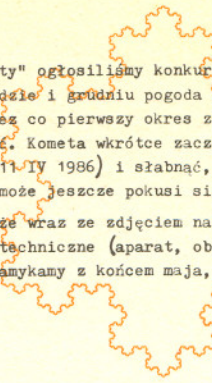


W numerze 11/1985 "Deltę" ogłosiliśmy konkurs na zdjęcie komety Halleya. Jak wiadomo, w listopadzie i grudniu pogoda wybitnie nie sprzyjała obserwacjom nieba, przez co pierwszy okres zbliżenia komety do Ziemi trudno było wykorzystać. Kometa wkrótce zacznie się oddalać (drugie zbliżenie do Ziemi będzie miała 11-IV 1986) i szabnąć, ale może nie należy jeszcze tracić nadziei i ktoś może jeszcze pokusi się o uwiecznienie jej obrazu. Chętnym przypominamy, że wraz ze zdjęciem należy podać imię, nazwisko i adres, datę zdjęcia, warunki techniczne (aparatus, obiektyw, film, krótki opis całego urządzenia). Konkurs zamykamy z końcem maja, a nagrodą za najlepsze zdjęcie będzie lornetka.

Życzymy powodzenia.



SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (146)

Zoo na płaszczyźnie <i>doc. dr Feliks Przytycki</i>	str. 1
O Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki	str. 7
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Centrum Galaktyki <i>mgr Monika Balucińska</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 12
Kąć olimpijski	str. 13
Jak wyprodukować najcięższe pierwiastki? <i>mgr Marek Pfüzner</i>	str. 14
Klub 44	str. 16

W następnym numerze: Zwłżanie

Uwaga!

Poprzednie numery "Deltę" można osobiście lub listownie nabywać w Redakcji w cenie 35 zł za egzemplarz.

Dysponujemy takimi numerami nie wcześniej niż w 3 miesiące po ich ukazaniu się.

W przypadku zakupu listownego należy nadesłać do Redakcji 35 zł razy liczba zakupowanych egzemplarzy plus znaczki pocztowe na sumę 15 zł bądź 20 zł na koszt przesyłki.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

WARUNKI PRUNEMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półroczje roku następnego oraz cały rok następnego,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Sprzedaz numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.
Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
mgr Ewa Rylłowa
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Kładow 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1130/12/85. P-28.

W artykule o fraktalach rysunek 10 pochodzi z pracy P. Blancharda, rysunek 23 z artykułu Peitgena, rysunki zaś 24, 25, 26 nadesłał dla *Delty* J. Curry. Pozostałe rysunki komputerowe wykonała na Merze 400 Teresa Przytycka. Fotografia na okładce pochodzi ze zbioru J. Hubbarda, który stworzył kilka serii diapozytywów przedstawiających powiększenia pewnych fragmentów żuka Mandelbrota.

Doc. dr Feliks PRZYTICKI

W ostatnich latach fascynację uczonych pracujących na pograniczu matematyki i fizyki wzbudziły niezwykle obiekty: fraktale. Najprostsze z nich znane były od kilkudziesięciu lat, ale dopiero teraz, dzięki użyciu dużych komputerów zaczęto otrzymywać ogromne kolekcje tych „zwierząt”. Przyciąga ich piękno, powszechność występowania i znaczenie w wyjaśnianiu zjawisk przyrody. W tym artykule opowiem, jaki związek mają fraktale z iterowaniem wielomianów i z poprawnością metody Newtona szukania pierwiastków.

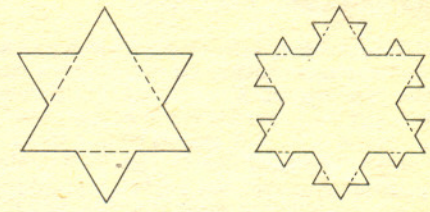
W 1904 roku Helge von Koch opisał konstrukcję dziwnego zbioru, tak zwanego **płatka śniegu**. Do boków trójkąta równobocznego przyklejmy z zewnątrz trójkąty podobne, trzy razy mniejsze. Do każdego odcinka brzegu otrzymanej gwiazdy znowu przyklejmy trójkąt trzy razy mniejszy i tak dalej. Brzeg K otrzymanego w ten sposób płatka śniegu jest topologicznie okręgiem, to znaczy istnieje ciągle, wzajemnie jednoznaczne przekształcenie φ okręgu S^1 na K . Jest dziwnym okręgiem, w żadnym swoim punkcie nie ma wektora stycznego (to znaczy φ nie jest różniczkowalne). Co ciekawsze, wymiar Hausdorffa $HD(K) = \log 4 / \log 3 \approx 1,2618$. (To widać z definicji podanej obok. Dla każdej liczby naturalnej n można K pokryć 4^n kołami o promieniu $\varepsilon_n = 3^{-n}$.) Tymczasem każda porządna krzywa ma wymiar (w każdym sensie) równy 1. Niezwykłą własnością K jest **samopodobieństwo**, dowolnie małe kawałki mają podobny kształt do dużych! W 1905 roku włoski matematyk Ernesto Cesàro zachwycony „wewnętrzzną nieskończonością” krzywej Kocha napisał tak: „Gdyby była obdarzona życiem, można by się jej pozbyć tylko niszcząc ją w całości. Inaczej odżywałaby znowu i znowu z głębi swoich trójkątów, jak to czyni życie we Wszechświecie”.

Przez wiele późniejszych lat matematycy konstruowali podobnie osobliwe kształty i oswajali się z nimi, aż wreszcie Benoit Mandelbrot, matematyk z USA, stworzył dla nazwania takich kształtów słowo **fractal** (od łacińskiego słowa *fractus* — złamany, składający się z kawałków). Ogłosił, że fraktale występują powszechnie i że taka jest właśnie geometryczna struktura przyrody. Na fraktale można natrafić w bardzo prostych sytuacjach. Wystarczy np. iterować wielomian $z^2 + c$ na płaszczyźnie zespolonej, a kształty, które się pojawiają, są naprawdę niezwykle. Wydawałoby się nic prostszego jak pojedynczy wielomian stopnia 2. Tymczasem komputery rysują przedziwne „zwierzęta”, a skomplikowany aparat XX-wiecznej matematyki pozwala je zrozumieć tylko powierzchownie.

Iteracje wielomianów $z^2 + c$.

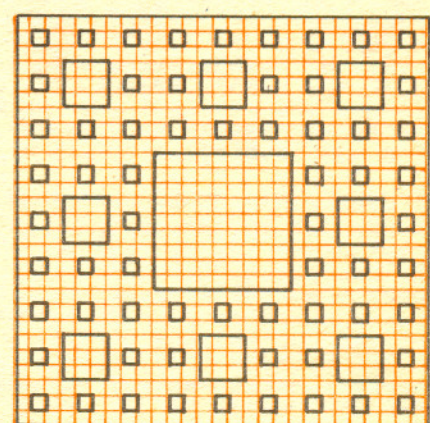
Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej $f_c(z) = z^2 + c$. Ciąg punktów z_n w płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} , określony wzorem $z_{n+1} = f_c(z_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ nazywa się **trajektoria** (w przód) dla z_0 przy działaniu f_c . Jest to ciąg wartości kolejnych iteracji f_c (złożenia wielomianu f_c z samym sobą) w punkcie z_0 , to znaczy $z_0, f_c(z_0), f_c \circ f_c(z_0), \dots$. Będziemy dalej pisać $f_c^n = f_c \circ f_c \circ \dots \circ f_c$ (n razy). (Oblicz, Czytelniku, kilka pierwszych iteracji, a zobaczysz, jakże pojawiają się wielomiany stopnia 2, 4, 8, To już nie jest tylko badanie „trywialnego” wielomianu stopnia 2.) Czy trajektoria jest zbieżna? Jeśli nie, to jaki jest zbiór punktów, do których podchodzi dowolnie blisko? Jak będzie zmieniać się odpowiedź na te pytania przy zmianach punktu początkowego z_0 ? A jak przy zmianach parametru c ? Takie pytania nazywa się pytaniami o **dynamikę** f_c . Jeśli przy zmianie parametru c w pewnym momencie następuje wyraźna zmiana dynamiki, to mówimy, że następuje **bifurkacja**.

Rys. 1. Tak powstaje płatek śniegu.



Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ oznaczmy symbolem $N_\varepsilon(L)$ minimalną liczbę kół o promieniu ε , którymi można pokryć zbiór L . Pojemność zbioru L to następująca liczba: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf (\log N_\varepsilon(L)) / (-\log \varepsilon)$.

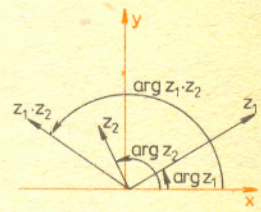
Definicja wymiaru Hausdorffa jest nieco inna, ale jeśli zbiór L jest samopodobny, to pojemność i wymiar Hausdorffa są takie same. (Zajrzyj do artykułu „Ułamkowy wymiar” w *Delcie* 2/1985).



Rys. 2. Ten „dywan Sierpińskiego” jest także fraktalem. Jego wymiar Hausdorffa jest równy $\log 8 / \log 3$.

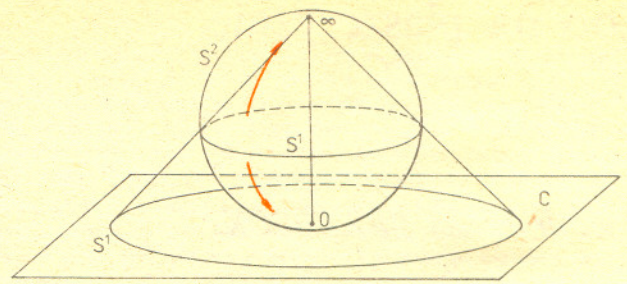
Mandelbrot napisał piękną książkę pod tytułem „The Fractal Geometry of Nature” wydaną w 1982 roku w USA.

Płaszczyzna zespolona \mathbb{C} to zwykła płaszczyzna, w której wprowadzamy działania dodawania i mnożenia. Każdy punkt A płaszczyzny utożsamiamy z wektorem \vec{OA} . Punkty płaszczyzny (liczby zespolone) dodajemy tak jak odpowiadające im wektory. Każdy punkt (wektor) $z = (x, y)$ ma moduł $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (czyli po prostu długość wektora) i argument $Arg(z)$ — kąt, jaki tworzy ten wektor z osią x (rys. 3). Iloczyn liczb z_1 i z_2 to liczba, której argument jest równy sumie argumentów z_1 i z_2 ($\text{mod } 2\pi$), a moduł jest iloczynem modułów. Oś x jest nazywana osią rzeczywistą, a punkt $(0, 1)$ oznaczamy literą i . Dla punktu $z = (x, y)$ oznacza się $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$. Zauważ, Czytelniku, że $z = \text{Re } z + i \text{Im } z$. Zauważ też, że $i^2 = i \cdot i = -1$, i jest więc pierwiastkiem równania $z^2 = -1$. Można więc napisać $i = \sqrt{-1}$. Liczbę o module r i argumentcie a oznacza się przez re^{ia} .



Rys. 3

Przeanalizujmy przykład $c = 0$, to znaczy wielomian $f(z) = z^2$. Zbadajmy go na $C \cup \{\infty\}$ (na płaszczyźnie zespolonej z dołączonym punktem w nieskończoności), czyli na dwuwymiarowej sferze S^2 . Istnieją dwa punkty stałe, przyciągające (tak zwane ścieki): 0 i ∞ . Zbiór punktów, których trajektorie są zbieżne do 0 (taki zbiór nazywamy basenem przyciągania), to koło $\{z: |z| < 1\}$. Basenem przyciągania punktu ∞ jest zbiór $\{z: |z| > 1\}$. Oba baseny rozdziela okrąg S^1 . Ten okrąg dla przekształcenia z^2 ma przedziwne własności: zbiór punktów okresowych, które są źródłami, jest w nim gęsty (to znaczy każdy punkt $z \in S^1$ jest granicą pewnego ciągu źródeł). Trajektorija (w przód) dla prawie każdego punktu okręgu S^1 jest w S^1 gęsta. Okrąg S^1 pełni jakby rolę dużego źródła, wewnątrz którego jest chaos. (Zajrzyj do artykułu „Chaos na odcinku” Delta 7/1984.)



Rys. 4. $C \cup \{\infty\} = S^2$. Strzałki pokazują dynamikę przekształcenia $z \mapsto z^2$.

Na początku XX wieku dwaj matematycy francuscy Gaston Julia i Pierre Fatou stworzyli, niezależnie od siebie, ogólną teorię iteracji funkcji wymiernych na S^2 , to znaczy funkcji postaci $f(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) / (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0)$, (gdzie $a_j, b_j \in C, a_n \neq 0, b_m \neq 0$) stopnia co najmniej 2. Stopień to $\max(n, m)$ przy założeniu, że ułamek f jest nieskracalny. (Trajektorie punktów dla f stopnia 1 wyglądają dosyć prosto. Jak?) Podstawowym pojęciem tej teorii jest **zbiór Julii** $J(f)$. Można go zdefiniować jako **domknięcie** zbioru wszystkich źródeł. Oto niektóre jego własności:

$J(f)$ jest domknięty w S^2 . Zbiór $J(f)$ jest **f-nieziemniczy**, to znaczy $J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$. Albo $J(f) = S^2$ (to się jednak rzadko zdarza, a nigdy dla wielomianów), albo $J(f)$ jest zbiorem **brzegowym**, to znaczy nie zawiera żadnego koła. Z drugiej strony $J(f)$ jest w sobie gęsty, to znaczy każdy jego punkt jest granicą ciągu innych jego punktów (w szczególności $J(f)$ jest nieprzeliczalny). Ponadto $J(f) = J(f^n)$.

Już chyba zauważyłeś Czytelniku, że dla $f(z) = z^2$ zbiór $J(f)$ to okrąg S^1 . Niech teraz parametr c będzie bliski 0, ale $c \neq 0$. Można udowodnić, że wtedy zbiór Julii jest topologicznie okręgiem, podobnie jak przy $c = 0$, a przy tym ma strukturę fraktala, jego wymiar Hausdorffa jest większy niż 1 (rys. 5). Zbiór $S^2 \setminus J(f_c)$ składa się z dwóch składowych — basenów przyciągania ścieku ∞ i ścieku bliskiego 0 (spełniającego równanie $z^2 + c = z$). A co się dzieje, kiedy c nie jest bliskie 0? Zanim odpowiemy na to pytanie, wróćmy jeszcze do ogólnej teorii.

Omówmy teraz klasyfikację i wygląd składowych zbioru $S^2 \setminus J(f)$. Zbiór Julii dla funkcji wymiernej f jest niezmienniczy, więc obraz dowolnej składowej zbioru $S^2 \setminus J(f)$ przy działaniu f jest też jego składową, a przeciwobraz sumą kilku składowych (nie więcej niż stopień f). Dopiero całkiem niedawno amerykański matematyk Dennis Sullivan udowodnił, że istnieje najwyższa skończona liczba składowych okresowych, to znaczy takich, że $f^N(A) = A$ dla pewnej liczby $N > 0$. Każda inna składowa po jakimś czasie przechodzi w składową okresową. Inaczej mówiąc, żadna składowa nie błądzi.

