

SPIS TREŚCI

NUMERU 1(145)

Co można znaleźć w półprzewodniku? <i>doc. dr Jan A. Gaj</i>	str. 2
Patrz w niebo	str. 5
Zadania	str. 5
Myślący komputer <i>mgr Jacek Pacholczyk</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Budowa prostych wirusów kulistych <i>doc. dr Włodzimierz Zagórski</i>	str. 10
Rok Olimpijski	str. 13
Kącik olimpijski	str. 13
Klub 44	str. 14

W następnym numerze:
Matematyczne zoo

Wszystkie ostatnie strony okładek numerów rocznika 1986 po ich sklejeniu kolejno (każdą skleamy z następną wskazanym na okładce bokiem) tworzą chronologiczną tablicę najwybitniejszych matematyków, fizyków i astronomów. Każdy Czytelnik może więc mieć taką tablicę w domu. I tylko za naszym pośrednictwem — tablica taka nie była jeszcze nigdy wydana.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
mgr Ewa Ryllowa
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1027/12/85. N-57.

WARUNKI PRUNEMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 - do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

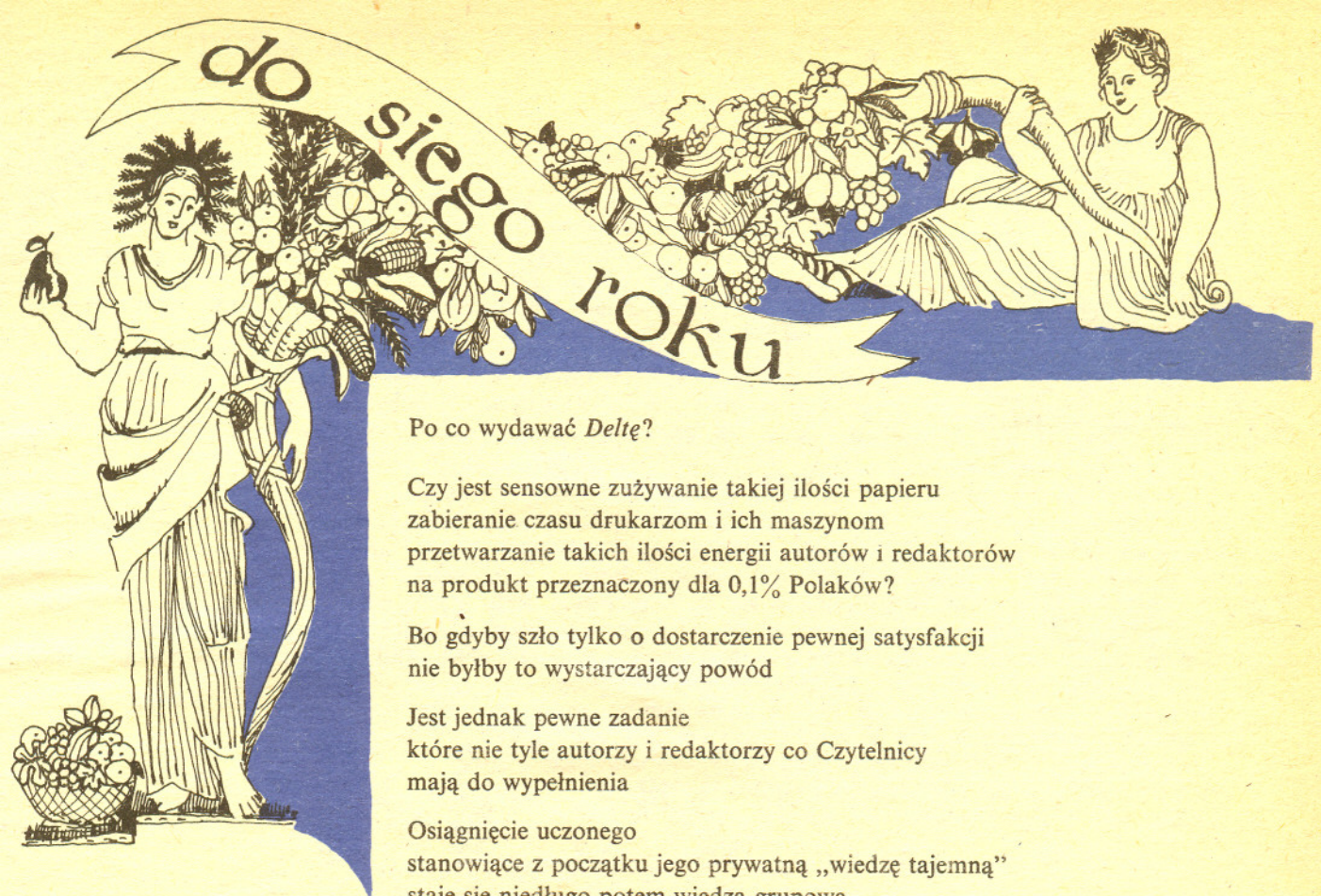
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

- Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
- Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
- Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—



Po co wydawać *Delte*?

Czy jest sensowne zużywanie takiej ilości papieru
zabieranie czasu drukarzom i ich maszynom
przetwarzanie takich ilości energii autorów i redaktorów
na produkt przeznaczony dla 0,1% Polaków?

Bo gdyby szło tylko o dostarczenie pewnej satysfakcji
nie byłby to wystarczający powód

Jest jednak pewne zadanie
które nie tyle autorzy i redaktorzy co Czytelnicy
mają do wypełnienia

Osiągnięcie uczonego
stanowiące z początku jego prywatną „wiedzę tajemną”
staje się niedługo potem wiedzą grupową
znaną środowisku czy gronu specjalistów

Wtedy często dostaje się tylnymi drzwiami
do społeczeństwa
w postaci produktu techniki
i w tej formie społeczeństwo je konsumuje
choć przecież nadal go nie posiada
(dobrze widać to w przypadku analfabetyzmu elektronicznego
nie przeszkadzającego w konsumpcji telewizji)

Ale przecież kiedyś
zaczyna ów atom wiedzy być obecny w społeczeństwie

Czeka go wtedy najtrudniejsza bariera:
zaskarwienie sobie sympatii
doświadczonych i dobrze zorganizowanych
specjalistów od oświaty

I w końcu wszyscy stają się właścicielami
tego co przed laty osiągnął uczonego
i wiedzą że Ziemia jest kulista
że ciało zanurzone w wodzie ...
że kwadrat przeciwprostokątnej ...
że ...

I ważnym zadaniem Czytelników *Delty*
autorów i redaktorów
jest to „Ale przecież kiedyś ...”

Róbmy to dobrze

Co można znaleźć w półprzewodniku?

Doc. dr Jan A. GAJ

Każdy, kto zainteresował się kiedykolwiek technologią półprzewodników, słyszał z pewnością, jak wielkie znaczenie ma czystość materiałów używanych w tej dziedzinie techniki — i fizyki. Klasyfikacja chemikaliów, określająca substancje jako czyste, chemicznie czyste itd. jest w technologii półprzewodników nieprzydatna, ponieważ kryteria czystości materiałów są tu o wiele ostrzejsze.

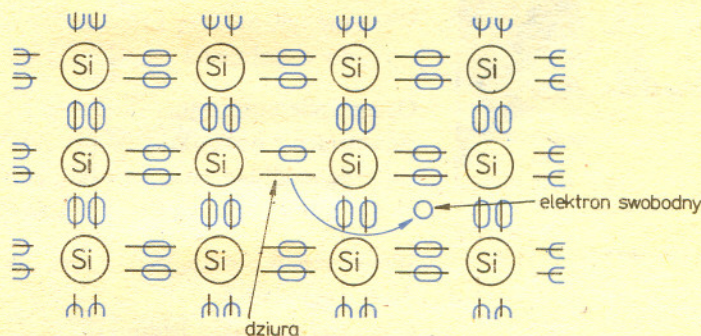
Pomimo tak ostrych wymagań stawianych półprzewodnikowi zaludnia go całe bogactwo najrozmaitszych tworów mikroskopowych: domieszki, elektrony, dziury, fonony, polarony i wiele innych. Chciałbym dzisiaj skupić Twoją uwagę, Czytelniku, na pewnej części tego towarzystwa.

Zaczynamy od bagażowego

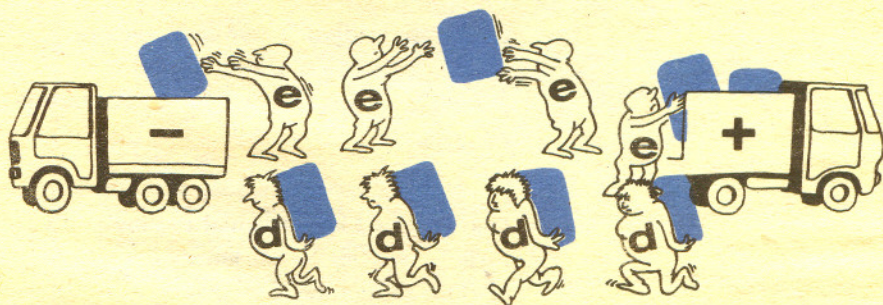
Jednym z podstawowych obiektów w fizyce półprzewodników jest **nośnik** prądu elektrycznego, znany w językach europejskich jako „carrier”, „porteur” czy „Träger”. Rzut oka na te terminy upewnia nas, że chodzi tu po prostu o tragarza zwanego też bagażowym. Rolę bagażu pełni oczywiście prąd elektryczny. Głównymi nośnikami prądu w półprzewodnikach są **elektrony** swobodne (wyrwane z wiązań łączących atomy) i **dziury** (luki po elektronach w wiązaniach).



Kiedy przejdę na emeryturę, rozwinę szeroką akcję w celu wprowadzenia terminu „prądowy” w analogii do „bagażowego” zamiast powodującego nadmierny wysiłek przy używaniu dwuwyzrazowego „nośnika prądu”.



Proszę, aby Czytelnik zechciał zwrócić uwagę na poniższy rysunek, który wyjaśnia wreszcie raz na zawsze problem trapiący uczniów od wielu pokoleń: dlaczego kierunek przepływu prądu jest przeciwny do kierunku ruchu przenoszących go elektronów.

