

Dnia 3. stycznia 1986 zmarł

prof. dr STANISŁAW TURSKI

St. Turski, ur. w 1906r., odbył studia matematyczne w Uniwersytecie Jagiellońskim i podjął tam pracę jako nauczyciel akademicki. Publikował wyniki z teorii równań różniczkowych, teorii liczb, różnych działów zastosowań matematyki. W latach 1939-42 był więźniem Sachsenhausen i Dachau. W latach 1946-50 był profesorem i rektorem Politechniki Gdańskiej, jednym z organizatorów tej uczelni. Od r. 1951 profesor na Uniwersytecie Warszawskim, a w latach 1952-69 rektor tej uczelni. Inicjator studiów zastosowań technicznych matematyki w Uniwersytecie Warszawskim, organizator i kierownik Zakładu Obliczeń Numerycznych UW, założyciel i pierwszy dyrektor Instytutu Informatyki UW.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 3 (147)

Zjawisko zwilżania <i>mgr Andrzej Łusakowski</i>	str. 1
Co udowodnił Jerrold B. Tunnel? <i>doc. dr Jerzy Browkin</i>	str. 4
Cudowna własność liczby $\frac{1}{54}(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$	str. 6
Patrz w niebo	str. 7
Mała Delta	str. 8
Skąd się wzięły gwiazdy nowe? <i>mgr Marek J. Sarna</i>	str. 10
O pewnej metodzie dowodzenia nierówności <i>Piotr Hajlasz</i>	str. 12
Zadania	str. 14
Kącik olimpijski	str. 15
Klub 44	str. 16
Jak obserwować plamy słoneczne? <i>Beata Gałęcka</i>	str. 17

**W następnym numerze:**  
25 lat lasera  
(na okładce laser barwnikowy)

### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempala  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

### WARUNKI PRUNEMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecońców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwałe 6.  
Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

### Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryllowa  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

### Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

### Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26

Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w Drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1211/12/85. P-28.

Mgr Andrzej ŁUSAKOWSKI

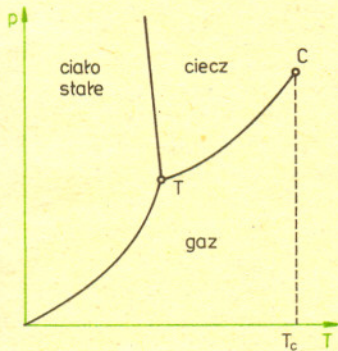
Rzecz będzie o zjawiskach zwilżania, które każdy z nas zna z codziennego doświadczenia. Zjawiska te decydują o skuteczności działania mydła, proszków do prania i różnych detergentów. Są one intensywnie badane, gdyż odgrywają między innymi dużą rolę przy wmywaniu ropy z szybów naftowych. Są również interesujące z teoretycznego punktu widzenia.

Zanim przejdę do właściwego tematu, powinienem podać kilka faktów i definicji z dziedziny zjawisk krytycznych. Artykuł M. Napiórkowskiego na temat zjawisk krytycznych w *Delcie* 8/1983 dotyczył głównie magnetyków, my zajmiemy się układami ciecz-gaz i mieszaninami podwójnymi. Rozpatrzmy na początek typowy diagram fazowy np. dla wody (rys. 1). Będziemy zajmować się zjawiskami zachodzącymi przy temperaturach i ciśnieniach odpowiadających okolicom punktu C. Punkt ten nazywany jest punktem krytycznym, a odpowiadająca mu temperatura — temperaturą krytyczną. Istnienie punktu krytycznego ma ciekawe konsekwencje, jeżeli chodzi o przejścia fazowe gaz-ciecz. W życiu codziennym bardzo często obserwujemy taką przemianę, a mianowicie skraplanie pary wodnej. Dokonuje się to jednak jedynie poprzez zmianę temperatury, przy ustalonym (atmosferycznym) ciśnieniu. Ta droga odpowiada linii kropkowanej na wykresie fazowym (rys. 2). W momencie przecięcia linii współistnienia faz (linia TC) następuje skokowa zmiana gęstości wody od gęstości pary do gęstości cieczy. Dzięki istnieniu punktu krytycznego możemy, sterując odpowiednio ciśnieniem i temperaturą, przeprowadzić wodę od stanu gazowego do stanu ciekłego poruszając się po drodze reprezentowanej przez linię przerywaną na rysunku 2. Wówczas gęstość wody będzie zmieniała się w sposób ciągły i nie ma metody na określenie tego, w którym miejscu przestajemy mieć do czynienia z gazem, a zaczynamy z cieczą. Takiego eksperymentu, niestety, nie da się wykonać w domu. Ale wyobraźmy sobie, że mamy dostęp do odpowiednich urządzeń i możemy przeprowadzić to i inne doświadczenia. Zamknijmy zatem w szklanej ampule wodę w taki sposób, aby ciecz nie zajmowała całej objętości naczynia, a jedynie jego część. Wówczas pozostała część zapełni para i otrzymamy układ, w którym współistnieją dwie fazy — ciekła i gazowa. Oznacza to, że na diagramie fazowym znajdujemy się gdzieś na linii TC. Zacznijmy teraz podgrzewać ampulę. Ponieważ jest ona zamknięta, więc będziemy posuwać się cały czas po linii współistnienia faz. W niskich temperaturach obie fazy — ciekła i gazowa będą przezroczyste. Dzięki istnieniu menisku pomiędzy nimi łatwo można obserwować rozdzielającą je granicę. W temperaturze bliskiej  $T_c$  menisk nagle zniknie, a w miejsce przezroczystej cieczy i gazu pojawi się jednorodny, mętny ośrodek. Przy dalszym podgrzewaniu, powyżej  $T_c$ , substancja wewnątrz ampuly stanie się znów przezroczysta, jednak będzie to już jedna faza. Opisane zjawisko nosi nazwę opalescencji krytycznej.

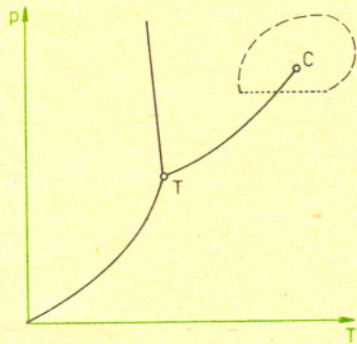
Powróćmy jednak w opisanym eksperymencie znowu do temperatury poniżej krytycznej. Tym razem przystąpmy do pomiarów różnicy gęstości  $\Delta\rho$  i napięcia powierzchniowego  $\sigma_{cg}$  pomiędzy cieczą a gazem, w zależności od temperatury. W temperaturach bliskich  $T_c$

$$\Delta\rho \sim (T_c - T)^\beta, \quad \text{a} \quad \sigma_{cg} \sim (T_c - T)^\mu,$$

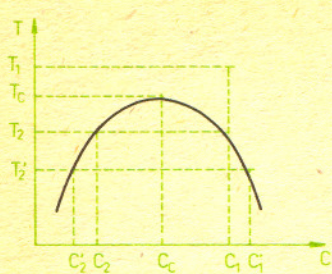
gdzie  $\beta$  i  $\mu$  są tzw. wykładnikami krytycznymi. Okazuje się, że wykładniki krytyczne praktycznie nie zależą od substancji użytej w doświadczeniu. Obojętne, czy nasz eksperyment przeprowadzamy z  $\text{CO}_2$ , czy z  $\text{H}_2\text{O}$ , czy z jakąkolwiek substancją mającą punkt krytyczny na swoim wykresie fazowym, to  $\beta \approx 0,33$ , a  $\mu \approx 1,3$ . Stało się to podstawą dla sformułowania hipotezy uniwersalności, która jest jednym z najważniejszych założeń współczesnej teorii zjawisk krytycznych.



Rys. 1



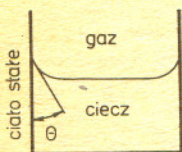
Rys. 2. Dla wody  $T_c = 374^\circ\text{C}$ ,  $p_c = 217$  atm.



Rys. 3

Przejdę teraz do opisu zjawisk w mieszaninach podwójnych. Są to mieszaniny dwóch cieczy, które w wysokich temperaturach doskonale mieszają się ze sobą stanowiąc jedną fazę, a poniżej pewnej temperatury rozdzielają się na dwie fazy różniące się stężeniem jednego ze składników. Przykładem może być mieszanina metanolu i cykloheksanu. Obok przedstawiony jest typowy diagram fazowy dla mieszanin podwójnych (rys. 3). Na osi poziomej jest zaznaczone stężenie jednego ze składników, a na pionowej temperatura.  $C_c$  i  $T_c$  nazywane są stężeniem krytycznym i temperaturą krytyczną. Sens tego diagramu jest następujący. Przygotujemy mieszaninę substancji  $A$  i  $B$  w temperaturze  $T_1$ . Niech stężenie substancji  $A$  będzie równe  $C_1$ . Przy obniżaniu temperatury począwszy od temperatury  $T_2$  zaobserwujemy powstawanie nowej fazy. Na początku objętość nowej fazy będzie bardzo mała, a stężenie składnika  $A$  będzie w niej wynosiło  $C_2$ . W miarę dalszego obniżania temperatury objętość nowej fazy będzie rosła, a stężenie substancji  $A$  w każdej z faz możemy odczytać za pomocą konstrukcji pokazanej na rysunku 3. Na przykład w temperaturze  $T_2'$  stężenia będą odpowiednio równe  $C_1'$  i  $C_2'$ .

Najciekawszy wynik eksperymentu otrzymamy wówczas, gdy początkowe stężenie mieszaniny będzie równe stężeniu krytycznemu. Wówczas po pierwsze, przy dochodzeniu do temperatury do  $T_c$  zaobserwujemy opalescencję krytyczną, oczywiście pod warunkiem, że początkowo nasza mieszanina była przezroczysta. Po drugie, w odróżnieniu od poprzednio rozpatrywanego przykładu, objętości faz będą porównywalne od samego początku. Można to udowodnić przyjmując, że krzywa na wykresie jest w przybliżeniu parabolą (rys. 3). Zjawisko separacji mieszaniny podwójnej na dwie fazy można wyjaśnić jakościowo w następujący sposób. Cząsteczki wchodzące w skład mieszaniny oddziałują ze sobą różnymi siłami w zależności od tego, czy będzie to para cząsteczek typu  $A$ , typu  $B$ , czy też para  $AB$ . Dla wielu substancji okazuje się, że przyciąganie pomiędzy cząsteczkami tego samego rodzaju jest większe niż między cząsteczkami różnych typów. Mieszanina takich cząsteczek dąży do rozdzielenia się na dwie fazy. Separacji tej przeszkadzają jednak ruchy cieplne. Dlatego w wysokich temperaturach mieszanina podwójna pozostaje jednorodna. Wraz z obniżaniem temperatury dochodzimy do momentu, w którym oddziaływania międzycząsteczkowe „przewyciężają” chaos ruchu cieplnego i rozpoczyna się separacja na dwie fazy. W jednej z nich jest więcej cząsteczek typu  $A$ , a w drugiej typu  $B$ . Powróćmy do eksperymentu. Przygotujemy mieszaninę podwójną o stężeniu krytycznym i przeprowadźmy pomiary różnicy stężeń  $\Delta C$  i międzyfazowego napięcia powierzchniowego  $\sigma$  w zależności od temperatury w obszarze dwufazowym. I tu znowu czeka nas niespodzianka. Okazuje się bowiem, że  $\Delta C \sim (T_c - T)^\beta$ , a  $\sigma \sim (T_c - T)^\mu$ . Wykładniki krytyczne  $\beta$  i  $\mu$  nie dość, że będą prawie takie same dla wszystkich mieszanin podwójnych, to ponadto nie będą się różniły od poprzednich wykładników krytycznych dla układu ciec-z-gaz. Znowu daje o sobie znać hipoteza uniwersalności.

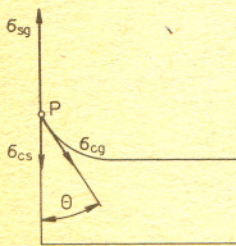


Rys. 4

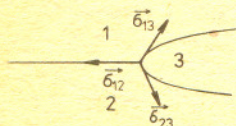
Przejdźmy teraz do zjawiska zwilżania. Myślę, że znane jest Czytelnikowi pojęcie kąta zwilżania. Jego definicję przypomina rysunek 4. Związek kąta zwilżania  $\theta$  z napięciami powierzchniowymi między cieczą a gazem  $\sigma_{cg}$ , cieczą a ciałem stałym  $\sigma_{cs}$  i gazem a ciałem stałym  $\sigma_{sg}$  zwany jest prawem Thomasa-Younga i jest niczym innym jak prawem równowagi sił działających na cząsteczki ośrodka w punkcie  $P$ , w którym stykają się trzy fazy (rys. 5). Równanie równowagi sił w kierunku równoległym do ściany naczynia ma postać

$$(*) \quad \sigma_{sg} = \sigma_{cs} + \sigma_{cg} \cos \theta,$$

a stąd  $\cos \theta = (\sigma_{sg} - \sigma_{cs}) / \sigma_{cg}$ . Jeżeli jedną z faz jest ciało stałe, to związek ten jest stosunkowo prosty, w ogólnym przypadku, np. dla trzech nie mieszających się cieczy należałoby rozwiązać równanie wektorowe  $\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23} = 0$  (rys. 6). Jeżeli  $\sigma_{sg} - \sigma_{sc} = \sigma_{cg}$ , to  $\theta = 0$ . Oznacza to, że między ścianką naczynia a fazą gazową wchodzi bardzo cienka (z naszego, tj. makroskopowego punktu widzenia) warstewka cieczy. W tym przypadku mówimy, że mamy do czynienia z doskonałym zwilżaniem fazy stałej przez ciecz.



Rys. 5

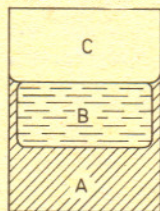


Rys. 6

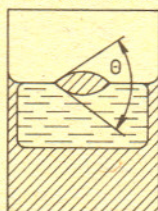
Teraz mogę już przystąpić do opisu odkrycia, którego dokonał John W. Cahn w 1977 roku. Otóż zauważył on, że jeżeli zamknięte w naczyniu dwie fazy mają punkt krytyczny — może to być na przykład ciekły i gazowy dwutlenek węgla — to zawsze istnieje temperatura niższa od  $T_c$ , w której zachodzi doskonałe zwilżanie ścianek naczynia przez jedną z faz. Dokonajmy za Cahnem analizy wzoru (\*) dla temperatur bliskich temperaturze krytycznej. Wiemy już, że dla tych temperatur



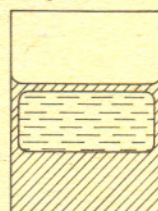
$\sigma_{cg} \sim (T_c - T)^\mu$ . Intuycyjnie wydaje się, że  $\sigma_{sg} - \sigma_{sc}$  musi być związane z jakąś wielkością charakteryzującą różnicę pomiędzy fazą ciekłą i gazową. Narzucającą się wielkością jest tu różnica gęstości i Cahn przyjął, że  $\sigma_{sg} - \sigma_{sc} \sim \Delta\rho$ , co z kolei, jak już wiemy, jest proporcjonalne do  $(T_c - T)^\beta$ . Zatem w okolicach temperatury krytycznej cos  $\theta$  zachowuje się jak  $(T_c - T)^{\beta-\mu}$ . Ponieważ  $\mu > \beta$ , wielkość ta dąży do nieskończoności, gdy  $T$  dąży do  $T_c$ , a stąd już wyciągamy wniosek, że bez względu na współczynnik proporcjonalności zawsze istnieje temperatura, w której kąt  $\theta$  staje się równy zero i następuje doskonale zwilżanie. Temperatura ta została nazwana temperaturą zwilżania i zwykle oznacza się ją przez  $T_w$ . Powyższa analiza stosuje się nie tylko do układów ciec-z-gaz, ale również do mieszanin podwójnych. Jedyną różnicą polega na zastąpieniu  $\Delta\rho$  przez  $\Delta C$  — różnicę stężeń jednego ze składników. Opisane zjawisko nosi nazwę zwilżania krytycznego. Jego istnienie zostało potwierdzone doświadczalnie przez Mike'a Moldovera i Johna Cahna w następującym eksperymencie. Moldover i Cahn zamknęli w naczyniu mieszaninę metanolu i cykloheksanu w temperaturze odpowiadającej istnieniu dwu faz — fazy *A* bogatej w metanol i fazy *B* bogatej w cykloheksan (rys. 7a). Faza *A* jako cięższa zajęła dolną część naczynia, a górną wypełniła mieszanina par metanolu i cykloheksanu — faza *C*. Następnie na powierzchni fazy *B* została umieszczona kropla fazy *A* (rys. 7b) i cały układ zaczęto podgrzewać mierząc jednocześnie zależność zaznaczonego na rysunku kąta od temperatury. Kąt ten zmniejszał się wraz ze wzrostem temperatury i w pewnym momencie Moldover i Cahn zaobserwowali, że kropla znikła, a na jej miejscu pojawiła się cienka warstwa fazy *A*, która oddzieliła fazę *B* od fazy gazowej (rys. 7c).



Rys. 7a

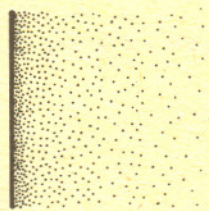


Rys. 7b

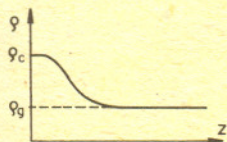


Rys. 7c

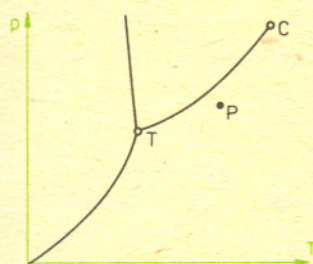
Praca Cahna dała początek całej serii publikacji poświęconych zjawisku zwilżania. W większości tych prac analizę rozpoczyna się od sytuacji, którą obrazuje rysunek 8. Na rysunku tym przedstawiony jest gaz w obecności ściany. Cząsteczki gazu oddziałują zarówno ze sobą, jak i ze ścianą. Ze względu na przyciąganie cząsteczek gazu przez ścianę gęstość gazu w pobliżu ściany będzie większa niż w dużych od niej odległościach. Przykładowy wykres gęstości przedstawia rysunek 9;  $z$  jest tutaj odległością od ściany, a  $\rho_c$  i  $\rho_g$  są odpowiednio gęstościami cieczy i gazu. Zastanówmy się, co będzie się działo w tym układzie, jeżeli znajdziemy się w punkcie *P* diagramu fazowego (rys. 10). Punkt ten znajduje się w obszarze odpowiadającym fazie gazowej, ale bardzo blisko linii współistnienia faz. Gdybyśmy nieco zwiększyli ciśnienie lub zmniejszyli temperaturę, to rozpocząłby się proces powstawania nowej fazy — cieczy. Kondensacja gazu jest możliwa dzięki istnieniu sił przyciągania między cząsteczkami. Dla układu o ciśnieniu i temperaturze odpowiadającym punktowi *P* są one jednak zbyt małe, aby „pokonać” ruchy cieplne i układ pozostaje w fazie gazowej. W pobliżu ściany należy uwzględnić dodatkowy czynnik, a mianowicie wspomniane wcześniej oddziaływania między ścianą a cząsteczkami ośrodka. Ta dodatkowa siła może w pewnych warunkach spowodować kondensację gazu w bezpośrednim sąsiedztwie ściany, czyli zwilżanie jej przez ciecz (rys. 9). Autorzy wielu prac zastanawiają się nad opisem takiego zjawiska, a więc badają na przykład wpływ sił międzycząsteczkowych na temperaturę, w której powstaje warstwa cieczy na ścianie, czy też obliczają grubość tej warstwy w zależności od temperatury. Istnienie ściany może również przyspieszyć proces separacji w mieszaninach podwójnych. Można to zrozumieć dodając do tego, co napisałem wcześniej o tym zjawisku, fakt, że ściana w różny sposób oddziałuje na poszczególne składniki mieszaniny. Ciekawym przykładem jest tutaj ciepla mieszanina izotopów  $\text{He}^3$  i  $\text{He}^4$ . Otóż jeżeli stężenie  $\text{He}^4$  przewyższy pewną wartość, która zależy od temperatury, to cała ciecz przejdzie w stan nadciekły. Doświadczalnie stwierdzono istnienie cienkiej warstwy nadciekłej w pobliżu ścianek naczynia, podczas gdy ciecz jako całość była w fazie normalnej. Oznacza to zwilżanie ścianek naczynia przez fazę bogatą w  $\text{He}^4$ . Na tym przykładzie zakończę omawianie zjawiska zwilżania. Należy ono do tych zjawisk, w których bardzo ważną rolę odgrywają różne efekty brzegowe, czyli to, co się dzieje na granicach międzyfazowych. Badanie takich zjawisk stanowi obecnie jeden z najszybciej rozwijających się kierunków fizyki.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

# Co udowodnił Jerrold B.

## Tunnell?

Doc. dr Jerzy BROWKIN

Twierdzenie Pitagorasa mówi, że jeżeli  $X$  i  $Y$  są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, a  $Z$  — długością jego przeciwprostokątnej, to

$$(1) \quad X^2 + Y^2 = Z^2.$$

Oczywiście, pole tego trójkąta jest równe  $\frac{1}{2}XY$ . W dalszym ciągu ograniczymy się do rozpatrywania trójkątów prostokątnych, których długości boków są liczbami wymiernymi, tzn. będziemy rozpatrywać rozwiązania równania (1) w liczbach wymiernych dodatnich  $X, Y, Z$ . Już w starożytności zajmowano się zagadnieniem: Czy pole takiego trójkąta może być równe danej liczbie naturalnej  $n$ ? To znaczy, chodzi o znalezienie takich liczb wymiernych  $X, Y, Z$  spełniających (1), że  $\frac{1}{2}XY = n$ . Liczby  $n$  o tej własności nazywamy liczbami kongruentnymi.

Na przykład liczby  $X = 3, Y = 4, Z = 5$  spełniają (1) oraz  $\frac{1}{2}XY = 6$ . To znaczy liczba 6 jest kongruentna. Podobnie, liczby  $X = 6\frac{2}{3}, Y = 1\frac{1}{2}, Z = 6\frac{5}{6}$  spełniają (1) (Czytelnik zechce to sprawdzić) oraz  $\frac{1}{2}XY = 5$ . Zatem 5 jest liczbą kongruentną.

Z drugiej strony, gdyby liczba 2 była kongruentna, to dla pewnych liczb wymiernych  $X, Y, Z$  spełniających (1) mielibyśmy  $\frac{1}{2}XY = 2$ , tzn.  $XY = 4$ . Wtedy

$$X^4 + 2^4 = X^4 + (XY)^2 = X^2 \cdot (X^2 + Y^2) = (XZ)^2.$$

Wiadomo jednak, że równanie  $a^4 + b^4 = c^2$  nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych  $a, b, c$  różnych od zera. Zatem liczba 2 nie jest kongruentna.

Zauważmy jeszcze, że liczba  $n$  jest kongruentna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej  $m$  liczba  $m^2n$  jest kongruentna. Jeżeli bowiem pole trójkąta prostokątnego o bokach długości  $X, Y, Z$  jest równe  $n$ , to pole trójkąta doń podobnego o bokach długości  $mX, mY, mZ$  jest równe  $m^2n$ . Wobec tego przy badaniu liczb kongruentnych wystarczy ograniczyć się do liczb bezkwadratowych, tzn. niepodzielnych przez żaden kwadrat liczby naturalnej większej od 1. Tak więc z tego, że liczba 2 nie jest kongruentna, wynika, że liczba 8 nie jest kongruentna itp.

Zagadnienie wyznaczenia wszystkich liczb kongruentnych lub chociażby podania efektywnej metody zbadania, czy dana liczba naturalna  $n$  jest kongruentna — okazało się trudne i do dziś nie zostało w pełni rozwiązane. Uzyskiwano jedynie wyniki częściowe dotyczące tylko pewnych liczb naturalnych  $n$ .

W tym artykule omówimy pewien wynik uzyskany ostatnio, który niemal całkowicie rozstrzyga problem wyznaczania liczb kongruentnych.

Badanie rozwiązań w liczbach wymiernych  $X, Y, Z$  układu równań

$$(2) \quad X^2 + Y^2 = Z^2, \quad \frac{1}{2}XY = n$$

można sprowadzić do badania rozwiązań w liczbach wymiernych  $U, W$  różnych od zera jednego tylko równania

$$(3) \quad U^2 = W^3 - n^2W.$$

Mianowicie, jeżeli liczby wymierne  $X, Y, Z$  spełniają układ (2), to liczby  $U = \frac{1}{8}Z(X^2 - Y^2)$  oraz

$W = \frac{1}{4}Z^2$  są wymierne, różne od zera i spełniają równanie (3). Mamy bowiem

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{64}Z^2(X^2 - Y^2)^2 = \frac{1}{64}Z^2((X^2 + Y^2)^2 - 4X^2Y^2) = \\ &= \frac{1}{4}Z^2\left(\left(\frac{1}{4}Z^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}XY\right)^2\right) = W(W^2 - n^2) = W^3 - n^2W. \end{aligned}$$

Na odwrót, jeżeli liczby wymierne  $U, W$ , różne od zera, spełniają równanie (3), to przyjmując

$$X = \frac{W^2 - n^2}{U}, \quad Y = \frac{2Wn}{U}, \quad Z = \frac{W^2 + n^2}{U}$$

otrzymamy, jak łatwo sprawdzić, rozwiązanie układu równań (2) w liczbach wymiernych. Badanie rozwiązań równania (3) w liczbach wymiernych jest o tyle łatwiejsze, że równanie to opisuje tzw. krzywą eliptyczną, a teoria krzywych eliptycznych jest bardzo rozwinięta i dostarcza różnych silnych metod do badania punktów o współrzędnych wymiernych na tych krzywych. Posługując się właśnie takimi zaawansowanymi metodami, omawianie których wykracza znacznie



**Rozwiązanie zadania F 193.** Po oświetleniu kulki w wyniku zjawiska fotoelektrycznego zaczynają opuszczać elektrony i będzie się ona ładować dodatnio. Pod wpływem pola elektrostatycznego kulki coraz więcej elektronów będzie do niej wracać. Ładunek kulki ustali się, gdy w wyniku przyciągania przez kulkę wszystkie elektrony opuszczające ją będą do niej wracać. Wystąpi wówczas stan równowagi dynamicznej. Maksymalna energia kinetyczna elektronów opuszczających kulkę wynosi  $E_k = h\nu - W$ , gdzie  $\nu$  jest częstością padającego światła, a  $h$  stałą Plancka.

Tuż przy powierzchni kulki elektron ma energię  $E = E_k - (1/4 \pi \epsilon_0) \cdot eq/r = h\nu - W - (1/4 \pi \epsilon_0)eq/r$ , gdzie  $e$  — ładunek elementarny,  $q$  — ładunek kulki. Jeżeli wszystkie elektrony opuszczające kulkę mają na nią wrócić, to ich maksymalna energia w nieskończoności jest równa zero. Całkowita energia elektronu po opuszczeniu kulki nie ulega zmianie. Stąd  $h\nu - W - (1/4 \pi \epsilon_0)eq/r = 0$  i  $q = 4\pi \epsilon_0 r(h\nu - W)/e$ .



Rozwiązanie zadania M 427. Niech  $p_n, q_n$  i  $r_n$  oznaczają prawdopodobieństwa znalezienia pionka w wierzchołku  $P, Q$  i  $R$  po  $n$  krokach. Jedyną trudność to pokazanie, że ciągi  $p_n, q_n, i r_n$  są zbieżne. Przy założeniu zbieżności równość granic jest oczywista. Zatem  $p_0 = 1, q_0 = 0, r_0 = 0$ . Otóż

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n.$$

Istotnie, pionek może trafić do  $P$  z  $Q$  lub  $R$ ; jeśli na przykład był w  $Q$ , to

z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  trafia do  $P$ .

Podobnie

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} q_n.$$

Stąd  $p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{2} (p_n - q_n)$ , zatem

$$|p_{n+1} - q_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ co oznacza, że}$$

$p_n - q_n \rightarrow 0$ . Podobnie  $p_n - r_n \rightarrow 0$ .

Mamy więc  $p_n + q_n + r_n = 1$

$$p_n - q_n \rightarrow 0$$

$$p_n - r_n \rightarrow 0.$$

Stąd  $3p_n \rightarrow 1$ , więc  $p_n \rightarrow \frac{1}{3}$ .

poza ramy tego artykułu, J. Tunnell w 1983 roku udowodnił twierdzenie pozwalające rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków, czy dana liczba naturalna jest kongruentna, czy nie. Niestety, pewien fragment dowodu tego twierdzenia jest oparty na nieudowodnionej dotąd hipotezie dotyczącej krzywych eliptycznych (tzw. hipoteza B-SD, Bircha i Swinnertona-Dyera). Hipoteza ta została sprawdzona w wielu szczególnych przypadkach i wydaje się bardzo prawdopodobna.

Twierdzenie Tunnella brzmi, jak następuje: Niech  $n$  będzie liczbą naturalną nieparzystą i bezkwadratową. Badamy liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y, z$  każdego z równań

$$(4) \quad n = 2x^2 + y^2 + 32z^2 \quad \text{i} \quad n = 2x^2 + y^2 + 8z^2.$$

Jeżeli liczba  $n$  jest kongruentna, to drugie równanie (4) ma dwa razy więcej rozwiązań niż pierwsze. Na odwrót, jeżeli drugie z tych równań ma dwa razy więcej rozwiązań niż pierwsze, to liczba  $n$  jest kongruentna, o ile wspomniana wyżej hipoteza B-SD zachodzi dla krzywej opisanej równaniem (3).

Analogiczne twierdzenie ma miejsce dla liczb  $n$  bezkwadratowych parzystych. Trzeba tylko równania (4) zastąpić przez

$$n = 8x^2 + 2y^2 + 64z^2 \quad \text{i} \quad n = 8x^2 + 2y^2 + 16z^2.$$

Tak więc korzystając z twierdzenia Tunnella można dowodzić, że pewne liczby naturalne  $n$  nie są kongruentne. Natomiast dowód, że liczba  $n$  jest kongruentna, powołujący się na to twierdzenie, wymaga jeszcze wykazania, że hipoteza B-SD zachodzi dla odpowiedniej krzywej eliptycznej.

Podamy kilka przykładów. Liczba 3 nie jest kongruentna, ponieważ przy  $n = 3$  każde z równań (4) ma cztery rozwiązania w liczbach całkowitych:  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = 0$  i oczywiście  $4 \neq 2 \cdot 4$ . Rozumując podobnie można udowodnić, że również żadna liczba pierwsza postaci  $8t + 3$  nie jest kongruentna.

Niech liczba  $n$  daje przy dzieleniu przez 8 resztę 5 lub 7. Wtedy żadne z równań (4) nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Kwadrat dowolnej liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 daje bowiem resztę 0, 1 lub 4. Ponieważ  $n$  jest liczbą nieparzystą, więc  $y$  jest liczbą nieparzystą i prawa strona każdego z równań (4) przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1 lub 3. Mamy też  $0 = 2 \cdot 0$ . Wobec tego, jeżeli przyjmiemy hipotezę B-SD, to z twierdzenia Tunnella wynika, że każda liczba naturalna  $n$  dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 5 lub 7 jest kongruentna.

Analogicznie z hipotezy B-SD można wyprowadzić, że każda liczba  $n$  dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 6 jest kongruentna.

To, że np. liczba 7 jest kongruentna, można udowodnić bez jakiejkolwiek hipotezy. Wystarczy stwierdzić, że liczby  $X = \frac{24}{5}, Y = \frac{35}{12}, Z = \frac{337}{60}$  spełniają równanie (1) oraz  $7 = \frac{1}{2} XY$ .

Nie znamy jednak ogólnej metody znajdowania takich liczb  $X, Y, Z$ , np. dla liczb  $n$  dających resztę 7 przy dzieleniu przez 8.

Podobnie z twierdzenia Tunnella przy założeniu hipotezy B-SD wynika, że liczba 65 jest kongruentna, mimo że daje ona resztę 1 przy dzieleniu przez 8. Wystarczy mianowicie znaleźć wszystkie rozwiązania każdego z równań (4) przy  $n = 65$  i porównać ich liczby. Nie przedstawia to większych trudności — wyznaczenie tych rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie. Natomiast znalezienie trójkąta prostokątnego o długościach boków wymiernych i polu 65 jest zadaniem nieco trudniejszym. Mamy nadzieję jednak, że Czytelnik z nim sobie również poradzi. Udowodni w ten sposób, że liczba 65 jest kongruentna. Fakt ten był znany matematykom arabskim już w X wieku.

Zauważmy na zakończenie, że liczący sobie ponad 1000 lat i mający całkiem elementarne sformułowanie problem znajdowania liczb kongruentnych stanowi drobną ciekawostkę i jest zagadnieniem bez większego znaczenia. Mimo to jego prawie kompletne rozwiązanie wymagało użycia bardzo zaawansowanych metod z różnych działów matematyki wyższej, rozwiniętych dopiero w XX wieku.



Rozwiązanie zadania F 192. Gdy cząstka znajduje się w środku kuli, nośniki ładunku w przewodniku rozmieszczają się tak, by natężenie pola elektrycznego w jego wnętrzu było równe zeru. Musi być przy tym spełniona zasada zachowania ładunku. Oznacza to, że na powierzchni wydrążenia wyindukuje się ładunek  $-q$ , a na zewnętrznej powierzchni kuli — ładunek  $q$ . Można przyjąć, że otwór w kuli jest na tyle wąski, że jego obecność nie ma wpływu na rozmieszczenie ładunku w przewodniku. Wówczas z symetrii układu wynika równomierny rozkład ładunku na obu powierzchniach. Energia potencjalna cząstki w polu wytworzonym przez nośniki ładunku przewodnika wynosi wówczas  $E_{p1} = (1/4\pi\epsilon_0)q^2(r-R)/Rr$ .

Jednocześnie energia potencjalna związana z oddziaływaniem na siebie nośników ładunku w przewodniku wynosi  $E_{p2} = (1/8\pi\epsilon_0)(R-r)q^2/Rr$  (porównaj z identyczną sytuacją w kondensatorze sferycznym). Całkowita energia

potencjalna układu wynosi więc  $E_p = (1/8\pi\epsilon_0)q^2(r-R)/rR$ . Jeżeli cząstce nadamy prędkość  $v$ , to w chwili początkowej energia układu złożonego z cząstki i kuli będzie wynosiła  $E = mv^2/2 + (1/8\pi\epsilon_0)q^2(r-R)/rR$ . Gdy cząstka zacznie się poruszać, również nośniki ładunku w kuli zaczną się przegrupowywać. Cząstka po opuszczeniu kuli będzie przez nią przyciągana dzięki odpowiedniemu rozkładowi nośników ładunku. Jeżeli prędkość nadana cząstce jest minimalna, to w nieskończoności będzie ona miała prędkość równą zeru. Równocześnie kula stanie się neutralna w każdym punkcie.

Energia całkowita układu złożonego z kuli i cząstki wyniesie więc wówczas zero. Jeżeli zaniedbamy straty energii związane z wydzieleniem się ciepła podczas przegrupowywania się nośników ładunku w kuli, to energia układu nie ulega zmianie. Zatem  $mv^2/2 + (1/8\pi\epsilon_0)q^2(r-R)/rR = 0$ . Stąd minimalna prędkość jest równa  $v = \sqrt{(1/4\pi\epsilon_0)(R-r)q^2/rRm}$ .

$$\frac{1}{54} (2\sqrt{13} - 5) \sqrt{2\sqrt{13} + 22}$$

W jednym ze starszych numerów *American Mathematical Monthly* (tom 44, 1937, str. 579—583) znaleźliśmy ciekawe twierdzenie Williamsa. Warto je chyba przedstawić w *Delcie*.

W każdym trójkącie zachodzi nierówność

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma \leq \frac{1}{54} (2\sqrt{13} - 5) \sqrt{2\sqrt{13} + 22}$$

i oszacowania nie da się poprawić, tj. istnieje trójkąt, w którym powyższa nierówność staje się równością.

Dla dowodu oznaczmy  $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma$  przez  $R$ . Ponieważ  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$  (zob. [1] w spisie

literatury), więc (zob. [2]):  $R = \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Położmy teraz  $\alpha = x + d$ ,  $\beta = x - d$ ,  $y = \cos x$ ,  $k = 1 - \cos d$ , i po prostych przekształceniach otrzymujemy  $R = y \sqrt{-y^4 + 2y^3 - 2y + 1} - ky \sqrt{1 - y^2}$ .

Chcemy znaleźć największą wartość funkcji  $R$  na zbiorze  $\{(k, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq k \leq 1\}$ . Standardowe metody (zróżniczkować i przyrównać do zera ...) raczej zawodzą. Chyba, że ktoś z Czytelników ... My skorzystamy z tożsamości, prawdziwej dla każdego  $a$ :

$$(y^2 - 2ay + a^2)(y^4 + 2(a-1)y^3 + a(3a-4)y^2 + 2(a-1)^2(2a+1)y + a(a-1)^2(2a+1)) = y^6 - 2y^5 + 2y^3 - (3a^4 - 5a^3 + 3a)y^2 + a^3(a-1)^2(2a+1).$$

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani wyborem  $a$  tak, by współczynnik przy  $y^2$  był równy  $-1$ , tj.

$$3a^4 - 5a^3 + 3a - 1 = 0,$$

tzn.  $(a^2 - 2a + 1)(3a^2 + a - 1) = 0$ , skąd

$$a = 1 \quad \text{lub} \quad a = \frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13}).$$

W dalszym ciągu za  $a$  przyjmijmy wartość  $\frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13}) \approx 0,4343 < \frac{1}{2}$ .

Oznaczając znów  $c = 2(a-1)^2(2a+1)$ ,  $h = a(a-1)^2(2a+1)$  mamy po niekrótkich aż zrozumiałych przekształceniach

$$R = \sqrt{a^2h - (y-a)^2(y^4 + 2(a-1)y^3 + a(3a-4)y^2 + cy + h)} - ky \sqrt{1 - y^2}$$

i zadanie prawie rozwiązane: jeżeli wielomian czwartego stopnia widoczny pod pierwiastkiem powyżej jest dodatni dla  $0 \leq y \leq 1$ , to w punkcie  $y = a$ ,  $k = 0$  mamy, oczywiście, szukaną największą wartość wynoszącą właśnie tyle, ile twierdzimy. Sprawdzenie, że wielomian  $y^4 + 2(a-1)y^3 + a(3a-4)y^2 + 2(a-1)^2(2a+1)y + a(a-1)^2(2a+1)$  przyjmuje w przedziale  $(0, 1)$  wartości dodatnie, jest może łatwe dla posiadaczy kalkulatorów elektronicznych. K. P. Williams o takim przyrządzie nie słyszał, więc użył prawie zapomnianej dziś metody zwanej łańcuchem Sturma. Przedstawimy te rachunki. Oznaczmy

$$f(a, y) = y^4 + 2(a-1)y^3 + a(3a-4)y^2 + 2(a-1)^2(2a+1)y + a(a-1)^2(2a+1).$$

$$\text{Mamy } f\left(\frac{1}{2}, y\right) = y^4 - y^3 - \frac{5}{4}y^2 + y + \frac{1}{4} = (y-1)(y+1)\left(y^2 - y - \frac{1}{4}\right) > 0,$$

gdy  $0 < y < 1$ ,

$$f(1, y) = y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) < 0 \quad \text{dla } 0 < y < 1,$$

$$f\left(\frac{4}{3}, y\right) = y^4 + 2\left(\frac{4}{3} - 1\right)y^3 + 2\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2\left(\frac{8}{3} - 1\right)y + \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2\left(\frac{8}{3} + 1\right) > 0 \quad \text{dla } y > 0.$$

Porządkując teraz  $f(a, y)$  względem potęg  $a$  mamy

$$f(a, y) = 2a^4 + (4y-3)a^3 + 3y(y-2)a^2 + (2y^3 - 4y^2 + 1)a + (y^4 - 2y^3 + 2y)$$

i widzimy, że współczynnik przy  $a$  przyjmuje wartość zero między  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{3}{4}$  i między 1 i 2,

a „wyraz wolny”  $y^4 - 2y^3 + 2y$  jest dodatni przy  $y > 0$ . Zatem w równaniu  $f(a, y) = 0$  są dwie zmiany znaku dla  $y < 1$ , a więc nie więcej niż dwa pierwiastki przy  $y < 1$ . Ale, jak zauważyliśmy,

dla  $y < 1$   $f\left(\frac{1}{2}, y\right) > 0$ ,  $f(1, y) < 0$ ,  $f\left(\frac{4}{3}, y\right) > 0$ , tak że dla  $y < 1$  jest jeden pierwiastek

między  $\frac{1}{2}$  i 1 i jeden między 1 a  $\frac{4}{3}$ . Zatem gdy  $a < \frac{1}{2}$ , nasze równanie nie ma pierwiastków

względem  $y$  mniejszych od jedności (a jak widzieliśmy,  $\frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13}) \approx 0,4343 < \frac{1}{2}$ ).

Po prostych obliczeniach okazuje się, że trójkąt, w którym powyższe maksimum ( $\approx 0,2213$ ) jest osiągnięte, ma kąty  $\alpha = \beta = 64^\circ 15' 30''$ ,  $\gamma = 51^\circ 29'$ . I kto by to pomyślał?



**Rozwiązanie zadania M 428.** Rozpatrzmy ostrosłup o wierzchołku w środku kuli i podstawie będącej ścianą wielościanu. Jeśli pole powierzchni ściany wynosi  $P$ , to objętość ostrosłupa wynosi  $\frac{1}{3}rP$ . W takim razie wielościan, składający się z takich właśnie ostrosłupów, ma objętość  $\frac{1}{3}rS$ .

Literatura:  
1. Euklides, *Elementy*, Aleksandria, 300 r. p.n.e.,  
2. *Trygonometria*, dowolny podręcznik.



Tym razem proponujemy wyprawę na południową półkulę Ziemi, aby przyjrzeć się pewnemu ciekawemu obszarowi nieba południowego. W zasadzie cała południowa półkula nieba (północna oczywiście też) widoczna jest już z równika, a gwiazdozbiór, o którym będzie mowa — Krzyż Południa — może być zaobserwowany w całości na południe od szerokości geograficznej  $25^\circ$ , a więc już z terenów leżących w pobliżu Zwrotnika Raka. Jednak w pełnej krasie podziwiać go można dopiero z półkuli południowej.

Tak jest obecnie, ale wiele wieków temu, w czasach potęgi państwa perskiego, Krzyż był widoczny z obszarów tego kraju (około  $40^\circ$  szerokości geograficznej północnej). Wspaniały ten gwiazdozbiór pozostawał przez długi czas obiektem szczególnego zainteresowania, a nawet kultu, w starożytnej Persji. Z czasem, wskutek zjawiska precesji osi ziemskiej, przesuwał się w kierunku południowego horyzontu, by wreszcie za nim zniknąć dla perskich obserwatorów. Zastąpiony został wtedy przez inny gwiazdozbiór o podobnym kształcie — przez Delfina, świecącego wówczas co prawda wysoko na „perskim niebie”, nie dorównującego jednak rozmiarem ani efektywnością Krzyżowi.

Praktycznie trudno w niewielkim obszarze nieba znaleźć równie piękne, charakterystyczne zgrupowanie jasnych gwiazd, jak to, które tworzą cztery najjaśniejsze gwiazdy Krzyża Południa ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ ) oraz leżące w pobliżu  $\alpha$  i  $\beta$  Centaura (niemal na przedłużeniu linii  $\delta\beta$  Krzyża — zdjęcie).

Po czasach swej świetności na „perskim niebie” Krzyż przez długi czas, obserwowany z rzadka i przez nielicznych ludzi ze „Starego Świata”, nie stanowił oddzielnego, nazwanego gwiazdozbioru. Zaliczano go wówczas do rozległego sąsiedztwa konstelacji Centaura. Dopiero w XVII wieku została nadana mu nazwa. Jest ona pozostałością po istniejącej wówczas tendencji do deateizacji nazw konstelacji. Przykładem realizacji tych dążeń jest atlas Juliusa Schillera, w którym starożytne nazwy gwiazdozbiorów zastąpiono przez postacie biblijne. Krzyż został nazwany przez francuskiego astronoma Augustina Royera, pozostającego prawdopodobnie pod wpływem badaczy południowego nieba, którzy dopatrywali się w układzie tych gwiazd symbolu ich religii. Miał on służyć za amulet ochraniający przed licznymi niebezpieczeństwami grożącymi w nieznanym zakątkach świata.

Czy jednak rzeczywiście gwiazdy tego gwiazdozbioru układają się w kształt krzyża? Trudno w zasadzie orzec, dlaczego tak go nazwano, skoro brakuje jasnej gwiazdy leżącej na skrzyżowaniu ramion o końcach wyznaczonych przez cztery najjaśniejsze gwiazdy. Przypomina on raczej pochylony latawiec, a jeśli już chcemy doszukać się kształtu krzyża, to można to zrobić na różne sposoby, co ilustrują rysunki.

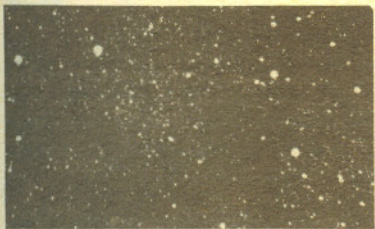
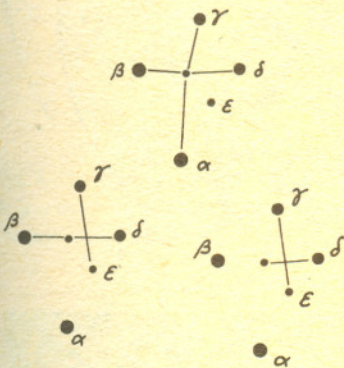
Krzyż Południa często utożsamiany jest ze „wskaźnikiem” południa, analogicznym jak Gwiazda Polarna dla północy. Jednak, o ile Gwiazda Polarna znajduje się tuż (w odległości około  $1^\circ$ ) koło północnego bieguna nieba i praktycznie w każdym momencie nocy wskazuje kierunek północny, o tyle w pobliżu południowego bieguna nieba brak jasnej gwiazdy, która mogłaby spełniać podobną rolę. Krzyż oddalony jest od południowego bieguna nieba o około  $30^\circ$  i w ciągu nocy dość znacznie zmienia swe położenie na niebie. Jeśli jednak przedłużymy odcinek łączący dwie jego gwiazdy —  $\gamma$  i  $\alpha$  około 4 razy w kierunku od  $\gamma$  ku  $\alpha$ , to otrzymamy położenie południowego bieguna sfery niebieskiej. W ten sposób żeglarze i podróżnicy wyznaczali dawniej kierunek południowy.

Gwiazdozbiór Krzyża leży na Drodze Mlecznej. Jest to stosunkowo jasny obszar nieba, toteż na jego tle szczególnie efektywnie wygląda ciemna mgławica pyłowa, zwana Workiem Węgla. Wyraźna, ciemna plama na Drodze Mlecznej, utworzona wskutek przesłaniania słabych gwiazd przez pył jest doskonale widoczna gołym okiem. Uważny Czytelnik, być może, dostrzeże ją na naszym zdjęciu — na lewo od gwiazd  $\alpha$  i  $\beta$  Krzyża.

Innym, ciekawym obiektem tego gwiazdozbioru jest gromada otwarta zwana Kappą Krzyża ( $\kappa$  Krzyża to najjaśniejsza gwiazda tej gromady), nie bez powodu okreśłana też mianem szkatułki klejnotów. Jej prawdziwą ozdobą jest silnie czerwona gwiazda, o której John Herschel pisał: „Najczerwieńsza, najbardziej krwisto-szkarłatna ze wszystkich gwiazd, jakie kiedykolwiek widziałem. W porównaniu z białością  $\beta$  Krzyża wygląda ona jak kropelka krwi”.

Osobom, które zapragną obejrzeć ten piękny gwiazdozbiór nieba południowego i w tym celu wybiorą się w długą podróż, radzimy wyprawę odbyć wiosną (tzn. gdy wiosna będzie panować na naszej półkuli). Jest to bowiem okres jego najlepszej widoczności.

mgr Joanna UDALSKA

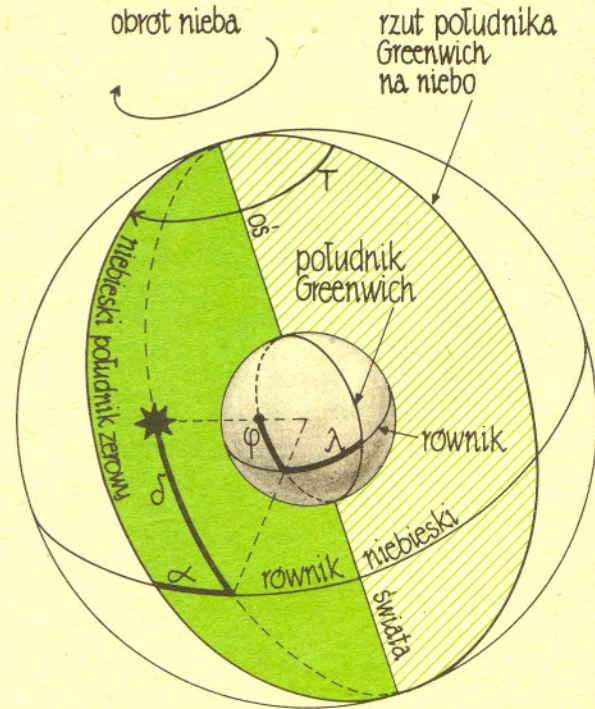




# delta

## Współrzędne geograficzne

Umiejętność określania kierunku północnego w terenie na podstawie gwiazd (rys. 1) jest dla przeciętnego człowieka właściwie zupełnie nieprzydatna, a dla kapitana statku płynącego przez ocean to za mało. Kapitan musi znać własne współrzędne geograficzne. Okazuje się, że można to łatwo osiągnąć również przez obserwację gwiazd.



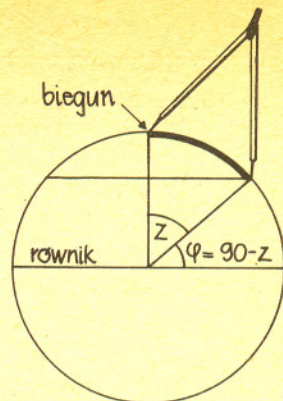
Rys. 1. Charakterystyczne gwiazdozbiory umożliwiające odszukanie Gwiazdy Polarnej. Leży ona w kierunku północnym z dokładnością  $\pm 1^\circ$ .

Gwiazdy na sferze niebieskiej mają swoje współrzędne określone analogicznie jak współrzędne geograficzne na kuli ziemskiej. Osie obu tych układów współrzędnych pokrywają się (tworząc tzw. oś świata), dzięki czemu od razu widać, że gwiazda o deklinacji  $\delta$  zawsze znajduje się nad równoleżnikiem o szerokości geograficznej  $\varphi = \delta$ . Drugą współrzędną punktu pod gwiazdą jest nieco trudniej określić. Umówmy się, że gdy niebieski południk zerowy znajduje się nad ziemskim południkiem zerowym, to mamy godzinę zero (czasu gwiazdowego). Po upływie czasu  $T$  niebieski południk zerowy znajdzie się nad południkiem ziemskim o długości geograficznej  $T$  (jednej godzinie odpowiada  $15^\circ$ ), a gwiazda o rektascensji  $\alpha$  nad południkiem o długości  $\lambda = T - \alpha$ .

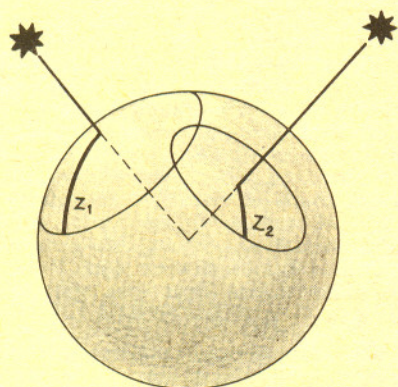
Rys. 2. Sfera niebieska z kulą ziemską w środku. Współrzędne niebieskie — rektascensja i deklinacja ( $\alpha, \delta$ ) — są określone analogicznie jak ziemskie długość i szerokość geograficzna ( $\lambda, \varphi$ ). Niebo obraca się pozornie wokół osi świata w tempie 1 obrót na dobę gwiazdową (doba gwiazdowa jest o około 4 min. krótsza od średniej słonecznej). Kąt  $T$  jest miarą upływu czasu gwiazdowego.



Z powyższego rozumowania wynika już metoda wyznaczania położenia. W każdej chwili potrafimy mianowicie określić współrzędne ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ) punktu na Ziemi położonego akurat pod gwiazdą o współrzędnych ( $\alpha$ ,  $\delta$ ), jeżeli więc ze statku widać tę gwiazdę o  $z$  stopni od zenitu, to oznacza, że znajduje się on o tyleż stopni od punktu ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ). Na globusie można wtedy narysować koło, na którym gdzieś statek się znajduje, bo wiadomo, gdzie leży środek tego koła i jaki jest jego promień (rys. 3). Wystarczy tę samą procedurę powtórzyć dla drugiej gwiazdy, by dostać drugie koło, które z pierwszym musi się przeciąć. Jeden z punktów przecięcia się tych kół (a zazwyczaj łatwo rozstrzygnąć który) to położenie statku (rys. 4).



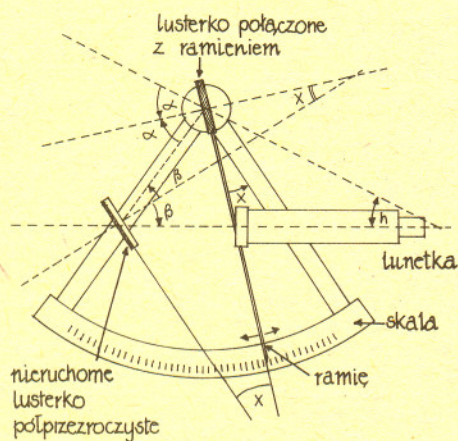
Rys. 3. Jeżeli mamy narysować na globusie koło oparte na kącie środkowym  $z$ , to rozwarcie cyrkla łatwo określić wbijając ostrze w biegun, a drugie ramię opierając na równoleżniku o szerokości geograficznej  $90^\circ - z$ .



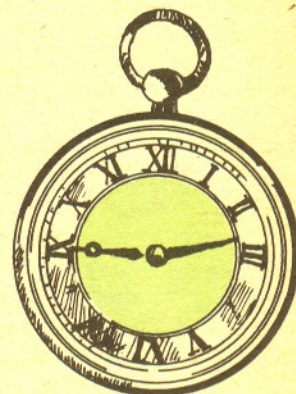
Rys. 4. Dwa koła pozycyjne — w jednym z punktów ich przecięcia się jest statek. Jeżeli jedną z obserwowanych gwiazd jest Gwiazda Polarna, to od razu  $\varphi \approx 90^\circ - z$ .

Pozostaje wyjaśnić, w jaki sposób mierzy się na statku kąt (łuk) między gwiazdą a zenitem. Pomiar ten wykonuje się za pomocą sekstansu (rys. 5) — przyrządu genialnego przez to, że umożliwia wykonanie pomiaru z dowolnie kołyszącego się statku. Jest to możliwe dlatego, że dzięki układowi dwóch lusterek nawigator widzi w lunetce zarówno horyzont, jak i gwiazdę i jeżeli te dwa obrazy drgają w polu widzenia, to w każdym razie drgają jednakowo i „sprowadzenie gwiazdy na horyzont” nie przedstawia trudności.

Tak więc na statku musi znajdować się sekstans i zegar (gwiazdowy), no i oczywiście katalog gwiazd. W dzień wykorzystuje się pomiar  $z$  dla Słońca, a ponieważ potrzebne są dwie takie obserwacje, to obserwuje się Słońce dwukrotnie — należy przy tym uwzględnić, że w czasie między obserwacjami statek przebędzie określoną drogę. Niezbędne wykresy wykonuje się oczywiście nie na globusie, lecz na mapach, ale to już są szczegóły techniczne.



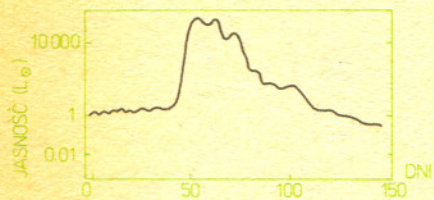
Rys. 5. Sekstans. Obracając ramię sprowadza się obraz gwiazdy na obraz horyzontu. Na skali odczytuje się wtedy wysokość  $h$  gwiazdy nad horyzontem, równą oczywiście  $90^\circ - z$ .



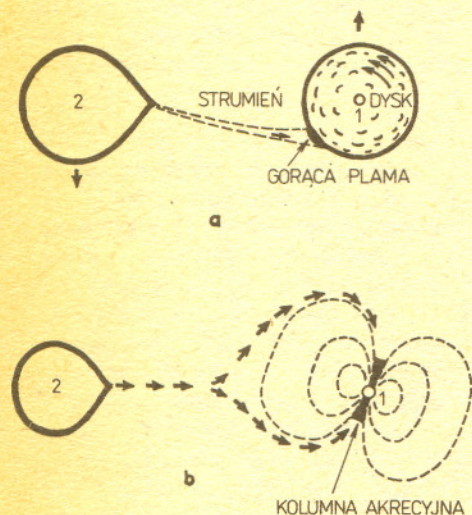
Rys. 6. Zegarem gwiazdowym może być dowolny zegar (pokazujący normalnie czas słoneczny) spieszący się o około 4 min. na dobę.

# Skąd się wzięły gwiazdy nowe?

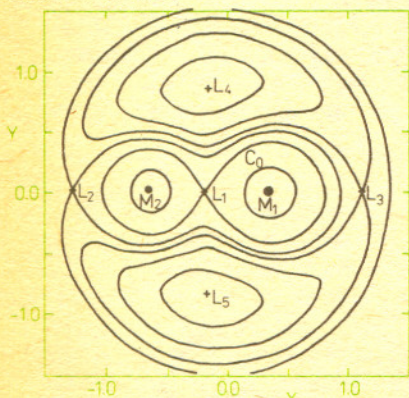
Mgr Marek J. SARNA



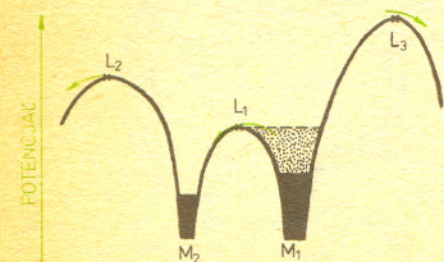
Rys. 1. Przebieg zmian jasności podczas wybuchu typowej gwiazdy nowej.



Rys. 2. Układy wybuchowe pokazane w płaszczyźnie orbitalnej:  
a) obraz w przypadku braku pola magnetycznego; 1 oznacza białego karła, a 2 czerwonego karła.  
b) obraz z polem magnetycznym — obecność pola obrazują linie przerywane, znaczenie 1 i 2 tak jak w a).



Rys. 3a). Na rysunku pokazane są krytyczne powierzchnie Roche'a w płaszczyźnie orbity układu podwójnego. Zaznaczone są punkty Lagrange'a. Jednostka na osi X i Y odpowiada odległości między masami  $M_1$  i  $M_2$ .



Rys. 3b). Strzałki pokazują możliwe kierunki przepływu materii. Rysunek b jest przekrojem płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny rysunku a przechodzącą przez punkty  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

Pierwszych europejskich obserwacji pojawienia się zupełnie nowych gwiazd na sferze gwiazd stałych dokonał Tycho Brahe. Podobne obserwacje gwiazdy z 1054 r., wykonane w Chinach, nie były znane w Europie. Zaobserwowane wtedy gwiazdy określa się mianem supernowych, gdyż pojawiały się tam, gdzie nie było widać żadnej gwiazdy i zwiększały swą jasność dziesiątki tysięcy razy. Pojawiały się też nieco słabiej rozblyskujące gwiazdy, które nazwano nowymi (rys. 1).

Obserwacje gwiazd nowych zaczęły rozwijać się pod koniec ubiegłego wieku, analiza tych danych pozwoliła Otto Struwegowi postawić hipotezę, że wszystkie nowe są układami dwóch fizycznie związanych gwiazd (tzw. układy podwójne). Lata sześćdziesiąte przyniosły prace obserwacyjne (m.in. astronomów polskich: Wojciecha Krzemińskiego i Józefa Smaka) potwierdzające hipotezę Struvego, a jednocześnie dostarczyły ogromu danych o fizycznych własnościach tych układów. Okazało się, że jedna z gwiazd układu jest białym karłem, druga zaś — gwiazdą o małej masie palącą wodór w centrum. Ten drugi składnik ma rozmiary na tyle duże, że część swojej masy przekazuje w kierunku białego karła. Opadająca materia w zależności od natężenia pola magnetycznego białego karła (rys. 2) tworzy wokół niego dysk lub kolumny akrecyjne (przy dużym natężeniu). W układzie takim może następować wybuch i związane z tym pojaśnienie. Z obserwacji znamy szereg cech gwiazd nowych, i tak:

- podczas wybuchu układ zwiększa swoją jasność o 3 do 13 mag (czyli od 16 do 16 000 razy);
- ilość energii wypromieniowanej w czasie całego wybuchu w widzialnej części widma waha się w granicach  $10^{38}$  do  $10^{45}$  ergów, to jest tyle, ile Słońce wypromieniowuje w ciągu od 7 godzin do 8100 lat;
- w zależności od rodzaju gwiazdy wybuchowej wybuchy powtarzają się w okresach od 10 dni do 100 lat, przy czym im częstsze wybuchy, tym mniejsza ich jasność;
- w czasie wybuchów ubytki masy z układu zamykają się w dość szerokich granicach od dziesiątych części do kilkuset mas Ziemi;
- czasy obiegu gwiazd układu (czyli okres orbitalny) wynoszą od kilkudziesięciu minut do kilkunastu godzin.

Dla dalszego opisu powstawania gwiazdy nowej niezbędne jest wyobrażenie o polu grawitacyjnym wokół obu gwiazd. Na rysunku 3a przedstawione są powierzchnie stałego potencjału grawitacyjnego. Ponad powierzchnią oznaczoną  $C_0$  cząstki utrzymywane są w układzie przez sumaryczne przyciągnięcie obu gwiazd. Poniżej tej powierzchni, zwanej wewnętrzną krytyczną powierzchnią Roche'a, na cząstki materii oddziałuje praktycznie tylko jedna z gwiazd. Na rysunku 3a zaznaczono również punkty Lagrange'a ( $L_1$ — $L_5$ ). Największe znaczenie dla ewolucji układu podwójnego mają punkty  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  (patrz Delta 2/1985). Przez punkt  $L_1$  może następować wymiana masy między składnikami, zaś przez  $L_2$  i  $L_3$  — jej odpływ z układu (rys. 3b).

Chcąc przedstawić ciąg modeli prowadzący do powstania typowego układu wybuchowego jesteśmy w rozterce! Z jednej strony dzięki temu, że znane gwiazdy i układy mają różne masy, wiek itd. (są różnie zaawansowane ewolucyjnie), jesteśmy w stanie zaobserwować każde ze stadiów rozwoju, z drugiej — różnorodność wśród obserwowanych układów podwójnych jest tak duża, że szalenie trudno jest je ułożyć w jeden ciąg. Co więc robią astronomowie? — Konstruują taki ciąg modeli, który oprócz tego, że daje dobry model końcowy, ma w punktach pośrednich swoje obserwacyjne odpowiedniki.

Od czego więc zaczynamy? — Od założeń! Podstawowym założeniem jest, że gwiazda nowa powstała z układu podwójnego, o składnikach dość znacznie różniących się masą (rys. 4a). Na początku odległość między gwiazdami wynosiła kilkaset promieni słonecznych, odpowiadała to okresowi orbitalnemu od 100 do 300 dni. Na wszystkich rysunkach 4 (a do g) linią przerywaną zaznaczona jest wewnętrzna powierzchnia Roche'a z punktem  $L_1$ , zwana linią prędkości zerowej.

Na początku składniki układu ewoluują tak, jakby były gwiazdami pojedynczymi (rys. 4a). Gwiazda bardziej masywna szybko wypala wodór w centrum i staje się czerwonym olbrzymem (gwiazdą o małym helowym jądrze i ogromnej, mającej wiele jednostek astronomicznych, otoczce). Natomiast mniej masywny składnik układu podwójnego wypala tylko niewielką ilość wodoru tak, że niewiele się zmienia. Przykładem układu podwójnego w tej fazie ewolucji może być HD 200428/9. Obie gwiazdy znajdują się wewnątrz swoich powierzchni Roche'a, a okres ich obiegu wynosi 113 dni. Ten etap rozwoju, trwający od kilku milionów do miliardów lat, kończy się w momencie, gdy bardziej masywna gwiazda, czerwony olbrzym, zwiększy promień

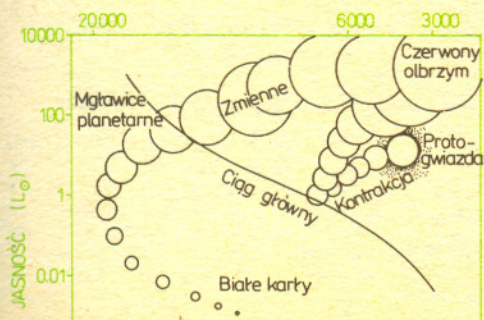
na tyle (przykład SS *Leporis*, rys. 4b), że nadmiar materii zacznie przelewać się na drugą gwiazdę przez punkt *L*<sub>1</sub> (rys. 4b i rys. 3b). W przypadku dużej różnicy mas i konwektywnej otoczki czerwonego olbrzyma po krótkim czasie przepływ przez *L*<sub>1</sub> zmienia się w prawdziwy kataklizm. Rozmiary drugiego, małowasywnego składnika układu (czerwonego karła — małowasywnej gwiazdy ciągu głównego) rosną bardzo szybko. Nie jest ona jednak w stanie przyswoić sobie tak wielkich ilości materii. Materia wylewa się na zewnątrz. Oba składniki układu znajdują się w rzadkiej i nieprzezroczystej chmurze gazu. Teraz zmiany zachodzą bardzo szybko. W ciągu kilkudziesięciu tysięcy lat obie gwiazdy — czerwony karzeł i olbrzym (o helowym lub węglowym jądrze) — zbliżają się do siebie. Faza ta nosi nazwę wspólnej otoczki. W pewnym momencie zbliżanie ustaje, a otoczka rozprasza się w przestrzeni (rys. 4c). To, co ukazują się naszym oczom po rozdmuchaniu wspólnej otoczki, jest ciasnym układem podwójnym (odległość składników zmniejszyła się kilkadziesiąt razy — zwróćcie uwagę na zmianę skali rysunku pomiędzy rys. 4c a 4d), złożonym z czerwonego karła i gwiazdy palącej wodór (lub wodór i hel) w cienkiej zewnętrznej warstwie (z gwiazdy tej w dalszej ewolucji powstanie biały karzeł), zanurzonym w mgławicy planetarnej (rys. 4d). Przykładem takiego układu jest UU *Sagittae*. Jest to mgławica planetarna, w której centrum znajduje się układ podwójny złożony z białego karła i gwiazdy ciągu głównego o masach 1,1 i 0,6 M<sub>⊙</sub> i okresie około 11 godzin. Gdy mgławica rozprasza się i przestaje być widoczna, a dzieje się to dość szybko, bo w czasie od 10<sup>4</sup> do 10<sup>5</sup> lat, pozostaje (rys. 4e) układ podwójny, np. AA *Doradus*, w którym jedna z gwiazd dopala resztki wodoru i helu w cienkiej warstwie na powierzchni, druga zaś jest czerwonym karłem. Obie znajdują się wewnątrz swoich powierzchni Roche'a, a okres układu wynosi kilka godzin. Dalsze zmiany są nieznaczne (rys. 4f): pierwszy składnik po wypaleniu paliwa jądrowego kurczy się i staje się białym karłem, drugi zaś nie ulega zmianie. Najbardziej znanym układem tego typu jest V471 *Tauri*. Ma on okres około 12,5 godziny, a masy białego karła i czerwonego karła są równe i wynoszą około 0,8 M<sub>⊙</sub>.

A co dzieje się dalej? Wydawałoby się, że nastąpił impas, bo jeśli drugi składnik ma masę mniejszą niż 0,8 M<sub>⊙</sub>, to aby na skutek ewolucji zwiększył swój promień do powierzchni Roche'a, musiałby upłynąć czas dłuższy od wieku Wszechświata. Jakie więc mechanizmy fizyczne mogą „zbliżyć do siebie” dwie gwiazdy (spowodować utratę momentu pędu z układu) tak, aby czerwony karzeł wypełnił swoją powierzchnię Roche'a i zaczął przelewać materię na białego karła?

Zaproponowano dwa sposoby utraty momentu pędu z układu: — na skutek aktywności atmosferycznej czerwonego karła, analogicznej do wiatru słonecznego, tylko na znacznie większą skalę, — przez promieniowanie grawitacyjne — trzeba tu nadmienić, że istnienie fal grawitacyjnych nie zostało doświadczalnie potwierdzone.

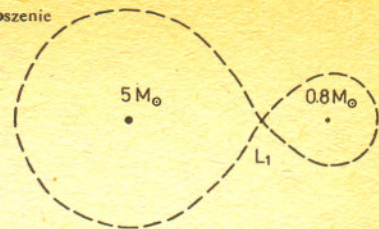
Pierwszy mechanizm funkcjonuje wydajnie tam, gdzie okresy obiegów wynoszą kilka godzin; dla okresów dłuższych decyduje ewolucja nuklearna. Charakterystyczne czasy skracania okresu wahają się od 10 do 100 mln lat. Promieniowanie grawitacyjne jest dominujące przy niewielkich odległościach gwiazd (małe okresy). Przykładowo: czas spadku na siebie dwu gwiazd o masach 1 M<sub>⊙</sub> i 0,8 M<sub>⊙</sub> i o okresie początkowym 1,5 godziny wynosi 44 mln lat, a dla okresu 12 godzin — 11 mld lat. O ewolucji decyduje ten mechanizm, który w danych warunkach działa szybciej. W ten sposób udało się nam zamknąć cały łańcuch modeli, który prowadzi do powstania układu wybuchowego (rys. 4g).

TEMPERATURA (K)

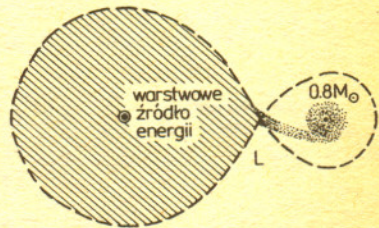


Rys. 5. Diagram H-R z pokazaną ewolucją gwiazdy o masie około 1 M<sub>⊙</sub>. Różne wielkości kół obrazują, jak zmienia się promień podczas ewolucji.

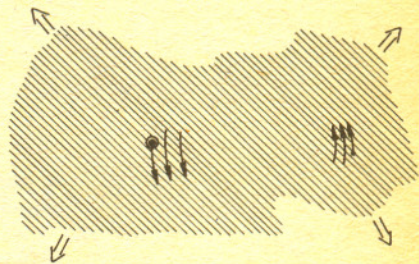
Konwekcja jest to przenoszenie ciepła razem z materią.



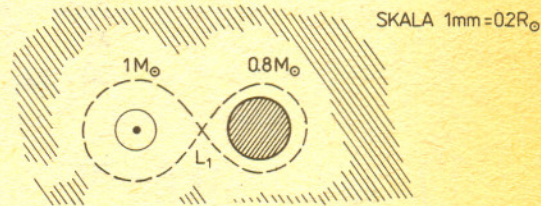
Rys. 4a). Okres orbitalny  $P = 200$  dni, odległość między gwiazdami  $A = 260 R_{\odot}$ , czas życia na tym etapie  $6,5 \cdot 10^7$  lat. Przykład: HD 200428/9.



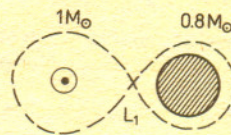
b).  $P = 200$  dni,  $A = 260 R_{\odot}$ , czas przelewania się materii około 10<sup>4</sup> lat. Przykład: SS *Lep*.



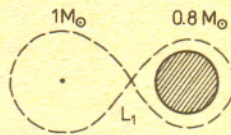
c). Faza wspólnej otoczki. Czas zbliżania się czerwonego karła do jądra czerwonego olbrzyma 10<sup>4</sup> do 10<sup>5</sup> lat. Brak przykładu.



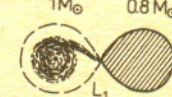
d). Faza mgławicy planetarnej.  $P = 0,5$  dnia,  $A = 3,23 R_{\odot}$ , czas rozprzaskania mgławicy do 10<sup>5</sup> lat. Przykład: UU-*Sge*.



e).  $P = 0,5$  dnia,  $A = 3,23 R_{\odot}$ , czas dopalania wodoru i helu w warstwach źródłach energii około 10<sup>5</sup> lat. Przykład: AA *Dor*.



f).  $P = 0,5$  dnia,  $A = 3,23 R_{\odot}$ , utrata momentu pędu poprzez promieniowanie grawitacyjne lub aktywność atmosferyczną — czasy zachodzenia tych procesów 10<sup>7</sup> do 10<sup>8</sup> lat. Przykład: V471 *Tau*.



g).  $P = 0,285$  dnia,  $A = 2,2 R_{\odot}$ , czas przelewania materii około 10<sup>9</sup> lat. Przykład: Z *Cam*.

# O pewnej metodzie dowodzenia nierówności

Piotr HAJŁASZ

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1985 r.

Praca nadesłana na Konkurs dotyczący nowej metody dowodzenia pewnych nierówności. W niniejszym skrócie umieszczam jedynie najważniejsze twierdzenia (bez dowodów) i niektóre ich zastosowania. Oto główna idea mojej metody. Chcąc udowodnić nierówność postaci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

postępujemy w następujący sposób: Rozpatrujemy jedną stronę nierówności, np.  $g(x_1, \dots, x_n)$ , i dokonujemy kolejnych zmian wartości zmiennych (za każdym razem zmieniamy wartości tylko dwóch zmiennych). Ten proces zmian kontynuujemy w nieskończoność, przy czym zmiany te są tak dobrane, że za każdym razem funkcja  $f$  nie zmienia swojej wartości, funkcja  $g$  zaś przyjmuje coraz mniejsze wartości i ten malejący ciąg wartości funkcji  $g$  jest zbieżny do wartości funkcji  $f$ .

Przystąpmy teraz do precyzyjnego przedstawienia tej metody. Na wstępie podamy kilka pojęć o charakterze ogólnym.

Definicja. Weźmy pod uwagę ciągłą funkcję  $\varphi: P \rightarrow \mathbf{R}$ , gdzie  $P$  jest podzbiorem płaszczyzny  $\mathbf{R}^2$ . a) Jeżeli dla każdego punktu  $(x, y) \in P$  liczba  $\varphi(x, y)$  leży w przedziale domkniętym o końcach  $x$  i  $y$ , to funkcję  $\varphi$  nazywamy **medianą**.

b) Jeżeli dla każdego punktu  $(x, y) \in P$ , gdzie  $x \neq y$ , liczba  $\varphi(x, y)$  leży w przedziale otwartym o końcach  $x$  i  $y$ , to funkcję  $\varphi$  nazywamy medianą **właściwą** (założenie  $x \neq y$  jest tutaj konieczne).

Następujące funkcje

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \frac{x+y}{2} & x, y \in \mathbf{R}, \\ \psi(x, y) &= \sqrt{xy} & x, y \geq 0, \\ \eta(x, y) &= \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} & x, y \geq 0, p > 0\end{aligned}$$

są medianami. Funkcje  $\varphi$  i  $\eta$  są medianami właściwymi. Jeżeli dziedzinę funkcji  $\psi$  ograniczymy do zbioru  $\{(x, y) : x, y > 0\}$ , to  $\psi$  też będzie medianą właściwą.

Niech  $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$  będzie medianą, a punkt  $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$  będzie taki, że kwadrat o wierzchołkach  $(m, m)$ ,  $(m, d)$ ,  $(d, m)$ ,  $(d, d)$ , gdzie  $m = \min\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ ,  $d = \max\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ , jest zawarty w  $A$ .

Projekcją punktu  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  względem mediany  $\varphi$  nazywamy dowolny ciąg punktów  $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n$  spełniający warunek:

dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots$  istnieje taka para indeksów  $i, j$ , gdzie  $1 \leq i \leq j \leq n$ , że

$$x_i^{(k+1)} = x_j^{(k+1)} = \varphi(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})$$

oraz

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \quad \text{gdy } i \neq r \neq j.$$

Tak więc  $X_{k+1}$  powstaje z  $X_k$  przez „uśrednienie” współrzędnych  $x_i^{(k)}$  i  $x_j^{(k)}$  za pomocą mediany  $\varphi$ .

Jeżeli za każdym razem uśredniamy najmniejszą i największą współrzędną, to projekcję nazywamy **ekstremalną**.

Jeżeli dla dowolnego podziału zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  na niepuste podzbiory  $A, B$  i każdej liczby naturalnej  $k_0$  istnieje taka liczba  $k > k_0$ , że  $X_{k+1}$  powstaje z  $X_k$  przez uśrednienie  $x_i^{(k)}$  i  $x_j^{(k)}$ , gdzie  $i \in A, j \in B$ , to projekcję nazywamy **normalną**.

W pracy udowodniłem m.in. twierdzenia:

Twierdzenie 1. Projekcja ekstremalna jest zbieżna w  $\mathbf{R}^n$  do punktu postaci  $(x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathbf{R}^n$ .

Twierdzenie 2. Projekcja normalna względem mediany właściwej jest zbieżna w  $\mathbf{R}^n$  do punktu postaci  $(x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathbf{R}^n$ .

Łatwo wykazać, że liczba  $x_0$  występująca w obu twierdzeniach ma dla podanych poprzednio funkcji  $\varphi, \psi, \eta$  następujące wartości:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \quad \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Teraz już możemy przystąpić do dowodzenia nierówności.

Zadanie 1. Udowodnić, że jeżeli  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ , to

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

الربيع الربيع

الربيع الربيع

الربيع الربيع

الربيع الربيع



Dowód. Niech  $\varphi(x, y) = \frac{x+y}{2}$ . Jak wiadomo,  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \varphi(x, y) \cdot \varphi(x, y)$ .

Stąd dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n \geq 0, 1 \leq i < j \leq n$ , jest

$$(1) \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_i \cdot \dots \cdot x_j \cdot \dots \cdot x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot \varphi(x_i, x_j) \cdot \dots \cdot \varphi(x_i, x_j) \cdot \dots \cdot x_n}$$

Niech  $(A_k)_{k=0}^\infty$  będzie projekcją ekstremalną punktu  $(a_1, \dots, a_n)$  względem mediany  $\varphi$ . Oznaczając  $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$  mamy na mocy (1)

$$f(A_k) \leq f(A_{k+1}) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ  $A_k \rightarrow (a_0, \dots, a_0)$ , gdzie  $a_0 = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ , więc na mocy ciągłości funkcji  $f$  mamy

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = f(A_0) \leq f(A_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(A_k) = f(a_0, \dots, a_0) = a_0 = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

czyli to, co mieliśmy udowodnić.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeżeli  $0 \leq x_i \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , to

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}$$

Dowód. Niech  $\varphi(x, y) = \sqrt{xy}$ . Otóż, jeżeli  $x, y \in [0, 1]$ , to

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{1}{1+\varphi(x, y)} + \frac{1}{1+\varphi(x, y)}$$

Nierówność ta wynika dość prosto z nierówności

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (1 - \sqrt{xy}) \geq 0.$$

Stąd dla dowolnych  $y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$  i  $1 \leq i < j \leq n$  jest

$$(2) \quad \frac{1}{1+y_1} + \dots + \frac{1}{1+y_i} + \dots + \frac{1}{1+y_j} + \dots + \frac{1}{1+y_n} \leq \frac{1}{1+y_1} + \dots + \frac{1}{1+\varphi(y_i, y_j)} + \dots + \frac{1}{1+\varphi(y_i, y_j)} + \dots + \frac{1}{1+y_n}$$

Niech  $(X_k)_{k=0}^\infty$  będzie projekcją ekstremalną punktu  $(x_1, \dots, x_n)$  względem mediany  $\varphi$ .

Przyjmując, że  $f(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1+y_1} + \dots + \frac{1}{1+y_n}$  mamy na mocy (2)

$$f(X_k) \leq f(X_{k+1}) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Podobnie jak w zadaniu 1 mamy

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = f(X_0) \leq f(X_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) = f(x_0 \dots x_0) = \frac{n}{1+x_0} = \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}},$$

czyli to, co mieliśmy udowodnić.

Zadanie 3 (nierówność Höldera). Udowodnić, że jeżeli  $a_i, b_i > 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  oraz liczby

dodatnie  $p$  i  $q$  spełniają równość  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

Dowód (częściowy). Niech

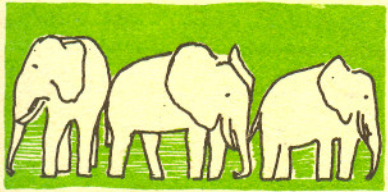
$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}, \quad \psi(x, y) = \left(\frac{x^q + y^q}{2}\right)^{1/q}.$$

Wówczas można wykazać (dowód pomijam; w przypadku  $p = q = 2$  jest on szczególnie prosty — w tym szczególnym przypadku dowiedziona przez nas nierówność nosi nazwę nierówności Schwarza), że jeśli  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ , to

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \leq \varphi(\alpha_1, \alpha_2) \psi(\beta_1, \beta_2) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2) \psi(\beta_1, \beta_2).$$

Stąd dla dowolnych  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n > 0$  i dowolnych  $1 \leq i < j \leq n$  jest

$$(3) \quad \alpha_i \beta_i + \dots + \alpha_i \beta_i + \dots + \alpha_j \beta_j + \dots + \alpha_n \beta_n \leq \alpha_i \beta_i + \dots + \varphi(\alpha_i, \alpha_j) \psi(\beta_i, \beta_j) + \dots + \varphi(\alpha_i, \alpha_j) \psi(\beta_i, \beta_j) + \dots + \alpha_n \beta_n.$$



Rozwiązanie zadania M 429. Mamy

$$k^4 + 3k^2 + 1 = (k^3 + 2k)k + (k^2 + 1),$$

$$k^3 + 2k = (k^2 + 1)k + k,$$

$$k^2 + 1 = k \cdot k + 1.$$

Zauważmy, że każdy wspólny dzielnik liczb  $k^4 + 3k^2 + 1$  i  $k^3 + 2k$  jest dzielnikiem  $k^2 + 1$ , oraz że każdy wspólny dzielnik liczb  $k^3 + 2k$  i  $k^2 + 1$  jest dzielnikiem  $k^4 + 3k^2 + 1$ . Tak więc  $\text{NWD}(k^4 + 3k^2 + 1, k^3 + 2k) = \text{NWD}(k^3 + 2k, k^2 + 1)$ .

Podobnie otrzymujemy  $\text{NWD}(k^3 + 2k, k^2 + 1) = \text{NWD}(k^2 + 1, k) = \text{NWD}(k, 1)$ .

Ale  $\text{NWD}(k, 1) = 1$ , czyli liczby  $k^4 + 3k^2 + 1$  i  $k^3 + 2k$  są względnie pierwsze.



Niech  $(A_k)_{k=0}^{\infty}$  będzie projekcją normalną punktu  $(a_1, \dots, a_n)$  względem mediany  $\varphi$ . Konstruujemy teraz projekcję  $(B_k)_{k=0}^{\infty}$  punktu  $(b_1, \dots, b_n)$  względem mediany  $\psi$ : jeśli  $A_{k+1}$  powstał z  $A_k$  przez uśrednienie współrzędnych  $a_i^{(k)}$  oraz  $a_j^{(k)}$ , to  $B_{k+1}$  powstaje z  $B_k$  przez uśrednienie współrzędnych  $b_i^{(k)}$  oraz  $b_j^{(k)}$ . Oczywiście, projekcja  $(B_k)$  też jest normalna.  
Wówczas

$$A_k \rightarrow (a_0 \dots, a_0), \quad a_0 = \left( \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p},$$

$$B_k \rightarrow (b_0 \dots, b_0), \quad b_0 = \left( \frac{b_1^q + \dots + b_n^q}{n} \right)^{1/q}.$$

Oznaczając

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

mamy zgodnie z (3)

$$f(A_k; B_k) \leq f(A_{k+1}; B_{k+1}) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Stąd i z ciągłości funkcji  $f$  mamy

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = f(A_0; B_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(A_k; B_k) = f(a_0, \dots, a_0; b_0, \dots, b_0) =$$

$$= n \left( \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p} \left( \frac{b_1^q + \dots + b_n^q}{n} \right)^{1/q} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

Przy dowodzeniu różnych nierówności stosowaliśmy różne mediany. Skąd wiadomo, jaką medianę zastosować przy dowodzie konkretnej nierówności? Nierówności dowodzone w zadaniach 1 i 2 są postaci

$$(4) \quad f_n(a_1, \dots, a_n) \leq g_n(a_1, \dots, a_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Otóż można uzasadnić, że jeżeli taka nierówność da się udowodnić wyżej prezentowaną metodą, to mediana  $\varphi$  musi spełniać warunek

$$(5) \quad f_2(\varphi(x, y), \varphi(x, y)) = g_2(x, y)$$

(w przypadku zadań 1 i 2 mediana  $\varphi$  rzeczywiście spełnia ten warunek). Tak więc chcąc udowodnić nierówność (4) wpierw wyznaczamy medianę z warunku (5).

Nie zawsze jednak nierówność (4) daje się udowodnić wyżej opisaną metodą.

W przypadku zadania 3 sytuacja jest trochę inna, gdyż występująca tam nierówność nie jest nierównością typu (4). Można się jednak dopatrzeć dużych podobieństw i uogólnić warunek (5) na inne rodzaje nierówności.

Prezentowana metoda dowodzenia nierówności nadaje się do dowodzenia nierówności innych typów (oczywiście nie wszystkich), można bowiem z powodzeniem znajdować jej modyfikacje.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 427.** W wierzchołku trójkąta stoi pionek. Przeszawiamy go do losowo wybranego jednego z pozostałych wierzchołków (szanse wyboru każdego spośród dwóch sąsiadnych wierzchołków są równe). Niech  $p_n$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że po  $n$  krokach pionek stoi w wyjściowym wierzchołku. Znaleźć  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

Rozwiązanie na str. 5

**M 428.** Na kuli o promieniu  $r$  opisano wielościan o polu powierzchni  $S$ . Znaleźć jego objętość.  
Rozwiązanie na str. 6

**M 429.** Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  liczby  $k^3 + 2k$  i  $k^4 + 3k^2 + 1$  są względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 13

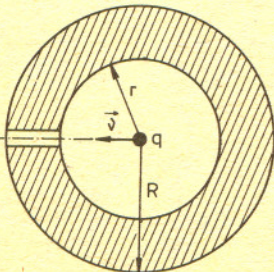
Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

**F 192.** Wewnątrz umocowanej, przewodzącej, nie naładowanej kuli o promieniu  $R$  znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu  $r$ , którego środek pokrywa się ze środkiem kuli. Jaką minimalną prędkość należy nadać znajdującej się w środku kuli cząstce o masie  $m$  i ładunku  $q$ , aby po przejściu przez wąski otwór w kuli odleciała w nieskończoność?

Rozwiązanie na str. 5

**F 193.** Kulę metalową oświetlono światłem o częstotliwości  $\nu$  większej od częstotliwości granicznej dla zjawiska fotoelektrycznego. Kulka znajduje się w próżni, a jej promień wynosi  $r$ . Jaki ładunek ustali się na kulce, jeżeli praca wyjścia dla metalu, z którego jest ona wykonana, wynosi  $W$ ?

Rozwiązanie na str. 4





Bardzo duże zastosowanie w dowodzeniu nierówności ma nierówność Cauchy'ego między średnią arytmetyczną i geometryczną:

jeżeli  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ , to  $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ , przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Poniższe nierówności można udowodnić wykorzystując tę nierówność.

Zadanie. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  prawdziwa jest nierówność

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \leq \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \dots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

(zadanie 2 z zawodów II stopnia XXXI Olimpiady)

Dowód. Załóżmy najpierw, że  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Rozważmy liczby

$$\underbrace{x_1^2, \dots, x_1^2}_{2^{n-1} \text{ liczb}}, \underbrace{x_2^2, \dots, x_2^2}_{2^{n-2} \text{ liczb}}, \dots, \underbrace{x_{n-2}^{2^{n-2}}, \dots, x_{n-2}^{2^{n-2}}}_{2^2 \text{ liczb}}, \underbrace{x_{n-1}^{2^{n-1}}, x_{n-1}^{2^{n-1}}}_{2^1 \text{ liczb}}, x_n^{2^n}, 1.$$

Średnia arytmetyczna tych liczb wynosi

$$\frac{1}{2^n} (2^{n-1} x_1^2 + 2^{n-2} x_2^2 + \dots + 2^1 x_{n-1}^{2^{n-1}} + x_n^{2^n} + 1) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \dots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Średnia geometryczna tych liczb wynosi

$$\sqrt[2^n]{x_1^{2^n} \cdot x_2^{2^n} \cdot \dots \cdot x_n^{2^n} \cdot 1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Stąd na mocy nierówności Cauchy'ego otrzymujemy żadaną nierówność.

Jeśli teraz nie wszystkie liczby  $x_1, \dots, x_n$  są nieujemne, to wobec

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq |x_1| \cdot \dots \cdot |x_n|, \quad |x_i^2| = x_i^2$$

i na mocy już udowodnionego też spełniają nierówność.

Zadanie 1. Niech  $n \geq 2$  i niech  $a, x_1, \dots, x_n$  będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Dowieść, że

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \dots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + \dots + x_n)}$$

wskazać, w jakim przypadku zachodzi równość.

(zadanie 3 z VII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

Zadanie 2. Dowieść, że jeśli suma liczb dodatnich  $a, b, c$  jest równa 1, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

(zadanie 6 z zawodów I stopnia II Olimpiady)

Zadanie 3. Udowodnić, że dla każdego naturalnego  $n$  i dowolnych liczb nieujemnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  spełniona jest nierówność

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \leq \sum_{k=0}^n \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^k}{k!}.$$

(zadanie przygotowawcze z XXVI Olimpiady)

Zadanie 4. Dowieść, że jeśli  $a, b, c, d$  są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

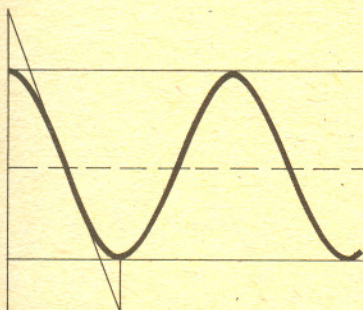
(zadanie 9 z zawodów I stopnia IX Olimpiady)

Piotr HAJŁASZ

Brzydki błąd

Pan mgr Adam Kleiner z Krakowa zwrócił nam uwagę, że w nr 12/1985 źle narysowaliśmy cień linii śrubowej.

Rzeczywiście. Linia śrubowa powstaje z obwinięcia walca trójkątem prostokątnym, a więc w cieniu daje linię będącą sinusoidą, a nie żamaną, co ilustruje rysunek.

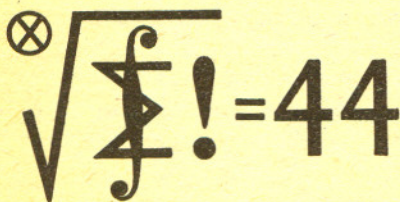


Oczywiście również zły jest cień helikoidy, bo jego brzeg jest właśnie linią śrubową.

Bardzo dziękujemy p. Kleinerowi i przepraszamy Czytelników.







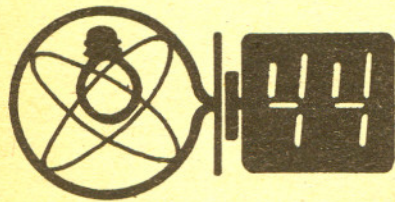
Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań 115 /WT=1,46/ i 116 /WT=2,59/

Andrzej Pawłowski	- Zabrze	45,10pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,27pkt
Marian Roman	- Bżk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia G.	38,48pkt
Dariusz Kurpiel	- Zarszyn	36,22pkt

Pan Pawłowski po raz trzeci przekracza sumę 44.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań 13 /WT=2,06/ i 14 /WT=2,99/

Piotr Bała	- Toruń	30,99pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	20,49pkt

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

## Zadania z matematyki nr 127, 128

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

127. Czy istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej zbiór mający dokładnie 6 osi symetrii?

128. Niech  $K$  będzie zbiorem punktów płaszczyzny  $(x, y)$  o współrzędnych  $x, y \in \{1, \dots, p\}$ , gdzie  $p$  jest ustaloną liczbą pierwszą,  $p \geq 3$ . Udowodnić, że w zbiorze  $K$  można znaleźć  $p$  punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych.

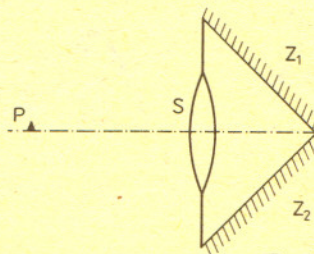
Zadanie 128 przysłał pan Jarosław Cel z Łodzi

## Zadania z fizyki nr 25, 26

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

25. Rysunek 1 przedstawia układ optyczny, w którym dwa zwierciadła płaskie  $Z_1$  i  $Z_2$ , prostopadłe do siebie, tworzą dwie ściany graniastosłupa o podstawie trójkąta równoramiennego.

W trzeciej ścianie (nieprzezroczystej) tego graniastosłupa umieszczono soczewkę skupiającą  $S$  o ogniskowej  $f$  w taki sposób, że jej oś optyczna przecina prostopadłe krawędź styku zwierciadeł, a jedno z ognisk soczewki leży na tej krawędzi. Znaleźć położenie i powiększenie wytworzonego przez ten układ obrazu małego przedmiotu  $P$ , znajdującego się w pobliżu osi optycznej soczewki w odległości  $1,5f$  od niej.



Rys. 1

26. Czy pocisk wystrzelony z powierzchni Księżyca z prędkością  $-v$ , gdzie  $v$  jest chwilową prędkością Księżyca w jego ruchu wokół Ziemi: (a) spadnie na Księżyc, (b) spadnie na Ziemię, czy też (c) wejdzie na orbitę dookoła któregoś z tych ciał (którego)? Odpowiedź uzasadnić. Niezbędne dane należy wziąć z tablic.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1985

Przypominamy treść zadań:

119. Dany ciąg liczb dodatnich  $(a_n)$ ,  $a_n < a_{n+1} + a_n^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

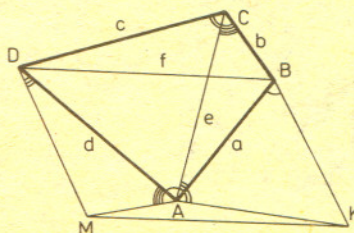
Czy szereg  $\sum a_n$  musi być rozbieżny?

120. Kolejne boki czworokąta mają długości  $a, b, c, d$ , a przekątne mają długości  $e$  i  $f$ . Suma miar kątów przeciwległych wynosi  $\omega$ . Dowieść, że  $(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos \omega = (ef)^2$ .

119. Tak. Przypuśćmy, że  $\sum a_n < \infty$ . Wówczas  $a_n \leq 1/2$  dla  $n \geq n_0$ . Niech  $c = 1/2a_{n_0}$ ;  $c \geq 1$ . Udowodnimy, że dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  zachodzi nierówność (\*)  $a_{n_0+k} \geq (2c+2k)^{-1}$ . Dla  $k = 0$  mamy równość. Załóżmy prawdziwość (\*) dla pewnego  $k$ . Funkcja  $f(x) = x - x^2$  jest rosnąca w przedziale  $[0, 1/2]$ , a zatem  $a_{n_0+k+1} \geq a_{n_0+k} - a_{n_0+k}^2 = f(a_{n_0+k}) \geq f((2c+2k)^{-1}) = (2c+2k)^{-1} - (2c+2k)^{-2}$  i dowód (indukcyjny) nierówności (\*) będzie zakończony, jeśli pokażemy, że ostatnie wyrażenie jest  $\geq (2c+2(k+1))^{-1}$ ; to zaś jest kwestią elementarnego rachunku. Z nierówności (\*) wynika rozbieżność szeregu  $\sum a_n$ , wbrew uprzedniemu przypuszczeniu.

120. Niech w czworokącie  $ABCD$  (rysunek)  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = e$ ,  $BD = f$ . Na bokach  $AB$  i  $AD$ , na zewnątrz czworokąta, zbudujmy trójkąty  $ABK$  i  $ADM$  podobne,

odpowiednio, do trójkątów  $CAD$  i  $CAB$ , tak, że  $|\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle CAD|$ ,  $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle DCA|$ ,  $|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle CAB|$ ,  $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle BCA|$ . Wówczas  $AK = ac/e$ ,  $AM = bd/e$ ,  $BK = ad/e = DM$ . Ponadto  $|\sphericalangle KBD| + |\sphericalangle BDM| = |\sphericalangle KBA| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$ , a więc czworokąt  $KBDM$  jest równoległobokiem. Zatem  $KM = BD = f$ . Miara kąta  $KAM$  (wypukłego lub wklęsłego) równa jest  $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD|$ , czyli  $\omega$  lub  $360^\circ - \omega$ . Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $KAM$  dostajemy  $KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cos \omega$ , co po podstawieniu  $AK = ac/e$ ,  $AM = bd/e$  i pomnożeniu stronami przez  $e^2$  daje teżę zadania. Uwaga. Udowodniona równość nosi nazwę twierdzenia Bretschneidera lub twierdzenia cosinusów dla czworokąta.



Przypominamy treść zadań:

17. Jednorodny, sztywny, cienki pręt o masie  $m$ , którego górny koniec jest zamocowany przegubowo w taki sposób, że może się poruszać (bez tarcia) tylko po poziomej prostej  $p$ , spoczywa swym dolnym końcem na płaskim, sztywnym, poziomym podłożu  $s$  — jak na rysunku 2. Pręt leży w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez prostą  $p$  i jest nachylony pod kątem  $\alpha$  względem podłoża. Współczynnik tarcia statycznego pręta o podłoże wynosi  $f$ . Obliczyć, z jaką siłą  $F$  skierowaną wzdłuż prostej  $p$  należy działać na górny koniec pręta, aby przesunąć go po podłożu. Odległość  $p$ - $s$  pozostaje stała, niezależnie od wartości siły  $F$ .

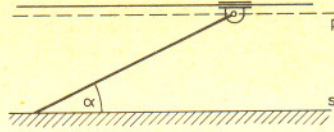
18. Przed aparatem fotograficznym nastawionym „na nieskończoność” umieszczono w odległości dwóch ogniskowych od obiektywu cienki, czarny krążek o średnicy  $D$ . Płaszczyzna krążka jest prostopadła do osi optycznej obiektywu, a jego środek leży na tej osi. Obliczyć średnice obszarów na błonie fotograficznej, które po wykonaniu zdjęcia będą (a) całkowicie i (b) częściowo zakryte przez obraz krążka. Średnica otworu obiektywu wynosi  $d < D$ . Obiektyw traktujemy jako soczewkę cienką, a dyfrakcję zaniedbujemy.

17. W celu przesunięcia pręta po podłożu trzeba pokonać siłę tarcia, równą  $T = fN$ , gdzie  $T$  — maksymalna wartość siły tarcia statycznego,  $N$  — siła nacisku pręta na podłoże. Musi więc zachodzić  $F = T$ . W przypadku, gdy siła  $F$  „popycha” pręt (rys. 3a), mamy  $N = mg/2 + F \operatorname{tg} \alpha$  i z powyższych związków

$$\text{otrzymujemy } F = \frac{fmg}{2(1 - f \operatorname{tg} \alpha)}$$

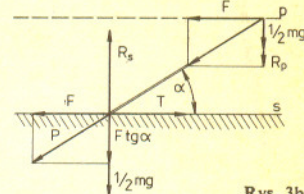
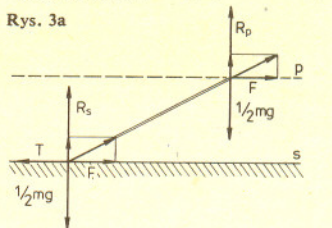
Przesunięcie pręta jest możliwe tylko przy spełnionym warunku  $f \operatorname{tg} \alpha < 1$ , w przeciwnym razie następuje „zaklinowanie” pręta. W przypadku ciągnięcia pręta przez siłę  $F$  (rys. 3b) siła nacisku jest równa  $N = mg/2 - F \operatorname{tg} \alpha$  i w konsekwencji

$$F = \frac{fmg}{2(1 + f \operatorname{tg} \alpha)}$$

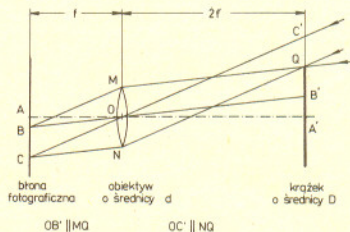


Rys. 2

Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 4

18. Jak widać z rysunku 4, do punktów położonych na odcinku  $AB$  promienie świetlne spoza krążka nie docierają w ogóle (cień całkowity), do punktów położonych na odcinku  $BC$  docierają promienie przechodzące tylko przez część soczewki (półcień). Cień krążka obejmuje więc obszar koła o promieniu  $r = AB$ , półcień — obszar pierścienia o promieniach  $R = AC$  i  $r = AB$ . Z prostych rozważań geometrycznych wyznaczamy obie średnice:  $2r = (D - d)/2$  oraz  $2R = (D + d)/2$ .

## Jak obserwować plamy słoneczne?

Beata GAŁECKA

Autorka jest uczennicą III klasy XIX Liceum Ogólnokształcącego im. Powstańców Warszawy w Warszawie.

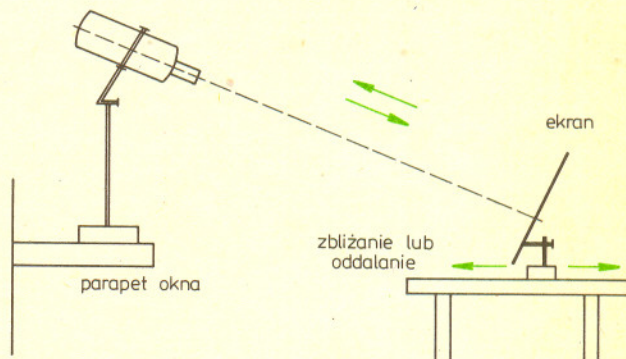
Jak wiadomo z przekazów historycznych i obserwacji współczesnych, plamy na Słońcu można dostrzec nawet gołym okiem. Jednak tak sprzyjające okoliczności zdarzają się nieczęsto.

W szkole do obserwowania plam słonecznych używamy lunetki o ogniskowej obiektywu  $f_{ob} \approx 22$  cm, okularu —  $f_{ok} \approx 2,2$  cm, czyli o powiększeniu około 10 razy. Średnica obiektywu lunetki wynosi 45 mm.

Lunetkę zamocowaną na stelażu z prętów laboratoryjnych ustawiamy w oknie i kierujemy na Słońce. Salę zaciemniamy zasłonami laboratoryjnymi. Można dodatkowo zaciemnić miejsca wokół lunetki, przez które przenika światło, zasłoną z ciemnego materiału, kocem itp.

Obraz Słońca rzucamy na ekran ustawiony prostopadłe do osi lunety, w niewielkiej odległości od okularu. Ekranem może być arkusz gładkiego, białego papieru nałożony na sztywną tekturę lub sklejkę. Ostrość obrazu uzyskujemy przez obrót okularu o pewien kąt, a także przez zbliżenie lub oddalenie ekranu od okularu lunetki. W moich obserwacjach, przeprowadzanych wielokrotnie, przyjęłam, że ekran będzie ustawiony w takiej odległości od okularu, aby średnica tarczy słonecznej na ekranie wynosiła 10 cm. Jeżeli w dniu obserwacji na powierzchni Słońca są plamy, to na ekranie są widoczne w pobliżu pasa równikowego Słońca jako ciemne plamki o różnych kształtach. Można również przeprowadzić obliczenia wielkości plam.

Jeśli na przykład zaobserwowaliśmy plamę o rozmiarze 0,4 cm, a średnica obrazu Słońca wynosiła 10 cm, to na rozmiar plamy otrzymujemy  $\frac{0,4}{10} \cdot \text{średnica Słońca} (= 1,4 \cdot 10^6 \text{ km})$ , czyli 56 000 km.



Uwaga: przez lunetkę nie wolno patrzeć na Słońce, grozi oślepienie!

Rozmiar plamki na ekranie zależy od jakości użytego sprzętu optycznego. W wyniku różnych deformacji obraz może być rozmyty i wtedy podobne rachunki prowadzą do zawyżenia rozmiarów plamy. Otrzymany wynik można sprawdzić: otóż plamy słoneczne o średnicy większej niż 38 000 km są doskonale widoczne gołym okiem (należy uważać, aby nie narazić oka na oślnienie).

Serdecznie zachęcam do obserwacji, a tych, którzy chcą się dowiedzieć czegoś o plamach słonecznych, odsyłam do książki: H. Newton, *Oblicze Słońca*, PWN, Warszawa 1961.

Oprócz pomiarów wielkości plam możecie spróbować zaobserwować zmiany położenia plam na powierzchni Słońca. Obserwując plamy słoneczne przez kilkanaście dni zauważycie, że niektóre z nich znikają w pobliżu brzegu tarczy, a po przeciwnej stronie pojawiają się nowe. Spróbujcie co dwa, trzy dni rysować położenia plam na tarczy Słońca. Po około dwóch tygodniach obserwacji zauważycie, że grupy plam przesuwały się w podobny sposób. Jest to spowodowane przede wszystkim obrotem Słońca — plamy poruszają się wzdłuż równoleżników na Słońcu — możecie w ten sposób wyznaczyć okres obrotu i położenie osi obrotu Słońca. Kierunek poruszania się plam po powierzchni Słońca zależy od pory roku. Dzieje się tak dlatego, że oś obrotu Słońca jest nachylona do orbity Ziemi, zatem w miarę przesuwania się Ziemi po orbicie widzimy obracającą się tarczę Słońca pod różnymi kątami. Spróbujcie określić, jak zmienia się położenie osi obrotu Słońca w kolejnych porach roku.