Typy dynamiki na składowych okresowych, $f^N(A) = A$, zostały również sklasyfikowane, podzielone na 4 klasy:

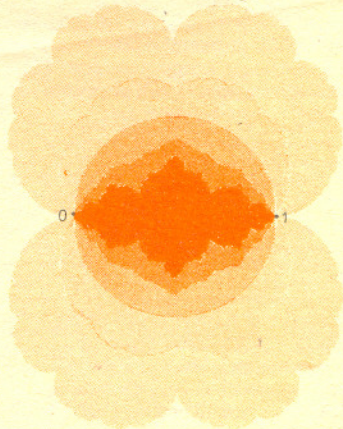
a. Składowa A jest przyciągana przez iteracje przekształcenia $g = f^N$ do pewnego ścieku $a \in A$ będącego punktem stałym przekształcenia g . (Basen przyciągania dla f -trajektorii okresowego punktu a , czyli zbiór punktów, których f -trajektorie są zbieżne do zbioru $\{a, f(a), \dots, f^{N-1}(a)\}$, może nie być spójny. Może zawierać nawet nieskończenie wiele składowych, które nie są okresowe i dopiero po jakimś czasie zaczynają „chodzić” okresowo. Składowa A basenu przyciągania, zawierająca punkt a , nazywa się **basenem bezpośredniego przyciągania**.)

b. Składowa A jest basenem bezpośredniego przyciągania pewnego punktu **neutralnego** wymiernego a należącego do brzegu zbioru A . (Mówimy, że a jest punktem **neutralnym**, jeśli $|g'(a)| = 1$ i **neutralnym** wymiernym, jeśli $g'(a)$ jest pierwiastkiem z 1, to znaczy $(g'(a))^k = 1$ dla pewnej liczby naturalnej k . Liczba k będzie dalej oznaczać najmniejszą liczbę naturalną o tej własności.) W otoczeniu punktu a dynamika iteracji przekształcenia g^k wygląda podobnie jak iteracji przekształcenia $h(z) = z(1+z^k)$ dla pewnej liczby naturalnej s . Kierunki, w których poruszają się punkty przy działaniu iteracjami przekształcenia g^k (lub h), są na rysunku 6 przedstawione strzałkami. Punkt a przyciąga bezpośrednio $s \cdot k$ basenów $A_1, \dots, A_{s \cdot k}$, których suma nazywa się **kwiatkiem**. A_i nazywają się **płatkami**. Przekształcenie g permutuje te płatki. Mamy s cykli, każdy długości k .

Punkt stały w dla f to taki punkt, że $f(w) = w$. Punkt okresowy w o okresie n (to znaczy stały dla przekształcenia $g = f^n$) nazywa się **ściekiem**, jeśli moduł pochodnej $|g'(w)| < 1$, a **źródłem**, jeśli $|g'(w)| > 1$. (Pochodną w sensie zespolonym definiuje się podobnie jak pochodną dla funkcji rzeczywistych $h'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{\Delta z}$. Reguły przydatne

przy jej obliczaniu (pochodna sumy, iloczynu, ilorazu, złożenia) okazują się takie same.) Zauważ, Czytelniku, że przekształcenie $g = f^n$ w małym otoczeniu ścieku w zmniejsza odległości. Stąd wynika, że trajektorija każdego punktu z ustalonego, dostatecznie małego otoczenia ścieku jest zbieżna do trajektorii tego ścieku. Dla źródła odwrotnie, odległości się zwiększają, więc każda trajektorija, poza trajektoriją samego źródła, musi wyjść z takiego otoczenia.

Dla dowolnego zbioru A w S^2 zdefiniujmy brzeg jako zbiór takich punktów $z \in S^2$, że każde koło (w S^2 w metryce sferycznej) o środku w punkcie z przecina zarówno zbiór A , jak i jego uzupełnienie. Zbiór w S^2 nazywa się **domknięty**, jeśli zawiera swój brzeg, a **otwarty**, jeśli jest ze swoim brzegiem rozłączny. Domknięcie zbioru to jego suma z brzegiem, wewnątrz to zbiór minus jego brzeg. (Ćwiczenie: udowodnij, że domknięcie zbioru A w S^2 to zbiór wszystkich punktów w S^2 , do których są zbieżne ciągi punktów z A .)



Rys. 5. Brzegi pięciu obszarów od jasnoszarego do czarnego to zbiory Julii dla wielomianów $\lambda z(1-z)$ przy λ odpowiednio 1, $3/2$, 2, $5/2$, $29/10$. Te wszystkie zbiory Julii są topologicznie okręgami. (Dalej znajdziesz komentarz, dlaczego wszystko jedno, czy rozpatrywać wielomiany takiej postaci, czy $z^2 + c$. Podanym wyżej parametrom λ odpowiadają parametry $c = 1/4, 3/16, 0, -5/16, -261/400$.)

Zbiór otwarty $A \subset S^2$ nazywa się **spójny**, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć łamaną leżącą w A . Dowolny zbiór otwarty $A \subset S^2$ można przedstawić w postaci sumy ciągu rozłącznych zbiorów otwartych i spójnych. Te zbiory nazywają się **składowymi** zbioru A .

c. Składowa A jest dyskiem Siegela. To znaczy, że A jest topologicznie kołem i istnieje na nim taki układ współrzędnych, w którym przekształcenie $g = f^N$ jest obrotem wokół pewnego punktu $a \in A$ stałego dla g , neutralnego, wymiernego; $g(z) = g'(a) \cdot z$.

d. Składowa A jest topologicznie pierścieniem, a g na nim jest obrotem, znowu o kąt niewspółmierny z π . (To się jednak nie może zdarzyć dla wielomianów.)

Okazuje się, że w każdym basenie przyciągania musi być jakiś punkt krytyczny, to znaczy taki, że $f'(b) = 0$. Okazuje się też, że w brzegu każdego dysku Siegela (lub pierścienia) suma trajektorii wszystkich punktów krytycznych dla f musi być gęsta (nie wiadomo, czy bezpośrednio w brzegu musi być jakikolwiek punkt krytyczny!). A więc do obsługi każdej okresowej składowej zbioru $S^2 \setminus J(f)$ potrzebny jest jakiś punkt krytyczny.

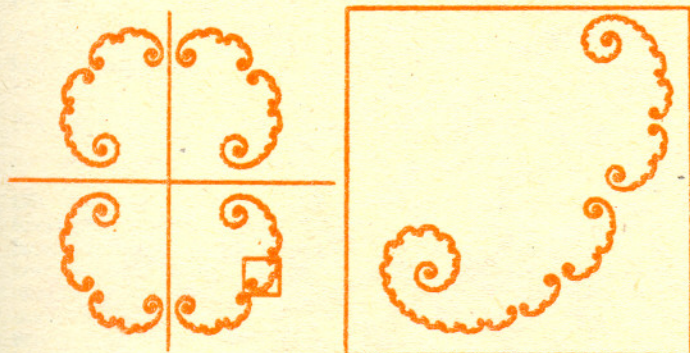
Zajmijmy się znowu wielomianami $f_c(z) = z^2 + c$. Punkt 0 jest oczywiście dla każdego wielomianu f_c punktem krytycznym. $c = f_c(0)$ jest wartością krytyczną (czyli obrazem punktu krytycznego). Jest jeszcze drugi punkt krytyczny: ∞ (więcej punktów krytycznych nie ma, dla dowolnej funkcji wymiernej f jest najwyżej $2 \cdot (\text{stopień } f) - 2$ punktów krytycznych). Punkt ∞ jest zarazem punktem stałym i ściekiem. Oznaczmy przez A_c jego basen przyciągania. Okazuje się, że jest to zarazem basen bezpośredniego przyciągania i że $J(f_c)$ jest jego brzegiem.

„Zwierzaki” na rysunkach 5, 7, 10, 15–21 przedstawiają zbiory $Z_c = S^2 \setminus A_c$ dla różnych parametrów c . Zauważ, że $Z_c = \{z \in \mathbb{C}; \text{ciąg } f_c^n(z) \text{ jest ograniczony}\}$. Zbiór Julii to brzeg „zwierza”.

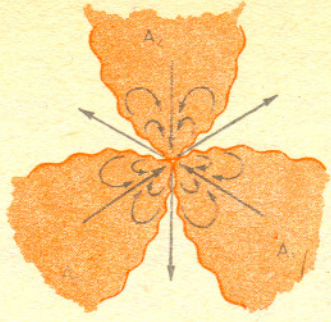
Wśród wielomianów $f_c(z) = z^2 + c$, inaczej mówiąc wśród parametrów c , szczególnie jest zbiór zwany zbiorem Mandelbrota $M = \{c \in \mathbb{C}; \text{ciąg } f_c^n(0) \text{ jest ograniczony}\}$

(spójrz na rysunek 11). Jeśli $c \notin M$, to oba punkty krytyczne 0 i ∞ należą do basenu A_c , „Zwierz” nie ma więc wnętrza — brak byłoby punktów krytycznych do jego obsługi. Tak naprawdę to dla $c \notin M$ „zwierzaków” w ogóle nie ma, jest pył. Wytłumacz zaraz dlaczego.

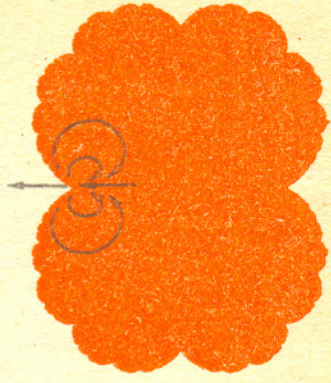
Zbiór A_c można zbudować biorąc pewne otoczenie B punktu ∞ , na przykład $\{z: |z| > R\}$ dla dużej liczby R . Potem trzeba dodać pierścien (w topologicznym sensie) $B_1 = f_c^{-1}(B) \setminus B$, następnie $B_2 = f_c^{-1}(B_1)$, $B_3 = f_c^{-1}(B_2)$ itd. Jeśli i jest pierwszym indeksem takim, że $c \in B_i$, to B_i zawiera wartość krytyczną. Wtedy B_{i+1} przypomina oprawkę okularów (spójrz na rysunek 9). Oznaczmy szkła tych okularów (topologicznie koła) przez $L_j^{(i+1)}$, $L_j^{(i+1)}$. Niech $f_c|_{L_j^{(i+1)}}$ oznacza przekształcenie f_c obcięte do $L_j^{(i+1)}$, $j = 1, 2$. Wtedy $(f_c|_{L_j^{(i+1)}})^{-1}(B_{i+1})$ to znowu okulary, ale mniejsze. W uzupełnieniu mamy 4 szkielek dwóch par okularów $L_j^{(i+2)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Następnie tworzymy 8 szkielek $L_j^{(i+3)}$ i tak dalej. Można udowodnić, że średnice tych szkielek $L_j^{(s)}$ dążą do 0 przy $s \rightarrow \infty$. Zbiór Julii składa się z punktów widocznych przez dowolnie małe okulary. Ten zbiór jest zbiorem Cantora. To rzeczywiście pył. Okazuje się, że A_c ma nieskończenie wiele (nawet nieprzeliczalnie wiele) dziur. Przy okazji trudno nie zauważyć samopodobieństwa $J(f_c)$.



Rys. 10. Baranki. Zbiór Julii dla $z^2 + 3/10$ (na drugim obrazku pokazany jest powiększony mały kwadracik z pierwszego obrazka). Dla $z^2 + 1/4$ zbiór Julii był brzegiem muszli (rys. 7), teraz muszla się rozspalała.

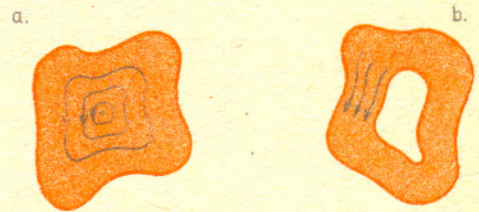


Rys. 6. Kwiatek.



Rys. 7. Muszla. Dla wielomianu $z(1-z)$ kwiatek w punkcie neutralnym ma tylko jeden płatek.

Istnieje piękny związek dynamiki przekształcenia f wokół neutralnego punktu okresowego (o okresie N) z teorią liczb. Okazuje się, że jeśli liczba $\lambda = (f^N)'(a)$ spełnia dla pewnej stałej $C > 0$, pewnej liczby naturalnej n i dla każdego ułamka p/q nierówności: $|\text{Arg}(\lambda) - 2\pi p/q| > C/q^n$, to a ma swój dysk Siegela, wewnątrz którego leży. Ten warunek oznacza intuicyjnie, że $\text{Arg}(\lambda)$ wolno aproksymuje się liczbami wymiernymi. Okazuje się, że prawie wszystkie liczby z S^1 mają tę własność.



Rys. 8 a) dysk Siegela, b) pierścien (istnienie takich pierścieni dla pewnych przekształceń wymiernych udowodnił dopiero kilka lat temu matematyk francuski Michel Herman).

Punkt ∞ bada się zmieniając układ współrzędnych na S^2 tak, aby punkt ∞ przeszedł na punkt 0. Na przykład przekształceniem $h(z) = \frac{1}{z}$. Wtedy

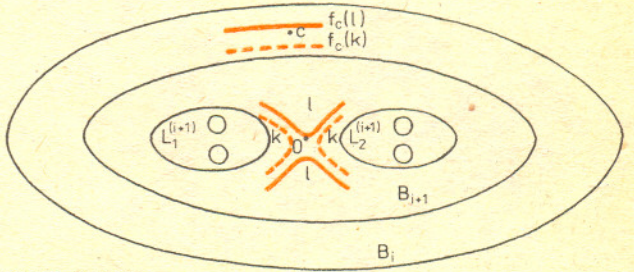
$$g_c(z) = h \circ f_c \circ h^{-1}(z) = \frac{1}{z^2 + c} = \frac{z^2}{1 + cz^2}, \quad g'_c(z) = \frac{2z + 2cz^3 - 2cz^3}{(1 + cz^2)^2} = \frac{2z}{(1 + cz^2)^2}$$

Rzeczywiście otrzymujemy $g_c(0) = g'_c(0) = 0$.

Każdy wielomian stopnia 2 po odpowiedniej zmianie układu współrzędnych na \mathbb{C} (przekształceniem postaci $az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$) przybiera postać $z^2 + c$. Trzeba po prostu przesunięciem przeprowadzić punkt krytyczny (różny od ∞) na 0 i potem zmienić jednostkę w układzie współrzędnych, żeby uzyskać współczynnik przy z^2 równy 1. Parametr c jest wyznaczony jednoznacznie (pomyśl, dlaczego). Rodzina $z^2 + c$ jest więc w pewnym sensie uniwersalna.

Wielomian stopnia 2 możemy także znormalizować przeprowadzając przesunięciem jeden z dwóch punktów stałych na 0. Mnożąc potem współrzędne przez odpowiednią stałą otrzymujemy wielomian postaci $z^2 + \lambda z$ lub postaci $\lambda z(1-z)$ (jeśli chcemy, żeby przeciwobraz punktu stałego 0, różny od niego samego, był równy 1). Dla wielu rozważań takie rodziny są lepsze. Z drugiej strony parametr λ nie jest wyznaczony jednoznacznie, bo istnieje dowolność wyboru, który z dwóch punktów stałych przeprowadzić na 0. Wielomian $z^2 + \lambda z$ można przemienić na $z^2 + (2-\lambda)z$.

Zauważ, że jeśli ciąg $(f_c^n(0))$ nie jest ograniczony, to $f_c^n(0) \rightarrow \infty$.



Rys. 9. Okulary.

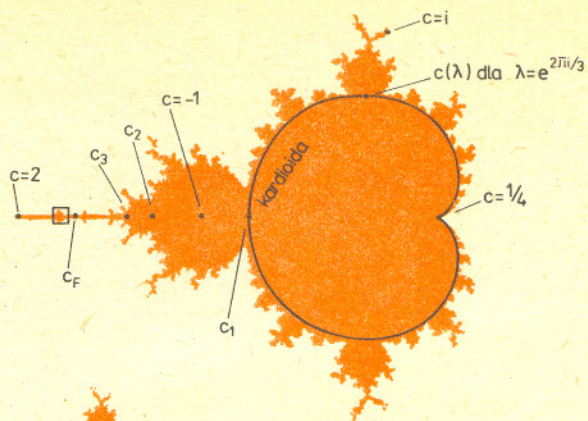
Zajmijemy się teraz kształtem „żuka” Mandelbrota, M (spójrz na rysunek 11). Do tułowia przyklejone są plamy różnej wielkości, do nich mniejsze plamki itd. Ale to jeszcze nie wszystko, bo dookoła widać sporo czarnych kropek. To nie jest brud, te kropki także należą do zbioru M . Są nawet połączone z główną częścią „żuka”, ale połączenia są tak cienkie, że nie widać ich na obrazkach z komputera. Można jednak wykonać eksperyment pokazujący nie tylko czarny ład M , ale także podmorskie, kolorowe grzbiety i skały (długi czas ucieczki punktu 0 do ∞ przy działaniu iteracjami f_c). Widać to na powiększeniu fragmentu „żuka” — patrz okładka. Zbiór M jest spójny, nie ma dziur i jest domknięty. Najciekawsze jest, że wydaje się mieć, podobnie jak zbiory Julii, własność samopodobieństwa. Czarne kropki w powiększeniu okazują się być drugorzędnymi „żukami” o kształcie podobnym do M . Zbiór $S^2 \setminus M$ ma mnóstwo fiordów wchodzących w M . Nie wiadomo, czy każdy punkt c z brzegu M jest osiągalny z $S^2 \setminus M$, to znaczy czy istnieje ciągła krzywa $\gamma \subset S^2 \setminus M$ zbieżna do punktu c .