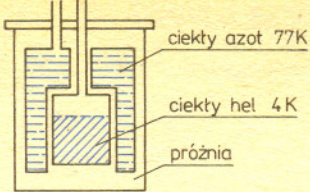


Elektrony i dziury przenoszą prąd.

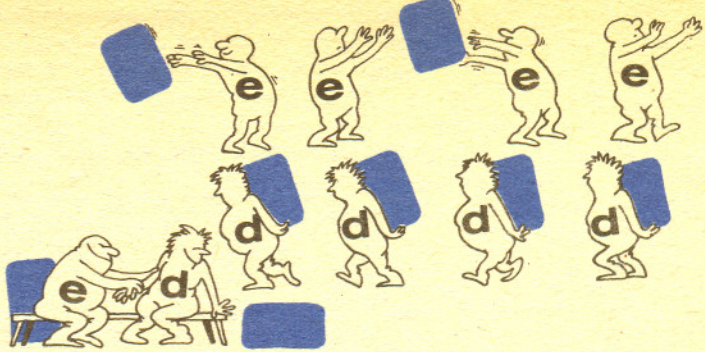
Ekscyton: leniwa para elektron-dziura

Kiedy dwa nośniki o przeciwnych znakach: elektron i dziura spotkają się, tracą wszelkie zainteresowanie przenoszeniem prądu i tworzą ściśle związaną parę: ekscyton. Jest to twór podobny do atomu wodoru, z tym że rolę protonu odgrywa dziura.

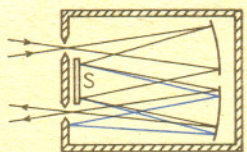
Mówimy tu o tzw. ekscytonie Wanniera-Motta, typowym w półprzewodnikach. Istnieją także (np. w kryształach jonowych) tzw. ekscytony Frenkela, którymi nie będziemy się tu zajmować.



Kriostat: przyrząd do wykonywania doświadczeń w niskich temperaturach. Ten kriostat jest bardzo prosto zbudowany. Kriostaty do doświadczeń optycznych są zazwyczaj zaopatrzone w okienka przepuszczające światło w wymaganym obszarze widmowym.



Fotopowielacz: zamknięty w opróżnionej z powietrza szklanej obudowie układ elektrod przetwarzający padające światło na prąd elektryczny. Bardzo czuły.

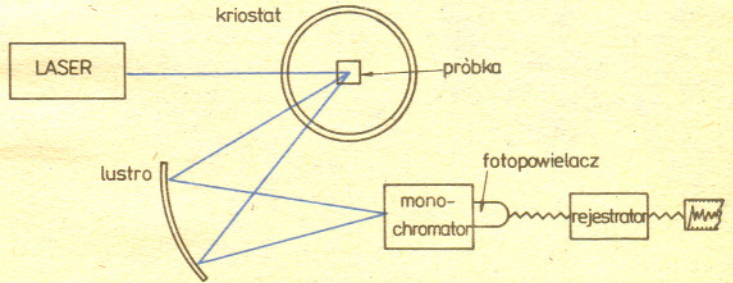


Monochromator: przyrząd, który z padającego promieniowania wydziela jedną tylko długość fali (ściślej: wąski obszar). W tym monochromatorze elementem rozszczepiającym światło jest siatka dyfrakcyjna S.

Rekombinacja: proces, w którym elektron przewodnictwa zapełnia lukę w wiązaniu — dziurę. Obie cząstki znikają więc, a wyzwalająca się energia może być wysyłana w postaci kwantu światła.

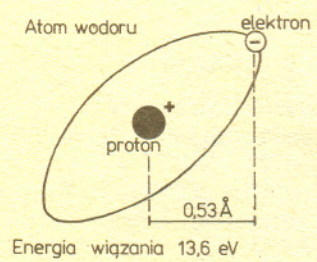
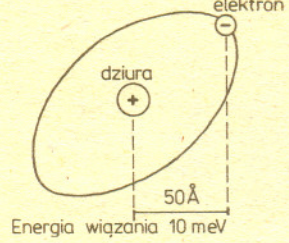
Oczywiście para, podobnie jak w atomie wodoru, jest związana elektrostatycznymi siłami przyciągania. Ekscyton jako całość jest elektrycznie obojętny i nie przewodzi prądu, może jednak poruszać się w kryształach przenosząc energię. Ekscytony odkryli ponad trzydzieści lat temu (w 1952 r.) E. F. Gross i N. A. Karryev oraz niezależnie M. Hayashi i K. Katsuki, którzy badali widma świecenia, czyli **luminescencji** kryształów tlenku miedziowego (Cu_2O) w niskich temperaturach. Zaobserwowali oni serie wąskich linii widmowych przypominające widma gazów atomowych. Widma liniowe obserwowano już poprzednio w ciałach stałych, ale przez analogię z widmami gazów próbowano je tłumaczyć jako pochodzące od izolowanych atomów domieszek, na które otaczający kryształ wywiera stosunkowo niewielki wpływ. Taka jest rzeczywistość sytuacji domieszek pierwiastków ziem rzadkich w niektórych kryształach. Zasługą odkrywców ekscytonu było zerwanie z takim najprostszym sposobem interpretacji i dostrzeżenie w promieniowaniu o widmie podobnym do widm gazów świadectwa powstania ekscytonu — związanej pary elektron-dziura.

Jeżeli interesuje Cię, w jaki sposób bada się ekscytony, spójrz na rysunek.



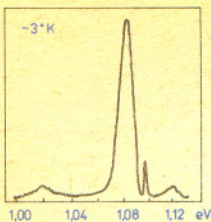
Aparatura do badania fotoluminescencji (świecenia pod wpływem pobudzenia światłem) półprzewodników stosowana do badania ekscytonów.

Ekscyton w kryształach

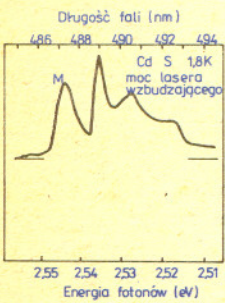


Próbka półprzewodnika, umieszczona w kriostatcie zapewniającym ochłodzenie jej do temperatury ciekłego helu (4,2 K albo, jeśli wolisz, -269°C), jest oświetlona światłem lasera. Promieniowanie wysyłane na skutek rekombinacji ekscytonów, przez próbkę pobudzoną światłem jest skupione (tu: za pomocą zwierciadła wklęsłego) na szczeliny wejściowej monochromatora, który w połączeniu z fotopowielaczem i układem elektronicznym przeprowadza analizę widma świecenia, czyli luminescencji próbki. Wynik otrzymuje się z rejestratora w postaci wykresu natężenia jako funkcji długości fali. Ekscytony obserwuje się też w widmach absorpcji (pochłaniania) i odbicia światła przez półprzewodniki.

Jeżeli nie zraziłeś się tym nagromadzeniem fachowych terminów, możesz jeszcze zapytać: I co z tych badań wynikło? Oczywiście ekscytonu, podobnie jak atomu wodoru nie ogląda się np. pod mikroskopem. Określa się natomiast ich podstawowe parametry: promień orbity, po której elektron okrąży dodatnio naładowaną cząstkę, energię wiązania, masę itd. Jeżeli spojrzysz na margines, zobaczysz, że ekscyton w typowym półprzewodniku (parametry mogą się nieco różnić w różnych kryształach) jest w przybliżeniu sto razy większy i tysiąc razy słabiej związany niż atom wodoru. Teraz można już wyjaśnić, dlaczego trzeba badać ekscytony w niskich temperaturach: w temperaturze pokojowej drgania



Widmo fotoluminescencji krzemu opublikowane przez Haynesa w 1966 r. Najsilniejsza linia była błędnie przypisywana biekscytonom.



Widmo fotoluminescencji CdS. Pierwsze maksimum od lewej pochodzi od rekombinacji biekscytonów.

ekipne spowodowałyby natychmiastowe oderwanie elektronu od dziury. Jeżeli ekscytony — powiesz z pewnością, Czytelniku — są tak podobne do atomów wodoru, to powinny łączyć się w pary podobne do dwuatomowych cząsteczek H_2 . Masz całkowitą słusność. Taka para — to

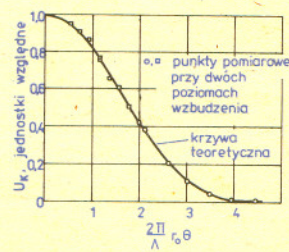
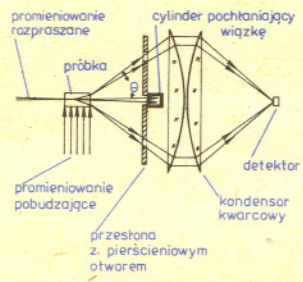
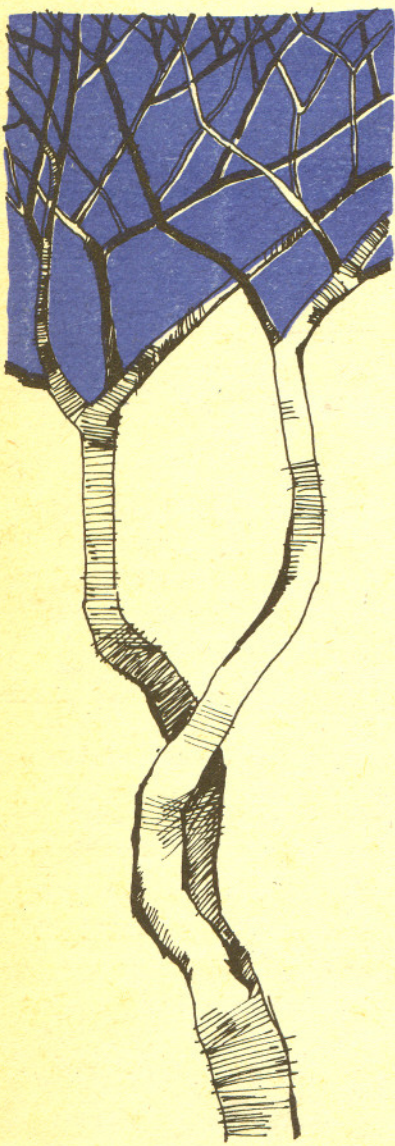
Biekscyton: cząsteczka dwukrotnie odkryta

Rysunek przedstawia historyczne widmo fotoluminescencji w germanie, na którym J. R. Haynes rozpoznał w 1966 roku jedną z linii jako wywołaną przez rekombinację biekscytonów. Niestety, dalsze badania wykazały niezbitcie, że Haynes był w błędzie i biekscyton musiał poczekać jeszcze trochę na swoje odkrycie. Na rysunku obok przedstawiono widmo luminescencji kryształu siarczku kadmu CdS. Oznaczone na nim maksimum *M* pochodzi rzeczywiście od rekombinacji biekscytonów. Autorzy (M. Shionoya i inni) wyznaczyli energię wiązania dwóch ekscytonów w molekułę — biekscyton — równą 5,4 meV.

Biekscytony nie są jednak najciekawszym tworem, jaki można otrzymać wytwarzając duże ilości nośników obu znaków w kryształach. Skoro tak trafnie przewidziałeś, Czytelniku, istnienie biekscytonów, spróbuj posunąć się o krok dalej i powiedz: ekscytony czy biekscytony poruszają się po kryształach, zapewne zderzając się od czasu do czasu — zupełnie jak cząsteczki w gazie. Rzeczywiście, możemy mówić o gazie ekscytonowym. No, dobrze — powiesz — ale w takim razie przy dostatecznie dużej koncentracji ekscytonów w odpowiednio niskiej temperaturze nasz gaz powinien się skroplić tworząc ciecz ekscytonową. Przypuszczenie Twoje idzie w dobrym kierunku, ale jest niezupełnie dokładne: ciecz powstanie, ale jej składnikami będą nie ekscytony, lecz indywidualne elektrony i dziury. Będzie to

Plazma elektronowo-dziurowa

Wróćmy teraz do doświadczenia Haynesa. To, co uznał on za biekscyton, okazało się być właśnie cieczą — plazmą elektronowo-dziurową. A skąd to wiadomo? — zapytasz. Dowodów na kondensację gazu ekscytonowego w plazmę elektronowo-dziurową jest wiele. Najbardziej bezpośrednie prowadzą do obserwacji kropli tej cieczy. Krople takie można obserwować przez badanie rozpraszania na nich fali elektromagnetycznej w obszarze podczerwieni.

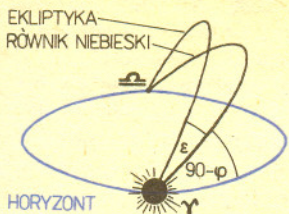


Układ pomiarowy do badania rozpraszania podczerwieni na kroplach elektronowo-dziurowych i otrzymany za jego pomocą rozkład kątowy natężenia promieniowania.

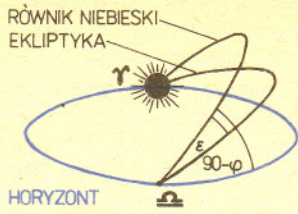
Jeżeli krople są bardzo małe w porównaniu z długością fali — rozpraszanie jest izotropowe — jednakowe we wszystkich kierunkach. Większe krople na skutek interferencji rozpraszają światło anizotropowo, a zależność kątowna może być bardzo urozmaicona. Na rysunku możesz zobaczyć rozkład kątowny natężenia promieniowania podczerwonego zmierzony przez J. E. Pokrowskiego i K. I. Swistunową w 1971 roku. Wyznaczyli oni promienie kropli plazmy elektronowo-dziurowej w germanie, które wyniosły 4 μm i 8 μm (dla dwóch różnych natężeń światła pobudzającego).

Czy to wszystko, co można znaleźć w półprzewodniku?

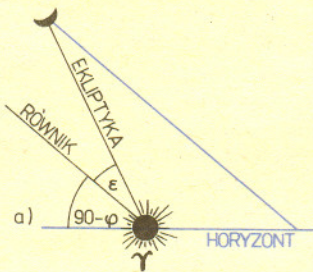
Na pewno nie. Można tam znaleźć na przykład cząstki zachowujące się w sposób, jaki teoria względności przewiduje dla ruchu z prędkością zbliżoną do prędkości światła. W odróżnieniu od zjawisk obserwowanych w próżni w półprzewodniku efekty te występują przy znacznie mniejszych prędkościach. Czy oznacza to, że teoria względności została obalona? Jeszcze nie. Żeby to jednak opisać szczegółowo, potrzebny byłby następny artykuł.



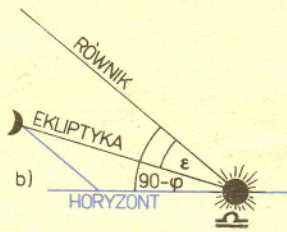
Rys. 1. W czasie równonocy wiosennej, w momencie zachodu Słońca, ekliptyka tworzy największy kąt z horyzontem.



Rys. 2. W czasie równonocy wiosennej, w momencie wschodu Słońca, ekliptyka tworzy najmniejszy kąt z horyzontem.



Rys. 3. Położenie „młodego” Księżyca na niebie w momencie zachodu Słońca w dniu równonocy: a) wiosennej, b) jesiennej. Kolorem zaznaczona jest droga Księżyca do jego zachodu.



W naszych szerokościach geograficznych nie jest obojętne, którą porę roku wybrać do obserwacji „młodego” Księżyca — będącego tuż po nowiu czy też cienkiego sierpa „starego” Księżyca przed nowiem. Jest to uzależnione od kąta, który tworzy ekliptyka z horyzontem w momencie wschodu czy zachodu Słońca w danej porze roku. Kąt ten w ciągu doby zmienia się w granicach od $90^\circ - \varphi + \varepsilon$ do $90^\circ - \varphi - \varepsilon$ (φ — szerokość geograficzna miejsca obserwacji, ε — kąt nachylenia ekliptyki do równika niebieskiego równy około $23^\circ 5'$). Sytuacje te ilustrują rysunki 1 i 2, pokazujące zmiany położenia ekliptyki w ciągu 12 godzin w dniu równonocy wiosennej.

„Młody” Księżyc najdogodniej obserwować wiosną, ponieważ ekliptyka tworzy wtedy największy kąt z horyzontem w momencie, gdy zachodzi Słońce. Księżyc, poruszający się wewnątrz pasa o szerokości 5° otaczającego ekliptykę, ma wtedy stosunkowo długą drogę do przebycia na niebie po zejściu Słońca. Odwrotnie jest w momencie równonocy jesiennej — gdy ekliptyka przy zachodzie Słońca tworzy najmniejszy kąt z horyzontem. Księżyc, wkrótce po zapadnięciu zmierzchu znajduje się wówczas bardzo nisko nad horyzontem i zachodzi zbyt wcześnie, aby go można było zaobserwować (rys. 3a, b). „Młody” Księżyc można dostrzec wiosną już w około 30 godzin po nowiu, podczas gdy jesienią niełatwo go odszukać nawet po 3 dniach. Odwrotna sytuacja ma miejsce przy obserwacjach „starego” Księżyca. Najdłużej jego cienki sierp widać przed świtem — jesienią, a najkrócej wiosną.

Zachęcamy do próby odszukania „młodego” Księżyca 10 lutego lub 10 kwietnia 1986 r. na wieczornym niebie — po zachodzie Słońca. Cienki sierp Księżyca będącego około 40 godzin — w lutym lub 36 — w kwietniu po nowiu powinien znajdować się nieco powyżej miejsca zachodu Słońca. Pomocna w odszukaniu może być lornetka.

Analogicznym prawidłowościom podlegają warunki obserwacji planet dolnych — Merkurego i Wenus. Obie mogą przebywać na niebie w niewielkiej odległości kątowej od Słońca, wkrótce po jego zachodzie lub przed wschodem. Najlepszym okresem do obserwacji wieczornych jest wiosna, porannych — jesień. Wiosną bieżącego roku Wenus świecić będzie jako Gwiazda Wieczorna, a więc warunki jej obserwacji powinny być stosunkowo dobre. Najkorzystniejszy okres do obserwacji Merkurego w tym roku przypada wieczorem od 22 lutego do 5 marca, a rano od 5 do 20 sierpnia.

mgr Joanna UDALSKA



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 421. Wykazać, że wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmujący wartości nieparzyste w dwóch kolejnych liczbach całkowitych nie ma pierwiastków całkowitych.
Rozwiązanie na str. 12

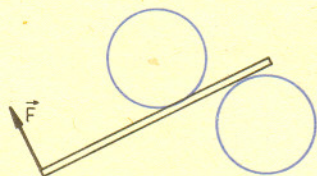
M 422. Znaleźć wierzchołki kwadratu mając dane cztery jego punkty, po jednym na każdej prostej zawierającej bok.
Rozwiązanie na str. 13

M 423. Sto listów włożono losowo do stu zaadresowanych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby listów, które znalazły się we właściwych kopertach.
Rozwiązanie na str. 11

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 188. Dwie jednakowe beczki stoją pionowo w niewielkiej odległości od siebie. Aby rozsunąć beczki, w szczelinę między nimi włożono deskę (rysunek) i użyto jej jako dźwigni. Czy obie beczki zaczną się przesunąć równocześnie?
Rozwiązanie na str. 7

F 189. Jaka jest przyczyna tego, że szuflady (szczególnie z dwoma uchwytnymi) często „zacinają się” i nie można ich wtedy wysunąć mimo przykładania do uchwytów dużych sił?
Rozwiązanie na str. 7



Myślący komputer

Mgr Jacek PACHOLCZYK

Od wczesnych dni informatyki, od czasów gdy John von Neumann i Alan Turing rozpoczęli badania modeli maszyn matematycznych, marzenie stworzenia myślących komputerów fascynowało badaczy i całe środowisko naukowe. Cóż czyni myślący komputer tak atrakcyjnym? Oczywiście, im bardziej sprawną posiadamy maszynę, tym więcej zadań możemy jej zlecić. Sprawność i dokładność współczesnych komputerów wielokrotnie przewyższają osiągnięte przez ludzi. Gdyby wyposażyć je jeszcze w zdolność rozwiązywania problemów, stałyby się dla nas znacznie bardziej pożyteczne.

Poza tym porozumieć się z maszyną cyfrową może obecnie tylko ten, kto opanował odpowiednie, formalne metody wyrażania rozkazów i odczytywania wyników. Myślące maszyny mogłyby używać swego intelektu również do interpretowania sygnałów ze świata w taki sposób, w jaki robią to ludzie. W szczególności nie miałyby trudności ze zrozumieniem poleceń wyrażanych językiem potocznym. Umożliwiłoby to powszechne wykorzystanie komputerów bez konieczności specjalnego szkolenia użytkowników.

Przystępując do badań nad „myślącym komputerem” powinniśmy zacząć od sformułowania wymagań dotyczących jego „zachowania”. Przede wszystkim musimy zdecydować, jakiego rodzaju sygnały powinien rozpoznawać i interpretować. Człowiek odbiera bodźce ze świata za pomocą narządów swych pięciu zmysłów. Wyposażenie maszyny w sztuczne zmysły odpowiadające ludzkim napotyka dwie przeszkody. Pierwszą jest skonstruowanie urządzeń zdolnych do odbierania i rozróżniania bodźców. Gdyby nawet takie urządzenia były dostępne, pozostałby jeszcze problem zinterpretowania — zrozumienia odebranych sygnałów. Każdy, kto uświadomi sobie, jak niewyraźne, niejednoznaczne informacje docierają do nas, zrozumie, jak trudno tego dokonać.

Mądrość, jakiej oczekujemy od maszyny, polega na rozumieniu przez nią otaczających ją sytuacji i zdolności wyboru celowych reakcji na nie. Zatem poza rozpoznawaniem świata zewnętrznego komputer musiałby jeszcze być świadom celu swego działania i powinien umieć podjąć podporządkowaną temu celowi akcje, właściwą w danej sytuacji. Niezbędne jest więc, aby posiadał pewien (możliwie duży) zasób informacji o dziedzinie, w której działa i umiał się nimi posługiwać.

Pozornie łatwo to osiągnąć — wystarczy napisać odpowiedni program — program, który będzie umiał zareagować odpowiednio na wszystkie sytuacje, jakie mogą się przydarzyć. Niestety, nawet największa maszyna nie jest w stanie zapamiętać wszystkich faktów już ze stosunkowo niewielkiej dziedziny. Konieczne jest więc takie zorganizowanie pamięci, aby bezpośrednio dostępne były tylko najważniejsze, podstawowe rzeczy, a wszystkie pozostałe maszyna umiała z nich wywnioskować. Zasadniczym problemem okazuje się więc zagadnienie organizacji zapisu wiedzy w pamięci komputera, czyli tzw. reprezentacji wiedzy. Jego istotą jest określenie, jakie fakty należy uznać za podstawowe i jak je wykorzystywać, aby maszyna działała w sposób inteligentny.

Istnieją, oczywiście, formalne metody wyrażania teorii i faktów. Były one inspiracją do powstania wielu metod reprezentacji wiedzy. Część spośród badaczy problemu obrała jednak inną drogę rozwiązania, wychodząc od nauk o człowieku. Badaniem organizacji i funkcjonowania pamięci człowieka zajmuje się

psychologia. Opracowano wiele modeli i przeprowadzono mnóstwo eksperymentów, które miały je zweryfikować. Gdyby udało się zorganizowanie pamięci maszyny w sposób podobny do pamięci człowieka, można by się było spodziewać od niej podobnego działania. Ponadto można przypuszczać, że komputery byłyby mniej wrażliwe na wszystkie te czynniki, które powodują błędy w naszym rozumowaniu. Niestety, o żadnym z psychologicznych modeli nie wiadomo, czy jest on poprawny, czy też nie. Problem reprezentacji zyskuje w tym przypadku dodatkowy aspekt — badania nad myślącymi komputerami pozwolą, być może, zweryfikować teorie psychologiczne w nich wykorzystane.

Zanim zajmiemy się przykładowymi metodami reprezentacji wiedzy, przyjrzyjmy się najpierw dokładniej jej samej. Zauważmy przede wszystkim, że nawet wiedza o tych samych obiektach może być istotnie różna w zależności od celu, w jakim chcemy ją wykorzystywać. Opisując kobiecie pokaz mody zajmiemy się raczej opisami kreacji niż metodami ich wykonania. Będziemy więc relacjonować ten fragment wiedzy, który umownie nazywa się deklaratywnym. Zupełnie inaczej zachowamy się zapewne w przypadku rozmowy z krawcem. Zwrócimy mu przede wszystkim uwagę na sposoby wykonania obejrzanych obiektów — kreacji, czyli proceduralną wiedzę o nich. Różnice w opisach mogą również wynikać z tego, czy interesują nas ogólne własności elementów jakiegoś zbioru, czy cechy charakterystyczne dla poszczególnych obiektów.

Inną istotną cechą wiedzy jest istnienie zbioru tych pojęć, które jesteśmy skłonni uznać za podstawowe, pierwotne i nierozkładalne. Zbiór ten oczywiście zależy od tego, kto i w jakim celu ma wiedzę wykorzystywać. To, co jest atomowym składnikiem materii dla ucznia szkoły podstawowej, jest niesłychanie złożoną strukturą dla fizyka.

Bardzo ważną własnością wiedzy, o której bez wątpienia nie można zapomnieć, jest zdolność wyrażania się o sobie samej. Oznacza to, że można wiedzieć coś o pewnym zbiorze obiektów równie dobrze, jak wiedzieć coś o wiedzy o tym zbiorze.

Zapis wiedzy w pamięci komputera powinien mieć wszystkie te własności. Powinien ponadto umożliwiać wyciąganie wniosków o cechach i własnościach obiektów, których ta wiedza dotyczy.

Spróbujmy teraz przyrzeć się różnym sposobom zapisywania wiedzy o świecie. Formuły rachunku predykatów pierwszego rzędu są powszechnie znane i dobrze opisane. Równie dobrze opisane są metody wnioskowania, czyli dowodzenia nowych twierdzeń. Więcej nawet — znane są metody automatyczne, dające się opisać prostym algorytmem. Gdyby przyjąć, że reprezentowanym obiektem odpowiadają stałe indywidualne, a relacjom między tymi obiektami — predykaty, otrzymalibyśmy dobrą metodę reprezentacji wiedzy. Niestety, okazuje się, że za pomocą takich formuł nie wszystkie fakty dają się opisać. Poszukuje się wobec tego formalizmów będących rozszerzeniem rachunku predykatów i wolnych od tej wady. Jedną z ciekawych propozycji są logiki modalne, pozwalające za pomocą specjalnych operatorów wyrażać zdania, których wartość logiczna zależy od kontekstu, w którym się je rozpatruje. Na przykład zdanie: „Sherlock Holmes mieszkał na Baker Street” jest prawdziwe tylko w świecie powieści Artura Conan-Doyle’a. Inną propozycją są logiki defaultowe pozwalające zapisywać ogólne twierdzenia o obiektach należących do pewnych zbiorów, niekoniecznie prawdziwe dla wszystkich ich elementów. Pozwalają one również uzyskiwać różne opisy świata w zależności od tego, które ze zbioru tzw. defaultów uznamy za prawdziwe.

Wszystkie wspomniane wyżej metody reprezentacji mają jedną wspólną cechę wyraźnie ograniczającą ich zastosowanie. Bardzo trudno za ich pomocą zapisywać proceduralne fakty o świecie.

Próbą rozwiązania problemu reprezentowania wiedzy proceduralnej jest mechanizm tzw. aktorów. Obrazem zbioru faktów jest zbiór aktywnych procesów zwanych aktorami, które mogą współpracować ze sobą wysyłając i otrzymując wiadomości. Każda wiadomość również jest aktorem, co oznacza, że może po drodze zbierać i wysyłać własne wiadomości. Takie podejście do rozpatrywanego problemu jest specjalnie przystosowane do zapisywania wiedzy typu proceduralnego i zaniedbuje jej deklaratywną stronę.

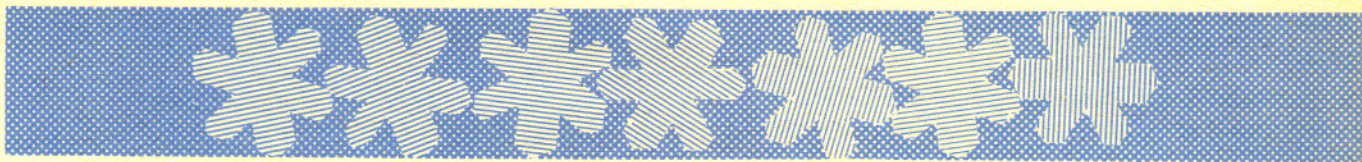
Chęć stworzenia uniwersalnego sposobu opisu świata doprowadziła do powstania dwóch bardzo podobnych formalizmów opartych na pomysłach wywodzących się z psychologii. Pierwszy traktuje wiedzę jako zbiór obiektów nazywanych węzłami. Węzły te związane są ze sobą relacjami zwanymi lukami. Z każdym z nich można związać akcje (procesy) wyrażające na przykład własności danej relacji. W drugim — zwanym formalizmem ram — mamy do czynienia ze specjalną strukturą danych — ramą. Rama opisuje zbiory obiektów, pojęcia abstrakcyjne, konkretne indywidua bądź ich cechy. W zależności od potrzeby używa w tym celu tzw. deskryptorów (wyrażających wiedzę deklaratywną) lub procedur. Szczególną cechą formalizmu ram jest sposób opisywania świata jako zbioru prototypów i ich egzemplarzy. Prototyp to obiekt abstrakcyjny, którego opis pasuje do wszystkich konkretnych obiektów — jego egzemplarzy.

Inną jeszcze propozycją jest formalizm reguł produkcji. Za pomocą prostej syntaktyki definiuje się reguły, wedle których

z jednego ciągu symboli można otrzymać inny. Jeżeli będziemy wyrażać wiedzę o świecie jako ciąg symboli (np. znanych faktów), to zdefiniowane reguły produkcji pozwolą wyprowadzać wnioski z posiadanych już informacji. Formalizm ten łączy deklaratywny i proceduralny sposób wyrażania wiedzy. W ostatnich latach wykorzystano go w kilku systemach ekspertowych przeznaczonych głównie dla użytkowników mikrokomputerów.

Wszystkie te metody reprezentacji wiedzy spełniają wspólny warunek. Zmianom reprezentowanej dziedziny odpowiadają procesy, po których zajściu reprezentacja dobrze odwzorowuje nową dziedzinę. Poza tym każdy dobry sposób reprezentacji powinien umożliwiać zapisywanie wiedzy o wiedzy. Powinien również umożliwiać zarówno reprezentowanie wiedzy deklaratywnej, jak i proceduralnej. Na koniec, mechanizm wnioskowania powinien umożliwiać wyciąganie wniosków poprawnych i tylko takich.

Stosowane obecnie formalizmy reprezentacji wiedzy spełniają większość z tych wymagań. Żaden z nich nie jest jednak doskonały. Ciągłe nie rozwiązaniem, a podstawowym problemem jest sposób wyboru faktów atomowych. Mimo to już teraz próbuje się wykorzystywać inteligentne komputery, na razie w nielicznych dziedzinach. Przykładem może być system PUFF, który już teraz pomaga leczyć schorzenia układu oddechowego. Systemy diagnozujące choroby krwi, pomagające reperować lokomotywy czy też uczące programowania w języku ADA są bądź już gotowe, bądź w fazie testowania. Być może zdobyte w ten sposób doświadczenia pozwolą usunąć występujące problemy i w przyszłości zrealizować marzenia o myślących maszynach.



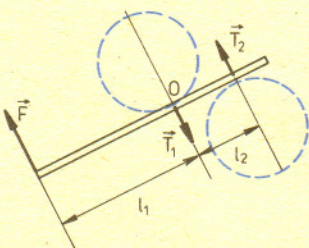
Rozwiązanie zadania F 188. Zwiększamy siłę nacisku F na dźwignię. Układ będzie w równowadze, dopóki co najmniej jedna z sił T_1 i T_2 nie przekroczy maksymalnej wartości siły tarcia statycznego beczki o podłoże. Warunki równowagi mają postać:

$$F - T_1 + T_2 = 0, \\ Fl_1 - T_2 l_2 = 0,$$

wynika z nich związek:

$$T_1 = (1 + l_2/l_1)T_2.$$

Nacisk końca dźwigni na beczkę bliżej jest zawsze większy, a więc zacznie się ona przesuwac pierwsza.



Rozwiązanie zadania F 189. Przyczyną zacinania się szuflady jest najczęściej niewłaściwe miejsce zamocowania uchwytów. Gdy przykładą się do nich nieco różne siły, szuflada obraca się i w miejscu zetknięcia z prowadnicą pojawiają się duże siły tarcia.

Znajdziemy warunek, który musi być spełniony, aby można było wysunąć szufladę ciągnąc tylko za jeden z dwóch uchwytów. Na rysunku pokazane są siły działające na szufladę i reakcje na ściany boczne — R_1, R_2 , siły tarcia — T_1, T_2 oraz siła przyłożona do uchwytu — F .

W warunkach równowagi:

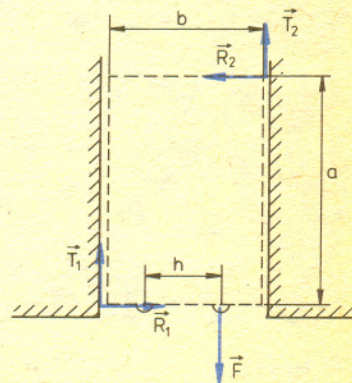
$$F + T_1 + T_2 = 0 \quad i$$

$$(*) \quad Fh/2 + T_1 b/2 - R_1 a/2 - R_2 a/2 - T_2 b/2 = 0.$$

Oczywiście $R_1 = R_2 = R$ i $T_1 = T_2 = kR$, gdzie k — współczynnik tarcia statycznego. Stąd i z (*) wynika, że $R = hF/2a$. Podczas wysuwania szuflady $F > T_1 + T_2$, a więc poszukiwany warunek ma postać

$$k < \frac{a}{h}.$$

Gdy uchwyty rozstawione są zbyt szeroko, szuflada zacina się niezależnie od wartości siły F .



delta mata delta

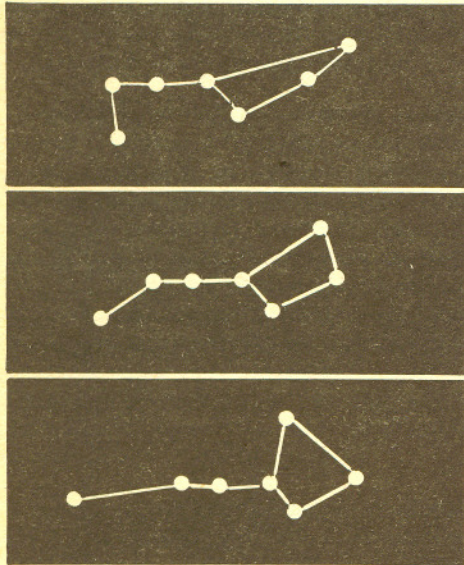
Czy i jak poruszają się gwiazdy?

Jeżeli gwiazdziste niebo bywa dla wielu ludzi obiektem niezbyt interesującym, to przyczyną może być jego pozorna niezmiennosc — na gwiazdzistym niebie właściwie nic się nie dzieje. Nasuwa się jednak naturalne pytanie, czy rzeczywiście układ gwiazd na niebie jest niezmienny po wsze czasy. Od dawna już wiemy, że tak nie jest: wszystkie gwiazdy poruszają się i znamy prawidłowości w tych ruchach, a niezmiennosc nieba jest skutkiem ogromnych odległości międzygwiazdowych. Ruchy gwiazd bada się w zasadzie łatwo: należy zrobić dwa zdjęcia jakiegoś obszaru tym samym przyrządem i w tych samych warunkach w możliwie najdłuższym odstępie czasu, a potem żmudnie mierzyć względne przesunięcia gwiazd. Tylko że przy odstępie czasu liczącym nawet dziesiątki lat przesunięcia te są wykrywalne dopiero pod mikroskopem i dlatego pozornie niebo wygląda stale tak samo.

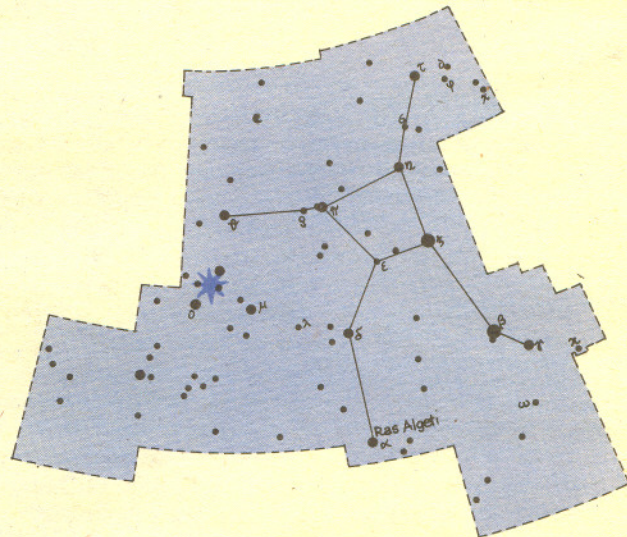
Jakie więc widzimy prawidłowości w ruchach gwiazd?

W pierwszym przybliżeniu gwiazdy widoczne gołym okiem i wiele słabszych, aczkolwiek niezbyt odległych — powiedzmy, do odległości 20 lat świetlnych — robią wrażenie, że poruszają się po niebie we wszystkich możliwych kierunkach (zob. *Patrz w niebo, Delta 7/1985*).

Ich tempo przesuwania się, jak mówimy: ruch własny, wynosi kilka sekund łuku na rok. Najszybsza znana gwiazda, tzw. Gwiazda Barnarda w Wężowniku, przesuwa się o 10',25 na rok. Gwiazdy dalsze, powiedzmy, do odległości 500 lat świetlnych, mają siłą rzeczy ruchy własne odpowiednio mniejsze, za to nie tak chaotyczne. Mianowicie wygłąda, jakby średnio rozbiegały się od gwiazdozbioru Herkulesa, a zbiegały w Gołębiu. Przyczyną jest ruch samego Słońca (wraz z Ziemią) względem tych gwiazd. To Słońce porusza się ku Herkulesowi i gwiazdy przed nim pozornie się rozstępują jak drzewa przed człowiekiem idącym przez las. Mówimy, że apeks Słońca leży w Herkulesie i wiemy nawet, że względem najbliższych gwiazd Słońce biegnie w tym kierunku z prędkością około 20 km/s.

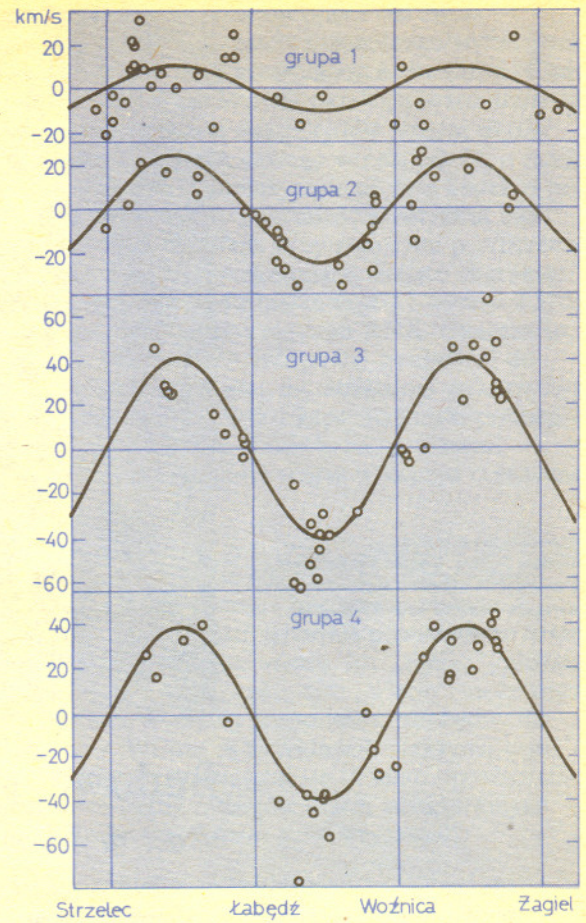


Wielka Niedźwiedzica (kolejno) 50 000 lat temu, obecnie i za 50 000 lat.



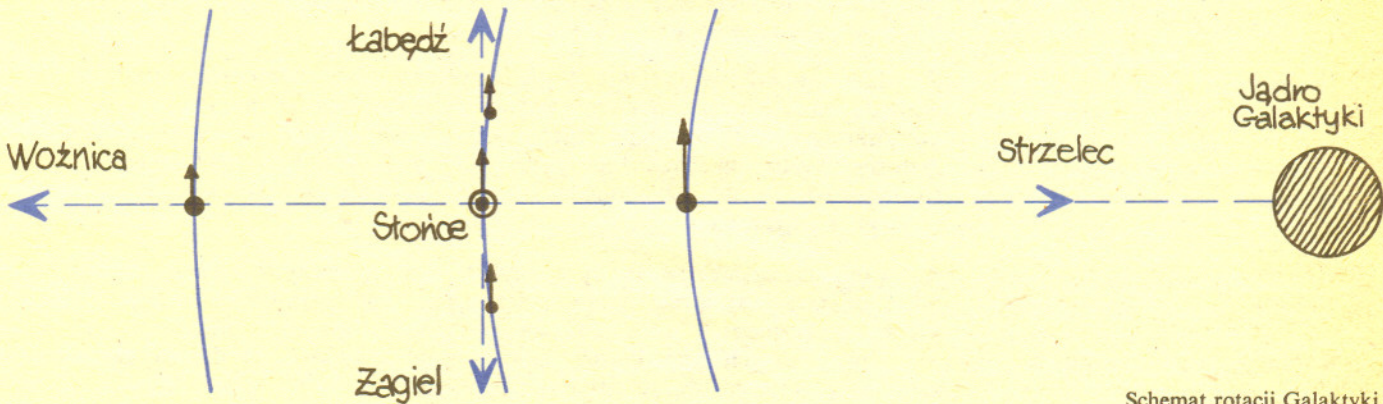
Położenie apeksu Słońca.

Dla gwiazd jeszcze dalszych nie daje się wyznaczyć ich ruchów własnych, można jednak mierzyć składową ich prędkości względem Słońca skierowaną wzdłuż promienia widzenia, czyli tzw. prędkość radialną. Przy pomiarze korzysta się z faktu, że linie w widmie poruszającej się radialnie gwiazdy leżą w innych miejscach widma niż odpowiadające im linie laboratoryjne — jest to zjawisko Dopplera. Według umowy prędkość radialną uważamy za dodatnią, gdy gwiazda od nas oddala się. W każdym razie ciekawą prawidłowość wykazują prędkości radialne odległych gwiazd leżących w Drodze Mlecznej.



Prędkości radialne cefeid w Drodze Mlecznej. Grupa 1 to gwiazdy odległe średnio o 1300 lat świetlnych, grupa 2 — o 3400, grupa 3 — o 5400 i grupa 4 — o 7500 lat świetlnych.

Widać, że gwiazdy położone w Strzelcu, Łabędziu, Woznicy i Żaglu średnio nie zmieniają odległości od Słońca. Z kolei gwiazdy z kwadrantu między Strzelcem a Łabędziem średnio od Słońca oddalają się, z następnego kwadrantu zbliżają itd. Fakt ten tłumaczymy obrotem całej Galaktyki, przy czym obrót ten musi zachodzić w specjalny sposób.

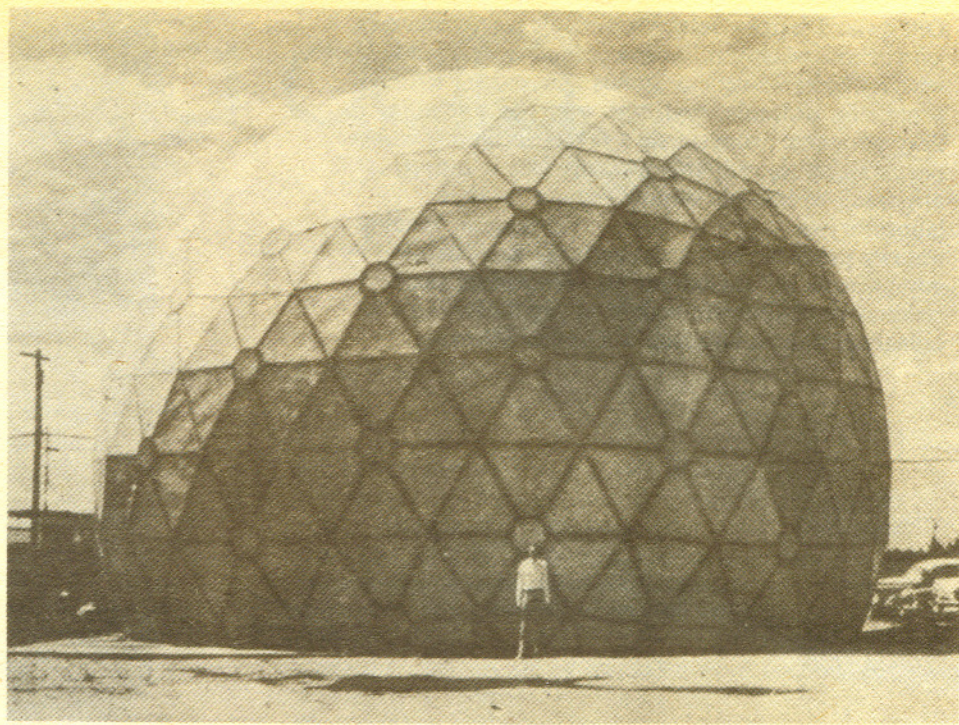


Schemat rotacji Galaktyki.

Mianowicie w Strzelcu leży jądro naszej Galaktyki, a gwiazdy obiegają je podobnie jak planety obiegają Słońce — bliższe centrum biegają szybciej, a wszystkie w przybliżeniu po kołach. Wobec tego w Strzelcu i Woznicy widzimy gwiazdy poruszające się akurat równoległe ze Słońcem, a w Łabędziu i Żaglu — poruszające się z tą samą prędkością, co Słońce (bo po tej samej orbicie). Nic więc dziwnego, że w tych czterech kierunkach mamy zerowe prędkości radialne. Z kolei w kwadrancie Drogi Mlecznej między Strzelcem a Łabędziem widzimy gwiazdy uciekające przed Słońcem — poruszają się one szybciej, bo są bliżej centrum Galaktyki; gwiazdy z następnego kwadrantu są doganianie przez Słońce itd. Mamy więc pełne wytłumaczenie faktu, że prędkości radialne gwiazd w Drodze Mlecznej układają się na wykresie w kształt podwójnej sinusoidy.

W sumie obraz gwiazd w Galaktyce można w skrócie opisać następująco: regularny ruch gwiazd to obieganie po kołach centrum Galaktyki z prędkością tym większą, im ciaśniejsza orbita, a każda z nich (Słońce też) ma jeszcze ponadto swój niewielki ruch względem grupy sąsiadek. A że to wszystko nie jest łatwo dostrzec ... ? Trudno, ale odległości gwiazd nie na darmo bywają nazywane „astronomicznymi”...

Kopuła geodezyjna projektu Buckminstera Fullera. Kopuła jest wycinkiem bryły o symetrii dwudziestościanu foremnego. W 12 narożach elementy kopuły łączą się po 5 tworząc pentamery.



Budowa prostych wirusów kulistych

Doc. dr Włodzimierz ZAGÓRSKI

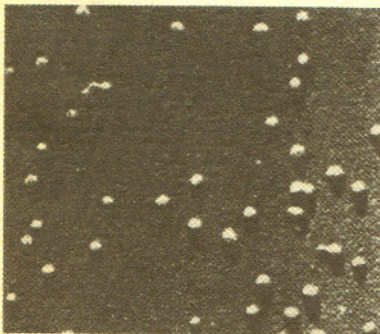
Obserwacje choroby mozaiki tytoniu dowiodły istnienia specjalnej klasy patogenów przesączających się przez filtry zatrzymujące bakterie. Tego typu przesączalny, submikroskopowy, ciepłotrwały czynnik zakaźny został nazwany przez Beijerincka *contagium vitum fluidum*. Wkrótce poznano więcej tego typu patogenów i przeniesiono na nie ogólną nazwę wirusów, oznaczającą dawniej po prostu czynnik zakaźny.

Zupełnie niespodziewanie okazało się, że pozornie nieistotna cecha fizyczna oddziela od siebie dwa odmienne rodzaje form biologicznych — twory komórkowe i twory ulegające samopowielaniu się, lecz nie będące komórkami. Pozorne kontinuum świata biologicznego rozpadło się: wymiary fizyczne rozgraniczyły materiężywioną na klasy różniące się nie tylko wielkością, ale i rodzajem organizacji.

A organizacja cząstek wirusowych, czyli wirionów, rzeczywiście jest odmienna od organizacji innych tworów biologicznych — populacja wirionów tego samego wirusa jest bowiem złożona z tworów o jednolitym kształcie. W przypadku wirusów „kulistych” cząstki mają zawsze tę samą, typową dla danego gatunku średnicę, a w przypadku wirusów „pałczkowatych” — średnicę i długość.

By nie poszerzać zbyt tematu, omówię tu skrótowo wyłącznie zasady budowy tzw. wirusów kulistych, posługując się przykładem wirusa f2 zakażającego bakterie i roślinnego wirusa krzaczastej karłowatości pomidora (TBSV). Oba te wirusy należą bowiem właśnie do klasy wirusów kulistych, a ich białkowe otoczki, zwane kapsydami, zbudowane są z takich samych podjednostek, czyli swoistych dla danego wirusa białek. Oba są też tzw. RNA-wirusami, ich informacja genetyczna zakodowana jest bowiem w kwasie rybonukleinowym, a nie — jak w przypadku komórki — w kwasie dezoksyrybonukleinowym. Oba wirusy łatwo wyizolować w dużych — gramowych — ilościach, co umożliwia daleko posuniętą analizę ich struktury opartą na mikroskopii elektronicznej i krystalografii rentgenowskiej.

Nazwa kulisty kapsyd czy kulisty wirion odzwierciedla mikroskopowy kształt wirusa. Bliższa analiza wskazuje jednakże, że kuliste kapsydy są w istocie bryłkami o symetrii bazującej na dwudziestościanach foremnych. Stwierdzenie to miało pierwszorzędne znaczenie dla zrozumienia biologii molekularnej wirusów. Kształt ten został bowiem przewidziany dla takich wirusów przez



Preparat wirusa T5 oglądany w mikroskopie elektronicznym. Zwraca uwagę jednolitość kształtów wirionów.



Rozwiązanie zadania M 423. Załóżmy, że było n listów. Jest $n!$ możliwych sposobów rozmieszczenia listów w kopertach i jak zwykle w takich zadaniach każdemu z nich przypiszmy prawdopodobieństwo $\frac{1}{n!}$. W takim razie, aby obliczyć wartość oczekiwaną liczby listów we właściwych kopertach, trzeba zsumować liczby właściwie umieszczonych listów dla wszystkich ustawień i wynik podzielić przez $n!$. (Rysunek przedstawia sytuację dla 3 listów.) W naszym przypadku tablica ma n kolumn i $n!$ wierszy. W każdej kolumnie jest $(n-1)!$ właściwie umieszczonych listów: istotnie jest dokładnie $(n-1)!$ ustawień, przy których ustalony list trafia do właściwej koperty. Zatem wartość oczekiwaną wynosi $\frac{n \cdot (n-1)!}{n!} = 1$. Czyli niezależnie od n średnio jeden list trafia tam, gdzie trzeba.



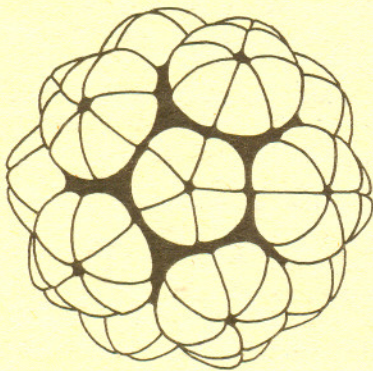
1	2	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1
1	3	2
2	1	3

Watsona i Cricka. Zasadniczym pojęciem, na którym oparli oni swoje przewidywania, była sformułowana przez nich zasada oszczędnego wykorzystania informacji genetycznej. Pojęcie to zrodziło się z następujących rozważań. Kod genetyczny ma charakter trójkowy, czyli 3 nukleotydy określają jeden aminokwas. Średnio rzecz biorąc, masa cząsteczkowa trzech nukleotydów wynosi około 1000, jednego zaś aminokwasu około 100. RNA takiego wirusa jak f2, o masie cząsteczkowej 1 100 000, może więc kodować sumarycznie syntezę białek o masie cząsteczkowej około 100 000 — inaczej mówiąc, pojemność genetyczna tego RNA wystarcza na syntezę białek o masie 100 000. Przy tego typu przeliczeniach odlicza się zwykle 10% masy RNA na odcinki niekodujące, mające charakter regulacyjny. Masa cząsteczkowa samego kapsydu białkowego f2 wynosi 2 520 000, a więc wielokrotnie przekracza pojemność genetyczną tego RNA. Oznacza to, że wirus nie jest w stanie zawrzeć w swoim RNA informacji niezbędnej do budowy kapsydu z różnorodnych białek, musi więc on oszczędnie wykorzystywać swoją informację genetyczną produkując jako białko kapsydu krótki polipeptyd, w wielu kopiach, na tym samym odcinku RNA. Takie krótkie, tożsame polipeptydy o niskiej masie cząsteczkowej mogą się scalać w kapsyd o znacznej masie.

Zasada oszczędności wykorzystania informacji genetycznej związana jest z tym, że wirusy ewoluują kumulując maksymalną ilość informacji w ograniczonej ilości kwasu nukleinowego. Ilość ta jest ograniczona objętością wirionu. Niewielka ilość kwasu nukleinowego wirusa musi zapewnić powielenie wirusowego RNA i syntezę białek strukturalnych wirusa. Im „mniej” informacji genetycznej zużyte zostaje na syntezę białek kapsydu, tym „więcej” może zostać zaangażowane w proces opanowywania komórki gospodarza, niezbędny do zapewnienia namnażania się wirusów. Wirusy są przykładem maksymalnego uproszczenia biologicznej jednostki samopowielającej się — temu uproszczeniu towarzyszy maksymalne zmniejszenie liczby rodzajów białek strukturalnych, co prowadzi do redukcji kształtu do prostych form geometrycznych.

Dlaczego jednak z redukcji rodzajów białek strukturalnych wyniknąć ma tworzenie wysoko uporządkowanych kształtów? Odpowiedź na to pytanie związana była z przyjęciem drugiego założenia: tożsamości kształtu cząsteczek białkowych o tej samej sekwencji aminokwasowej. Przyjmując tożsamość kształtu cząsteczek białka kapsydu należało zastanowić się, w jaki sposób ze stałej ilości tożsamych elementów (tu — bryłek białkowych) można zbudować „kulisty” kapsyd o możliwie najmniejszej średnicy. Watson i Crick dostrzegli, że jest to możliwe wówczas, gdy elementy te rozmieszczone zostaną na powierzchni dwudziestościanu foremnego. Wkrótce stwierdzono, iż rzeczywiście kapsydy wirusów kulistych mają symetrię dwudziestościanową (ikosadralną). Na powierzchni tej bryły w równoważnych pozycjach można jednakże rozmieścić co najwyżej 60 identycznych podjednostek. Tymczasem w kapsydach wielu wirusów liczba cząsteczek białkowych jest zwykle wyższa, np. w kapsydzie RNA-fagów stwierdza się obecność 180 cząsteczek białka.

Rozwiązanie zagadnienia rzeczywistego rozmieszczenia podjednostek na powierzchni wirusa przyszło z zupełnie niespodziewanej strony. Caspar i Klug poszukując odpowiedniego modelu objaśniającego budowę tzw. brył izometrycznych złożonych z więcej niż 60 tożsamych elementów, natknęli się na konstrukcję tzw. kopuły geodezyjnej, zaproponowaną przez Buckminstera Fullera, twórcę m. in. geometrycznych zasad efektywności konstrukcji. Fuller postawił przed sobą zadanie zbudowania kopuły z możliwie najmniejszej liczby podobnych elementów. Jego kopuła zbudowana została z 720 trójkątów należących do 12 (i tylko 12) typów, przy czym trójkąty te są „prawie równoboczne”. Co więcej — okazało się, że ta „możliwie najefektywniejsza kopuła” ma symetrię odpowiadającą dwudziestościanowi foremnemu. W dwunastu miejscach kopuły Fullera trójkąty te są zgrupowane po 5, tworząc tzw. pentamery. One z kolei tworzą naroża dwudziestościanu foremnego. Kopuła ta zbudowana jest zgodnie z zasadą quasi-równoważności, co znaczy, że trójkąty są prawie identyczne. Przy przyjęciu więc quasi-równoważności bryłę o symetrii dwudziestościanu — ikosadeltaedron — można zbudować z nie więcej niż 60 elementów. Caspar i Klug założyli więc, że podobna reguła obowiązuje w budowie kapsydów wirusów kulistych.



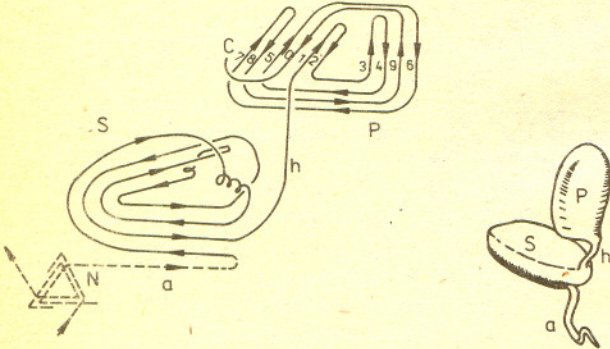
Ułożenie podjednostek białka kapsydu na powierzchni wirionu faga f2.

Omawiane przez nas wirusy należą właśnie do tej klasy. Analiza dużych powiększeń zdjęć w mikroskopie elektronowym pozwoliła na ustalenie rozmieszczenia podjednostek białkowych na powierzchni kapsydu.

Rozwiązanie zadania M 421. Zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych x i k liczba $w(x+2k) - w(x)$ jest parzysta. Wobec tego wielomian w przyjmuje dla całkowitych x tylko wartości nieparzyste, zatem nie ma pierwiastków całkowitych.

Założenia Caspara i Kluga dotyczące kapsydów o symetrii dwudziestościennej użyczyły w 1978 r. potwierdzenie doświadczalne, gdy wirusolodzy z Uniwersytetu Harvarda oraz MRC Laboratorium Biologii Molekularnej Uniwersytetu w Cambridge wykryli wirus krzaczastej karłowatości pomidora (TBSV) zbliżony strukturalnie do wirusa f2. Analiza rentgenograficzna takich kryształów pozwoliła jednoznacznie określić przebieg łańcuchów polipeptydowych w podjednostkach białka kapsydu, poznać kształt tych podjednostek i ich wzajemne ułożenie. Rysunek 1 przedstawia schemat przebiegu łańcucha polipeptydowego podjednostki białka kapsydu TBSV.

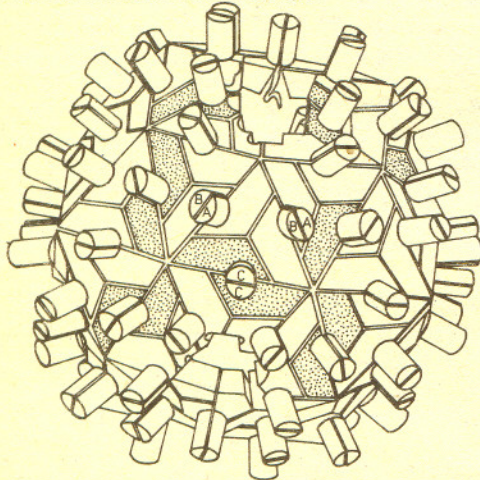
Jak widać, cząsteczka ta jest zbudowana w wysoce charakterystyczny sposób. Wyróżnić w niej można dwa ściśle upakowane rejony (domeny) będące płaskimi i sztywnymi tworami. Obie domeny połączone są krótkim odcinkiem h (2-3 aminokwasy) nie tworzącym spirali i mogącym się w pewnym stopniu odkształcać. Domena P sterczy na zewnątrz powierzchni kapsydu, domena S tworzy samą „skorupkę” kapsydu, a ramię N skierowane jest do środka kapsydu.



Rys. 1. Schemat cząsteczki białka kapsydu TBSV oraz przebieg łańcucha polipeptydowego w tej cząsteczce. C to C-koniec, N to N-koniec polipeptydu. W rejonie N-końca splecione są ze sobą N-końcowe fragmenty trzech sąsiadujących na powierzchni wirionu cząsteczek. P-domena skierowana na zewnątrz kapsydu (ang. projection), S-domena tworząca ścianę kapsydu (ang. shell), h-zawias (ang. hinge), a-ramię (ang. arm).

W wirusie podjednostka białka kapsydu występuje w postaci zespołów podwójnych (dimerów) w trzech różnych wariantach (nazwijmy je A , B i C). Domeny P tworzą na powierzchni kapsydu identyczne pary, domeny S jednakże ułożone są w nieco różny sposób w różnych fragmentach kapsydu. W ten właśnie sposób w rzeczywistości zrealizowana jest zasada quasi-równoważności podjednostek białka kapsydu wymagana przez teorię Caspara i Kluga. Zasada ta jest spełniona dzięki przyjęciu przez każdą cząsteczkę białka jednej z trzech quasi-równoważnych struktur pozwalających ściśle upakować „niby podobne” podjednostki w strukturę ikosadeltaedronu (rys. 2).

Obraz uzyskany za pośrednictwem analizy rentgenowskiej odpowiada oczekiwaniom wynikającym z rozważań nad geometrią kapsydu. Dochodzi tu jeszcze jeden dodatkowy element — mianowicie końcowy fragment łańcucha polipeptydowego sześćdziesięciu podjednostek zbudowanych w wersji C wykazuje wysoki stopień uporządkowania i, co więcej, trzy takie łańcuchy śrubowo zwijają się wokół siebie. Zaplatając się wzajemnie pod powierzchnią kapsydu końce N łańcuchów podjednostek C dodatkowo je zespalają. Innymi słowy — nie zakłócając całej struktury i nie zmieniając jej kształtu można by było usunąć z kapsydu podjednostki A i B . Pozostałby wówczas szkielet zbudowany z zespolonych ze sobą podjednostek C utrzymujący strukturę ściśle symetryczną, gdzie każda z 60 podjednostek C występowałaby w pozycji dokładnie równoważnej. W puste miejsca takiej podstawowej sieci wejść mogą tylko takie podjednostki, które przyjmują strukturę w wariantcie A lub B . Tak więc sam ściśle określony schemat powiązań podjednostek C narzuca quasi-równoważność ułożenia następnych podjednostek w kapsydzie.



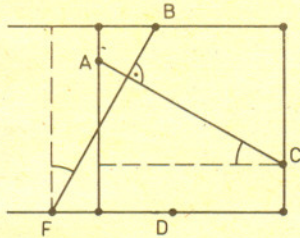
Rys. 2. Kapsyd TBSV. A , B , C — podjednostki o trzech różnych strukturach i mające różne otoczenia. Zewnętrzne powierzchnie domen S podjednostek typu C zostały zacieniowane. Domeny S podjednostek A układają się w pentamery grupując się wokół osi symetrii pięciokrotnej. Domeny S podjednostek B i C leżą naprzemiennie wokół osi symetrii trójkątnej, tworzą więc heksamery. Domeny S podjednostek A , B i C tworzą quasi-trimer o płaskiej powierzchni łączący się pod dwoma różnymi kątami z sąsiednimi quasi-trimerami.

W sumie widać, że kształt modelowej struktury biologicznej, jaką jest wirion, wynika z właściwości podstawowych składników budulcowych tej struktury. I że reguły budowy struktur biologicznych są ściśle i dają się ująć w języku matematyki, fizyki i chemii. Cóż do tego dodać? Chyba już tylko to, że bryły platońskie są nie tylko ideami matematycznymi lub tworem ręki ludzkiej, lecz istnieją od zarania w otaczającej nas rzeczywistości fizycznej. I że znak pentameru, uznawany przez starożytnych za znak życia, jest nim naprawdę, będąc ukryty w najprostszych strukturach materii ożywionej.



Rozwiązanie zadania M 422. Niech A, B, C, D będą danymi punktami leżącymi na kolejnych bokach szukanego kwadratu. Prowadzimy odcinek BF prostopadły do AC i tej samej długości. Jeżeli punkty D i F są różne, to prosta DF zawiera bok szukanego kwadratu. Rysując prostopadłe do niej przez A i C oraz równoległą przez B otrzymujemy kwadrat, gdyż odległości przeciwległych boków są równe.

W przypadku, gdy $D = F$, bokiem szukanego kwadratu może być każda prosta przechodząca przez D i mająca punkty A, B, C po jednej stronie.



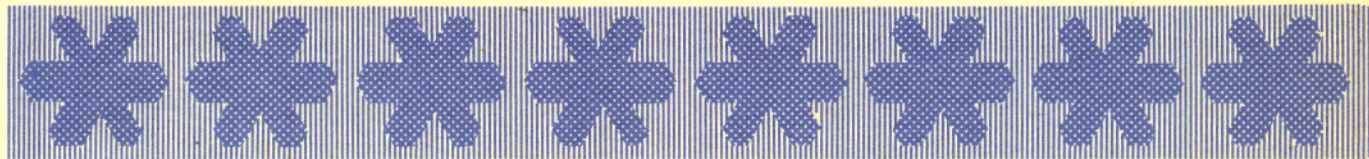
Po zakończeniu bieżącego roku szkolnego odbędzie się w Warszawie XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Mamy więc w 1986 roku Rok Olimpijski. Olimpiadom poświęcimy cały numer 5/1986. Chcemy jednak i w pozostałych numerach mieć coś olimpijskiego.

W ubiegłorocznej Olimpiadzie Międzynarodowej miążdzący sukces odnieśli zespołowo Rumuni. Indywidualnie komplet punktów zdobył Rumun i Węgier. Dopiero po pewnym odstępie pozostałe zespoły (w tym na „nastym” miejscu Polacy). Taki układ sił nikogo jednak nie zdziwił. Raz, że od kilku lat układ sił jest podobny. Dwa, że wiadomo dlaczego.

W Rumunii i na Węgrzech reprezentację olimpijską trenuje się długo i intensywnie. Nasi zaś zawodnicy to właściwie kompletni amatorzy. Całe przygotowanie reprezentacji to kilkunastodniowe zgrupowanie.

Na czym jednak polega trening? Chyba nie tylko na rozwiązywaniu zadań? Oczywiście rozwiązuje się zadania. Głównym jednak tematem treningu jest wyposażenie zawodników w zestaw „wytrychów” — elementarnych (mniej lub bardziej — ale tzw. szkolnych) twierdzeń „załatwiających” wiele technicznych kłopotów przy rozwiązywaniu zadań. I oczywiście wyćwiczenie rozpoznawania sytuacji, w których ten czy inny „wytrych” daje się zastosować.

Delta nie ma zamiaru kierować przygotowaniem polskiej ekipy na Olimpiadę. Chcemy jednak przedstawić Czytelnikom, o co chodzi. Dlatego w każdym tegorocznym numerze wskażemy jeden „wytrych” i przedstawimy cztery zadania (przeważnie z olimpiad krajowych), do których on pasuje. Zaczynamy od tego numeru.



Kącik olimpijski

Oto zasada znana w matematyce pod nazwą zasady szufladkowej Dirichleta:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladach dla $n > m$, to w pewnej szufladzie znajdują się co najmniej dwa przedmioty.

A w postaci „matematycznej”:

Niech A i B będą takimi zbiorami skończonymi, że $|A| > |B|$ ($|A|$ oznacza moc, czyli liczbę elementów zbioru A), a $f: A \rightarrow B$ funkcją przekształcającą zbiór A w zbiór B . Istnieją wtedy takie różne elementy $a, b \in A$, że $f(a) = f(b)$.

Niektóre zadania wymagają zastosowania nieco ogólniejszej postaci zasady szufladkowej:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladach i $n > k \cdot m$ dla pewnej liczby naturalnej k , to w pewnej szufladzie znajdzie się więcej niż k przedmiotów.

Jako przykład pokazujący, że ta prościutka zasada może mieć nietrywialne zastosowanie, rozważmy następujące zadanie:

Udowodnić, że z ciągu a_1, \dots, a_{101} różnych liczb można usunąć 90 tak, by pozostałe 11 tworzyło ciąg monotoniczny.

Rozwiązanie. Przyporządkujemy elementowi a_k liczbę naturalną będącą maksymalną długością ciągu rosnącego, jaki można utworzyć bez zmiany kolejności z elementów a_1, \dots, a_k . Jeśli jakiemuś elementowi przyporządkowaliśmy liczbę większą od 10, to zadanie jest rozwiązane. Jeśli nie, to podzielimy ciąg a_1, \dots, a_{101} na 10 podciągów zaliczając do i -tego podciągu te liczby, którym przyporządkowano i . Na mocy uogólnionej zasady szufladkowej pewien podciąg ma co najmniej 11 elementów. Podciąg ten jest malejący.

Sformułujemy jeszcze „nieskończoną” postać zasady szufladkowej:

Jeżeli rozmieścimy nieskończenie wiele przedmiotów w skończonej liczbie szuflad, to w pewnej szufladzie znajdzie się nieskończenie wiele przedmiotów.

A oto kilka zadań olimpijskich, przy rozwiązywaniu których stosuje się jedną ze sformułowanych wyżej postaci zasady szufladkowej.

Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 66 spośród pozostałych 99 osób. