

SPIS TREŚCI

NUMERU 4(148)

Ćwierćwiecze lasera <i>prof. dr Adam Kujawski</i>	str. 1
Kącik olimpijski	str. 3
Parę słów o chromosferach <i>mgr Krzysztof Jahn</i>	str. 4
Niezwykły rodzaj sprężystości <i>dr Grzegorz Derfel</i>	str. 6
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Zadanie sortowania teoretycznego <i>doc. dr Antoni Kreczmar</i>	str. 10
Pole elektrostatyczne <i>Julian Adam Kutrzeba</i>	str. 11
Dżem z dyni o smaku pomarańczowym, czyli o testowaniu hipotez statystycznych <i>prof. dr Jan Oderfeld,</i> <i>doc. dr Elżbieta Pleszczyńska</i>	str. 12
Patrz w niebo	str. 15
Klub 44	str. 16

W następnym numerze:
Olimpiady

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
 dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
 dr Jan Rempala
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stepiń
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 dr Michał Szurek
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wolska
 prof. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Zakowski —
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
 mgr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 mgr Ewa Ryłłowa
 dr Jerzy Ryłł
 mgr Joanna Udalska
 mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 2011/12/86. P-33.

WARUNKI PRUNEMERATY

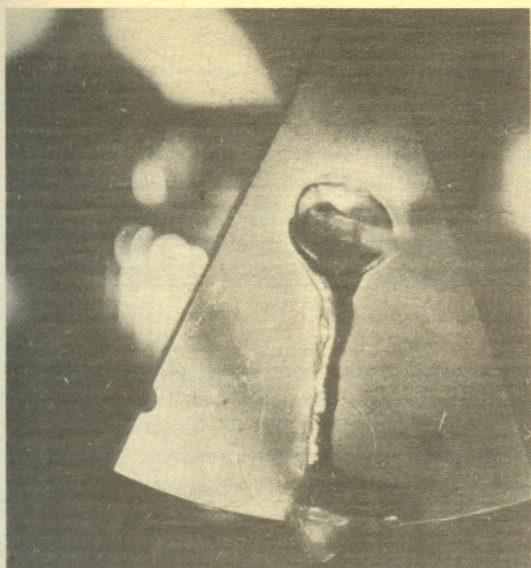
Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.
 Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

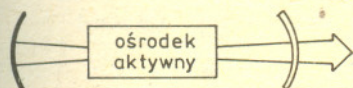
Cena 1 egzemplarza zł 35,—



Ćwierćwiecze lasera

Prof. dr Adam KUJAWSKI

Laser stał się jednym z największych sukcesów nauki i techniki XX wieku. Chociaż zazwyczaj nie działa on na naszą wyobraźnię tak mocno jak inne osiągnięcia, na przykład opanowanie energii jądrowej lub wykorzystanie komputerów, jego znaczenie zarówno w badaniach naukowych, jak i zastosowaniach technicznych oraz medycznych jest ogromne. Dwadzieścia pięć lat, jakie upłynęło od zbudowania pierwszego lasera przez Theodora H. Maimana w 1960 r., jest okazją do krótkiego przeglądu oraz przypomnienia, że stale odkrywa się nowe zjawiska fizyczne zarówno w samych laserach, jak i przy ich wykorzystaniu. Spotykane określenia lasera, takie na przykład jak „cudo świetlne dwudziestego wieku” lub „światło wieku dwudziestego pierwszego”, są wyrazem podziwu dla odkrytych właściwości promieniowania laserowego.



Schemat lasera, w którym dwa zwierciadła sferyczne tworzą rezonator.

W latach pięćdziesiątych zjawisko emisji wymuszonej wykorzystano do wzmacniania i generacji promieniowania mikrofalowego. Tak powstały masery. Następnie zjawisko to wykorzystano do generacji promieniowania widzialnego; świadczy o tym geneza słowa laser: *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Twórcy maserów i laserów: Nikołaj G. Basow, Aleksander M. Prochorow i Charles Hard Townes otrzymali w 1964 r. nagrodę Nobla. Nagrodę tę otrzymali także N. Bloembergen i A. L. Schawlow w 1981 r. za osiągnięcia w optyce nieliniowej i spektroskopii laserowej. W typowym, najczęściej spotykanym laserze, ośrodek aktywny znajduje się między dwoma sferycznymi zwierciadłami, które tworzą rezonator optyczny, jak pokazano na rysunku. Zwierciadła (lub jedno z nich) są częściowo przepuszczalne. Rozważmy dwa stany

o energiach E_2 i E_1 każdego z atomów lub cząsteczek tworzących ośrodek aktywny. W warunkach równowagi termodynamicznej liczby N_2 i N_1 (w jednostce objętości) atomów o energiach E_2 i E_1 spełniają nierówność $N_2 < N_1$. Odpowiednie wzbudzenie (pompowanie) może doprowadzić do odwrócenia (inwersji) obsadzeń w ośrodku aktywnym, to znaczy do sytuacji, w której $N_2 > N_1$. Gdy w takim ośrodku pojawi się promieniowanie o częstości $\nu = (E_2 - E_1)/h$, h — stała Plancka, ulega ono wzmocnieniu w wyniku aktów emisji wymuszonej. Układ taki jest wzmacniaczem optycznym. Pojawienie się promieniowania może być rezultatem emisji spontanicznej, to znaczy samorzutnego przejścia atomu ze stanu o energii E_2 do stanu o energii E_1 wraz z emisją fotonu. Tak więc emisja spontaniczna inicjuje świecenie materiału aktywnego w kierunku, w którym porusza się foton powstały w wyniku emisji spontanicznej. Takie promieniowanie układu atomów nosi nazwę wzmocnionej emisji spontanicznej. W tym przypadku rozkład przestrzenny natężenia promieniowania jest określony kształtem materiału aktywnego. Gdy układ atomów jest wewnątrz rezonatora, fotonem poruszającym się w kierunku osi rezonatora zapewnia on dodatnie sprzężenie zwrotne, bowiem część promieniowania odbija się od zwierciadeł i ponownie przechodzi przez materiał aktywny. Jednocześnie rezonator pełni inną ważną rolę, ponieważ mogą w nim wzbudzać się pewne charakterystyczne rozkłady pola, zwane rodzajami lub modami, mające określone częstotliwości drgań. Ośrodek aktywny wzmacnia promieniowanie tych modów, których częstotliwości mieszczą się w szerokości linii widmowej świecącego układu atomów. Przy pewnej wartości mocy pompowania, dla jednego lub wielu modów, wzmocnienie równowagi straty promieniowania w rezonatorze. Warunek ten określa próg akcji laserowej. Przy pompowaniu powyżej progu układ rezonator-ośrodek aktywny jest generatorem promieniowania optycznego. W takim generatorze, stosując odpowiednie metody, można wzbudzać akcję laserową tylko na jednym modzie rezonatora. Oznacza to oczywiście wyższy stopień monochromatyczności promieniowania niż w przypadku wzbudzenia wielu modów. W czasie akcji laserowej istotne jest to, że fotony promieniowane aktami emisji wymuszonej przez atomy ośrodka aktywnego są takie same. W rezultacie wiązka światła opuszczająca rezonator przez częściowo przepuszczające zwierciadło — może to być pojedynczy impuls lub ciąg impulsów, albo świecenie w sposób ciągły — ma bardzo dobrą spójność przestrzenną i czasową. Oznacza to małą rozbieżność kątową i wysoki stopień monochromatyczności. Liczba różnych rozwiązań technicznych, w których wykorzystano zjawisko emisji wymuszonej, tak jak wyżej naszkicowano, jest ogromna. Inwersję obsadzeń można otrzymać różnymi metodami; mówiąc ogólnie za pomocą wzbudzenia optycznego, wyładowania elektrycznego lub reakcji chemicznych, a akcję laserową uzyskuje się zarówno w materiałach fazy skondensowanej, jak i gazowej. Podkreślimy jeszcze, że ogólna teoria działania lasera ma głębokie związki z teorią układów nie będących w stanie równowagi termodynamicznej.

W pierwszym laserze, w którym materiałem aktywnym był kryształ rubinu, uzyskano impuls o czasie trwania rzędu 10^{-3} s, a moc wynosiła około 1 kW. W układzie laserowym dużej mocy „Antares” w Los Alamos, przeznaczonym do otrzymania kontrolowanej syntezy termojądrowej (por. *Delta* 3/1975, art. S. Kaliskiego) i wykorzystującym największy dotychczas zbudowany laser na dwutlenku węgla (długość fali $10,6 \mu\text{m}$), otrzymano impuls o czasie trwania 1 ns i mocy 25 TW. Energia impulsu wynosi 25 kJ; docelowo układ ma dostarczać impulsy o energii 40 kJ. W innym układzie laserowym „Nova” w Livermore, wykorzystującym lasery neodymowe, osiągnięto moc 57 TW w impulsie o czasie trwania 1 ns (długość fali $1,05 \mu\text{m}$).

Układ ten w przyszłości ma osiągnąć moc ponad 100 TW.

$$1 \text{ TW} = 10^{12} \text{ W}$$

W pierwszym laserze pracującym w sposób ciągły ośrodkiem aktywnym była mieszanina He-Ne; moc tego lasera była mniejsza niż 1 mW. Obecnie w laserach pracujących w sposób ciągły (materiał aktywny CO₂ lub HF) moce dochodzą do 100 kW. Skala wymiarów obecnie budowanych laserów rozciąga się od ułamków milimetra do kilku metrów. Układy laserowe dużej mocy mają znacznie większe wymiary.

Chociaż postęp w osiąganiu coraz większych mocy jest imponujący, a duże moce światła laserowego znalazły liczne zastosowania, spójność promieniowania laserowego jest cechą, która w fundamentalny sposób odróżnia to promieniowanie od promieniowania ze źródeł konwencjonalnych (por. *Delta* 6/1981, art. A. Kujawskiego i J. Mostowskiego). Jeśli chodzi o spójność czasową, to oznacza to, że światło lasera może być monochromatyczne w bardzo wysokim stopniu; dla długości spójności światła osiągnięto wartość setek kilometrów, podczas gdy dla źródeł konwencjonalnych dochodzi ona najwyżej do kilku milimetrów. Jeśli chodzi o spójność przestrzenną, to wiązka światła laserowego może mieć bardzo małą rozbieżność kątową porównywalną z naturalną rozbieżnością dyfrakcyjną. Wysoki stopień spójności czasowej i przestrzennej pozwala charakteryzować promieniowanie laserowe w inny sposób. Gęstość mocy na jednostkę kąta bryłowego i gęstość spektralna mocy (moc na jednostkę częstości) są znacznie większe dla promieniowania z laserów niż dla promieniowania ze źródeł konwencjonalnych.

Optyka jest tą dziedziną fizyki i techniki, która w okresie po zbudowaniu lasera uległa głębokim i istotnym przemianom (por. *Delta* 4/1985, art. K. Ernsta). W istocie w optyce nastąpiła era laserów. Odkryto wiele nowych zjawisk w atomach, takich jak na przykład wzbudzenie wielofotonowe, dynamiczny efekt Starka, pułapki jonowe (por. *Delta* 5/1985, art. A. Kopystynskiej). Skonstruowanie laserów o przestrajalnej długości fali umożliwiło wprowadzenie nowych metod separacji izotopów (por. *Delta* 9/1977, art. F. Kaczmarka). W wyniku powstania spektroskopii laserowej nastąpił gwałtowny rozwój fizyki atomowej i fizyki ciała stałego. Powstały nowe dziedziny, takie jak optyka nieliniowa i optyka światła spójnego. Do tej ostatniej należą holografia (por. *Delta* 2/1974, art. B. Karczewskiego) i optyka fourierowska, a ogólniej mówiąc, optyczne metody przetwarzania danych. W większości odkrytych nowych zjawisk optycznych spójność oraz duża gęstość mocy grają istotną rolę, a opis klasyczny jest wystarczający. Na uwagę jednak zasługują te zjawiska, które ukazują kwantową naturę promieniowania. Przykładem są eksperymentalne i teoretyczne badania statystyki zliczeń fotonów światła lasera jednomodowego. Wyniki badań pokazują, że takie światło ma właściwości statystyczne inne niż światło ze źródeł konwencjonalnych (por. *Delta* 8/1985, art. K. Rzążewskiego). Tych nowych właściwości statystycznych nie można stwierdzić w doświadczeniach interferencyjnych; są one obserwowane w zjawiskach nieliniowych. Wszystkie tego rodzaju zjawiska zalicza się do optyki kwantowej.

Rozwój elektroniki, zapoczątkowany wynalezieniem radia, przyniósł opanowanie i zastosowanie promieniowania elektromagnetycznego o długości fal aż do wartości rzędu centymetrów. Zbudowanie maserów oznaczało, że elektronika stała się kwantowa. Zbudowanie laserów — źródeł spójnego optycznego promieniowania o znacznie mniejszych długościach fal — spowodowało, że obecnie elektronika jest dziedziną, która zajmuje się również optyczną częścią widma elektromagnetycznego.

W książce *Nowe oblicze optyki* Arkadiusz Piekara pisze, że optyka staje się „radiotechniczna” i porównuje lasery z optycznymi stacjami radiowymi, wysyłającymi fale spójne. Powstała więc nowa dziedzina nazwana optoelektroniką, do której między innymi należą telekomunikacja światłowodowa i optyka zintegrowana (w analogii do elektroniki zintegrowanej zajmującej się układami scalonymi). Przyjęto też — w analogii do elektroniki — dziedzinę, do której zalicza się badania właściwości światła i zjawisk optycznych oraz ich zastosowania, nazywać fotoniką. Ta nazwa przypomina także kwantowy charakter promieniowania optycznego.

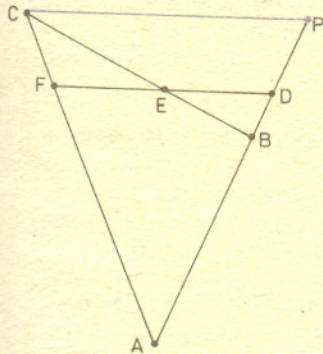
Lasery nie tylko zmieniły i zbliżyły do siebie optykę i elektronikę. Także w biologii i medycynie, zarówno w badaniach poznawczych, jak i zastosowaniach praktycznych, ich wykorzystanie stale rośnie. Zupełnie ogólnie można zresztą powiedzieć, że nie ma obecnie dziedziny nauki i techniki, w której lasery nie byłyby wykorzystywane. Po upływie pierwszego ćwierćwiecza pewne typy laserów są produkowane na skalę przemysłową, a niektóre tylko do celów specjalnych. W wielu laboratoriach prowadzi się badania zarówno nad układami, w których można uzyskać akcję laserową, jak i nad zastosowaniami.

Na zakończenie warto jeszcze omówić niektóre aktualne, szczególnie ważne osiągnięcia. Zbudowany został laser, w którym źródłem promieniowania są swobodne elektrony. W takim laserze wiązka szybkich elektronów przechodząc przez odpowiednie periodyczne pole magnetyczne emituje promieniowanie o długości fali zależnej od okresu i natężenia pola magnetycznego i energii elektronów. Całość znajduje się w odpowiedniej wnęcie rezonansowej. Oczekuje się, że tego typu lasery staną się źródłem promieniowania w dalekim ultrafiolecie. Innym ważnym rezultatem w badaniach nad laserami w obszarze fal krótkich jest otrzymanie wzmocnienia promieniowania o długościach fal w pobliżu 21 nm. W tym przypadku krótkie impulsy promieniowania (450 ps, długość fali 532 nm, gęstość mocy $5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$) padające na cienkie warstwy selenu wytwarzają plazmę i inwersję obsadzeń odpowiednio niskich poziomów energetycznych. Istnieją także doniesienia o wzmocnieniu promieniowania o długości fali 1,4 nm przy pompowaniu wybuchem ładunku jądrowego. Chociaż używa się nazwy laser rentgenowski — emisja wymuszona gra zasadniczą rolę — w istocie w obydwu przypadkach mamy do czynienia ze wzmocnioną emisją spontaniczną (brak jest rezonatora). Niewątpliwie rozstrzygający krok na drodze do zbudowania lasera w obszarze promieniowania rentgenowskiego został zrobiony.

W badaniach nad ultrakrótkimi impulsami światła opanowano technikę wytwarzania i pomiarów impulsów światła o czasach trwania rzędu pikosekund. Impulsy takie znajdują liczne i różnorodne zastosowania przy badaniu szybkich procesów w układach molekularnych i w fizyce ciała stałego (np. pomiary czasów relaksacji rzędu pikosekund). W centrum zainteresowań znajdują się obecnie impulsy femtosekundowe. Czas trwania najkrótszego dotychczas otrzymanego impulsu wynosi 8 fs dla średniej długości fali 620 nm. Warto sobie uświadomić fakt, że w tak krótkim czasie mieszczą się cztery okresy drgań pola elektromagnetycznego.

$$1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$$

Pierwsze ćwierćwiecze istnienia laserów przyniosło osiągnięcia naukowe i techniczne oraz rozwój nowych dziedzin nauki, które świadczą, że fizyka i technika laserowa osiągnęły wiek dojrzały.



Bardzo prostym wnioskiem z twierdzenia Talesa jest następujący fakt:

Niech ABC będzie trójkątem, a punkty D, E, F leżą odpowiednio na prostych AB, BC i CA . Wówczas

a) punkty D, E i F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = -1,$$

b) proste CD, AE i BF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = 1.$$

Twierdzenie a) nazywa się twierdzeniem Menelauśa, a b) — Cevy.

Aby wykazać konieczność warunku z twierdzenia Menelauśa, założmy, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej i dorysujmy na prostej AB taki punkt P , że $PC \parallel DF$. Z twierdzenia Talesa w trójkątach CAP i CBP otrzymujemy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DP}} = \frac{\vec{AF}}{\vec{FC}} \quad \text{i} \quad \frac{\vec{DP}}{\vec{DB}} = \frac{\vec{EC}}{\vec{EB}}.$$

Mnożąc stronami otrzymujemy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DP}} \cdot \frac{\vec{DP}}{\vec{DB}} = \frac{\vec{AF}}{\vec{FC}} \cdot \frac{\vec{EC}}{\vec{EB}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{EB}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{FC}}{\vec{AF}} = 1.$$

Zmieniając zwrot trzech wektorów (\vec{EB}, \vec{FC} i \vec{AF}) otrzymujemy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = -1.$$

Dowód dostateczności łatwo uzyskać przez zaprzeczenie.

Aby wykazać konieczność warunku z twierdzenia Cevy, założmy, że proste CD, AE i BF przecinają się w punkcie O . Stosując twierdzenie Menelauśa do trójkątów CDB i CDA otrzymujemy

$$\frac{\vec{CO}}{\vec{OD}} \cdot \frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} = -1 = \frac{\vec{CO}}{\vec{OD}} \cdot \frac{\vec{DB}}{\vec{BA}} \cdot \frac{\vec{AF}}{\vec{FC}},$$

skąd mamy $\frac{\vec{BA}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{FC}}{\vec{AF}} = 1.$

Zmieniając zwrot czterech wektorów ($\vec{BA}, \vec{DA}, \vec{FC}$ i \vec{AF}) otrzymujemy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = 1.$$

Dostateczności również dowodzimy przez zaprzeczenie.

Twierdzenia te są bardzo pomocne w rozwiązywaniu wielu zadań.

1) W trójkącie ABC na boku BC leży punkt M , na boku AC leży punkt N , a odcinki AM i BN przecinają się w punkcie P .

Mając dane stosunki $BM : MC = m$ i $AN : NC = n$ obliczyć stosunki $AP : PM$ i $BP : PN$.

(I etap III Olimpiady)

2) Przez punkt M dany na przedłużeniu boku AB trójkąta ABC poprowadzić prostą przecinającą boki AC i BC w punktach N i P w taki sposób, żeby odcinki AN i BP były równe.

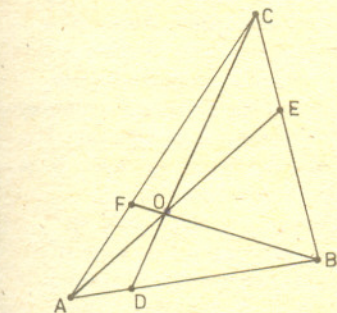
(I—IV)

3) Jaki warunek powinny spełniać kąty trójkąta ABC , żeby dwusieczna kąta A , środkowa poprowadzona z wierzchołka B i wysokość poprowadzona z wierzchołka C przecinały się w jednym punkcie?

(III—XIII)

4) Dowiedź, że prosta symetryczna do środkowej CS trójkąta ABC względem dwusiecznej kąta C tego trójkąta dzieli bok AB na odcinki proporcjonalne do kwadratów boków AC i BC .

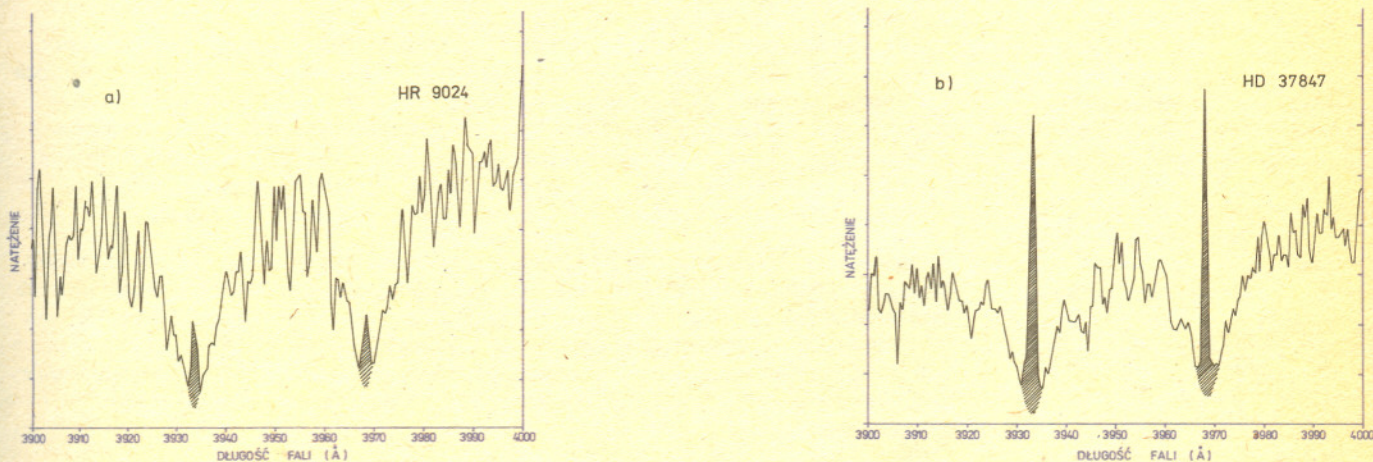
(I—XIII)



Rozwiązanie zadania F 194. Ponieważ oporność pierścienia jest równa zero, więc i całkowita siła elektromotoryczna powinna być zawsze równa zero. W przeciwnym przypadku w pierścieniu popłynąłby prąd o nieskończonym natężeniu. Siła elektromotoryczna jest równa zero, jeśli nie zmienia się całkowity strumień indukcji pola magnetycznego przez pierścień (suma pola zewnętrznego i pola prądu indukowanego w pierścieniu). Wynika stąd, że strumień po wyłączeniu pola będzie nadal równy Φ_0 .



Wynikałoby z tego, że ponieważ Słońce ma chromosferę, to wszystkie linie absorpcyjne powinny charakteryzować się dodatkową emisją powstającą w gorącym obszarze atmosfery. Zaniepokojonego tym faktem Czytelnika spieszę uspokoić: dobrze znane liniowe widmo Fraunhofera naprawdę składa się z linii absorpcyjnych. W rzeczywistości bowiem proces powstawania emisji chromosferycznej jest daleko bardziej skomplikowany, toteż tylko w niektórych liniach pojawia się emisja promieniowania. Należą do nich między innymi tzw. linie H i K jednokrotnie zjonizowanego wapnia (CaII H+K), oraz linie h i k zjonizowanego magnezu (MgII h+k). Ich szczególną zaletą jest niezwykła czułość na wzrost temperatury w chromosferze — im gwałtowniejszy, tym większe natężenie emisji w tychże liniach. Linie wapnia mają jeszcze jedną zaletę. Odpowiadające im długości fal, 3933,66 Å i 3968,74 Å, leżą w zakresie promieniowania optycznego przepuszczanego przez atmosferę Ziemi. Umożliwia to prowadzenie obserwacji z Ziemi, czego nie można zrobić w przypadku leżących w ultrafiolecie linii MgII h+k. Tu jedynym wyjściem są obserwacje satelitarne; oczywiście prowadzone, lecz ze zrozumiałych względów znacznie mniej liczne.



Rys. 3. Widma dwóch gwiazd z chromosferami. Zakres długości fal, od 3900 do 4000 Å, obejmuje linie zjonizowanego wapnia CaII H+K. Zakreskowane obszary odpowiadają emisyjnym częściom linii, tj. promieniowaniu powstającemu w chromosferze: a) stosunkowo „chłodnej” (słaba emisja), b) gorącej (silna emisja).

Znamy więc sposób na odkrywanie chromosfer odległych gwiazd. Polega on na wykryciu emisji promieniowania w pewnych liniach widmowych (na ogół w liniach CaII H+K). Jest to metoda bardzo prosta i efektywna. Trudno powiedzieć, ile jest znanych gwiazd z chromosferami. Jest to z pewnością liczba bardzo duża. W każdym razie ponad czterysta obiektów jest badanych dokładnie i systematycznie. Poza nielicznymi wyjątkami są to gwiazdy o temperaturach powierzchniowych niższych od 7000 K.

Badania emisji chromosferycznej dostarczają informacji nie tylko o samej chromosferze. Tak naprawdę to zwykle nie o samą chromosferę w tych badaniach chodzi. Jak pamiętamy, temperatura tej warstwy atmosfery zależy m.in. od pola magnetycznego. Toteż poziom emisji chromosferycznej stanowi dość dobrą miarę aktywności pola magnetycznego tych niezbyt gorących gwiazd. Ale to już jest trochę inny temat.

Rozwiązanie zadania F 195. Niech przez zwojnice elektromagnesu płynie prąd $i_1 = I_1 \sin \omega t$ będący źródłem zmiennego pola magnetycznego. Zmiany tego pola indukują w pierścieniu siłę elektromotoryczną (SEM) indukcji

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_0 \cos \omega t.$$

Zmienny prąd i_2 w pierścieniu jest źródłem SEM samoindukcji

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di_2}{dt}.$$

Z prawa Ohma wynika:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_s = i_2 R, \quad \text{czyli}$$

$$(*) \quad -\dot{\Phi}_0 \cos \omega t - L \frac{di_2}{dt} = i_2 R.$$

Rozwiązania szukamy w postaci

$$i_2 = -I_2 \cos(\omega t - \varphi).$$

Po podstawieniu do (*) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

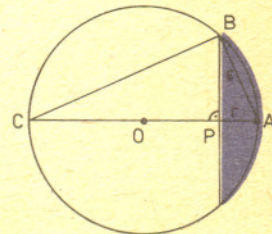
$$I_2 = \frac{\dot{\Phi}_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}.$$

W granicznym przypadku, gdy $R \rightarrow 0$, przesunięcie w fazie $\varphi = \pi/2$, co oznacza, że prąd w pierścieniu w każdej chwili płynie przeciwnie niż prąd w zwojnicy. Pola magnetyczne są zatem przeciwnie skierowane i pierścień jest odpychany. Gdybyśmy nie uwzględnili samoindukcji ($L = 0$), średnia siła działająca na pierścień byłaby równa zeru.



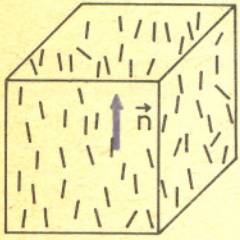
Rozwiązanie zadania M 431. Niech n będzie maksymalną liczbą rozłącznych czasz kulistych o promieniu ε (odcinek AB na rysunku) na sferze. Trójkąty APB i ABC są podobne, stąd $\frac{\varepsilon}{r} = \frac{2}{\varepsilon}$, tj. $r = \frac{\varepsilon^2}{2}$. Pole czaszy kulistej ma się tak do pola sfery, jak AP do AC , czyli $\frac{AP}{AC} = \frac{r}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4}$, stąd $n \frac{\varepsilon^2}{4} \leq 1$, więc $n \leq \frac{4}{\varepsilon^2}$.

Dla $\varepsilon = \frac{1}{20}$ mamy $n \leq 1600$. Wobec tego na sferze zmieści się co najwyżej 1600 rozłącznych czasz o promieniu $\frac{1}{20}$. W takim razie 1600 czasz o promieniu $\frac{1}{10}$ musi pokrywać całą sferę (w przeciwnym razie można by zmieścić więcej rozłącznych czasz o promieniu $\frac{1}{10}$), co kończy dowód.



Niezwykły rodzaj sprężystości

Dr Grzegorz DERFEL



Rys. 1

Zjawiska sprężystości w ciałach stałych i cieczach można lapidarnie określić jako efekty polegające na zmianach odległości międzycząsteczkowych pod wpływem sił przyłożonych z zewnątrz. Wynikiem takich przesunięć cząsteczek może być zmiana objętości, a w ciałach stałych także zmiana kształtu. Zagadnienia te są dobrze znane. Znacznie mniej popularny jest natomiast typ deformacji sprężystych, w których odległości między cząsteczkami pozostają stałe, a zmienia się tylko ich orientacja. Niezwykle materiały, w których występują takie zjawiska, to ciekłe kryształy. Zostały one już przedstawione Czytelnikom *Delty* w nr 11/1981 i 6/1982, a więc tutaj ograniczymy się tylko do przypomnienia, że mowa o cieczach, których wszystkie własności fizyczne są anizotropowe, podobnie jak w kryształach.

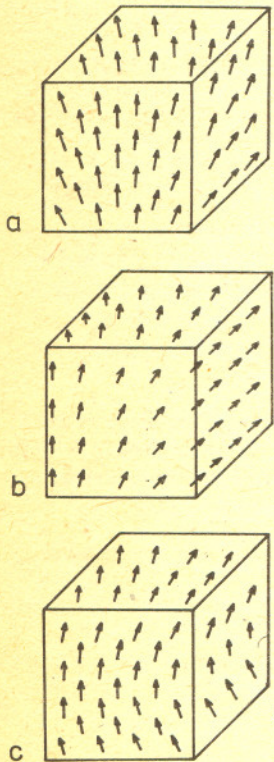
Cząsteczki ciekłych kryształów są wydłużone. Na rysunku 1 przedstawiono je w postaci kresiek. Uwagę skupimy na najważniejszym z trzech typów ciekłych kryształów — na ciekłych kryształach nematycznych — nematykach. W nematykach panuje bezład w ułożeniu środków ciężkości cząsteczek, ale orientacja ich długich osi nie jest chaotyczna. Istnieje pewien określony kierunek w próbce nematyka, wzdłuż którego ustawia się najczęściej molekuł. Niech ten uprzywilejowany kierunek wyznacza jednostkowy wektor n zwany direktorem. Każdemu małowemu elementowi ciekłego kryształu można przypisać wektor n , określając w ten sposób pole direktora.

Rozważania ograniczymy do „ciekłego monokryształu”. Rozumiemy przezeń objętość nematyka wolną od defektów i o jednorodnym polu direktora, czyli uporządkowaną tak, że średni kierunek długich osi molekuł jest jednakowy w całej objętości. Ten kierunek wymuszony jest zwykle przez uporządkowanie na powierzchniach ograniczających próbkę. Podczas gdy uporządkowanie na tych powierzchniach można uznać za sztywne, orientacja molekuł z dala od powierzchni okazuje się bardzo podatna na działanie pola magnetycznego lub elektrycznego. Łatwo jest więc odkształcić pierwotne pole direktora.

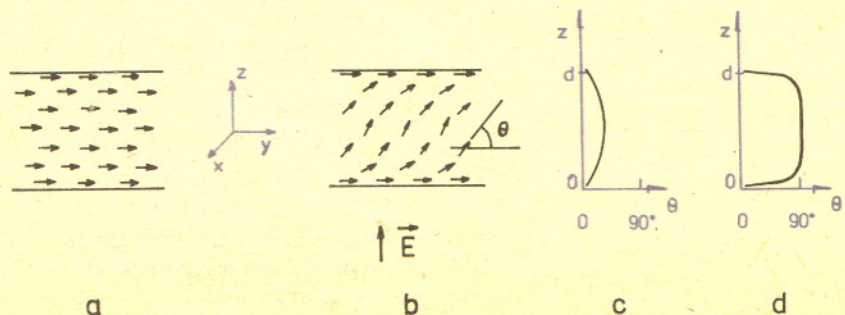
Każde takie odkształcenie, choćby najbardziej wymyślne, można przedstawić jako złożenie trzech elementarnych rodzajów odkształceń, nazwanych przez analogię do odkształceń ciała stałego zginaniem poprzecznym, skręcaniem i rozciąganiem (ściskaniem). Rysunki 2a, b, c, przedstawiają kolejno każdą z tych deformacji. Podkreślić należy, że polegają one tylko na zmianach orientacji direktora w każdym punkcie próbki i nie towarzyszy im przemieszczanie elementów nematyka względem siebie. „Sztywność” nematyków w każdej z tych trzech sytuacji jest różna: najłatwiej zachodzi skręcanie, najtrudniej — rozciąganie. Wyraża się to różnymi wartościami odpowiednich modułów sprężystości.

Rozważmy warstwę nematyka między dwiema płaskimi powierzchniami. Molekuły ciekłego kryształu same ustawiają się w charakterystyczny dla siebie sposób: prostopadle lub równoległe do powierzchni. Zajmiemy się przypadkiem przedstawionym na rysunku 3a. Odpowiednio silne pole elektryczne przyłożone prostopadle do warstwy przekreśli molekuły deformując pole direktora, jak na rysunku 3b. Przy małych odkształceniach będzie to czyste zginanie poprzeczne.

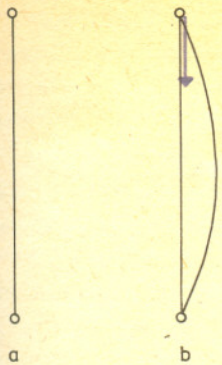
Oddziaływanie pola elektrycznego z ciekłym kryształem wymaga krótkiego komentarza. Przenikalność dielektryczna nematyka jest anizotropowa, np. mniejsza w kierunku prostopadłym do direktora, a większa w kierunku równoległym: $\epsilon_{||} > \epsilon_{\perp}$. Oznacza to, że energia potencjalna jednostki objętości (będąca wielkością ujemną) jest niższa w warstwie uporządkowanej równoległe do pola niż w warstwie uporządkowanej prostopadle. Zgodnie z ogólną prawidłowością fizyczną warstwa umieszczona w polu przyjmie pierwsze, korzystniejsze energetycznie uporządkowanie. Jest to wynik działania momentu sił na jednostkę objętości nematyka ze strony pola elektrycznego. Wartość tego momentu jest proporcjonalna do $\sin 2\theta$, gdzie θ jest kątem, o jaki direktor odchylił się od położenia równowagi. Tak więc dla $\epsilon_{||} > \epsilon_{\perp}$ direktor ustawia się zgodnie z kierunkiem pola, chyba że przeszkadzają mu w tym inne siły.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

W warstwie, w której molekuly „przymocowane” są do ścian, siłami takimi są siły sprężystości direktora. Molekuly w wybranej warstewce, równoległej do ścianki, oddziałują sprężycie z molekulami w warstewkach sąsiednich, jeśli orientacja w tych ostatnich jest inna. Wypadkowy moment tych sił liczony na jednostkę objętości można — w przybliżeniu małych odkształceń — uznać za proporcjonalny do $d^2\Theta/dz^2$. Równowaga momentu sił sprężystości i momentu sił pochodzących od zewnętrznego pola elektrycznego w każdym punkcie warstwy ustala kierunek direktora w tym punkcie. Żądanie równowagi momentów jest tożsame z żądaniem, aby całkowita energia (sprężysta + elektryczna) zmagazynowana w warstwie miała wartość najmniejszą spośród energii warstw o różnych rozkładach direktora umieszczonych w polu. Takie energetyczne podejście jest powszechnie stosowane w teorii sprężystości. Jest to przykład często wykorzystywanej w fizyce metody wariacyjnej, polegającej na poszukiwaniu warunków, w których jakaś wielkość jest najmniejsza.

W polu przyłożonym do warstwy niezaburzonej, tj. uporządkowanej prostopadle do pola, momenty sił sprężystych i elektrycznych równają się zeru. Warstwa nabywa tylko energii potencjalnej, proporcjonalnej do kwadratu natężenia pola. Stan równowagi utrzymuje się jednak tylko do takiego natężenia pola elektrycznego, powyżej którego energia elektryczna warstwy nieodkształconej stałaby się wyższa od sumy energii elektrycznej i sprężystej warstwy odkształconej. Powyżej tej progowej wartości następuje odkształcenie warstwy. Kąt wychylenia direktora Θ jest sinusoidalną funkcją współrzędnej z i jest największy w połowie warstwy (rys. 3c). W polach znacznie przekraczających progowe w przeważającej objętości warstwy direktor jest wychylony o kąt 90° (rys. 3d).

Opisane odkształcenie direktora w nematyku ma swój odpowiednik wśród tradycyjnych deformacji sprężystych. Jest nim wygięcie elastycznego pręta ściskanego siłą skierowaną wzdłuż osi pręta (rys. 4a). Pozostaje on prosty do pewnego krytycznego naprężenia. Powyżej wartości krytycznej — wygina się. Jeśli nie przekroczyć jej zbyttnio — wygięty pręt ma kształt sinusoidy (rys. 4b). Przesunięcie elementów pręta w bok jest więc wielkością analogiczną do kąta wychylenia direktora.

Opisane tu odkształcenie direktora to przypadek stosunkowo prosty. Połączenie płynności i anizotropii, które realizuje się w ciekłych kryształach, stwarza zwykle bardziej skomplikowane sytuacje. We wszystkich bardzo istotnym czynnikiem jest orientacja molekul. Ważną rolę w jej ustaleniu odgrywa właśnie sprężystość direktora.

Opisane własności ciekłych kryształów, a w szczególności łatwość, z jaką można odkształcać pole direktora i zmieniać w ten sposób ich własności optyczne, decydują o licznych zastosowaniach technicznych ciekłych kryształów, między innymi we wskaźnikach zegarków i kalkulatorów elektronicznych.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL



M 430. W punkcie O na prostej stoi pionek. Rzucamy symetryczną monetą i w zależności od wyniku przesuwamy pionek o jednostkę w lewo lub w prawo. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pionek kiedyś przekroczy milion.
Rozwiązanie na str. 11

M 431. Pokazać, że na sferze o promieniu 1 da się znaleźć 1600 punktów tak, by każdy punkt sfery był odległy o nie więcej niż $1/10$ od któregoś z nich.
Rozwiązanie na str. 5

M 432. Pokazać, że dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $q > 0$, mamy

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

Rozwiązanie na str. 11

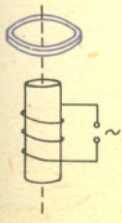
Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 194. W polu magnetycznym znajduje się nadprzewodzący pierścień. Strumień indukcji pola magnetycznego przez pierścień jest równy Φ_0 . Jaka będzie wartość strumienia po wyłączeniu pola?
Rozwiązanie na str. 3

F 195. Na osi elektromagnesu zasilanego prądem zmiennym umieszczono aluminiowy pierścień (rysunek). Dlaczego pierścień zawisł nad elektromagnesem?

Rozwiązanie na str. 5

(M. Romaniuk)



delta

Zadanie Kopciuszka

Wyobraźcie sobie, że otrzymaliście wymieszane w pudełku małe i duże kulki z zadaniem rozdzielenia mieszaniny. W bajkach podobne zadania służą złym do nękania dobrych.

Spróbujmy znaleźć metodę mniej pracochłonną od wybierania kulka po kulce. Czy na przykład potrząsanie pudełkiem nie spowoduje „wypłynięcia” dużych lub małych kulek na powierzchnię?

Załóżmy najpierw, że pudełko wypełnione jest piaskiem i na powierzchni piasku leży ołowiana kula. Szybkie potrząsanie pudełkiem w płaszczyźnie poziomej powoduje pogrążanie się kuli w piasku. Podobnie ukryty w piasku drewniany przedmiot po chwili potrząsania wypływa na powierzchnię. Wibrujący sypki ośrodek ma wiele własności cieczy. Między innymi ciężkie ciała w nim toną, lekkie utrzymują się na powierzchni, a każda nierówność powierzchni szybko się rozpląwa. W rezultacie zawsze środek ciężkości całości zajmuje położenie najniższe z możliwych.

Żeby teraz rozstrzygnąć, które kulki, małe czy duże, znajdują się pod wpływem potrząsania na powierzchni, wystarczy rozstrzygnąć, jakie ich ułożenie odpowiada najniższemu położeniu środka ciężkości. W tym celu musimy znaleźć najgęstsze upakowanie obu rodzajów kulek.

Gęstość upakowania to stosunek objętości kulek znajdujących się w pudełku do objętości pudełka. Zakładamy przy tym, że pudełko zawiera tak dużo kulek, iż można nie uwzględniać jego kształtu.

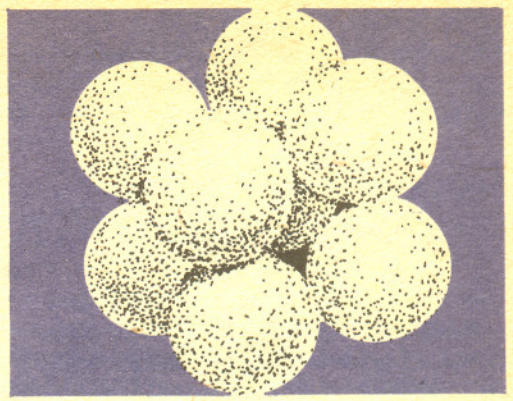


Jednakowe kulki można upakować następująco. Pierwszą warstwę układamy tak, by środki kul tworzyły sieć kwadratową. Środki kul w drugiej i następnych warstwach umieszczamy dokładnie ponad środkami pierwszej warstwy (rys. 1). Upakowanie to jest bardzo nieekonomiczne — jego gęstość jest równa stosunkowi objętości kuli do objętości sześcianu na niej opisanego i wynosi $0,5236 \dots$. Lepsze jest upakowanie, w którym każdą kulę drugiej warstwy wkładamy pomiędzy cztery kule pierwszej. Przy układaniu trzeciej warstwy musimy dokonać wyboru. Można teraz kłaść kule trzeciej warstwy dokładnie nad kulami pierwszej warstwy, a następnie czwartą warstwę nad drugą (rys. 2). Można też ułożyć trzecią warstwę tak, że dopiero kule czwartej warstwy leżą nad kulami pierwszej (rys. 3). W obu przypadkach gęstość upakowania jest taka sama i równa $0,7404 \dots$. Okazuje się, że nie jest to najlepsze możliwe upakowanie.

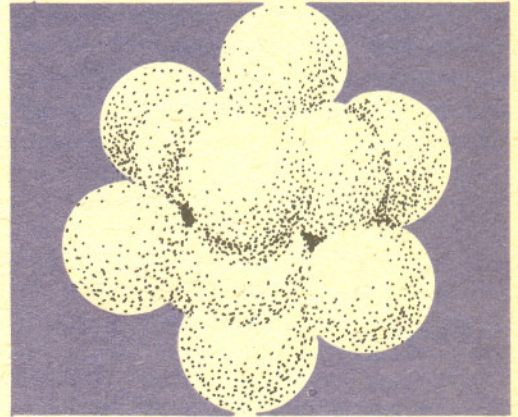
Gęstsze tworzy się w następujący sposób. Buduje się ciasno upakowane „grona” o różnych rozmiarach, a następnie próbuje się wypełnić nimi przestrzeń tak, aby pozostało jak najmniej pustych miejsc. W ten sposób postępują matematycy konstruujący coraz lepsze upakowania. To najlepsze nie jest do tej pory znane. Wiadomo jednak, że jego gęstość nie jest większa niż $0,7796 \dots$

Wróćmy teraz do problemu upakowania kul o różnych promieniach. Zauważmy, że gęstość upakowania jednakowych kul nie zależy od ich promienia. Dlatego środek ciężkości w obu przypadkach przedstawionych na rysunku 4 znajduje się na tej samej wysokości. Tak więc wynikiem wibracji nie będzie z pewnością całkowite rozdzielenie kulek.

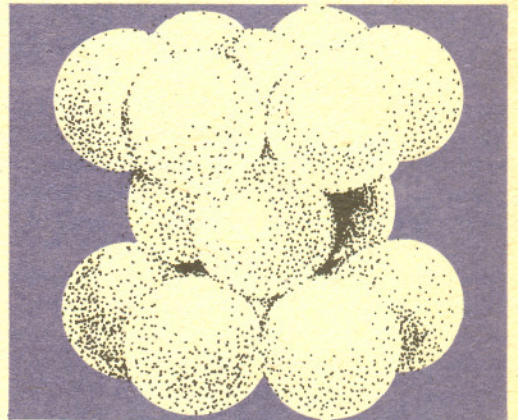
Z reguły maksymalna gęstość upakowania kul różnych wielkości przewyższa maksymalną gęstość upakowania jednakowych kul. Tak jest na przykład wtedy, gdy małe kule mieszczą się w pustych miejscach między maksymalnie upakowanymi dużymi kulami. Pod wpływem wibracji zawsze gęsta mieszanina znajdzie się na dnie, a na powierzchni pozostaną duże kule, jeśli w pudełku było zbyt wiele dużych, albo małe, jeśli zbyt wiele małych.