Przypomnijmy, że dla przekształcenia f_c przy $c = 0$ punkt 0 jest punktem stałym, ściekiem. Kiedy c zmienia się, ten punkt stały przesuwa się (spełnia on równanie $z^2 + c = z$). Oznaczmy go z_c . Interesujemy się takimi parametrami c , dla których z_c przestaje być ściekiem. Zauważ, że $f'_c(z) = 2z$, czyli $|f'_c(z_c)| = 1$, gdy $|z_c| = \frac{1}{2}$. Ponieważ $c = z_c - z_c^2$, więc interesujące nas

$$\text{parametry } c = c(\lambda) \text{ układają się na krzywej } c(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

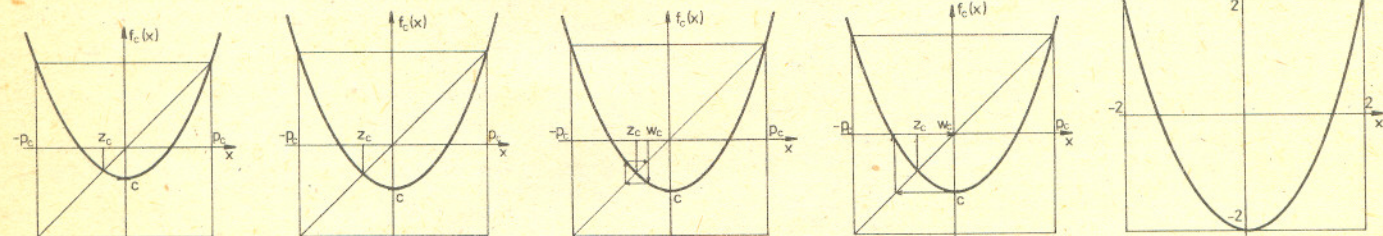
gdzie λ przebiega okrąg $\{\lambda: |\lambda| = 1\}$. Tę krzywą, która jest brzegiem tułowia „żuka”, nazywa się kardioidą. Jeśli bierzemy c wewnątrz tułowia, to zbiór Julii jest topologicznie okręgiem. A co się stanie, gdy c przekroczy kardioidę?

Zróbmy wycieczkę parametrem c wzdłuż osi rzeczywistej w \mathbb{C} . Jeśli od $c = 0$ idziemy w kierunku dodatnim, to dla $c = 1/4$ przekraczamy kardioidę. Zbiór Julii jest wtedy brzegiem „muszli” (rys. 7), a potem rozsypuje się w „baranki” (rys. 10). Pójdźmy teraz od 0 w kierunku ujemnym. Przekształcenie f_c przeprowadza liczby rzeczywiste w liczby rzeczywiste. Łatwo więc rysować wykresy, spójrz na rysunek 13.



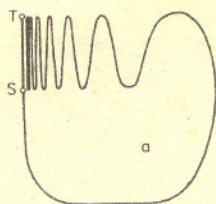
Rys. 11. Zbiór Mandelbrota. W małym kwadraciku jest drugorzędny żuczek.

Celowo oznaczyłem pochodną w punkcie stałym symbolem λ , to jest przecież pochodną w punkcie stałym 0 dla przekształceń $\lambda z(1-z) + z^2 + \lambda z$. A więc po odpowiedniej zmianie współrzędnych na \mathbb{C} z tych przekształceń robi się $z^2 + c(\lambda)$. Mamy wzór na $c(\lambda)$! Sprawdź, że $c(\lambda) = c(2-\lambda)$. Tułowiu żuka odpowiada w zbiorze parametrów λ suma dwóch kół o promieniu 1: K_1 o środku w 0 i K_2 o środku w punkcie 2. Przy rozpatrywaniu rodziny $z^2 + \lambda z$ robi się zazwyczaj wycieczki parametrem λ zaczynając z K_1 — ściek jest umieszczony w 0. Przy rozpatrywaniu rodziny $\lambda z(1-z)$ zaczyna się wędrówki z K_2 . Wtedy 0 na stałe jest źródłem, a ściekiem jest drugi punkt stały (rysunek 16, wykres a).

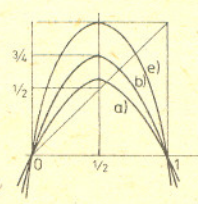


Rys. 13.
a) $0 > c > -3/4$
 $|f'_c(z_c)| < 1$
b) $c = -3/4$
 $f'_c(z_c) = -1$

- c) $-3/4 > c > -1$
 $|f'_c(z_c)| > 1$
- d) $c = -1$
 $w_c = 0$
- e) $c = -2$
chaos

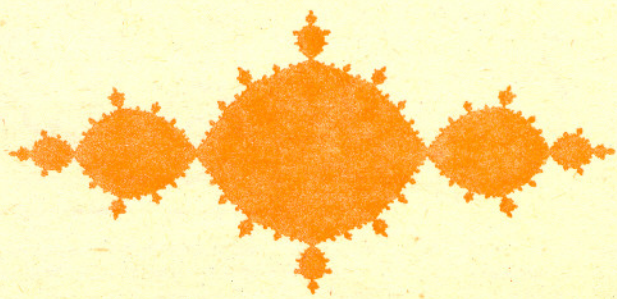
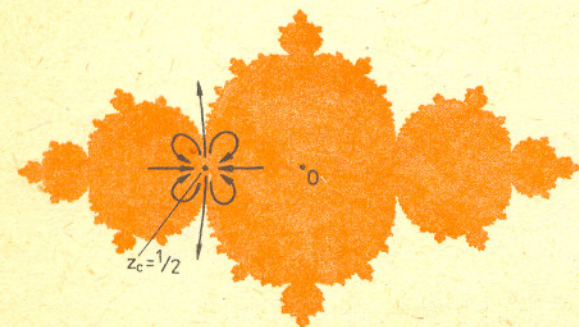


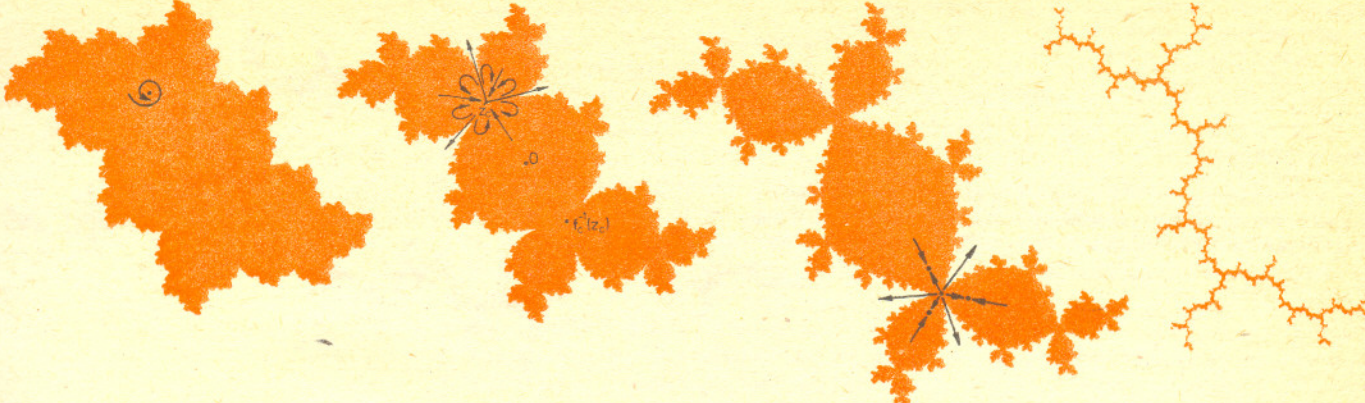
Rys. 12. Odcinek ST (bez punktu S) składa się z punktów nieosiągalnych z a .



Rys. 14. Podnoszący się garb. (Wykresy przekształceń a), b), e) z rysunku 13 w przedstawieniu $\lambda x(1-x)$.)

Rys. 15. Smoki Świętego Marka, czyli zbiory Julii dla wielomianów $z^2 - 3/4 z^2 - 1$. Tę nazwę wymyślił Mandelbrot na część Bazyliki w Wenecji, jej odbicia w zalanym wodą Placu i nieskończonych ekstrapolacji.





Rys. 16.
 a) przed powstaniem królika,
 b) powstaje królik,
 c) królik, (0 jest ściekiem okresu 3, $c \approx -0,12256117 + 0,74486177 i$ spełnia równanie $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$),
 d) zbiór Julii dla $z^2 + i$.

Zmiana dynamiki, kiedy c przechodzi przez wartość c_F , to bifurkacja Feigenbauma. Na $c = c_F$ kończą się bifurkacje podwajania okresu, potem na odcinku $\langle -p_c, p_c \rangle$ zaczyna się chaos. Okazało się, że ta bifurkacja uniwersalna występuje w przyrodzie, jej odkrycie i zbadanie jest jednym z największych osiągnięć matematycznych ostatnich lat. Bardzo ciekawe rzeczy dzieją się między parametrami c_F i -2 . A co dopiero się dzieje wzdłuż innych odnóży żuka?!

Przy $c = -3/4$ przechodzimy przez kardioidę. Następuje bifurkacja dynamiki. Zbiór Julii już nie jest topologicznie okręgiem. To „okrąg” szczipiony sam ze sobą w nieskończenie wielu punktach. Otrzymujemy smoka Świętego Marka. Parametr $c = -3/4$ jest w zbiorze Mandelbrota korzonkiem nowej plamy. Wchodzimy teraz w tę plamę; powstaje ściek w_c o okresie 2 (punkt z_c jest teraz źródłem). Dla $c = -1$ punkt w_c przechodzi przez 0 na prawo, a po przejściu parametrem c pewnej wartości c_2 , korzonka następnej plamki, w_c staje się źródłem, za to blisko powstaje ściek o okresie 4. Po przejściu c_3 powstaje ściek o okresie 8, itd. Ciąg c_n jest zbieżny do pewnej wartości $c_F = -1,401...$ (patrz rys. 11). Ale to jeszcze nie koniec! Aż do $c = -2$ wielomian f_c przeprowadza odcinek $\langle -p_c, p_c \rangle$ w siebie (p_c jest drugim obok z_c punktem stałym); trajektoria $f_c^n(0)$ jest więc ograniczona. Zatem $c \in M$ dla $c \geq -2$ (i $c \leq -1/4$). Dla $c = -2$ zbiór $J(f_c)$ jest odcinkiem $\langle -2, 2 \rangle$. Jest to jedna z dwóch wartości parametru c (drugą jest 0), gdy $J(f_c)$ ma klasyczny kształt. Dopiero przy $c < -2$ zbiór $J(f_c)$ rozsypuje się.

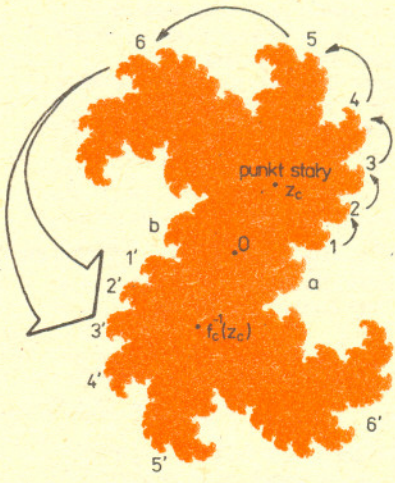
Zróbmy wycieczkę wzdłuż kardioidy. Dla każdej liczby λ , będącej pierwiastkiem z 1, punkt $c(\lambda)$ jest korzonkiem pewnej plamki, która wyrasta z kardioidy. Rozważmy przykład $\lambda = e^{2\pi i/3}$. Przy przejściu przez ten korzonek z tułowia do plamy punkt stały ze ścieku zmienia się w źródło, a od niego oddziela się trajektoria nowego ścieku o okresie 3. Następuje bifurkacja „kwiatka” — powstaje królik (rys. 16).

Po przejściu przez inne korzonki $c(\lambda)$, gdzie $\text{Arg}(\lambda) = \frac{2\pi}{n}$ i liczba n jest niezbyt duża, powstają smoki Mandelbrota (rys. 17).

Gdy n rośnie, smokowi przybywa ramion i jego kształt dąży do kształtu muszli (spójrz na rysunki 18 i 7).

Dla liczb $c(\lambda)$, dla których $\frac{1}{2\pi} \text{Arg}(\lambda)$ wolno aproksymuje się liczbami wymiernymi, istnieje dysk Siegela (rys. 19).

Dla wielomianu $z^2 + c$ może istnieć w \mathbb{C} najwyżej jedna trajektoria ścieku. Jeśli istnieje, to jedyny w \mathbb{C} punkt krytyczny, 0, leży w jej basenie przyciągania. Każda poznana dotychczas za pomocą komputerów plamka zbioru M jest właśnie związana z istnieniem okresowego ścieku. Jeśli jednak $0 \in J(f_c)$, to albo w naszym smoku istnieje dysk Siegela, albo smok ma puste wnętrze, jest bardzo głodny (ale jeszcze spójny!). Parametry c , dla których istnieje dysk Siegela lub kwiatek (ogólniej: jakiś punkt neutralny) leżą na brzegu M . Można je mało zmienić i uzyskać pył. Nie wiadomo jednak, czy można zepsuć każdego zagłodzonego smoka. Może istnieje w M cała plama parametrów, którym odpowiadają takie biedne smoki?



Rys. 17. Smok siedmioramienny. $\text{Arg} \lambda = 2\pi/7$. Przekształcenie f_c przeprowadza ramię 1 na ramię 2, 2 na 3 itd., ramię 6 na ogromne ramię 7. A na co przechodzi ramię 7? Otóż, składa się ono z ramion 1', ..., 6', symetrycznych do 1, ..., 6, które także przechodzą na 2, ..., 7, oraz z ramionek a, b , które przechodzą na 1.



Rys. 18. Smok dwudziestoramienny.



Rys. 19. Zwierz z dyskiem Siegela $f(z) = z^2 + e^{i\lambda} z$ ($\text{Arg} \lambda = 1$).



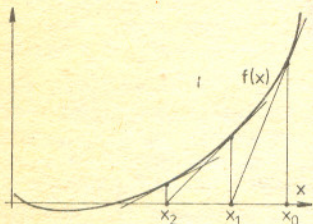
Rys. 20. Zagłodzony smok. (Po przejściu nieskończenie wielu bifurkacji uwielokrotnienia okresu ścieku smok traci całe wnętrze i zostaje z niego tylko szkielet, odzyska jeszcze trochę ciała w drugorzędnych żukach.)

Istnieje pewna operacja \perp na parach „zwierzaków” (przyporządkowuje parze $z^2 + c_1$, $z^2 + c_2$ nowy wielomian $z^2 + c_3$), popatrz na rysunek 21.

Czytelniku, może teraz sam obliczysz na komputerze jakiegoś smoka?

Metoda Newtona

Na pewno zetknąłeś się Czytelniku z tą nadzwyczaj efektywną metodą obliczania pierwiastków wielomianu. Tak jak na rysunku 22 tworzy się dla każdej „rozsądnej” liczby x_0 ciąg liczb x_n .



Rys. 22. Metoda Newtona.

Okazuje się, że ciąg x_n bardzo szybko dąży do pierwiastka. A co to znaczy „rozsądna” liczba x_0 ? Czy każda lub prawie każda liczba jest rozsądna? Teoria iteracji przekształceń wymiernych i wyniki komputerowych eksperymentów pozwalają przybliżyć się do odpowiedzi na te pytania. Widać, na podstawie

rysunku 22, że $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Należy więc badać iteracje funkcji wymiernej

$$Nf(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Będziemy to robić w płaszczyźnie zespolonej C . Zera wielomianu f to dokładnie punkty stałe, ścieki, dla funkcji Nf , a zera jednokrotne są zarazem punktami krytycznymi (bo $(Nf)'(z) = f(z)f''(z)/(f'(z)^2)$).

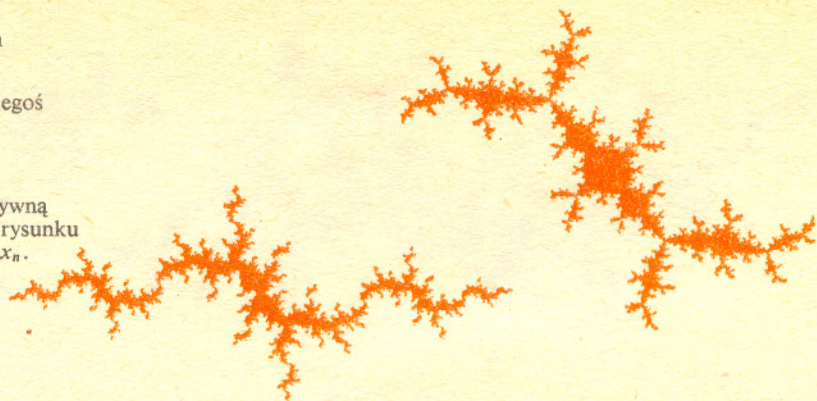
Zbadajmy przykład $f(z) = z^2 + 1$. Dla tego przykładu ściekami dla $Nf(z) = \frac{1}{2}(z - 1/z)$ są punkty $-i, i$. Ich baseny przyciągania

to odpowiednio półpłaszczyzna dolna i górna. (Żeby się o tym przekonać, zauważ, że jeśli zmienimy współrzędne na sferze S^2 przekształceniem $T(z) = (z+i)/(z-i)$, to $T \circ Nf \circ T^{-1}(z) = z^2$, a oś rzeczywista przechodzi na okrąg S^1 .) A więc dla prawie każdej liczby zespolonej x_0 (każdej nie rzeczywistej) zastosowanie metody Newtona daje zbieżność do pewnego pierwiastka. Dla dowolnego wielomianu stopnia 2 sytuacja jest podobna.

A co się dzieje dla wielomianów stopnia 3? Zbadajmy najpierw wielomian $f(z) = z^3 - 1$. Ścieki dla $Nf(z) = \frac{1}{3}(2z + 1/z^2)$ (czyli

zera dla f) to punkty $z_0 = 1, z_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, z_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. Punkty krytyczne dla Nf to znowu z_0, z_1, z_2 i dodatkowo punkt 0. Zbiór Julii nie jest już teraz taki prosty. Na rysunku 24 przedstawiony jest białym kolorem basen przyciągania dla punktu $z_0 = 1$. Dla $z^3 - 1$ metoda Newtona jest dobra dla prawie każdego punktu $x_0 \in C$, bo prowadzi do pierwiastka. Faktycznie, oprócz basenów przyciągania ścieków z_0, z_1, z_2 nie ma żadnych innych składowych uzupełnienia zbioru Julii $J(Nf)$. Nie ma po prostu punktu krytycznego, który mógłby taką składową obsłużyć. Jedyne punkty krytyczne, który byłby kandydatem, punkt 0, grzęźnie w źródle ∞ (bo $Nf(0) = \infty$).

A jeśli weźmiemy inny wielomian stopnia 3? Czy może pojawić się nowy ściek okresowy (o okresie ≥ 2)? Może! Rysunki 24—26 dotyczą wielomianów $f_c(z) = z^3 + (c-1)z - c$. Na czarno przedstawiony jest zbiór tych parametrów c , dla których punkt krytyczny 0 zbiega do ścieku w punkcie 1 (dla iteracji Nf_c). Składowe obszary w zbiorze parametrów c (białe), dla których zachodzi zbieżność do dwóch pozostałych pierwiastków f , tworzą z czarnymi składowymi charakterystyczne trójki. W trakcie kolejnych powiększeń ukazuje się jednak jeszcze jakiś dziwny twór: to przecież żuk Mandelbrota. Dla parametru c z wnętrza takiego żuka istnieje ściek o okresie ≥ 2 . Dla żadnego punktu x_0 z basenu przyciągania takiego ścieku metoda Newtona nie jest dobra. Ciąg x_n zamiast przybliżać się do pierwiastka wielomianu f_c zaczyna oscylować!



Rys. 21. a) smok \perp królik,

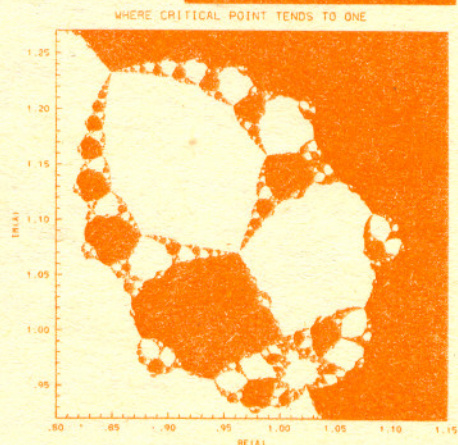
b) królik \perp smok Św. Marka.



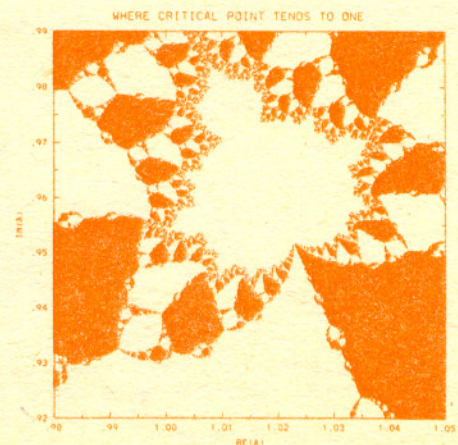
Rys. 23. Kraby (punkty, w których każdy krab trzyma tył innego kraba, leżą na trajektoriach (w tył) punktu krytycznego 0).



Rys. 24



Rys. 25



Rys. 26



Piotr Hajłasz w karykaturze prof. Jeśmanowicza

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki na posiedzeniu w Kielcach w dniu 85.09.10, obradując w składzie:

prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący,
prof. dr Wojciech Żakowski, dr hab. Marek Kordos, dr Alicja Derkowska, dr Jerzy Ryll,
dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel MOiW, dr Jerzy Bednarczuk,
biorąc pod uwagę temat i wartość merytoryczną pracy oraz przebieg referatu i dyskusji,
postanowiło:

1. przyznać złoty medal i nagrodę w wysokości zł. 7000.— Piotrowi Hajłaszowi z XIV LO w Warszawie za pracę „O pewnej metodzie dowodzenia nierówności”,
2. przyznać srebrny medal i nagrodę w wysokości zł. 7000.— Bogdanowi Pelcowi z LO w Mikołowie za pracę „O pewnym niezmienniku topologicznym wielościanów w przestrzeni n -wymiarowej”,
3. nie przyznawać medalu brązowego,
4. przyznać wyróżnienie i nagrodę w wysokości zł. 2000.— Januszowi Murakowskiemu z Zespołu Szkół Radiotechnicznych w Dzierżoniowie za pracę „Funkcje wielokrotne”,
5. przyznać dyplom uczestnictwa w finale Pawłowi Kunstmanowi ze Szkoły Podstawowej nr 112 w Krakowie,
6. przyznać nagrody pieniężne w wysokości zł. 4000.— każda, opiekunom prac: dr Tomaszowi Wolniewiczowi, mgr Józefowi Siwemu, mgr Tomaszowi Malickiemu.

Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału. Oto regulamin:

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skróty zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 424. Czy istnieje taki wielomian w o współczynnikach całkowitych i takie różne liczby całkowite a, b, c , że $w(a) = b, w(b) = c, w(c) = a$.
Rozwiązanie na str. 12

M 425. Skonstruować trójkąt, gdy dane są długości środkowych.
Rozwiązanie na str. 10

M 426. Dany jest n -elementowy zbiór S , rodzina \mathcal{A} jego podzbiorów i liczba naturalna $m \geq 1$.

Wykazać, że jeśli liczba elementów rodziny \mathcal{A} jest większa niż $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i}$, to istnieje taki m -elementowy zbiór $Z \subset S$, że $\{Z \cap A : A \in \mathcal{A}\} = 2^Z$, gdzie 2^Z oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Z .
Rozwiązanie na str. 15

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 190. Do badania charakterystyk prądowo-napięciowych używa się zwykle źródeł zasilania trzech typów:

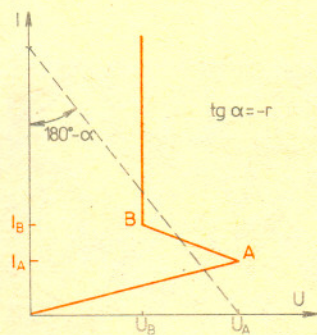
- a) o stałej sile elektromotorycznej,
- b) o stałym prądzie zwarcia,
- c) o stałym oporze wewnętrznym.

Jak zrealizować takie źródła dysponując identycznymi ogniwami o znanej sile elektromotorycznej i oporach wewnętrznych r ?
Rozwiązanie na str. 13

F 191. Do źródła o stałym oporze wewnętrznym r i regulowanym w szerokim zakresie napięciu podłączono element o pokazanej na rysunku charakterystyce. Jak zmienia się prąd płynący w obwodzie podczas podwyższania, a następnie obniżania napięcia źródła?

Narysować wykres zależności $I = f(U)$.

Rozwiązanie na str. 17



5 mata delta

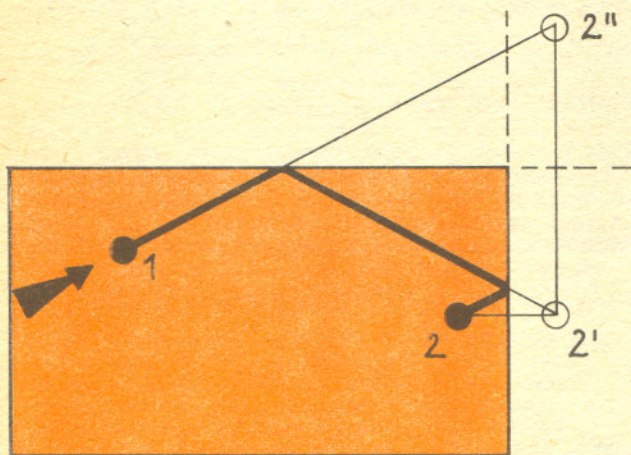
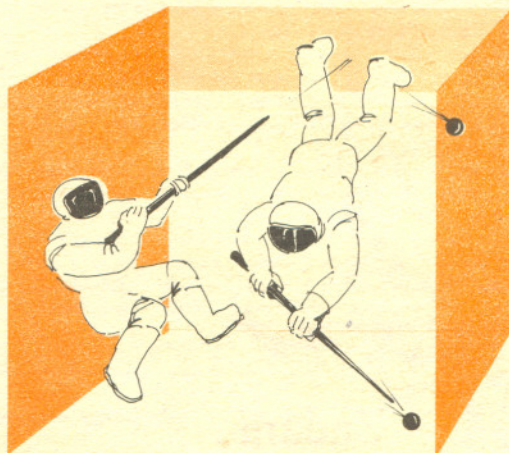
Jak uderzyć

Bilard to płaski, poziomy stół zaopatrzone w otaczające go bandy. Każda gra w bilard polega na uderzeniu połączonych na tym stole kul tak, żeby potoczyły się w zamierzony przez nas sposób. Wytrawni gracze umieją uderzać kule tak, że poruszają się one po bilardzie w bardzo skomplikowany sposób i zderzają się też dziwnie — są to efekty wprawiania kul nie tylko w ruch postępowy, ale i nadawania im ruchu obrotowego w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu. My zatrzymajmy się tylko na zwykłym toczeniu kul.

Najprostsze zadanie bilardowe polega na takim uderzeniu kuli, by po jedno-, dwu-, czy trzykrotnym odbiciu się od bandy trafiła w drugą kulę. Jeśli bilard jest prostokątny, to zadanie jest łatwe. Kierunek uderzenia można znaleźć wykreślnie:

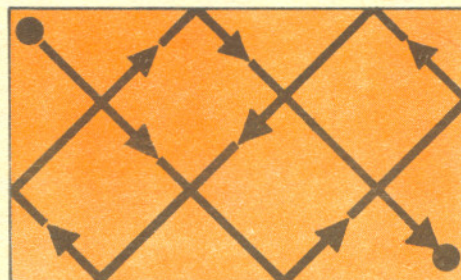
Przykład podany na rysunku pozwoli chyba na wykreślne rozwiązanie dowolnego takiego zadania. Dla uzasadnienia jego poprawności wystarczy chyba następująca uwaga „z fizyki”: gdyby bandy były z luster, należałoby uderzyć w tym kierunku, w którym zobaczymy drugą kulę. Prawda?

Kosmonauci na orbicie (a więc w stanie nieważkości) mogą grać w bilard prostopadłościenny. Muszą oczywiście sami znaleźć się w jego wnętrzu. Czy podana (a raczej zasugerowana) przez nas metoda jest dobra i w tym przypadku?

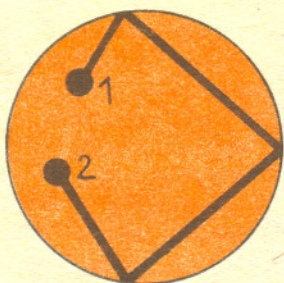


Gdy chcemy znaleźć kierunek uderzenia kuli 1, by odbiła się ona najpierw od „górnjej” bandy, potem od „prawej” i trafiła w kulę 2, najpierw znajdujemy 2' — obraz symetryczny 2 względem „prawej” bandy, a potem 2'' — obraz symetryczny 2' względem „górnjej” bandy. Kulę 1 należy uderzyć w kierunku 2''.

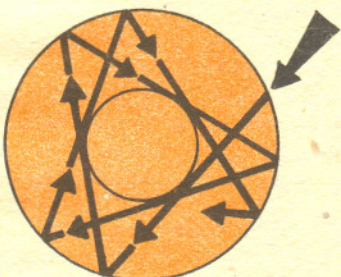
Hugo Steinhaus podaje w „Kalejdoskopie matematycznym”, że jeśli stosunek długości boków prostokątnego bilardu jest liczbą wymierną (np. 5:3), to uderzona pod kątem 45° kula znajdująca się w rogu znów (po pewnej liczbie odbić) trafi do jakiegoś rogu: Czy umielibyście to uzasadnić?



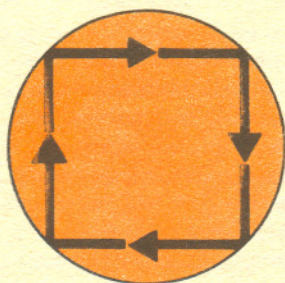
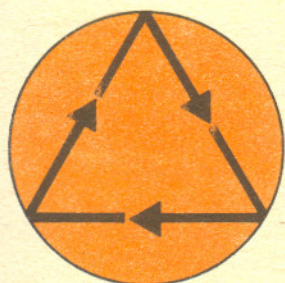
Niech nasz bilard będzie teraz kołem. Otóż, nie wiadomo jak skonstruować kierunek uderzenia kuli, by po (powiedzmy) trzech odbiciach trafiła w drugą kulę. Choć niewątpliwie kierunek taki istnieje.



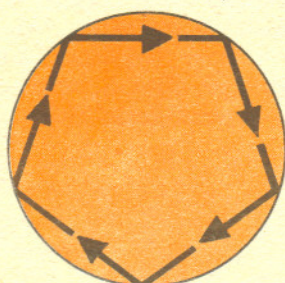
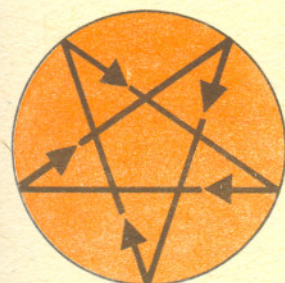
Na kołowym bilardzie dowolnie uderzona kula będzie po cięciwach tej samej długości — dlaczego? Trasę przebytą przez kulę nazywamy jej trajektorią. Trajektoriami dowolnie uderzonej kuli może się w pierścieniu kołowym. Prawda?



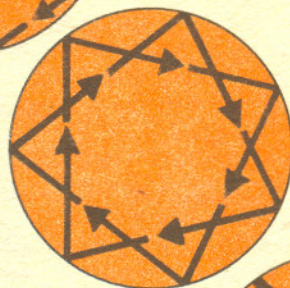
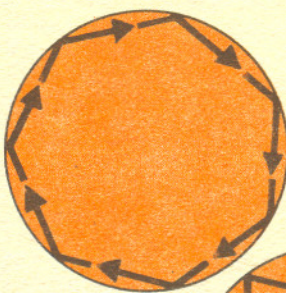
No, nie zawsze. Kula uderzona wzdłuż prostej łączącej ją ze środkiem bilardu będzie stale biegła po średnicy. O takiej trajektorii mówimy, że jest okresowa i ma okres dwa, bo po dwóch odbiciach kula będzie znowu po tej samej drodze. Łatwo wskazać trajektorie o okresie 3 i 4.



Ciekawie się robi, gdy szukamy trajektorii o okresie 5. Od razu widać, że są takie dwie.

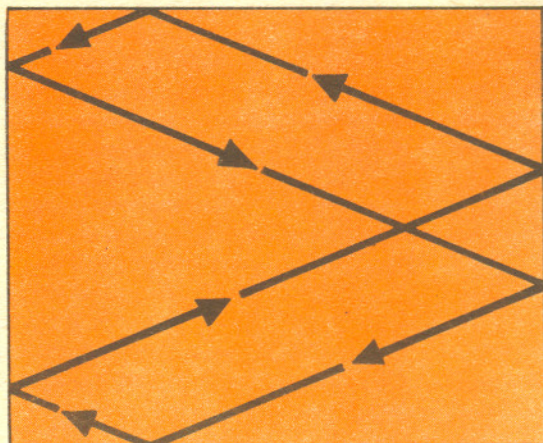


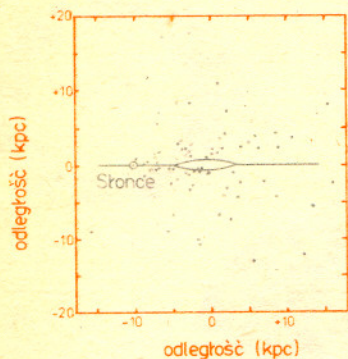
Trajektorie o okresie 6 są znowu wszystkie jednakowe. Trajektorii o okresie 7 jest aż 3. Jak ustalić, ile jest trajektorii o dowolnym danym okresie?



Trajektorie mogą też nie być okresowe. Wówczas, gdyby ją „całą” narysować, przechodziłaby dowolnie blisko każdego punktu pierścienia, w którym się mieści. Jak należy uderzyć kulę, żeby poruszała się po trajektorii nieokresowej?

Oczywiście, trajektorii okresowych można szukać i dla innych bilardów niż kołowy. Na rysunku jest przykład trajektorii o okresie 6 dla bilardu prostokątnego. Widać z niego, jak można by szukać innych trajektorii o okresie parzystym. A czy w bilardzie prostokątnym istnieją trajektorie o okresach nieparzystych?





Rys. 1. Schemat dysku galaktycznego wraz z centralną kondensacją na tle halo (składowa sferyczna).

Rotacja różnicowa — rotacja z prędkością kątową zależną od odległości od osi obrotu. W przypadku Galaktyki prędkość kątowa rośnie w kierunku centrum.

1 parsek (skrót: 1 pc)
 $1 \text{ pc} = 3,0857 \cdot 10^{18} \text{ cm} = 3,2616 \text{ lat}$
 świetlnych = 206265 j.a. Jest to odległość, z jakiej pół orbity Ziemi ma rozmiar 1 sekundy łuku.

Gdy w pogodną noc spojrzymy w rozgwieżdżone niebo, możemy zobaczyć Drogę Mleczną widoczną w Polsce na tle gwiazdozbiorów Woźnicy, Perseusza, Kasjopei, Cefeusza, Łabędzia i Orła. Pytanie, czym jest Droga Mleczna, nurtowało ludzi już od wieków. Demokryt z Abdery, żyjący na przełomie V i IV wieku p.n.e., był pierwszym, który uważał, że Droga Mleczna „składa się z ogromnego mnóstwa małych gwiazd, bezładnie stłoczonych, których światło potęguje się dzięki owej wzajemnej bliskości”. Pogląd ten potwierdził Galileusz około 1610 roku dokonując pierwszych obserwacji fragmentów Drogi Mlecznej za pomocą skonstruowanej przez siebie lunety. Dalsze badania przestrzennego rozkładu gwiazd prowadzone m.in. przez Williama Herschela, Jacobusa C. Kapteyna, Harlowa Shapleya utwierdziły nas w przekonaniu, że w każdej bezchmurną noc w postaci Drogi Mlecznej oglądamy dysk naszej Galaktyki.

Galaktyka zbudowana jest z gwiazd, gazu i pyłu. Największa koncentracja materii występuje w płaszczyźnie dysku galaktycznego, a pozostałe gwiazdy zgromadzone są w tzw. halo tworzącym sferyczną aureolę wokół dysku (patrz rys. 1). Na podstawie badania ruchów własnych i prędkości radialnych gwiazd Bertil Lindblad i Jan Hendrik Oort pokazali, że dysk galaktyczny rotuje różnicowo wokół osi przechodzącej przez punkt, który obserwujemy w gwiazdozbiorze Strzelca (*Sagittarius*).

W tym artykule naszą uwagę skupimy na najbliższych okolicach środka rotacji dysku galaktycznego, a dokładniej na obszarze, którego rozmiar nie przekracza 3 kpc. Całkowita masa gwiazd w tym rejonie oceniana jest na 10 miliardów mas Słońca, gęstość ich wzrasta w kierunku centrum, gdzie średnie odległości między gwiazdami maleją do kilkudziesięciu jednostek astronomicznych (dla porównania średnia odległość Plutona od Słońca wynosi około 40 j.a.). Ten rejon Galaktyki, właśnie ze względu na bardzo dużą gęstość gwiazd i materii międzygwiazdowej, stanowi obszar niezwykle, fascynujący astronomów już od dłuższego czasu.

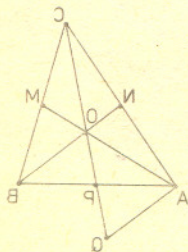
Centralne części Galaktyki uformowały się najwcześniej, dlatego są miejscem występowania najstarszych gwiazd. Świadczy o tym obfitość pierwiastków cięższych od helu, powstających w wyniku reakcji jądrowych zachodzących w gwiazdach. Jednocześnie znaczna gęstość materii sprzyja wzajemnym oddziaływaniom gwiazd, materii międzygwiazdowej i promieniowania, a duża zawartość gazu i pyłu — procesom gwiazdotwórczym. Niewykluczone jest również, że centrum Galaktyki kryje w sobie masywny obiekt mogący być czarną dziurą. Oddziaływanie normalnych gwiazd i otaczającej materii z takim ciałem prowadzi do bardzo gwałtownych i wysokoenergetycznych procesów spowodowanych niezwykle silnym polem grawitacyjnym wokół tego masywnego obiektu. Stwarza to niezwykle szanse obserwacji „z bliska” procesów, które mogą decydować o aktywności jąder innych galaktyk i kwazarów (patrz artykuł Marka Sikory — *Delta* 10(118)/1983).

Bardziej szczegółowe badanie tego gęstego obszaru stało się możliwe dzięki zastosowaniu instrumentów odbierających promieniowanie elektromagnetyczne w zakresie radiowym, podczerwonym, rentgenowskim i gamma. Promieniowanie optyczne i ultrafioletowe jest silnie pochłaniane przez pył międzygwiazdowy znajdujący się między Słońcem a centrum Galaktyki, co praktycznie wyklucza klasyczne obserwacje astronomiczne. Znakomitą metodą penetracji centralnych części Galaktyki są interferometryczne badania radiowe. Obecnie pozwalają one rozróżnić struktury o rozmiarach kątowych do 0,001 sekundy łuku. Oznacza to, że możemy już obserwować fragmenty jądra galaktycznego mające wielkość jedynie 10 j.a. (w przybliżeniu jest to odległość Słońce — Saturn). Promieniowanie dochodzące do obserwatora w Układzie Słonecznym niesie w sobie informacje m.in. o jasności obiektów emitujących je, o składzie chemicznym i ruchu materii. Obserwacji dokonuje się w różnych zakresach fal. Do „śledzenia” neutralnego wodoru najlepiej nadają się obserwacje radiowe na fali o długości 21 cm. Molekuły (np. wodór cząsteczkowy H_2 , formaldehyd H_2CO , amoniak NH_3 i inne) zdradzają swą obecność promieniując w podczerwieni. W tym zakresie fal ujawnia również swą obecność pył międzygwiazdowy. Pył absorbuje promieniowanie tym słabiej, im mniejsza jest częstotliwość padającego fotonu, dlatego jest niewidoczny w widmie elektromagnetycznym o wyższej częstotliwości. Jednocześnie pochłaniane fotony podgrzewają go, a maksimum wypromieniowanej energii przypada właśnie na podczerwień. O wysokoenergetycznych procesach zachodzących w jądrze galaktycznym świadczą obserwacje prowadzone w zakresie rentgenowskim i gamma.

Wyobraźmy sobie teraz, że jesteśmy uczestnikami wyprawy kosmicznej, lecimy rakieta nad centralnymi częściami dysku galaktycznego, a nasze oczy czułe są nie tylko na promieniowanie optyczne, ale na wszystkie pozostałe długości fal z całego widma elektromagnetycznego. Rejon centralny naszej Galaktyki, dobrze widzialny w podczerwieni, ma kształt elipsy — grubość jej niewiele przekracza 1 kpc, a średnica wynosi około 3 kpc. Promieniowanie tego obszaru

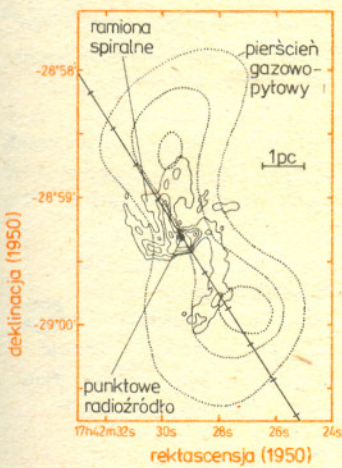


Rozwiązanie zadania M 425. Przypuśćmy, że ABC jest szukanym trójkątem. Przedłużając środkową CP o odcinek PQ przystający do OP otrzymujemy trójkąt AQO , którego boki mają długości proporcjonalne do środkowych. Wystarczy więc skonstruować trójkąt AQO i „dorysować” do niego trójkąt ABC .



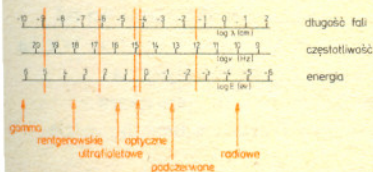


Rys. 2. Schemat struktury jądra galaktycznego w płaszczyźnie dysku. Grubą, przerywaną linią zaznaczone jest położenie ekspandującego pierścienia molekularnego. Widoczne są również pojedyncze obłoki (Sgr B2 znajduje się przy granicy pierścienia).



Rys. 3. Rozkład gazu w obszarze, którego promień nie przekracza 10 pc. Linią ciągłą zaznaczone są kontury ciągłej emisji radiowej na fali 2 cm. Kropkowany kontur wskazuje ciągłą emisję w dalekiej podczerwieni spowodowaną rozgrzanym pyłem. Płaszczyzna dysku galaktycznego zaznaczona jest linią prostą.

IRS — skrót: Infrared Source — źródło promieniowania podczerwonego. Tym skrótem i kolejnym numerem nazywane są źródła promieniowania podczerwonego.



Widmo promieniowania elektromagnetycznego.

zdominowane jest przez gwiazdy późnych typów widmowych, a więc stare i chłodne. Prócz gwiazd w dużej ilości występuje również gaz, który w odległości około 600 pc od centrum formuje pierścień o szerokości w przybliżeniu 200 pc. Pierścień ten, którego masa sięga 10 milionów mas Słońca, zbudowany jest przede wszystkim z wodoru w postaci cząsteczek dwuatomowych (H_2) i porusza się na zewnątrz. Aby podtrzymać istnienie takiej gazowej struktury przez kilka milionów lat, konieczny jest wypływ materii z centralnych części Galaktyki w tempie około 1 masy Słońca w ciągu roku. Siły pływowe powodują, że stabilna struktura pierścienia wodoru molekularnego niszczone jest w odległości ponad 300 pc od środka Galaktyki. Gaz wtedy tworzy pojedyncze chmury, które poruszają się zarówno ruchem własnym, jak i poddają się globalnej rotacji dysku galaktycznego. Obok chmur molekularnych występują często, dobrze widoczne w radiowym zakresie widma, regiony H II, czyli obszary zjonizowanego gazu — przede wszystkim wodoru — kryjące w sobie młode gwiazdy. Na szczególną uwagę zasługuje obiekt nazwany *Sagittarius B2*, który jest jednym z najgęstszych obłoków w Galaktyce. Masa jego oceniana jest na 3 miliony mas Słońca i zawiera on, prócz gazu molekularnego, siedem regionów H II z młodymi gwiazdami zanurzonymi w zjonizowanym gazie. Istnienie takich obiektów jak *Sagittarius B2* stanowi silny dowód, że w obrębie jądra galaktycznego trwają do tej pory procesy gwiazdotwórcze.

Najbardziej zagadkowym wydaje się jednak obszar, którego odległość od środka dysku galaktycznego nie przekracza 10 pc. Początkowo, gdy obserwacje radiowe wykonywane były z dużo gorszą kątową zdolnością rozdzielczą, za centrum Galaktyki uważano silne źródło radiowe, któremu nadano nazwę *Sagittarius A*. Okazało się później, że źródło to można rozdzielić na trzy składowe: *Sagittarius A* (Wschodni), będący pozostałością po supernowej, *Sagittarius A* (Zachodni), który jest obłokiem rozrzedzonego gazu, przypominającym region H II i otaczającym trzeci składnik — punktowe źródło promieniowania radiowego (okazało się później, że nie tylko radiowego). *Sagittarius A* (Wschodni) odległy jest o mniej niż 2 pc od *Sagittarius A* (Zachodniego) utożsamianego z centrum Galaktyki. Zagłębując w najbliższe okolice *Sagittarius A* (Zachodniego), „oko” czule na promieniowanie radiowe i podczerwone ujawni nam dość skomplikowaną strukturę. Od centralnego źródła odchodzą trzy wyraźne ramiona spiralne, oprócz nich istnieje pierścień gazowo-pyłowy, którego płaszczyzna nachylona jest do płaszczyzny dysku galaktycznego pod kątem 20 stopni. Okazuje się również, że materia w pierścieniu porusza się po zamkniętych orbitach, jej prędkość nasuwa przypuszczenie, że w centrum znajduje się ciało o masie 4 milionów mas Słońca.

Ale czym jest samo centrum Galaktyki? Położenie radiowego źródła *Sagittarius A* (Zachodni) jest prawie identyczne z pozycją bardzo silnego źródła promieniowania podczerwonego IRS 16. Obserwacje wykrywające zjonizowany gaz sugerują istnienie wokół IRS 16 obłoku o promieniu około 1 pc. Zjonizowany gaz skupiony jest w rzeczywistości w dziesięciu małych obłokach, które poruszają się z prędkościami około 200 km/s, masa każdej chmury bliska jest masie Słońca, a przestrzeń między tymi zgęszczeniami prawie pozbawiona jest gazu. Obszar ten nie jest zwykłym regionem H II i stanowi nie byle jaką zagadkę, a tym samym pole do popisu dla teoretyków.

Źródłem materii zasilającej wspomniane zgęszczenia są prawdopodobnie stare gwiazdy, obecne w najbliższej okolicy centrum, które w trakcie ewolucji tracą masę. Problematyczne jest źródło jonizacji gazu. Procesy gwiazdotwórcze raczej są wykluczone ze względu na brak w pobliżu obłoków molekularnych. Na poważne trudności natrafia również scenariusz, w którym każdy obłok posiada własne źródło jonizacji. Problem ten można ominąć umieszczając w centrum Galaktyki źródło (niekoniecznie zawierające tylko jedno ciało!) o jasności około 10 milionów razy większej od jasności Słońca. Gigantyczna jasność rozwiązałaby problem źródła jonizacji obłoków gazowych w obrębie 1 pc. Duże ciśnienie promieniowania, towarzyszące tak silnej emisji, mogłoby spowodować wymiatanie resztek gazu poza zgęszczeniami. W tych warunkach pył zalegający obszar centralny byłby silnie nagrzewany i stałby się widoczny w podczerwieni. Aby wyjaśnić ekspansję pierścienia molekularnego, wystarczyłoby, by centralne źródło wybuchło średnio raz na 10 milionów lat. Tym samym centrum naszej Galaktyki przypominałoby aktywne jądra galaktyk. Obserwacje rentgenowskie, a tym bardziej obserwacje promieniowania gamma wskazują na obecność bardzo silnego źródła, które przy energii około 1 MeV swą jasnością przewyższa wszystkie inne źródła galaktyczne.

Najnowsze wyniki obserwacji najłatwiej dają się zinterpretować, gdy założymy, że w centrum Galaktyki znajduje się, otoczona pierścieniem gazu i pyłu, czarna dziura o masie 4 milionów mas Słońca. Niewykluczone jest również, że źródło centralne kryje w sobie gromadę gwiazd bez wyraźnie dominującego masywnego ciała. Bogactwo zjawisk, z jakimi spotykamy się przy badaniu własności centrum Galaktyki, dopuszcza również inne wytłumaczenia. Kilka lat temu w Centrum Astronomicznym im. Mikołaja Kopernika w Warszawie wisiało ogłoszenie o mającym się odbyć wykładzie pt. „Co siedzi w centrum Galaktyki?”. Niezidentyfikowana ręka dopisała na nim „Baba Jaga”. Może?



Rozwiązanie zadania M 424. Mamy

$$w(x) = (x-a) \cdot p(x) + b,$$

$$w(x) = (x-b) \cdot q(x) + c,$$

$$w(x) = (x-c) \cdot r(x) + a,$$

gdzie p, q i r są wielomianami

o współczynnikach całkowitych. Tak więc

$$b = (a-b) \cdot q(a) + c, \text{ skąd } a-b | b-c.$$

Podobnie $b-c | c-a$ i $c-a | a-b$. Wobec tego

$$|a-b| = |b-c| = |c-a|, \text{ zatem } a = b = c.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że taki wielomian nie istnieje.

Z pewnością niewiele osób interesujących się astronomią zdaje sobie sprawę z tego, że praktycznie wszystkie obiekty z katalogu mgławic Messiera mogą być zaobserwowane w ciągu zaledwie jednej nocy. Takie korzystne daty wypadają w okolicach równonocy wiosennej (21 marca), kiedy tylko jeden obiekt katalogu — M30, gromada kulista z gwiazdozbioru Koziorożca — nie jest widoczny. Tego rodzaju obserwacje wymagają pewnej wprawy w odnajdywaniu obiektów astronomicznych i użycia przynajmniej średniej wielkości amatorskich teleskopów. Zachęcamy jednak wszystkich dysponujących nawet tylko lornetką połową do przyjrzenia się choćby najjaśniejszym obiektom z katalogu, gdyż zawiera on całą różnorodność struktur Wszechświata.

mgławice galaktyczne

symbol	α_{1950}	δ_{1950}	
M42	5 ^h 32 ^m 9	-05°25'	Mgławica gazowa w Orionie
M20	17 58, 9	-23 02	Trifid
M8	18 01, 6	-24 20	Lagoon
M16	18 16, 2	-13 48	
M17	18 18, 0	-16 12	Omega

mgławice planetarne

symbol	α_{1950}	δ_{1950}	
M1	5 ^h 31 ^m 5	+21°59'	Mgławica Krab
M57	18 51, 7	+32 58	Mgławica pierścieniowa w Lutni
M27	19 57, 4	+22 35	Dumbbell

gromady kuliste

symbol	α_{1950}	δ_{1950}
M3	13 ^h 39 ^m 9	+28°38'
M5	15 16, 0	+02 16
M4	16 20, 6	-26 24
M13	16 39, 9	+36 33
M22	18 33, 3	-23 58

gromady otwarte

symbol	α_{1950}	δ_{1950}	
M35	6 ^h 05 ^m 7	+24°20'	
M41	6 44, 9	-20 42	
M44	8 37, 5	+19 52	Praesepe
M6	17 36, 8	-32 11	
M39	21 30, 4	+48 13	

galaktyki

symbol	α_{1950}	δ_{1950}
M31	0 ^h 40 ^m 0	+41°00'
M33	1 31, 1	+30 24
M81	9 51, 5	+69 18
M66	11 17, 6	+13 17
M94	12 48, 6	+41 23
M51	13 27, 8	+47 27

Katalog Messiera obejmuje 109 obiektów obserwowanych w postaci słabych, rozmytych plamek, co stało się przyczyną nadania im wspólnej nazwy — mgławice. Dziś wiemy, że określeniem tym objętych zostało wiele obiektów różnej struktury i pochodzenia. Nazwano tak bowiem zarówno chmury materii gazowo-pyłowej nie skupionej w gwiazdy, jak i odległe zbiorowiska gwiazd w naszej Galaktyce, a także inne galaktyki.

Wśród *mgławic galaktycznych* najjaśniejszą i najdawniej odkrytą (1610 r.) jest mgławica w Orionie, oznaczona w katalogu Messiera symbolem M42. W sprzyjających warunkach można zaobserwować gołym okiem tę gazową chmurę o nieregularnym kształcie. Gaz w obiektach tego rodzaju oświetlany jest przez jasne, gorące i masywne gwiazdy znajdujące się w ich wnętrzu lub w pobliżu. Szczególnie jasne mgławice galaktyczne obserwujemy w gwiazdozbiorze Strzelca.

Innymi obiektami „wrzuconymi” do wspólnego worka są *mgławice planetarne*. Nazwa ta wprowadzona została dla obiektów przypominających na zdjęciach tarcze planet, choć w rzeczywistości z planetami nie mają one nic wspólnego. Są to bowiem, podobnie jak mgławice galaktyczne, rozrzedzone otoczki gazowe świecące pod wpływem promieniowania słabych, lecz bardzo gorących (50 000—100 000 K) gwiazd znajdujących się w ich środku. Symbolem M1 oznaczona została Mgławica Krab będąca pozostałością po wybuchu gwiazdy supernowej, obserwowanej w 1054 r. przez Chińczyków. Dziś zaliczamy ją do klasy mgławic planetarnych. Niestety, większość mgławic planetarnych to obiekty bardzo słabe, obserwatorom polecamy więc zaledwie trzy z nich. Zdjęcie pięknej mgławicy planetarnej zwanej Dumbbell (M27) zamieściliśmy na okładce *Delty* 11/1983 r.

W katalogu Messiera znalazły się też grupy gwiazd, dziś znane pod nazwami *gromady kuliste* i *gromady otwarte*. Gromady kuliste to skupiska 10^4 — 10^6 gwiazd związanych siłami przyciągania grawitacyjnego, o kształcie sferycznym lub eliptycznym. Pierwsza z nich została odkryta w gwiazdozbiorze Strzelca, w katalogu Messiera otrzymała symbol M22. Jest ona dostrzegalna gołym okiem jako mglista plamka, podobnie jak kilka innych obiektów tego typu. Gromady otwarte nie mają tak symetrycznych kształtów jak kuliste, są mniej zwarte i mniej trwałe. Ich charakterystyczną cechą jest równoległość torów, po których poruszają się gwiazdy danej gromady w przestrzeni, co pozwala wyznaczać tzw. paralaksy grupowe — a więc ich odległości.

Prócz wymienionych wyżej obiektów, których wspólną cechą jest przynależność do naszej Galaktyki, w katalogu Messiera znalazły się też i inne *galaktyki* — olbrzymie skupiska gwiazd, mgławic, gromad gwiazdowych. W czasach powstawania katalogu (koniec XVIII wieku) nie zdawano sobie sprawy z wielkości i różnorodności budowy Wszechświata, w związku z czym obiekty pozagalaktyczne również traktowane były jako normalne mgławice. Inne galaktyki obserwujemy głównie poza pasem Drogi Mlecznej, w którym duża gęstość chmur gazowo-pyłowych absorbuje światło pochodzące spoza Galaktyki. Nasza Galaktyka wraz z około dwudziestoma towarzyszami należy do tzw. Układu Lokalnego, tj. zgrupowania, w którym wzajemne odległości pomiędzy galaktykami są znacznie mniejsze niż odległości od innych (spoza Układu Lokalnego). W katalogu Messiera symbolem M31 oznaczono tzw. Wielką Mgławicę w Andromedzie, największą galaktykę Układu Lokalnego. Jest to jedyny na północnym niebie obiekt spoza naszej Galaktyki dostrzegalny gołym okiem. Największe zagęszczenia galaktyk obserwujemy na tle gwiazdozbiorów Panny i Warkocza Bereniki, gdzie znajdują się ich skupiska podobne do Układu Lokalnego.

Zbigniew Banaszak, Słupia Wielka 6/14
63-022 Słupia Wielka

kupi następujące numery "Delt":
8 z 1976r i 2 z 1978r oraz 1-7 z 1979r.

mgr Joanna UDALSKA

Kącik olimpijski

Oznaczmy przez $\varphi(n)$ liczbę liczb naturalnych nie przekraczających n i względnie pierwszych z n .

Twierdzenie Eulera. Jeśli a i n są względnie pierwsze, to $a^{\varphi(n)} - 1$ dzieli się przez n .

Dowód. Rozpatrzmy reszty r_i z dzielenia liczb $m_i \cdot a$ przez n , gdzie $m_1, m_2, \dots, m_{\varphi(n)}$ są naturalne, względnie pierwsze z n i mniejsze od n .

Mamy więc $m_1 a = p_1 \cdot n + r_1$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \quad 1 \leq r_i < n.$$

$$m_{\varphi(n)} a = p_{\varphi(n)} \cdot n + r_{\varphi(n)},$$

Gdyby r_i miało wspólny czynnik z n , to m_i lub a miałyby wspólny czynnik z n , a to jest niemożliwe. Dalej $r_i = r_j$ dla $i \neq j$ daje:

$$(m_i - m_j) \cdot a = (p_i - p_j) \cdot n.$$

Ponieważ a jest względnie pierwsze z n , $m_i - m_j$ dzieliłoby się przez n , co jest niemożliwe dla $1 \leq |m_i - m_j| < n$. Wobec tego r_i są różne, względnie pierwsze z n i $1 \leq r_i < n$ dla $i = 1, 2, \dots, \varphi(n)$, czyli zbiory $\{r_1, \dots, r_{\varphi(n)}\}$ i $\{m_1, \dots, m_{\varphi(n)}\}$ są równe.

Mnożąc wszystkie równości stronami otrzymujemy $m_1 \cdot \dots \cdot m_{\varphi(n)} \cdot a^{\varphi(n)} = (p_1 n + r_1) \cdot \dots \cdot (p_{\varphi(n)} n + r_{\varphi(n)}) = pn + r_1 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)}$. Ponadto $r_1 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)} = m_1 \cdot \dots \cdot m_{\varphi(n)}$. Zatem $m_1 \cdot \dots \cdot m_{\varphi(n)} \cdot (a^{\varphi(n)} - 1)$ dzieli się przez n .

Ponieważ $m_1 \cdot \dots \cdot m_{\varphi(n)}$ i n są względnie pierwsze, ostatecznie $a^{\varphi(n)} - 1$ dzieli się przez n , c.n.d.

W szczególności zachodzi

Małe Twierdzenie Fermata. Jeśli p jest liczbą pierwszą i a nie dzieli się przez p , to

$$a^{p-1} - 1 \text{ dzieli się przez } p.$$

Zadania

1. Udowodnić, że dla każdej liczby nieparzystej $n > 1$ istnieje taka liczba naturalna $d < n$, że liczba $2^d - 1$ jest podzielna przez n .

(zadanie 9 z zawodów I stopnia XXI Olimpiady)

2. Udowodnić, że nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że liczba $2^n - 1$ dzieli się przez n .

(3—II—XXI)

3. Dowieść, że w ciągu $\{2^n - 3\}$, gdzie $n = 2, 3, 4, \dots$, istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każde dwie są względnie pierwsze.

(zadanie 3 z XIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej)

4. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba

$$\underbrace{11\dots1}_{p \text{ cyfr}} \underbrace{22\dots2}_{p \text{ cyfr}} \dots \underbrace{99\dots9}_{p \text{ cyfr}} - 123456789$$

dzieli się przez p .

(2—I—XXXIII)

dr Rafał SZTENCEL



Rozwiązanie zadania F 190. Badanie charakterystyk sprowadza się do zewnia układu (rys. 1); wskazania mierników (idealnych) wyznaczają parę wielkości (U_p, I_p) stanowiącą tzw. punkt pracy obwodu i jednocześnie jeden z punktów charakterystyki prądowo-napięciowej badanego elementu. Dla źródła liniowego (SEM — \mathcal{E} i opór wewnętrzny r nie są wzajemnie zależne), np. dla naszego pojedynczego ogniwa mamy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}; \quad R - \text{opór statyczny elementu.}$$

Przekształcając

$$\frac{I \cdot R}{U} + \frac{I \cdot r}{U_w} = \frac{\mathcal{E}}{U},$$

napięcie na zaciskach źródła napięcie na oporze wewnętrznym źródła

lub inaczej

$$(1) \quad I = \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{1}{r} U.$$

Ta funkcja $I = f(U)$ jest tzw. charakterystyką źródła i odcina na osiach współrzędnych punkty

$$I = I_z = \frac{\mathcal{E}}{r} \quad (\text{prąd zwarcia źródła})$$

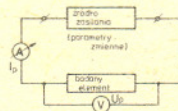
$$U = \mathcal{E}$$

(interpretacja graficzna — rys. 2).

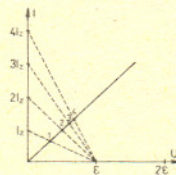
Dla badanego elementu obowiązuje równość

$$(2) \quad I = \frac{1}{R} U.$$

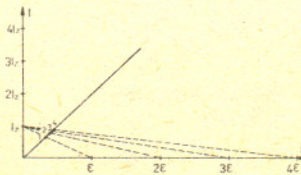
Punkt wspólny zależności (1) i (2) wyznacza punkt pracy obwodu. Zmieniając kolejno



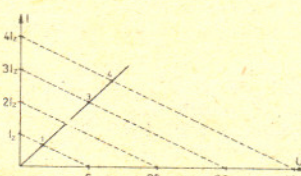
Rys. 1



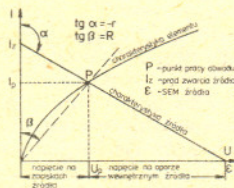
Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c



Rys. 2

(lub równocześnie) parametry źródła zasilania \mathcal{E} i r uzyskuje się kolejne punkty charakterystyki badanego elementu. Łącząc równolegle k ogniw mamy

$$\text{SEM baterii} \quad \mathcal{E}_B = \mathcal{E} = \text{const},$$

$$\text{Opór wewnętrzny baterii} \quad r_B = \frac{r}{k},$$

$$\text{Prąd zwarcia baterii} \quad I_{zB} = k \frac{\mathcal{E}}{r} = k I_z.$$

[przypadek a)]

Dla połączenia szeregowego n ogniw odpowiednie wielkości są równe

$$\mathcal{E}_B = n\mathcal{E},$$

$$r_B = nr,$$

$$I_{zB} = \frac{\mathcal{E}}{r} = I_z = \text{const}.$$

[przypadek b)]

Zstawiając natomiast n równoległych serii po n źródeł połączonych w szereg uzyskuje się

$$\mathcal{E}_B = n\mathcal{E},$$

$$r_B = r,$$

$$I_{zB} = n I_z.$$

Na rys. 3a, 3b, 3c pokazane są dostępne pomiaram punkty 1, 2, 3, ... charakterystyki elementu liniowego. W praktyce dostosowuje się typ źródła (np. układ potencjometryczny, zmienny opornik połączony szeregowo ze źródłem stałego napięcia itp.) do cech indywidualnych badanego elementu tak, by uzyskać możliwie najwięcej punktów pomiarowych w interesującym zakresie. Właściwy dobór jest szczególnie istotny w przypadku elementów o charakterystyce nieliniowej.

Jak wyprodukować najcięższe pierwiastki?

Mgr Marek PFÜTZNER

Najcięższym pierwiastkiem, który można spotkać na Ziemi, jest uran. Jego liczba atomowa (czyli liczba protonów w jądrze atomu tego pierwiastka, oznaczana przez Z) wynosi 92. Bombardując najcięższe naturalne pierwiastki pociskami takimi jak neutrony, deuterony czy cięższe jądra dokonano syntezy pierwiastków tzw. transuranowych o liczbach atomowych większych niż 92. Okazało się, że są to pierwiastki nietrwałe o czasach życia dużo mniejszych niż wiek Ziemi, co tłumaczy ich nieobecność w naturze. Do jak ciężkich pierwiastków można dojść metodami sztucznej syntezy? Jeśli zajrzyjemy do podręcznika chemii, to w zamieszczonej tam tablicy Mendelejewa znajdziemy 103 pozycje. Granica ta jest już dawno nieaktualna. W artykule tym opiszę, jak doszło do wyprodukowania najcięższego znanego pierwiastka o liczbie $Z = 109$.

Wyobraźmy sobie atom pierwiastka: w jego centralnej części znajduje się jądro złożone z Z protonów i N neutronów, otoczone chmurą elektronów. O jego własnościach chemicznych decyduje liczba i konfiguracja elektronów, których w obojętnym elektrycznie atomie jest Z . Natomiast za nietrwałość atomu odpowiedzialne jest jądro. Czas połowicznego rozpadu jądra pierwiastka o liczbie $Z = 104$ wynosi około 1 minuty, a dla jąder cięższych jest dużo krótszy. Jest to czas zbyt krótki, aby istnienie takiego pierwiastka miało praktyczne znaczenie dla chemii. Synteza i identyfikacja najcięższych pierwiastków nie należy już więc do chemii, ale jest zagadnieniem fizyki jądrowej, a tytułowe pytanie będziemy rozumieć następująco: jak wyprodukować jądro o największej liczbie protonów?

Eksperyment mający na celu wytworzenie pierwiastka o $Z = 109$ został wykonany w Laboratorium Ciężkich Jonów w Darmstadt w RFN w 1983 roku. Idea metody produkcji jest prosta: należy zderzyć ze sobą dwa jądra, których połączenie (fuzja) prowadzi do powstania pożądanego obiektu końcowego. W opisywanym przedsięwzięciu użyto wiązki jąder żelaza ^{58}Fe , którymi bombardowano tarczę bismutu ^{209}Bi . Wybór takich składników nie był przypadkowy.

Jednym z największych problemów utrudniających syntezę najcięższych jąder jest fakt, że gdy w wyniku zderzenia dwóch jąder doprowadzimy do ich fuzji, to powstające jądro złożone znajduje się w stanie silnie wzbudzonym. Oznacza to, że nukleony (protony i neutrony tworzące to jądro) znajdują się w szybkim ruchu względnym — można powiedzieć, że jądro ma wysoką temperaturę. Zmniejszenie energii wzbudzenia (ochłodzenie) następuje przez wyparowanie kilku cząstek, co, niestety, trochę zmniejsza masę utworzonego jądra lub przez rozszczepienie, którego prawdopodobieństwo silnie wzrasta ze wzrostem energii wzbudzenia. Procesy te następują prawie natychmiast (w czasie rzędu 10^{-22} s) i zwłaszcza ten drugi jest groźny, bo niszczy oczekiwany przez nas produkt reakcji, zanim zdążymy wydzielić go i zarejestrować. W tej sytuacji musimy tak dobrać warunki eksperymentu, aby powstające jądro złożone miało jak najmniejszą energię wzbudzenia. Od czego ona zależy?

Rozważmy proces zderzenia w układzie środka masy. Całkowita energia początkowa składa się z energii spoczynkowej składników i ich energii kinetycznej

$$E_{\text{pocz}} = M_1 c^2 + M_2 c^2 + E_{k0},$$

a energia końcowa (jądro złożone)

$$E_{\text{końc}} = M_z c^2 + E^*,$$

gdzie M_1, M_2, M_z oznaczają masy pierwszego i drugiego składnika oraz jądra złożonego, c jest prędkością światła, E_{k0} oznacza początkową energię kinetyczną składników, a E^* jest energią wzbudzenia jądra złożonego.

Z zasady zachowania energii mamy:

$$E^* = (M_1 + M_2 - M_z) c^2 + E_{k0}.$$

Energia spoczynkowa jądra można przedstawić następująco:

$$M_1 c^2 = A_1 u c^2 - D_1,$$

$$M_2 c^2 = A_2 u c^2 - D_2,$$

$$M_z c^2 = (A_1 + A_2) u c^2 - D_z,$$

gdzie A oznacza liczbę nukleonów, a D tzw. defekt masy odpowiedniego jądra, u jest jednostką masy atomowej. Korzystając z tych zależności mamy:

$$(*) \quad E^* = (D_z - D_1 - D_2) + E_{k0}.$$

Aby zminimalizować E^* , musimy zderzać jądra o jak największych defektach masy, czyli jądra silnie związane i o jak najmniejszej energii kinetycznej. Z pierwszego z tych warunków wynika właśnie wybór pocisku i tarczy użytych w eksperymencie.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej drugiemu warunkowi. Czy początkowa energia kinetyczna może być dowolnie mała? Siły jądrowe są siłami krótkozasobowymi i włączają się do działania, sprzyjając utworzeniu jądra złożonego, dopiero wtedy, gdy zderzające się składniki zetkną się ze sobą. Aby doszło do zetknięcia, cząstki muszą pokonać odpychające siły elektrostatyczne między nimi. Minimalną wartość początkową energii kinetycznej obliczymy żądając, by w zderzeniu centralnym w momencie zetknięcia energia kinetyczna była równa zeru (układ środka masy). Energia potencjalna układu pochodzi tylko od sił elektrostatycznych i wynosi wtedy

$$E_p = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)},$$

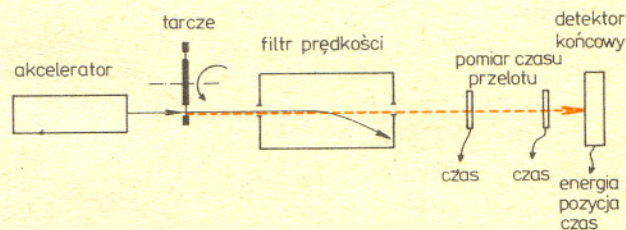
Z i R oznaczają liczbę atomową (ładunek) i promień składników, e — ładunek elementarny, ϵ_0 — stałą dielektryczną próżni. W chwili początkowej jądra są tak daleko od siebie, że energia potencjalna równa jest zeru i składniki mają energię kinetyczną E_{k0} . Znowu zasada zachowania energii daje

$$E_{k0} = E_p = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)} \stackrel{\text{ozn}}{=} B_C.$$

Wartość tę nazywamy barierą kulombowską. Do fuzji może zatem dojść wtedy, gdy początkowa energia kinetyczna w układzie środka masy spełnia warunek

$$E_{k0} \geq B_C.$$

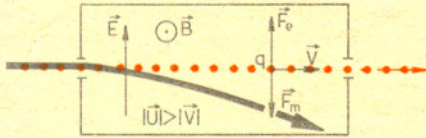
W naszym przypadku bariera kulombowska ma wartość 220 MeV. Eksperyment przeprowadzono dla 3 energii pocisków. Po przeliczeniu do układu środka masy wynosiły one 224, 229, 234 MeV. Ponieważ jądro złożone w tym przypadku jest bardzo słabo związane, pierwsza część wzoru (*) jest ujemna i kompensuje stosunkowo dużą energię kinetyczną konieczną do jego utworzenia. Dla największej energii pocisków energię wzbudzenia jądra złożonego oceniono na około 20 MeV.



Rys. 1. Schemat układu eksperymentalnego do produkcji i identyfikacji najcięższych pierwiastków.

Schemat układu eksperymentalnego pokazany jest na rysunku 1. Aby poznać funkcję każdego z elementów, prześledźmy drogę, jaką przebywają cząstki od akceleratora do układu detekcyjnego. Wiązka jonów ^{58}Fe przyspieszonych w akceleratorze do odpowiedniej energii pada na tarczę, która składa się z kilku kawałków cienkiej folii bismutu umieszczonych na obwodzie obracającego się koła. Co jakiś czas kolejny sektor wstawiany jest w wiązkę, co umożliwia ochłodzenie kawałka poprzednio naświetlonego i zapobiega przepaleniu się tarczy. W tym miejscu zachodzi reakcja między jądrami ^{58}Fe i ^{209}Bi . Produkty tej reakcji (w tym interesujące nas jądra złożone) zostają wybite z tarczy i lecą w kierunku detektorów. Niestety, od fuzji dużo bardziej prawdopodobne są procesy konkurencyjne, w wyniku których w stanie końcowym pojawiają się dwie (lub więcej)

cząstki. Musimy więc jakoś oddzielić jądra złożone od ogromnego tła tworzonego przez te cząstki i przez wiązkę pierwotną, której duża część przechodzi przez tarczę. Spośród wszystkich cząstek w wiązce za tarczą produkty reakcji fuzji mają najmniejszą prędkość. Wynika to z zasady zachowania pędu i z tego, że są to najcięższe obiekty, jakie mogą powstać w reakcji. Pamiętajmy, że jądro złożone znajduje się początkowo w stanie wzbudzone. W wyniku natychmiastowej deekscytacji, np. przez emisję kilku neutronów, doznaje odrzutu, co jednak tylko nieznacznie zmienia jego prędkość. Odrzucenie niepotrzebnych cząstek stanowiących tło odbywa się w filtrze prędkości. Jego zasada działania jest następująca. Cząstki wpadają do obszaru, w którym istnieje pole elektryczne E i pole magnetyczne B prostopadłe nawzajem do siebie i do kierunku prędkości cząstek (rys. 2). Na cząstkę o ładunku q

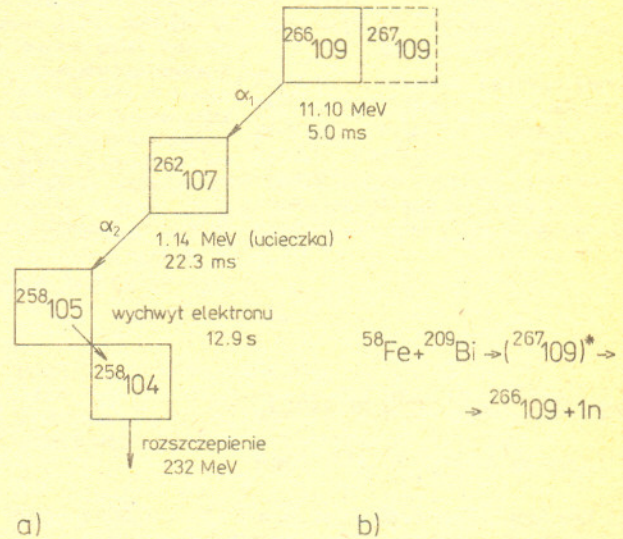


Rys. 2. Zasada działania filtra prędkości.

poruszającą się z prędkością v działają siły o wartościach: magnetyczna — $F_m = qvB$, elektryczna — $F_e = qE$, skierowane przeciwnie. Pola E i B dobiera się tak, aby dla zadanej prędkości siły te równoważyły się. Cząstki o tej prędkości przejdą przez szczelinę wyjściową, natomiast wszystkie cząstki o innej prędkości zostaną odchyłone i w ten sposób odfiltrowane. W rzeczywistości urządzenie to jest bardziej skomplikowane i jest (choć bardzo mało) prawdopodobne, że niepożądana cząstka przejdzie przez filtr prędkości np. w wyniku rozproszenia na jakimś elemencie mechanicznym. O jakości oczyszczania wiązki świadczy fakt, że w ciągu całego eksperymentu na tarczę padło 7×10^{17} pocisków (liczba cząstek za tarczą była dużo większa) i tylko 187 000 cząstek przeszło przez filtr prędkości. Odfiltrowana wiązka produktów reakcji wchodzi następnie do układu detekcyjnego. Pierwszą jego część stanowią dwie cienkie folie umieszczone na drodze wiązki w odległości około 50 cm od siebie. Przelatująca cząstka wywołuje impuls najpierw w pierwszej, a potem w drugiej folii i czas między tymi sygnałami pozwala obliczyć prędkość cząstki. Ostatnim urządzeniem jest końcowy detektor, który zatrzymuje padające nań cząstki. Za jego pomocą mierzy się czas implantacji (wbicia się cząstki do detektora), przybliżone miejsce tego zdarzenia oraz energię kinetyczną padającego pocisku. Znając prędkość i energię kinetyczną możemy obliczyć masę implantowanego obiektu. Jeśli jest nim jądro ciężkiego pierwiastka, to spodziewamy się, że chwilę później rozpadnie się przez rozszczepienie lub emisję cząstki alfa. Energia kinetyczna powstających w rozpadzie cząstek oraz czas i miejsce rozpadu również zostaną zarejestrowane. Głębokość implantacji ciężkiego jądra jest dużo mniejsza niż zasięg cząstek alfa w materiale detektora i musimy się liczyć z tym, że jeśli cząstka alfa zostanie wysłana do tyłu, to zarejestrujemy tylko część jej energii kinetycznej.

Eksperyment trwał 250 godzin. Wszystkie sygnały z detektorów były zapisywane na bieżąco na taśmach magnetycznych i analizowane na komputerze po zakończeniu doświadczenia. W czasie analizy natknięto się na zapis wydarzenia, którego zrekonstruowany przebieg w czasie był następujący:
1) Detektory zanotowały obiekt, którego liczbą masową oszacowaną z prędkości i energii wydzielonej podczas implantacji wynosi 264 ± 13 .

2) 5 ms później z tego samego miejsca została wysłana cząstka alfa o energii $(11,10 \pm 0,04)$ MeV.
3) Następnie po czasie 22,3 ms to samo miejsce opuściła druga cząstka alfa o energii $(1,11 \pm 0,02)$ MeV.
4) Na koniec 12,9 s później wydzielili się energia (232 ± 10) MeV wskazując na rozszczepienie zagadkowego jądra.
Po bardzo szczegółowej analizie biorąc pod uwagę wszystkie możliwości autorzy eksperymentu podali taką oto interpretację tego zdarzenia (rys. 3). W wyniku fuzji utworzyło się wzbudzone jądro $^{267}_{109}$. Po wyparowaniu jednego neutronu powstało jądro $^{266}_{109}$, które zostało zarejestrowane przez detektory (pkt 1).



Rys. 3. Zaobserwowana sekwencja rozpadów (a) i jej interpretacja (b).

W wyniku rozpadu alfa przeszło ono w $^{262}_{107}$ (pkt 2), które również przez emisję cząstki alfa (pkt 3) zamieniło się w jądro $^{258}_{105}$, przy czym cząstka alfa uciekła z detektora zostawiając tylko część swojej energii kinetycznej (równej około 10 MeV). Jądro $^{258}_{105}$ wychwyciło jeden z krążących wokół niego elektronów, co doprowadziło do powstania jądra $^{258}_{104}$, które w czasie rzędu milisekund uległo rozszczepieniu (pkt 4). Wszystkie procesy, jakie nastąpiły od utworzenia $^{262}_{107}$, były znane z poprzednich eksperymentów, co bardzo zwiększa wiarygodność tej interpretacji. Może wydać się zaskakujące, że ogłasza się odkrycie nowego pierwiastka po obserwacji jednego jądra! Zwróćmy jednak uwagę, że na tę obserwację składa się kilka skorelowanych w czasie i przestrzeni sygnałów. Analiza statystyczna wykazała, że prawdopodobieństwo tego, że zarejestrowane 3 rozpadły, które nastąpiły po pierwszym sygnale implantacji, nałożyły się przypadkowo i pochodziły od 3 różnych jąder, jest mniejsze niż $2 \cdot 10^{-18}$.

Całkowitą pewnością, że można wytworzyć atomy pierwiastka 109 i dokładniejsze dane na temat jego własności (czas życia, kanały rozpadu itp.) będziemy mieli dopiero po potwierdzeniu tego odkrycia w innych eksperymentach i w innych laboratoriach. Tymczasem fizycy z Darmstadt wykorzystali swoje urządzenia do następnego doświadczenia i w roku 1984 donieśli o pierwszym przypadku udanej syntezy pierwiastka 108. Bombardując jądrami $^{58}_{28}\text{Fe}$ tarcze $^{209}_{83}\text{Bi}$ w identycznym układzie, jak opisany powyżej, zaobserwowali rozpad trzech jąder $^{265}_{108}$. Obecnie (połowa 1985) trwa eksperyment mający na celu produkcję pierwiastka 110.



