotnik, na tradycyjnym spotkaniu — herbatce po południu drugiego dnia zawodów finałowych.

Spośród tych, którzy rozwiązali to zadanie błędnie, gdyż nie dostrzegali owego ukrytego drugiego dna, nie wszyscy zapewne postępowali dokładnie w sposób powyżej opisany. Wśród 71 uczestników zawodów finałowych było też kilku, którzy to drugie dno dostrzegli i w swoich rozważaniach na temat zadania doszli do konkluzji, że w tym sformułowaniu jego teza jest po prostu fałszywa. We wspomnieniach innych jeszcze uczestników zawodów powtarza się liczba co najmniej czterech olimpijczyków, którzy tak właśnie postąpili.

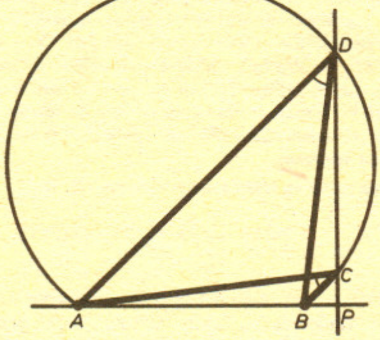
Niektórzy z uczestników, którym podczas pierwszego dnia zawodów nie dopisała wyobraźnia geometryczna, sami przemyśleli lub dowiedzieli się o swym błędzie do poranka następnego dnia. W szczególności rano przed drugim dniem zawodów w grupie uczniów z klas matematycznych Liceum im. Gottwalda w Warszawie trwała gorączkowa dyskusja nad tym właśnie zadaniem. Chyba nikt z gottwaldowców nie zauważył pierwszego dnia tej mimowolnie ukrytej w zadaniu pułapki...

Czytelnik domyśla się już zapewne, gdzie był pies pogrzebany. Istotnie, nie ma takiej IV cechy przystawania trójkątów, jak wspomniana powyżej i opatrzona cudzysłowem. Zapytajmy, kiedy taka „cecha” nie jest prawdziwa. Otóż tylko wtedy, gdy spodek wysokości P leży na prostej AB poza samą krawędzią $\overline{AB}$, choć i wtedy może się zdarzyć, że teza naszego zadania będzie spełniona. Kąt przy wierzchołku A lub B w trójkątach ABC oraz ABD musi wówczas być rozwarty, a więc równe kąty $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ADB$ muszą być ostre, tzn. wpisane w łuk okręgu dłuższy niż połowa okręgu (rys. 2). Dla czworościanów bardziej przysadzistych, z tymi dwoma kątami prostymi lub rozwartymi, teza zadania jest w całej rozciągłości prawdziwa. Wymienione kąty są wtedy wpisane w łuk będący nie więcej niż połową okręgu. Oznacza to, że punkt P może wtedy leżeć tylko wewnątrz krawędzi $\overline{AB}$, a prostopadła przezeń poprowadzona może tylko w jednym miejscu przeciąć taki łuk. Nie ma wtedy dwóch możliwości dla punktów C i D. Natomiast — podkreślmy to spostrzeżenie — przy wspomnianych kątach ostrych wysokości $\overline{PC}$ oraz $\overline{PD}$ mogą różnić się diametralnie, właśnie na przykład tak jak na rysunku 2.

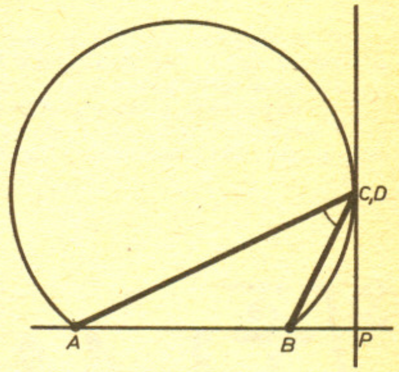
Rozwiązanie zadania M 438. Niech $w_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Gdyby a było pierwiastkiem wielokrotnym w_n, to byłoby pierwiastkiem pochodnej tego wielomianu, $w_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = w_{n-1}(x)$. Mielibyśmy $w_n(a) = 0$, $w_{n-1}(a) = 0$, skąd $\frac{a^n}{n!} = 0$. Wtedy jednak $w_n(a) = 1$ — sprzeczność.

Nie ma wtedy mowy o tym, by PQ była symetralną krawędzi $\overline{CD}$. Nie ma więc też wtedy prostopadłości CD do PQ. Prosta CD nie może wówczas być prostopadła do całej płaszczyzny rozpiętej na prostych AB oraz PQ — i teza zadania okazuje się wtedy fałszywa.

Jaki jednak wyjątek mieliśmy na myśli, kiedy to nawet przy ostrych, równych kątach $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ADB$ można całe zadanie uratować?



Rys. 2



Rys. 3

Okazuje się, że wspólny spodek P dwóch wysokości może znajdować się na prostej AB, poza odcinkiem $\overline{AB}$, w miejscu szczególnym. Dającym mianowicie styczność prostopadłej do AB przez P do łuku opartego na cięciwie $\overline{AB}$, z którego $\overline{AB}$ widać pod wspomnianym kątem (oczywiście ostrym). Jest to uwidocznione na rysunku 3. Widzimy, że wtedy możliwa jest (szczęśliwie) jedna tylko wysokość opuszczona na AB dla trójkątów ABC oraz ABD. A to, jak wiemy, stanowi tu sedno. Dla pewnych, w specjalny sposób pochylonych czworościanów z ostrym kątem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ teza zadania olimpijskiego zachodzi więc również.

Cóż działo się dalej podczas wspomnianej herbatki pod koniec drugiego dnia zawodów? (Zawodnicy mogą na takich herbatkach dyskutować między sobą, uczestniczący zaś w herbatce członkowie Komitetu Głównego Olimpiady nie zawsze komentują od siebie rozwiązania uczniów.)

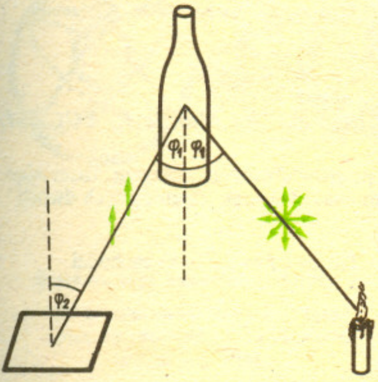
Gdy Ochotnik przedstawił przytoczoną tu w przybliżeniu, połowiczną analizę zadania, grupa zawodników z Liceum Gottwalda nie czekała już dłużej z ujawnieniem swojej znajomości drugiego dna w tym zadaniu. Jeden z gottwaldowców zgłosił się od razu do dyskusji i zaczął wyjaśniać słaby punkt w rozwiązaniu Ochotnika. Wtedy oczywiście włączyli się do wymiany zdań przedstawiciele Komitetu Głównego, którzy otwarcie stwierdzili, że do tej pory nie zauważyli pułapki. Takie oświadczenie spowodowało odprężenie wśród zawodników. Zaczęły się jednak spekulacje na temat oceny rozwiązań. Gwoli kronikarskiej dokładności trzeba stwierdzić, że matematycy z Komitetu Głównego nie dali od razu za wygraną i zaczęli sprawdzać poprawność wniosków zawodnika-gottwaldowca. Wtedy włączył się z sali ktoś z tej samej „silnej grupy". Oświadczył on kategorycznie, że potrafi analitycznie określić czworościan, dla którego teza zadania nie będzie prawdziwa, co też w chwilę później uczynił. Równocześnie Komitet Główny też był już pewny swojego niedopatrzenia. Ogłoszono, że najwyżej punktowane będą rozwiązania pełne, wskazujące na możliwość niezachodzenia tezy zadania.

Najciekawsze jest to, że co najmniej czterej zawodnicy przeprowadzili w tym zadaniu pełną analizę już w czasie zawodów i uwidocznili ją w swoich rozwiązaniach. Jak to często jednak zdarza się w życiu, nie oni nadawali ton dyskusjom na przyolimpijskiej giełdzie i podczas herbatki. W prywatnych rozmowach z zawodnikami z Liceum Gottwalda stwierdzali tylko rzeczowo, iż nie rozumieją tak dużego podniecenia towarzyszącego temu zadaniu; po prostu okazało się częściowo nieprawdziwe i tyle.