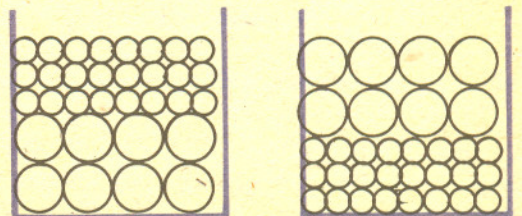
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

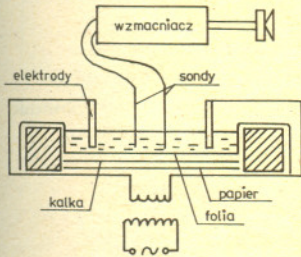


Rys. 4

Pole elektrostatyczne

Na rysunku 1 widzisz płytkie, płaskie naczynie napełnione elektrolitem. Do zanurzonych w nim elektrod podłączone jest źródło prądu. Przepływ prądu w danym punkcie opisuje wektor gęstości prądu j . Będziemy badać związane z nim pole elektryczne E ($j = E/\rho$, ρ jest opornością właściwą elektrolitu).

Zmiany napięcia na elektrodach są w naszym doświadczeniu dostatecznie powolne, aby pole elektryczne w danej chwili uważać za równe polu elektrostatycznemu, jakie panowałoby przy stałej aktualnej wartości napięcia.



Rys. 1

Przystępujemy do eksperymentów. Na stole połóż papier, na nim kalkę maszynową. Obuduj burtami o wysokości około 3 cm (np. z listewek) i całość przykryj folią polietylenową (rys. 1). Do powstałej w ten sposób wanny wlej elektrolit do głębokości około 1 cm. Najprostszy to słona woda. Elektrody możesz zrobić z drutu, wielokrotnie złożonej folii aluminiowej itp. Podłącz je do transformatora dzwinkowego obniżającego napięcie sieci (próby bez odpowiedniego transformatora skończą się tragicznie). Sondy to dwa druty lub gwoździe, trochę stępione na końcach, by nie dziurawić dna wanny. Zmiany napięcia pomiędzy nimi wzmacniamy (można użyć radia z wejściem adapterowym) i zamieniamy w głośniku na dźwięk. Jeśli masz czuły miernik prądu stałego, to możesz podłączyć go do sond, a wannę zasilac baterijką.

Po zmontowaniu powyższego układu i zanurzeniu elektrod włóż do elektrolitu, jedną obok drugiej, sondy. Słychać buczenie o częstotliwości 50 Hz. Przesuń jedną sondę tak, by dźwięk ten zanikł. Wtedy jej potencjał jest równy potencjałowi drugiej sondy i prąd nie płynie między nimi. Uderzając sondą w dno zrobisz, dzięki kalce, znak na papierze. Powtarzając tę procedurę wykreślisz linię ekwipotencjalną, o potencjale określonym przez położenie nieruchomej sondy. Staraj się nie przesterowywać wzmacniacza (zbyt duży sygnał wejściowy). Potencjały sond powinny się mało różnić — nie poruszaj sondami bezładnie.

Co badać? Poprzez wyznaczenie linii ekwipotencjalnych (a na tej podstawie ewentualnie linii sił) można określić pole elektrostatyczne w wannie. Zależy ono od kształtu wanny, elektrod i innych zanurzonych w elektrolicie przedmiotów. Na przykład jeśli będą to przedmioty metalowe, to wobec znacznie mniejszej oporności właściwej ich potencjał będzie praktycznie stały w każdym punkcie. Pole wokół będzie zaś analogiczne do pola wokół przewodnika w próżni. Możesz sprawdzić, czy rzeczywiście linie ekwipotencjalne zagęszczają się w pobliżu ostrzy, gdzie natężenie pola jest największe.

Zauważ, że linie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do brzegów wanny. Dlaczego? Rozważ przebieg prądu przy brzegach.

Rysunek 2 przedstawia przykładowe wyniki moich eksperymentów.

Rozwiązanie zadania M 432. Jeśli $q = 1$, to $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq |\sqrt{2} - 1| > \frac{1}{3}$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $q \geq 2$. Mamy

$$\left(\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right) = \frac{2q^2 - p^2}{q^2}.$$

Ponieważ $2q^2 - p^2$ nie może być zerem, więc

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^2}.$$

Jeśli $\left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| \leq 3$, to $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}$.

Jeśli zaś $\left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| > 3$, to

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{12} \geq \frac{1}{3q^2}.$$

Rozwiązanie zadania M 430. Oznaczmy przez p_k prawdopodobieństwo tego, że pionek startujący z punktu k przekroczy kiedyś milion.

Mamy

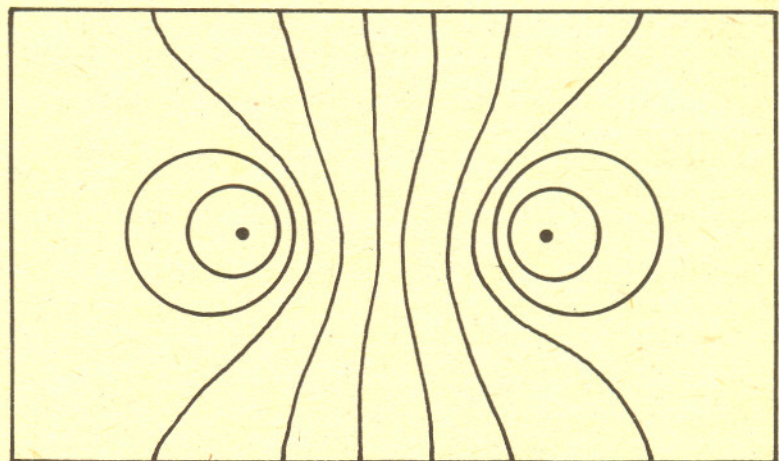
$$p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1};$$

istotnie, po wykonaniu pierwszego ruchu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znajdziemy się w punkcie $k+1$, gdzie mamy szansę p_{k+1} przekroczenia miliona

i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ w punkcie $k-1$, gdzie szansa przekroczenia miliona wynosi p_{k-1} .

Wobec tego $\{p_k\}$ jest ciągiem arytmetycznym. Z drugiej strony $p_k = 1$ dla $k > 10^6$.

Dlatego $p_k = 1$ dla każdego k .



Rys. 2

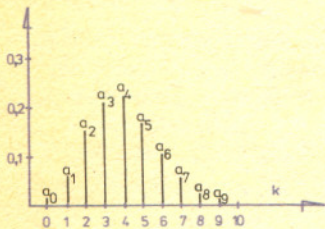
Dżem z dyni o smaku pomarańczowym, czyli o testowaniu hipotez statystycznych

Prof. dr Jan ODERFELD, doc. dr Elżbieta PLESZCZYŃSKA

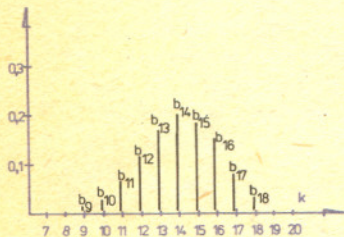


Bez względu na swoje aspiracje dżem z dyni jest dżemem z dyni, a nalepka „dżem z dyni o smaku pomarańczowym” służy jedynie celom reklamowym. Testowanie hipotez statystycznych, stosowane do wnioskowania o prawach rządzących przebiegiem eksperymentu na podstawie jego wyników, jest często reklamowane niewspółmiernie do jego rzeczywistych zalet. Sugestie „smaku pomarańczowego” wynikają z rozważań teoretycznych dotyczących testowania abstrakcyjnych, formalnie wyrażonych hipotez oraz ze starannie dobranych przykładów podawanych w podręcznikach. Ostrzeżenia przed niewłaściwym stosowaniem teorii, ukazujące różnice między „dynią” a „pomarańczą”, pojawiają się zbyt rzadko, a bezkrytyczne postępowanie wielu badaczy prowadzi do poważnych nieporozumień. Postaramy się przedstawić, na czym one polegają.

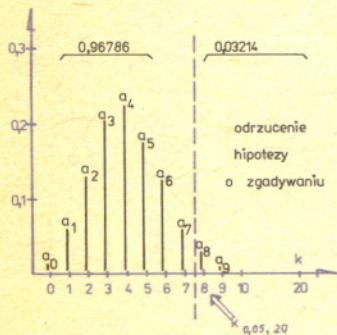
Badanie percepcji pozazmysłowej



Prawdopodobieństwa a_k wg wzoru (1) przy $n = 20$.



Prawdopodobieństwa b_k wg wzoru (2) przy $n = 20, p = 0,7$.



	$k_{0,05,n}$	$k_{0,01,n}$
6	4	5
10	5	6
20	8	9
50	16	18

Jak pisze D. S. Moore w artykule o analizie statystycznej danych doświadczalnych (*Matematyka współczesna*, PWN, 1983), standardowy eksperyment do badania zdolności percepcji pozazmysłowej (PP) jest prowadzony za pomocą pięciu rodzajów kart. Eksperymentator wybiera n -krotnie po jednej karcie z przetasowanej talii zawierającej jednakową liczbę kart każdego rodzaju, a badany osobnik siedzący za zasłoną stara się tę kartę rozpoznać. Jeśli eksperyment przeprowadzany jest w sposób właściwy, to

- eksperymentator wybiera kolejne karty bez jakiegokolwiek związku z poprzednimi i następnymi kartami,
 - w każdej kolejnej próbie każdy z rodzajów występuje z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$,
 - osobnik bez zdolności PP odgaduje poprawnie rodzaj karty z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$,
- a więc w n próbach uzyskuje k trafień z prawdopodobieństwem

$$(1) \quad a_k = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n.$$

A jakie prawa rządząby przebiegiem eksperymentu, gdyby badany miał w jakimś stopniu zdolność PP? Można chyba założyć, że prawa te są równoważne losowaniu liczby trafień z pewnym prawdopodobieństwem $b_k (k = 0, \dots, n)$, przy czym im liczba trafień jest większa, tym silniej przemawia za istnieniem zdolności PP. Formalnie wyrażamy to żądając, żeby ilorazy $\frac{b_k}{a_k}$ tworzyły ciąg niemalejący i nie były wszystkie jednakowe (gdy ilorazy są jednakowe, to $b_k = a_k$ dla $k = 0, \dots, n$). Jeśli osobnik obdarzony zdolnością PP daje trafną odpowiedź

z prawdopodobieństwem p większym od $\frac{1}{5}$, przy czym p jest jednakowe w kolejnych próbach, a odpowiedzi w poszczególnych próbach nie są wzajemnie uzależnione, to wtedy

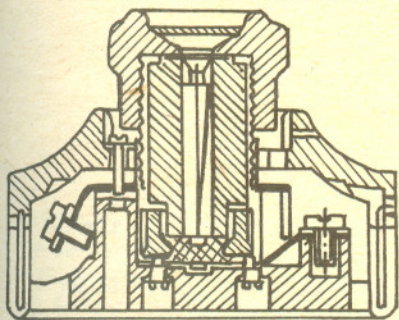
$$(2) \quad b_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

i ciąg $\frac{b_0}{a_0}, \dots, \frac{b_n}{a_n}$ jest rosnący, przy $\frac{1}{5} < p < 1$; gdy $p = 1$, to $b_0 = \dots = b_{n-1} = 0$ i $b_n = 1$, a więc ciąg jest niemalejący.