Rozwiązanie zadania M 426. Zastosujemy indukcję względem n . Przypadek $n = 1$ jest oczywisty; przypuścmy więc, że twierdzenie zachodzi dla pewnego n . Rozpatrzmy zbiór $(n+1)$ -elementowy S i k -elementową rodzinę \mathcal{A} jego podzbiorów, gdzie

$$k > \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n+1}{i}.$$

Wybieramy $s_0 \in S$ i tworzymy rodzinę $\mathcal{A}_1 = \{A \setminus \{s_0\} : A \in \mathcal{A}\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{B \in \mathcal{A}_1 : B \cup \{s_0\} \in \mathcal{A}\}$. \mathcal{A}_1 ma k_1 elementów, \mathcal{A}_2 ma k_2 elementów.

Zauważmy, że $k_1 + k_2 = k$. Istotnie, k_2 jest liczbą par zbiorów z \mathcal{A} różniących się tylko o s_0 i dających ten sam zbiór z \mathcal{A}_1 . Mogą zająć dwa przypadki.

$$1. k_1 > \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i}. \text{ Wtedy rodzina } \mathcal{A}_1$$

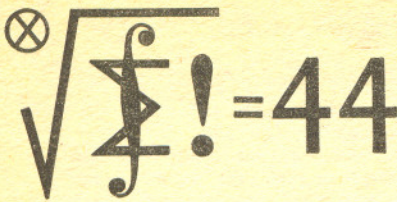
podzbiorów $S \setminus \{s_0\}$ spełnia założenie indukcyjne (dla m). Istnieje wtedy taki m -elementowy zbiór $Z \subset S \setminus \{s_0\}$, że $\{Z \cap B : B \in \mathcal{A}_1\} = 2^Z$. Zatem $\{Z \cap A : A \in \mathcal{A}\} = 2^Z$.

$$2. k_1 \leq \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i}. \text{ Wtedy } k_2 = k - k_1 >$$

$$> \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n+1}{i} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n}{i}, \text{ jako}$$

$$\text{że } \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Zatem rodzina \mathcal{A}_2 spełnia założenie indukcyjne (dla $m-1$), wobec tego istnieje taki $(m-1)$ -elementowy zbiór $Z_1 \subset S \setminus \{s_0\}$, że $\{Z_1 \cap B : B \in \mathcal{A}_2\} = 2^{Z_1}$. Niech $Z = Z_1 \cup \{s_0\}$. Wtedy $\{Z \cap A : A \in \mathcal{A}\} = 2^Z$. Istotnie, biorąc zbiory $Z \cap A$ dla $A \in \mathcal{A}_2$ otrzymujemy wszystkie podzbiory Z nie zawierające s_0 , natomiast zbiory $Z \cap (A \cup \{s_0\})$ dla $A \in \mathcal{A}_1$ dają wszystkie podzbiory Z zawierające s_0 .



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1986

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 113 /WT=2,01/ i 114 /WT=2,18/
z numeru 8/1985

Andrzej Pawłowski	-	Zabrze	43,64pkt
Marian Roman	-	Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	-	Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	-	Nowy Sącz	41,68pkt
Grzegorz Kuś	-	Kraków	39,93pkt
Jerzy Janowicz	-	Bolesławiec	39,22pkt
Wojciech Boratyński	-	Warszawa	36,02pkt

Zadania z matematyki nr 125, 126

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

125. Dla danych liczb naturalnych m, n niech Z_m^n będzie zbiorem wszystkich n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, \dots, m\}$. Dwa ciągi (x_1, \dots, x_n) i (y_1, \dots, y_n) nazwiemy bliskimi, jeśli istnieje $j \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $x_i = y_i$ dla $i \neq j$ oraz $|x_j - y_j| = 1$. Dla jakich par (m, n) istnieje uporządkowanie zbioru Z_m^n , przy którym każde dwa sąsiednie ciągi, a także ostatni z pierwszym, są bliskie?

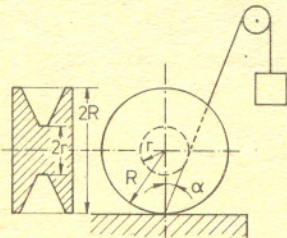
126. Skonstruować trójkąt (konstrukcja platońska — cyrkiel i linia), mając dane: promień okręgu opisanego, długość jednego z boków i odległość ortocentrum (punktu przecięcia wysokości) od prostej zawierającej ten bok.

Zadanie 126 przysłał panowie Krzysztof Abert i Tomasz Kucharczuk z Warszawy.

Zadania z fizyki nr 23, 24

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

23. Na poziomym podłożu spoczywa szpula o masie M z nawiniętą nicią, której wolny koniec jest przerzucony przez obracający się bez tarcia błoczek i obciążony ciężarkiem o masie m . Duży promień szpuli (patrz rysunek) wynosi R , promień jej rdzenia — r . Zaznaczony na rysunku kąt α ma taką wartość, że $\sin \alpha = r/R$. Współczynnik tarcia statycznego szpuli o podłożu wynosi f , współczynnik tarcia kinetycznego — f_k . Jakie warunki muszą być spełnione, aby układ znajdował się w równowadze?



Czy możliwe jest opadanie ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem? Jeżeli tak, to jakie warunki muszą być spełnione w tym przypadku?

24. Na podstawie przytoczonych niżej danych obliczyć przybliżoną temperaturę, jaka panowałaby na powierzchni Ziemi, gdyby w ogóle nie ogrzewało jej Słońce. Dane: pionowy gradient temperatury w skorupie ziemskiej — $2 \cdot 10^{-2}$ K/m, współczynnik przewodnictwa cieplnego skorupy ziemskiej — 3 W/Km, stała Stefana-Boltzmann — $6 \cdot 10^{-8}$ W/m²K⁴. Uwaga: podane parametry geofizyczne mają charakter orientacyjny wobec dużego zróżnicowania w zależności od miejsca na kuli ziemskiej.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1985

Przypominamy treść zadań:

117. W klasie czworoscianów $ABCD$ opisanych na kuli o środku O i promieniu 1, takich, że $OA \geq OB \geq OC \geq OD$, znaleźć kresy dolne możliwych wartości odległości OA, OB, OC, OD .

118. Dane liczby rzeczywiste $x_i, i = 1, \dots, n$, oraz liczba naturalna nieparzysta p . Dowieść, że $\sum x_i^p + 1 \sum x_i^{p-1} \geq (\sum x_i^p)^2$.

117. Poszukiwane kresy wynoszą, odpowiednio: $3, \sqrt{5}, \sqrt{2}, 1$. Dowód:

a) Środki ciężkości ścian czworoscianu $ABCD$ są wierzchołkami czworoscianu podobnego do niego, w skali 1/3. Sfera przechodząca przez te środki ma promień ≥ 1 (= promień sfery wpisanej w $ABCD$), zatem sfera opisana na $ABCD$ ma promień ≥ 3 . Stąd $OA \geq 3$. Równość zachodzi dla czworoscianu foremnego.

b) Przetnijmy czworoscian $ABCD$ płaszczyzną przechodzącą przez O i równoległą do ściany BCD . Otrzymamy w przekroju trójkąt podobny do BCD , w skali < 1 , i zawierający koło o promieniu 1. Zatem koło wpisane w trójkąt BCD ma promień > 1 , a co za tym idzie, koło opisane na trójkącie BCD ma promień > 2 . Niech O' będzie rzutem punktu O na płaszczyznę BCD . Wówczas $O'B \geq O'C \geq O'D$, więc $O'B > 2$, a ponieważ $OO' = 1$, więc $OB > \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Przy tym OB może być dowolnie bliskie $\sqrt{5}$; wystarczy, żeby ściana BCD była trójkątem równobocznym opisanym na kole o promieniu nieznacznie większym od 1, stycznym w swoim środku do kuli wpisanej w czworoscian.

c) Każda krawędź czworoscianu $ABCD$ ma długość > 2 ; w szczególności $CD > 2$. Niech O'' będzie rzutem punktu O na prostą CD . Wówczas $O''C \geq O''D$, więc $O''C > 1$, a ponieważ także $OO'' > 1$, więc $OC > \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Przy tym OC może być dowolnie bliskie $\sqrt{2}$; wystarczy, żeby krawędź CD była nieco dłuższa od 2 i żeby jej środek leżał blisko powierzchni kuli wpisanej w czworoscian.

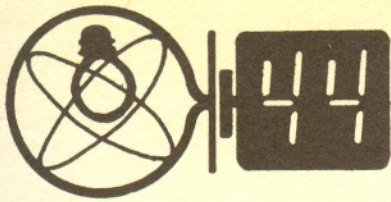
d) Odległość OD jest > 1 , ale może być dowolnie bliska 1 — to oczywiste.

118. Oznaczmy przez L i P odpowiednio lewą i prawą stronę danej w zadaniu nierówności. Przekształcamy:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{i,j} x_i^{p+1} x_j^{p-1} = \sum_i x_i^{2p} + \sum_{i < j} x_i^{p+1} x_j^{p-1} + \sum_{i > j} x_i^{p-1} x_j^{p+1} = \\
 &= \sum_i x_i^{2p} + \sum_{i < j} (x_i^{p+1} x_j^{p-1} + x_i^{p-1} x_j^{p+1}), \\
 P &= \sum_i x_i^{2p} + 2 \sum_{i < j} x_i^p x_j^p.
 \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 L - P &= \sum_{i < j} (x_i^{p+1} x_j^{p-1} + x_i^{p-1} x_j^{p+1} - 2x_i^p x_j^p) = \\
 &= \sum_{i < j} (x_i x_j)^{p-1} (x_i - x_j)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1985

Przypominamy treść zadań:

15. Z izolowanego przewodu wykonano zamkniętą pętlę w kształcie ósemki, złożonej z okręgów o średnicy 1 cm i 2 cm (przewody w miejscu skrzyżowania stykają się ze sobą). Pętlę umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 1 T, prostopadłym do płaszczyzny pętli. Czy izolacja przewodu, która wytrzymuje napięcie 10 V, ulegnie przebiciu, gdy pole magnetyczne zostanie wyłączone, zanikając liniowo do zera w czasie 1 ms?

16. Oszacować rozmiary planetoidy, od której człowiek mógłby się oderwać wykonując skok. Zakładamy gęstość planetoidy równą gęstości Ziemi.

15. Podczas zaniku pola magnetycznego w pętlach I i II indukuje się siła elektromotoryczna odpowiednio

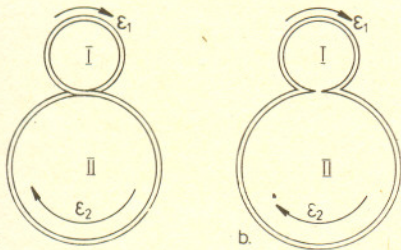
$$\mathcal{E}_1 = \pi r_1^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{E}_2 = \pi r_2^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

($r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 2 \text{ cm}$, $\Delta B = .1 \text{ T}$, $\Delta t = 1 \text{ ms}$).
Rozpatrzmy przypadek krzyżujących się pętli (rys. 1a).
W obwodzie (rys. 2a) płynie prąd

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_1 + R_2},$$

gdzie R_1 i R_2 oznaczają opory odpowiednich pętli: $R_1 = k r_1$, $R_2 = k r_2$ (k — stały współczynnik). Napięcie między punktami S i P (skrzyżowanie przewodu) wynosi $U_{SP} = \mathcal{E}_1 + R_1 I$.
Rozwiązując układ wszystkich równań otrzymujemy

$$U_{SP} = \pi r_1 r_2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 0,6 \text{ V.}$$



Rys. 1 a. b.

W przypadku przewodu wygiętego jak na rysunku 1b (obwód — rys. 2b) mamy równania

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}, \quad U_{SP} = -\mathcal{E}_1 + R_1 I,$$

których rozwiązaniem jest

$$U_{SP} = \pi r_1 r_2 \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 0,2 \text{ V.}$$

Wniosek: izolacja przewodu nie ulegnie przebiciu.

16. Do ucieczki z planetoidy potrzebna jest energia równa wartości bezwzględnej energii grawitacji na jej powierzchni (względem nieskończoności)

$$E_{up} = G \frac{M_p m}{R_p},$$

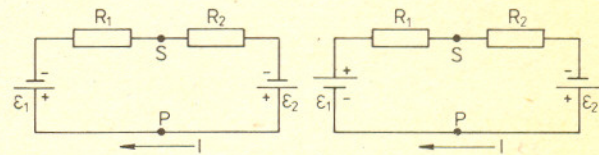
gdzie G — stała grawitacji, R_p — promień planetoidy, M_p — masa planetoidy, m — masa ciała. Podczas skoku na Ziemi środek ciężkości ciała (po oderwaniu stóp od podłoża) wznosi się na wysokość h , odpowiada temu energia

$$E_{sz} = G \frac{M_z m h}{R_z^2}.$$

Wobec równości $E_{up} = E_{sz}$ otrzymujemy $\frac{M_p}{R_p} = \frac{M_z h}{R_z^2}$.

Ponieważ $\frac{M_p}{M_z} = \frac{R_p^3}{R_z^3}$, więc ostatecznie $R_p = \sqrt{h R_z}$.

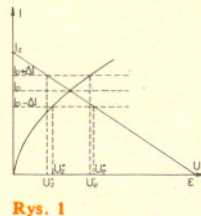
Przyjmując $h = 0,5 \text{ m}$, obliczamy $R_p = 1,8 \text{ km}$.
Maksymalna średnica planetoidy, z której dałoby się odskoczyć, jest więc około 4 km.



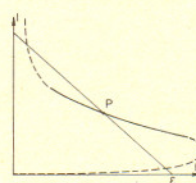
Rys. 2 a. b.



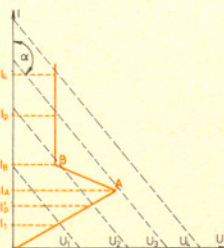
Rozwiązanie zadania F 191. W poprzednim zadaniu milcząco przyjmowaliśmy, iż punkt pracy (U_p, I_p) określony przez warunek konieczny mówiący, że napięcie na elemencie $U_e = I \cdot R$ równa się napięciu „wypracowywanemu” przez źródło na swoich zaciskach $U_z = \mathcal{E} - Ir$, odpowiada stabilnej pracy obwodu. Dla charakterystyki jak na rysunku 1 istotnie tak jest. Gdy z jakichkolwiek przyczyn natężenie prądu w obwodzie wzrośnie o ΔI , napięcie na zaciskach źródła U_z staje się mniejsze niż U_e — napięcie niezbędne do utrzymania w elemencie prądu ($I_p + \Delta I$). Analogicznie po zmniejszeniu natężenia do wartości ($I_p - \Delta I$), $U_z > U_e$. Tak więc w obu przypadkach działa czynnik kierujący wartość natężenia ku pierwotnej wartości I_p (rys. 1).
Przeprowadzając podobne rozumowanie Czytelnik samodzielnie wykaże, iż punkt pracy dla charakterystyki pokazanej na rysunku 2 odpowiada stanowi niestabilnemu.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Warunkiem stabilności jest więc

$(\text{tg} \beta)_{I=I_p} > (\text{tg} \alpha)_{I=I_p}$, gdzie:

$\text{tg} \beta = \frac{dU}{dI} = R_d$ — tzw. opór dynamiczny elementu,

$\text{tg} \alpha = -r$; r — stały opór wewnętrzny źródła.

Zatem: $R_d + r > 0$.

Oznacza to, że obwód pracuje stabilnie, gdy całkowity opór obwodu jest dodatni, niestabilnie — gdy ujemny, równość zera odpowiada nieokreśloności punktu pracy. W warunkach zadania odcinek charakterystyki AB odpowiada niestabilności i wykres $I = f(U)$ przedstawia rysunek 3. Warto na koniec nadmienić, że nasza wyidealizowana charakterystyka z grubszą przybliża charakterystykę łuku elektrycznego bądź neonówki.