Gdy teraz, po ponad 11 latach, pochylamy się nad żółknącym już tomikiem sprawozdań Komitetu Głównego z XXV Olimpiady Matematycznej, odnajdujemy tam m.in. statystykę rozwiązań poszczególnych zadań. Odczytujemy z niej, że bardzo dobrze rozwiązało wtedy to zadanie 9 zawodników, dobrze 2, dostatecznie 27, niedostatecznie 31, 2 zawodników nie rozpoczęło zadania. Być może Komitet Główny — uwzględniając swoje przeoczenie — stosował łagodniejszą skalę ocen dla tego zadania geometrycznego. W przedziale „bardzo dobrze" zmieściło się jeszcze kilku zawodników poza wspomnianą czwórką. Ciekawe natomiast, czy zawodnicy niezawodni w jednym temacie olimpijskim okazali się równie sprawni podczas całych jubileuszowych, dwudziestych piątych zawodów. Może inny kronikarz amator lub sami zainteresowani umieliby odpowiedzieć na to pytanie.

Cały ten barwny epizod potwierdza prawdę, że w świecie matematyki i jej nieubłaganych wnioskowań wszyscy mogą się czuć i naprawdę są równi. Młodzi olimpijczycy dyskutujący jak równy z równym ze znanymi matematykami z Komitetu Głównego Olimpiady — to obraz, który na trwałe pozostanie w pamięci piszącego te słowa.

Rozwiązanie zadania F 196. Nieregularny kształt butelki wyklucza możliwość wyznaczenia współczynników na podstawie obserwacji załamania światła. Zadanie najlepiej rozwiązywać znajdując kąt padania, dla którego promień odbity jest całkowicie spolaryzowany (kąt Brewstera). W układzie przedstawionym na rysunku można wyznaczyć kąty Brewstera jednocześnie dla szkła butelki i szkła płytki.



Należy tak dobrać konfigurację płytki, butelki i świeczki, by pionowy refleks płomienia świecy widziany na butelce znikał po odbiciu w płytce. Wtedy kąty φ_1 i φ_2 będą odpowiednimi kątami Brewstera, na podstawie których można wyznaczyć współczynniki załamania. W metodzie tej korzysta się z faktu, iż promień światła odbity pod kątem Brewstera jest całkowicie spolaryzowany.

Rozwiązanie zadania M 434. Przypuśćmy, że (a_n) jest rosnącym ciągiem wszystkich liczb naturalnych, które nie mają zera w rozwinięciu dziesiętnym. Rozpatrzmy liczby z ciągu (a_n), które mają k cyfr. Jest ich 9^k, wśród nich 9^{k-1} zaczyna się od ustalonej cyfry c. Suma odwrotności liczb, zaczynających się od cyfry c jest nie większa niż

$$9^{k-1}\cdot\frac{1}{c\cdot 10^{k-1}}.$$

W takim razie suma odwrotności liczb k-cyfrowych jest nie większa niż

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\leqslant\frac{29}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

i ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{29}{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}=$$

$$=\frac{29}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=29 \text{ c.n.d.}$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1986

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 119 /WT=2,79/ i 120 /WT=1,87/
z numeru 11/1985

Dariusz Kurpiel	- Zarszyn	45,16pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Wojciech Boratyński	- Warszawa	41,83pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Jacek Uryga	- Bytom	40,71pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	39,45pkt

Pan Dariusz Kurpiel jest trzydziestym ósmym członkiem Klubu 44.

Zadania z matematyki nr 131, 132

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

131. Przez środki dwóch skośnych krawędzi czworościanu poprowadzono płaszczyznę, rozcinając nią czworościan na dwie części. Jakie wartości może przyjmować stosunek objętości tych dwóch części?

132. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a_{ij} ($i = 1,\dots,n$; $j = 1,\dots, k$) zachodzi nierówność

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} a_{ij}\Big)^k \leqslant \prod_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k .$$

Zadanie 132 przysłał pan Marcin Mazur z Białegostoku

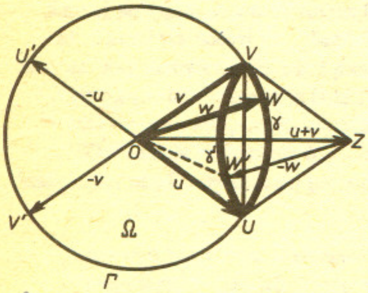
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1986

Przypominamy treść zadań:

123. Rozwiązać równanie $(a^2x+b^2/x)\sqrt{1+(x-c)^2} = 2ab$ (dane $a, b, c > 0$).

124. Dane wektory współpłaszczyznowe $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ o długości 1. Dowieść, że któryś z wektorów $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ ma długość $\leqslant 1$.

123. Żadna liczba $x < 0$ równania nie spełnia. Dla $x > 0$ pierwszy czynnik iloczynu po lewej stronie równania jest $\geqslant 2ab$, a drugi jest $\geqslant 1$. Równanie może więc być spełnione jedynie wtedy, gdy obie te nierówności stają się równościami, czyli gdy $x = b/a$ i jednocześnie $x = c$. Zatem: gdy $c \neq b/a$, równanie nie ma rozwiązań; gdy $c = b/a$, równanie ma jedno rozwiązanie $x = c$.

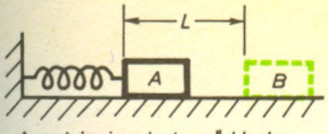


124. Wybierzmy dowolny punkt płaszczyzny O i oznaczmy przez Ω koło domknięte o środku O i promieniu 1, a przez Γ brzeg tego koła. Niech U, V, W, U', V' będą takimi punktami okręgu Γ, że $\overrightarrow{OU} = \boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{OV} = \boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{OW} = \boldsymbol{w}$, $\overrightarrow{OU'} = -\boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{OV'} = -\boldsymbol{v}$. Rozpatrzymy na początku przypadek, gdy punkt W należy do krótszego łuku okręgu Γ o końcach U i V. Oznaczmy ten łuk przez γ (rysunek), a przez γ' łuk symetryczny do γ względem prostej UV. Oczywiście $\gamma' \subset \Omega$. Niech W' będzie punktem symetrycznym do W względem środka odcinka $\overline{UV}$. Założyliśmy, że $W \in \gamma$, a zatem $W' \in \gamma' \subset \Omega$, czyli $OW' \leqslant 1$. Zbudujmy romb $OUZV$. Zachodzą równości wektorowe $\overrightarrow{OZ} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{ZW'} = -\boldsymbol{w}$, skąd $\overrightarrow{OW'} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, tak, że w tym przypadku $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}| \leqslant 1$.
Przechodząc do przypadku ogólnego zauważmy, że punkt W musi leżeć na jednym z czterech łuków, na które punkty U, V, U', V' dzielą okrąg Γ. Możemy więc powtórzyć przeprowadzone rozumowanie zastępując wektory $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ przez pewne dwa kolejne wektory z czwórki $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{OU'}$, $\overrightarrow{OV'}$. W każdym przypadku są to wektory $\pm\boldsymbol{u}$, $\pm\boldsymbol{v}$. Stąd wniosek, że $|\varepsilon\boldsymbol{u}+\eta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}| \leqslant 1$ dla pewnego układu znaków $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, a to jest równoważne tezie dowodzonego twierdzenia.

Klub 44 w konfrontacji z uczestnikami XXVII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Podczas drugiego spotkania członków **Klubu 44**, które odbyło się w październiku zeszłego roku, organizatorzy ligi zadaniowej zaproponowali członkom **Klubu 44** oryginalną próbę sił: sześcioosobowa reprezentacja **Klubu 44** otrzyma do rozwiązania te same zadania, z którymi zmagać się będą uczestnicy XXVII MOM. Odbędzie się to w Warszawie w tych samych dniach, co zawody XXVII MOM, tj. 9 i 10 lipca tego roku. Warunki będą takie same, jak dla olimpijczyków: odizolowana sala, cztery i pół godziny czasu, trzy zadania (każdego z dwóch dni zawodów). Pisanie rozpocznie się w oba dni o tej godzinie, o której zakończą się zawody MOM, a więc, gdy treść zadań będzie już jawna.

Rozwiązania naszych reprezentantów będą następnie ocenione według tych samych kryteriów, co i rozwiązania olimpijczyków. Nasza reprezentacja zostanie wyselekcjonowana spośród trzynastu osób, które w październiku 1985 r. były członkami **Klubu 44** i wyraziły chęć udziału w imprezie. Podstawą selekcji będą wyniki uzyskane przez te osoby w rozwiązywaniu zadań ligowych z numerów 8/1985 — 3/1986.
Ciekawi jesteśmy, jak wypadnie reprezentacja **Klubu 44** w konfrontacji z ekipami różnych państw biorącymi udział w MOM. O rezultatach tej konfrontacji powiadomimy naszych Czytelników.



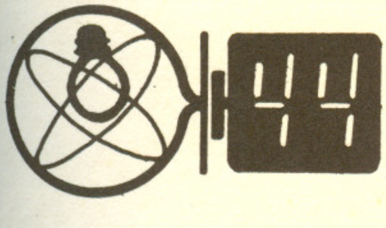
A - położenie „startowe" klocka
B - położenie klocka przy luźnej sprężynie

Zadania z fizyki nr 29, 30

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

29. Klocek o masie m, spoczywający na płaskim, poziomym podłożu, jest połączony sprężyną o stałej sprężystości k ze stałym punktem (jak na rysunku). Sprężynę ściśnięto o odcinek L w stosunku do położenia swobodnego, a następnie puszczono. O jaki odcinek przesunie się klocek po podłożu do swego pierwszego zatrzymania, jeżeli współczynnik tarcia klocka o podłoże wynosi f? Masę sprężyny należy zaniedbać.

30. Jaki co najmniej powinien być wypadkowy ładunek elektryczny Ziemi wraz z atmosferą, aby (przy założeniu kulisto-symetrycznego rozkładu tego ładunku) występowało elektrostatyczne „wymiatanie" z ziemskiego pola grawitacyjnego (z górnych warstw atmosfery) jednokrotnie dodatnio zjonizowanych atomów wszystkich pierwiastków? Jaką objętość powietrza (w warunkach normalnych) należałoby całkowicie zjonizować, aby łączny ładunek uzyskanych w ten sposób jonów N^+ i O^+ odpowiadał powyższemu ładunkowi? Niezbędne do obliczeń dane należy wziąć z tablic.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 17 /WT=1,65/ i 18 /WT=1,95/
z numeru 11/1985

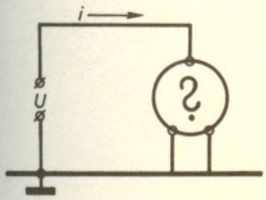
Piotr Bała	- Toruń	37,04pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	26,72pkt

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1986

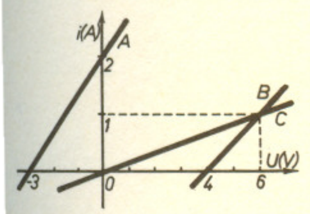
Przypominamy treść zadań:

21. Dana jest elektryczna „czarna skrzynka", zawierająca nieznany obwód, z trzema zaciskami A, B, C. Posługując się układem pokazanym na rysunku 1 wyznaczono zależność natężenia prądu i od przyłożonego z zewnątrz napięcia U dla trzech kombinacji zacisków. Zależności te (charakterystyki prądowo-napięciowe) są przedstawione na rysunku 2. Dodatni kierunek prądu określa strzałka na rysunku 1, a symbol przy każdej z charakterystyk odpowiada symbolowi zacisku, który w danym przypadku połączony był ze źródłem napięcia (dwa pozostałe połączone z masą). Podać najprostszy możliwy układ elektryczny „czarnej skrzynki" i określić parametry jego elementów.

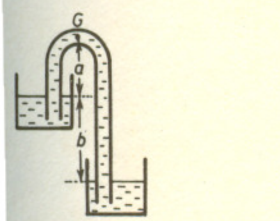
22. Rysunek 3 przedstawia schematycznie lewar używany do przelewania cieczy między naczyniami o różnych poziomach. Jakie czynniki, poza ciśnieniem atmosferycznym, warunkują maksymalną wysokość a wzniesienia cieczy w lewarze nad poziom górnego naczynia? Wyznaczyć maksymalną wysokość a dla dwóch skrajnych przypadków: (1) gdy $b \ll a$ oraz (2) gdy $b \gg a$. Należy przy tym przyjąć, że rurka lewara ma na całej długości jednakową średnicę, że długość wygiętego łukowo odcinka lewara jest mała w porównaniu z a oraz że ciecz jest czysta (jednoskładnikowa i nie zawiera rozpuszczonych gazów).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

21. Na podstawie zależności $i(R)$ (rys. 2) znajdujemy schematy zastępcze „czarnej skzynki" dla różnych kombinacji zacisków (rys. 4). Schematy te dają się zrealizować przez układ przedstawiony na rysunku 5. Poszukiwane parametry tego układu spełniają następujące związki (wprowadzamy tu oznaczenia przewodności $G_k = 1/R_k$ i korzystamy z wzorów wyprowadzonych w rozwiązaniu zadania 5, zamieszczonym w numerze 7/1985):

$$G_A = G_2+G_3, \quad G_B = G_3+G_1, \quad G_C = G_1+G_2,$$

$$\mathcal{E}_A = \frac{G_2\mathcal{E}_2+G_3\mathcal{E}_3}{G_2+G_3}, \quad \mathcal{E}_B = \frac{G_3\mathcal{E}_3-G_1\mathcal{E}_1}{G_3+G_1}, \quad 0 = \frac{G_1\mathcal{E}_1+G_2\mathcal{E}_2}{G_1+G_2}.$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymujemy:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = 6\,\Omega, \quad R_3 = 2\,\Omega, \quad \mathcal{E}_1 = 0, \quad \mathcal{E}_2 = 0, \quad \mathcal{E}_3 = 4\mathrm{V}.$$

Rozszyfrowane wnętrze „czarnej skrzynki" przedstawia rysunek 6. Identyczny wynik można otrzymać przyjmując układ w postaci „gwiazdy" (rys. 7).

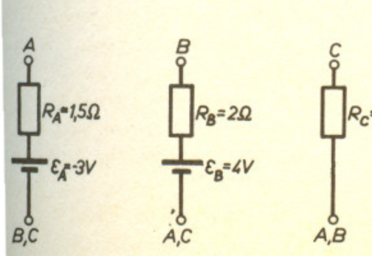
22. Przelewanie cieczy lewarem będzie niemożliwe, gdy w górnej jego części powstanie pęcherz pary nasyconej cieczy, stąd uzależnienie procesu od ciśnienia pary nasyconej p_n tej cieczy. W sytuacji przepływu cieczy ze stałą prędkością (stan ustalony) można przyjąć, że wzdłuż rury lewara zachodzi liniowy spadek ciśnienia. Wobec tego ciśnienie w punkcie G (przy zaniedbaniu wymiarów łuku lewara) jest równe

$$p_G = p_0-\varrho g a-\frac{a}{2a+b}\varrho g b = p_0-\varrho g\frac{2a(a+b)}{2a+b},$$

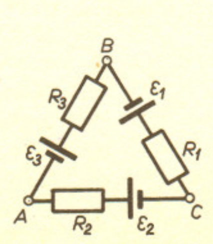
gdzie p_0 — ciśnienie atmosferyczne, ϱ — gęstość cieczy, g — przyspieszenie ziemskie. Aby nie tworzyły się pęcherze pary nasyconej, powinno zachodzić $p_n < p_G$. Stąd wyznaczamy maksymalną wysokość a:

$$\text{dla przypadku } b \ll a \qquad a_{max} = \frac{p_0-p_n}{\varrho g},$$

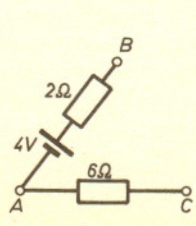
$$\text{dla przypadku } b \gg a \qquad a_{max} = \frac{p_0-p_n}{2\varrho g}.$$



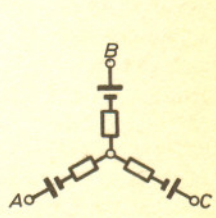
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7