Jeśli badany uzyska liczbę trafień k na tyle wysoką, że prawdopodobieństwo osiągnięcia przez zgadywanie liczby trafień nie mniejszej niż k jest bardzo małe (mniejsze od z góry ustalonej dostatecznie małej liczby α , na przykład $\alpha = 0,05$), to możemy uznać ten fakt za argument potwierdzający istnienie zdolności PP (bądź niewłaściwego zorganizowania eksperymentu).

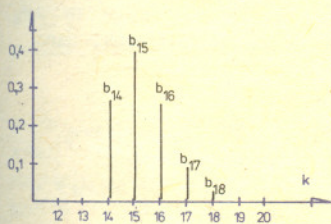
Liczbę α nazywa się zwykle poziomem istotności. Przy ustalonych α i n możemy na podstawie (1) wyznaczyć najmniejszą liczbę trafień oznaczoną przez $k_{\alpha,n}$, która powoduje już odrzucenie hipotezy o zgadywaniu na rzecz hipotezy o istnieniu zdolności PP. Liczbę trafień nie mniejszą niż $k_{\alpha,n}$ nazywa się statystycznie istotną na poziomie α .

α	n	prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy o zgadywaniu przy założeniu (3): $b_{k_{\alpha,n}+...+b_n}$			
		p			
		0,3	0,5	0,7	0,9
0,05	6	0,070	0,344	0,744	0,984
	10	0,150	0,623	0,953	1,000
	20	0,228	0,868	0,999	1,000
	50	0,431	0,997	1,000	1,000
0,01	6	0,011	0,109	0,420	0,886
	10	0,047	0,377	0,850	0,998
	20	0,113	0,748	0,995	1,000
	50	0,218	0,984	1,000	1,000

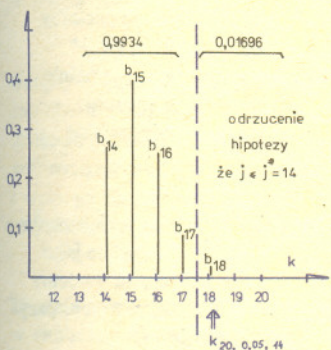


Jakie urządzenie przedstawiono na rysunku

- wyłącznik stycznikowy,
- wyłącznik topikowy,
- lampę elektronową,
- piec donicowy,
- pompę wirnikową?



Prawdopodobieństwa b_k wg wzoru (3) przy $n = 20, j = 14$.



j	l. punktów	j	l. punktów
≤ 5	1	12	5
6	2	13	6
7	2	14	7
8	3	15	8
9	3	16	8
10	4	17	9
11	4	18	9
		≥ 19	10

Gdyby osobnik był obdarzony zdolnością PP , to odrzucenie hipotezy o zgadywaniu nastąpiłoby z prawdopodobieństwem $\sum_{i \geq k_{\alpha,n}} b_i$. Przy założeniu (2) i przy ustalonych p i α

prawdopodobieństwo to rośnie do 1 przy $n \rightarrow \infty$, a przy ustalonych n i α jest rosnącą funkcją argumentu p . Sądzymy, że takie badanie zdolności PP za pomocą testowania hipotezy o zgadywaniu nie powinno budzić zastrzeżeń eksperymentatorów.

Sprawdzian ogólnej orientacji technicznej dla finalistów Olimpiady Wiedzy Technicznej

W trzecim etapie Olimpiady Wiedzy Technicznej sprawdza się m.in. ogólną orientację techniczną, polegającą na dość powierzchownej, ale za to bardzo szerokiej znajomości różnych aspektów techniki. Finalista otrzymuje na przykład n schematycznych rysunków wyobrażających różne obiekty techniczne. Pod każdym rysunkiem jest 5 nazw, z których dokładnie jedna jest właściwa. Finalista oznacza krzyżykiem tę jedyną nazwę, którą uznaje za poprawną. Ocena ogólnej orientacji technicznej finalisty opiera się na łącznej liczbie trafień k .

Formalny opis sprawdzianu jest taki sam jak formalny opis badania zdolności PP . Pięciu rodzajom kart odpowiada pięć podpisów pod rysunkiem. Gdyby finalista nie rozpoznał żadnego rysunku i zgadywał swoje odpowiedzi dając jednakowe szanse każdej z pięciu możliwości, uzyskałby k trafień z prawdopodobieństwem a_k (patrz (1)). W przeciwnym razie

prawdopodobieństwo jest równe b_k , przy czym ciąg $\frac{b_0}{a_0}, \dots, \frac{b_n}{a_n}$ jest niemalejący. Na przykład można sobie wyobrazić, że finalista rozpoznaje j spośród n rysunków (przy czym j jest pewną liczbą naturalną nie większą niż n , charakteryzującą jego ogólną orientację techniczną) i oznacza krzyżykami odpowiadające im nazwy, a pozostałych $n-j$ krzyżyków stawia na chybił trafił z jednakową szansą $\frac{1}{5}$ dla każdej odpowiedzi. Wtedy dla ustalonej liczby j prawdopodobieństwo b_k jest równe

$$(3) \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 0, \dots, j-1, \\ \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{5}\right)^{k-j} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{dla } k = j, \dots, n \end{cases}$$

i ciąg ilorazów $\frac{b_k}{a_k}$ jest niemalejący. Taki model ma sens wtedy, gdy odpowiedzi do rysunków są bardzo starannie dobrane, sprawdzian jest trudny, a czas jego trwania krótki. Gdyby ograniczyć się do prawdopodobieństw b_k postaci (3), to hipotezę o kompletnym braku ogólnej orientacji można by zapisać za pomocą $j = 0$, gdyż wtedy $b_k = a_k$.

Pozornie wydaje się, że przy ocenie ogólnej orientacji technicznej można by postępować analogicznie jak przy badaniu zdolności PP i testować hipotezę o zgadywaniu, odrzucając ją przy $k \geq k_{\alpha,n}$ dla obranego α . Czy jednak miałoby to sens? Trudno przypuszczać, że finalista nie ma żadnej orientacji technicznej. Podstawową różnicę między obu doświadczeniami stanowi to, że w pierwszym z nich *każde* nawet bardzo małe odchylenie od zgadywania jest dla eksperymentatora godne uwagi, a więc statystycznie istotny wynik doświadczenia, odrzucający hipotezę o zgadywaniu, budzi zrozumiałe zainteresowanie. Natomiast jurora Olimpiady interesuje raczej to, czy finalista ma *dostatecznie dużą* ogólną orientację techniczną. Formalnie można to wyrazić jako hipotezę, że liczba j rysunków rzeczywiście rozpoznanych przez finalistę (której nie należy mylić z liczbą trafień k) przekracza ustaloną przez jury liczbę j^* . Zamiast hipotezy o zgadywaniu stawiamy więc hipotezę, że prawdopodobieństwa b_k są postaci (3) przy $j \leq j^*$; odrzucenie takiej hipotezy prowadzi do uznania, że finalista ma dostatecznie dużą ogólną orientację techniczną.

Analogicznie jak poprzednio ustalamy poziom istotności α i wyznaczamy taką najmniejszą liczbę naturalną k_{α,n,j^*} , że dla dowolnego $j \leq j^*$ prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej tylu trafień nie przekracza α . W tym celu wystarczy brać pod uwagę prawdopodobieństwa b_1, \dots, b_n przy $j = j^*$, gdyż dla dowolnego $k = 1, \dots, n$ prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej k trafień rośnie ze wzrostem j .

Wydaje się jednak, że organizator Olimpiady jest przede wszystkim zainteresowany oceną liczby j , to jest liczby rysunków rozpoznanych przez finalistę; każdej liczbie j gotów byłby przypisać pewną liczbę punktów (na przykład zgodnie z systemem punktacji podanym obok).

k	$\hat{j}(k)$	k	$\hat{j}(k)$
< 4	0		
5	2	13	12
6	4	14	13
7	4	15	14
8	6	16	16
9	7	17	17
10	8	18	18
11	9	19	19
12	11	20	20

Estymator NW przy założeniu (3) i przy $n = 20$.

liczba punktów i	prawdopodobieństwo uzyskania i punktów przez finalistę rozpoznającego j rysunków			
	$j = 0$	$j = 9$	$j = 14$	$j = 17$
1	0,969	0	0	0
2	0,029	0,086	0	0
3	0,002	0,531	0	0
4	0	0,221	0	0
5	0	0,111	0	0
6	0	0,039	0,262	0
7	0	0,010	0,393	0
8	0	0,002	0,246	0
9	0	0	0,097	0,896
10	0	0	0,002	0,104

Zadanie sprowadza się więc do oszacowania liczby j na podstawie liczby trafień k . Można zaproponować różne estymatory $\hat{j}(k)$ o różnych własnościach. Jednym z nich jest estymator największej wiarygodności (NW), przypisujący liczbie k taką ocenę liczby j , przy której b_k osiąga największą wartość. Na przykład przy $n = 20$ i przy $k = 9$ otrzymujemy $\hat{j}(k) = 7$. Może się zdarzyć, że dla dwóch sąsiednich liczb $j-1$ i j wartość b_k jest jednakowa; wtedy arbitralnie przyjmujemy $\hat{j}(k) = j$ zgodnie ze starą zasadą belferską: w razie wątpliwości podciągaj ocenę w górę. Na przykład przy $k = 16$ wartość prawdopodobieństwa b_{16} jest jednakowa przy $j = 15$ i przy $j = 16$.

Przy obliczaniu $\hat{j}(k)$ dla ustalonego j prawdopodobieństwo b_k przedstawia się jako iloczyn wyrażenia $\binom{n-j}{k-j} 5^j$ i wyrażenia, w którym nie występuje j , po czym poszukuje się maksymalnej wartości pierwszego czynnika.

W tabelce obok podajemy, jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania i punktów ($i = 1, \dots, 10$) przez finalistę rozpoznającego j rysunków (dla kilku różnych wartości j).

Podsumowanie

Badanie zdolności PP jest przykładem badań, w których wyróżnia się pewną klarownie sformułowaną hipotezę (brak zdolności PP). Badacz chce wiedzieć, czy na podstawie wyników doświadczenia hipotezę tę można odrzucić na rzecz ogólnikowo sformułowanej hipotezy alternatywnej (istnienie zdolności PP). Pierwszą hipotezę nazywa się „zerową”, gdyż zwykle polega ona na stwierdzeniu, że przedmiot badań jest w pewnym sensie na poziomie zero. Losowy mechanizm przebiegu doświadczenia jest przy hipotezie zerowej znany i na tyle prosty, że można wyznaczyć zbiór wyników doświadczenia (zwany zbiorem krytycznym), którego prawdopodobieństwo w przypadku hipotezy zerowej nie przekracza obranego poziomu istotności α , a przy każdej sytuacji wchodzącej w skład hipotezy alternatywnej jest większe od α . Wynik doświadczenia należący do zbioru krytycznego, nazywany statystycznie istotnym, powoduje odrzucenie hipotezy zerowej na rzecz alternatywnej. Przy wyniku spoza zbioru krytycznego stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej; nie ma też oczywiście podstaw, żeby tę hipotezę uznać za prawdziwą, czyli taki wynik nie wnosi żadnej informacji interesującej badacza.

Oczywiście ten sposób postępowania ma sens tylko wtedy, gdy odrzucenie hipotezy zerowej rzeczywiście interesuje badacza. Tymczasem w praktyce często tak nie jest! Na przykład organizator Olimpiady nie jest zainteresowany odrzuceniem hipotezy o kompletnym braku wiedzy technicznej finalisty Olimpiady.

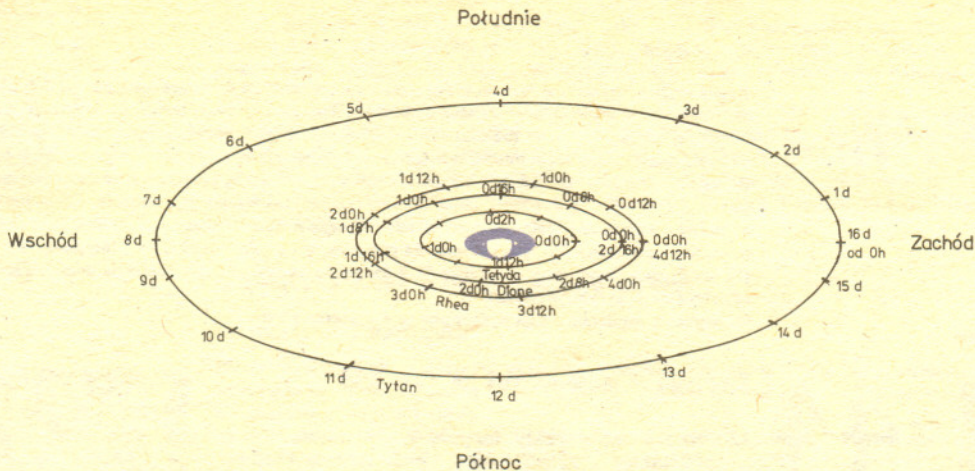
W wielu niedorzecznych badaniach hipoteza zerowa opisuje pewną wyidealizowaną sytuację, którą można wykluczyć a priori. Badacz chciałby natomiast wiedzieć, czy przedmiot badań jest na poziomie dostatecznie dużo różniącym się od zerowego. Zamiast hipotezy zerowej chciałby zatem testować hipotezę „prawie zerową” lub „rozmytą hipotezę zerową” (hipoteza $j \leq j^*$ zamiast hipotezy $j = 0$). Kłopot w tym, że hipotezę „prawie zerową” trudno nieraz formalnie opisać (w sprawdzianie olimpijskim trzeba było przyjąć odpowiednie założenia o sposobie odpowiadania finalisty w zależności od liczby rozpoznawanych rysunków), a potem zwykle trudno skonstruować dla niej zbiór krytyczny.

Jeśli na przykład interesujemy się wpływem pewnego czynnika na kształtowanie się jakiejś cechy obiektów w badanej populacji, to hipotezę zerową o braku wpływu wyraża się formalnie jako równość rozkładów cechy, gdy czynnik działa i gdy nie działa. Taką hipotezę zerową umiemy testować. Jednakże w praktyce idealna równość rozkładów jest a priori wykluczona. Zatem przy teście czułym na każde odchylenie od identyczności rozkładów uzyska się z dużym prawdopodobieństwem wynik statystycznie istotny, który będzie bez znaczenia dla eksperymentatora. Nie jest jednak łatwo wprowadzić formalnie przybliżoną równość rozkładów nie jest łatwo wyznaczyć następnie obszar krytyczny.

Co więcej, eksperymentator dochodzi często do wniosku, że zamiast testować hipotezę prawie zerową wolałby estymować pewien parametr, który charakteryzuje odstępstwo od hipotezy zerowej (na przykład liczbę rozpoznanych przez finalistę rysunków, stopień zróżnicowania rozkładów badanej cechy itp.). Zatem przed zastosowaniem jakiejś metody statystycznej warto przemyśleć najpierw, o co naprawdę chodzi — bez względu na tradycję i pozorne analogie między różnymi sytuacjami badawczymi.



- Któreśdy mogę się stąd wydostać — spytała Alicja.
- To zależy w dużej mierze od tego, dokąd chcesz iść — rzekł Kot.
- Właściwie jest mi wszystko jedno ...
- W takim razie możesz obrać dowolną drogę!



Posiadanie satelitów jest wśród planet Układu Słonecznego zjawiskiem bardzo powszechnym. Ich liczby dla różnych planet są bardzo różne. Niektóre planety nie mają w ogóle księżyców (np. Merkury czy Wenus), inne — rekordzistki — mają ich po kilkanaście (np. Jowisz i Saturn).

Przyzwyczajeni jesteśmy do obserwacji naszego naturalnego satelity — Księżyca. Wiele ciekawych programów obserwacyjnych odnoszących się do Księżyca można prowadzić za pomocą sprzętu amatorskiego (np. obserwacje jego powierzchni) lub wręcz gołym okiem (np. obserwacje zaćmień Księżyca czy zakryć gwiazd i planet przez Księżyc).

Miłośnicy astronomii zapewne również zdają sobie sprawę z możliwości obserwacji satelitów Jowisza. Cztery jego najjaśniejsze księżyce są osiągalne dla amatorów dysponujących choćby niewielką lornetką. Osoby mające pewną wprawę i cierpliwość mogą śledzić względne przemieszczenia Ganimedesa, Io, Callisto i Europy. W ubiegłym roku miała miejsce szczególnie efektowna seria ich wzajemnych zaćmień (pisaliśmy o tym w *Delcie* 10/1985).

Saturn — najdalsza spośród planet znanych już w Starożytności — ma również księżyce osiągalne dla sprzętu amatorskiego. Zadanie polegające na odszukaniu jego najjaśniejszych satelitów jest znacznie trudniejsze niż obserwacje satelitów Jowisza i wymaga silniejszych instrumentów. Nie warto jednak z niego rezygnować, może bowiem przynieść wiele satysfakcji.

28 maja bieżącego roku Saturn znajdzie się w opozycji, a więc w okolicach tej daty wystąpią szczególnie sprzyjające warunki do obserwacji tej planety i jej księżyców. Najjaśniejszego z nich — Tytana — można odnaleźć już za pomocą lornetki, inne zaś, słabsze, wymagają użycia lunetki o średnicy obiektywu 10—15 cm. Przyrząd taki umożliwi dostrzeżenie Tytana, Rhei, Iapetusa, Dione i Tetydy. Aby ułatwić ich identyfikację, podamy sposób umożliwiający wyznaczenie położenia każdego z nich względem Saturna w dowolnym dniu 1986 roku.

Na rysunku przedstawione są orbity Tetydy, Dione, Rhei i Tytana oraz Saturna z pierścieniem tak, jak widzimy je z Ziemi w bieżącym roku. W rzeczywistości orbity te są niemal kołowe i leżą prawie w tej samej płaszczyźnie co pierścienie. Z powodu obecnego, dość dużego ich nachylenia do płaszczyzny orbity Ziemi — 25° (wartość maksymalna jest równa 26° i jest ona osiągana raz na 14 lat) widzimy te orbity w postaci elips o dużych półosiach równych promieniom rzeczywistych orbit kołowych. Moment największego wschodniego oddalenia od Saturna (maksymalna elongacja wschodnia) został umownie oznaczony jako moment 0^d0^h. W tabeli podane są momenty niektórych maksymalnych elongacji wschodnich w 1986 roku.

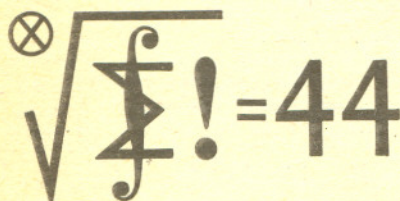
	maj	czerwiec	lipiec	sierpień	wrzesień	okres synodyczny
Tetyda	1 ^d 40	2 ^d 50	2 ^d 71	1 ^d 92	1 ^d 13	1 ^d 888
Dione	2 ^d 61	1 ^d 72	1 ^d 84	3 ^d 69	2 ^d 80	2 ^d 738
Rhea	4 ^d 59	5 ^d 23	2 ^d 34	2 ^d 98	3 ^d 61	4 ^d 519
Tytan	12 ^d 18	13 ^d 12	15 ^d 06	15 ^d 99	16 ^d 93	15 ^d 969

Momenty elongacji podane są w czasie uniwersalnym. Aby uzyskać ich wartość w obowiązującym u nas w tej porze roku czasie letnim, należy do zamienionych na godziny ułamków dób z tabeli dodać 2^h.

Aby znaleźć położenie księżycy względem planety w danym dniu, należy wyznaczyć moment ostatniej elongacji (do momentu najbliższej znanej trzeba dodać całkowitą wielokrotność okresu synodycznego), następnie czas, który od niej upłynął, i korzystając z punktów zaznaczonych na rysunku wyznaczyć położenie satelity na orbicie w danym momencie. Orbita Iapetusa, przy zachowaniu skali, nie mieści się na rysunku. Można próbować odszukać go wiedząc, że maksymalne elongacje wschodnie osiąga 22 maja i 10 sierpnia, a zachodnie — 1 lipca i 19 września. Jest wtedy oddalony od Saturna na odległość równą około 26 promieni pierścienia. Warto przy tym wiedzieć, że jego jasności w czasie tych dwóch maksymalnych odchyień od planety są istotnie różne: w czasie elongacji wschodniej 12 mag, w czasie zachodniej 10 mag. Ze względu na dużą odległość od Saturna przemieszcza się on stosunkowo powoli, powracając do tych samych położań względem planety co 80 dni.

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 VI 1986



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z matematyki nr 129, 130

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

129. Sześciokąt wypukły ma pole S . Czy muszą istnieć trzy kolejne wierzchołki tego sześciokąta A, B, C takie, że pole T trójkąta ABC spełnia nierówność: a) $T \leq S/6$, b) $T \geq S/6$?

130. Znaleźć kres dolny wartości wyrażenia $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{m\sqrt[n]{n}}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

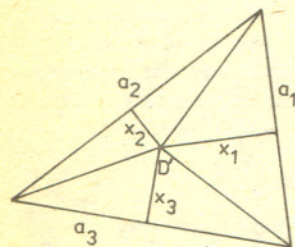
Zadanie 130 przysłał pan Andrzej Koloniak z Sidziny.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1985!

Przypominamy treść zadań:

121. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC . Gdzie należy umieścić wierzchołek D czworobocianu $ABCD$, by czworobocian ten miał zadaną objętość V i minimalne pole powierzchni?

122. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mające skończoną granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ i takie, że $f(xy) = f(x) + f(y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$ względnie pierwszych.



121. Wzór $V = Sh/3$ (gdzie $S =$ pole ABC) wyznacza wysokość czworobocianu opuszczoną z wierzchołka D : $h = 3V/S$. Wierzchołek D musi więc leżeć na jednej z dwóch płaszczyzn równoległych do płaszczyzny ABC , odległych od niej o tę właśnie wartość h . Pozostaje ustalić położenie rzutu D' punktu D na płaszczyznę ABC . Niech a_1, a_2, a_3 będą długościami boków trójkąta ABC ; przez x_1, x_2, x_3 oznaczmy odległości punktu D' od prostych zawierających odpowiednie boki (rysunek). Gdy D' jest punktem trójkąta ABC , zachodzi równość $\sum a_i x_i = 2S$; przy położeniach D' na zewnątrz trójkąta ABC suma $\sum a_i x_i$ jest większa. Zawsze więc $\sum a_i x_i \geq 2S$.

Pole S ściany ABC jest dane; podwojona suma pól pozostałych trzech ścian równa się $f(x_1, x_2, x_3) = \sum a_i \sqrt{h^2 + x_i^2}$. Pokażemy, że suma ta jest najmniejsza, gdy $x_1 = x_2 = x_3$; będzie to oznaczało, że punkt D' jest środkiem koła wpisanego w trójkąt ABC . Promień tego koła równa się $r = 2S/\sum a_i$. Przekształcamy:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)^2 &= \sum a_i^2 (h^2 + x_i^2) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \sqrt{h^2 + x_i^2} \sqrt{h^2 + x_j^2} = \\ &= \sum a_i^2 h^2 + (\sum a_i x_i)^2 - 2 \sum_{i < j} a_i a_j x_i x_j + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \sqrt{h^2 + x_i^2} \sqrt{h^2 + x_j^2} \geq \\ &\geq \sum a_i^2 h^2 + (2S)^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j (\sqrt{h^2 + x_i^2} \sqrt{h^2 + x_j^2} - x_i x_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(r, r, r)^2 &= (\sum a_i)^2 (h^2 + r^2) = (\sum a_i)^2 h^2 + (2S)^2 = \\ &= \sum a_i^2 h^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j h^2 + (2S)^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$f(x_1, x_2, x_3)^2 - f(r, r, r)^2 \geq 2 \sum_{i < j} a_i a_j (\sqrt{h^2 + x_i^2} \sqrt{h^2 + x_j^2} - x_i x_j - h^2) \geq 0$$

(jeśli $(x_1, x_2, x_3) \neq (r, r, r)$, to nierówność jest ostra), bo wyrażenie w nawiasie jest nieujemne dla dowolnych wartości x_i, x_j, h . Tak więc $f(x_1, x_2, x_3) \geq f(r, r, r)$, co oznacza, że pole powierzchni czworobocianu jest minimalne, gdy rzut punktu D na płaszczyznę ABC pokrywa się ze środkiem koła wpisanego w trójkąt ABC .

122. Niech $g = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ i niech (p_i) będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Oznaczmy

$$P_n = p_1 \dots p_n. \text{ Z warunku zadania przez oczywistą indukcję wynika, że } f(P_n) = f(p_1) + \dots + f(p_n).$$

a ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = g$, wnosimy stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ jest zbieżny do sumy g . Zatem ciąg jego wyrazów dąży do zera, a że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = g$, więc $g = 0$. Ustalmy liczby naturalne

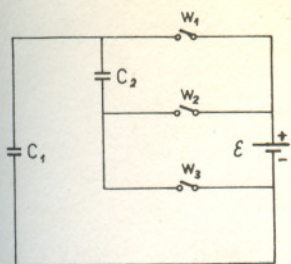
$$j \text{ i } k. \text{ Dla } n > k \text{ mamy } f(P_n p_j^{k-1}) = f(p_1 \dots p_{j-1} p_j^k p_{j+1} \dots p_n) = f(p_1) + \dots + f(p_{j-1}) + f(p_j^k) + f(p_{j+1}) + \dots + f(p_n). \text{ Przy } n \rightarrow \infty \text{ lewa strona dąży do } g = 0, \text{ wobec czego } f(p_j^k) = - \sum_{i \neq j} f(p_i).$$

Otrzymane wyrażenie nie zależy od k . Zatem ciąg $(f(p_j^k))$ dla danego j jest stały, a przy tym zbieżny do $g = 0$. Znaczący to, że $f(p_j^k) = 0$ dla każdej pary liczb naturalnych j, k . Stąd i z warunku zadania wnosimy, że $f(n) = 0$ dla każdej liczby naturalnej n .

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 117 /WT=3,31/ i 118 /WT=1,15/
z numeru 10/1985

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	47,07pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Dariusz Kurpiel	- Żarszyn	40,68pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia Góra	38,48pkt
Wojciech Boratynski-Warszawa		37,17pkt

Pan Janowicz już piąty raz!



Rys. 1

27. Rozważmy obwód przedstawiony na rysunku 1. W chwili początkowej wszystkie wyłączniki są rozwarne, a oba kondensatory — o pojemności odpowiednio C_1 i C_2 — nie naładowane. W pewnym momencie zwieryamy wyłączniki W_1 i W_3 , a po jakimś czasie je rozwieramy i następnie zwieryamy wyłącznik W_2 . Jaka będzie wartość i znak końcowego napięcia na kondensatorze C_2 ? Siła elektromotoryczna ogniwa (o małym oporze wewnętrznym) wynosi \mathcal{E} .

28. Traktując cząsteczkę jodku ceszu (CsI) jako sztywny układ dwóch naładowanych przeciwnymi ładunkami ($\pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$) punktów materialnych (reprezentujących jony Cs^+ oraz I^-) o jednakowych masach $2 \cdot 10^{-25} \text{kg}$, oddalonych od siebie o $3 \cdot 10^{-10} \text{m}$, obliczyć częstotliwość drgań, jakie cząsteczka ta będzie wykonywała w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $3 \cdot 10^6 \text{V/m}$ po nagłej zmianie kierunku pola o niewielki kąt. Efekty kwantowe oraz drgania termiczne należy zaniedbać.

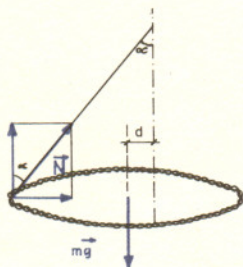
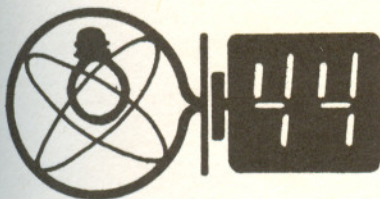
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1985

Przypominamy treść zadań:

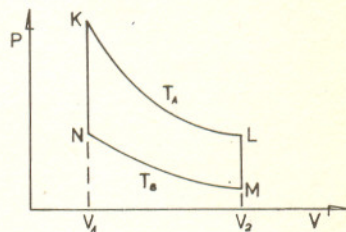
19. Zamknięty metalowy łańcuszek, połączony lekką nicią z pionową, wirującą osią, wiruje z prędkością kątową ω przyjmując kształt kołowy jak na rysunku 2. Nić tworzy przy tym kąt α z pionem. Znaleźć odległość między środkiem ciężkości łańcuszka a osią obrotu.

20. W maszynie cieplnej przedstawionej schematycznie w górnej części rysunku 4 zachodzi proces kołowy składający się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch przemian izochorycznych (rys. 3). Dwie części tej maszyny (oznaczone A i B) utrzymywane są w stałych temperaturach — odpowiednio T_A i T_B ($T_A > T_B$). Między nimi znajduje się część pośrednia R, przez którą może przepływać z cylindra c_A do cylindra c_B lub odwrotnie stosowany jako ciało robocze gaz doskonały. Jaką funkcję spełnia w maszynie część R? Podać, jakie powinna mieć ona cechy (jak może być zbudowana), aby funkcja ta była spełniana w sposób możliwie optymalny, tj. zapewniający sprawność maszyny zbliżoną do teoretycznej. Opisać ruchy tłoków t_A i t_B i ich wzajemną korelację konieczną do zapewnienia działania maszyny zgodnego z podanym cyklem:

- (a) podczas pracy maszyny jako silnika cieplnego oraz
- (b) podczas pracy maszyny jako pompy cieplnej.



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 15 /WT=3,10/ i 16 /WT=2,01/ z numeru 10/1985

Piotr Baża - Toruń 33,93pkt
Tomasz Rawlik - Gliwice 24,27pkt

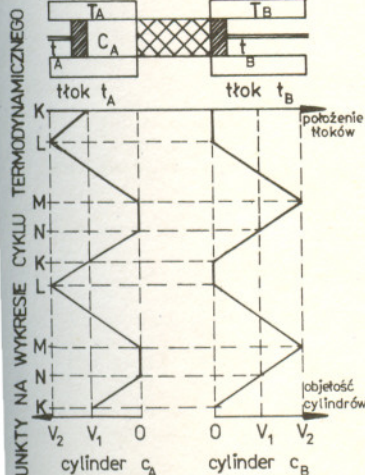
19. Niech odległość środka ciężkości łańcuszka od osi obrotu wynosi d (rys. 2). Na łańcuszek działa siła ciężkości mg oraz siła napięcia nici N . Składowa pionowa siły N równoważy siłę ciężkości: $N \cos \alpha = mg$. Składowa pozioma tej siły równoważy działającą na środek masy w wirującym układzie odniesienia siłę odśrodkową: $N \sin \alpha = m \omega^2 d$. Z równań tych

$$\text{znajdujemy } d = \frac{g}{\omega^2} \text{tg } \alpha.$$

20. Procesy izotermicznego sprężania lub rozprężania gazu zachodzą każdorazowo w jednym z cylindrów c_A , c_B . Przemiany izochoryczne wiążą się natomiast z przemieszczaniem gazu z jednego cylindra do drugiego. Podczas jednej z tych przemian ($c_A \rightarrow c_B$) gaz oddaje pewną ilość ciepła, podczas drugiej ($c_B \rightarrow c_A$) — gaz pobiera taką samą ilość ciepła. Wnioskujemy stąd, że część R winna pełnić rolę akumulatora, pobierającego energię od gazu podczas jego przepływu z c_A do c_B — z czym wiąże się obniżenie temperatury od T_A do T_B — i oddającego tę energię z powrotem podczas przepływu gazu w przeciwnym kierunku — z czym wiąże się ogrzanie gazu od temperatury T_B do T_A .

W idealnym przypadku podczas przemian izochorycznych zachodzi odwracalny proces wymiany ciepła jedynie między gazem a częścią R; wymiana ciepła ze ściankami cylindrów odbywa się wyłącznie podczas przemian izotermicznych. Część R, nazywana regeneratorem, dla optymalnego spełniania swych funkcji powinna mieć odpowiednio dużą pojemność cieplną (winna być jednocześnie zapewniona dobra wymiana ciepła z gazem), małą objętość przestrzeni dla gazu w porównaniu z objętością V_1 , małe opory dla przepływu gazu, mały współczynnik przewodzenia ciepła w kierunku $c_A \rightarrow c_B$ (temperatura powierzchni granicznych regeneratora powinna przez cały czas wynosić odpowiednio T_A i T_B).

Regenerator może być na przykład zbudowany z perforowanych blach metalowych, ustawionych prostopadłe do kierunku przepływu gazu i nie stykających się bezpośrednio z sobą, może też być wypełniony kulkami metalowymi (małe powierzchnie wzajemnego kontaktu). Wzajemnie skorelowane ruchy tłoków dla przypadku silnika cieplnego oraz pompy cieplnej przedstawia rysunek 4 (w urzędzeniach technicznych oba tłoki poruszają się ruchem harmonicznym z odpowiednim przesunięciem fazowym względem siebie). Oba te przypadki różnią się jedynie kierunkiem pracy maszyny — co za tym idzie — kierunkiem obiegu procesu kołowego: w silniku zachodzi proces KLMNK, w maszynie cieplnej — proces KNMLK (rys. 3). Maszyna cieplna działająca na zasadzie opisanego tu cyklu Stirlinga jest stosowana m.in. do skraplania helu.



Rys. 4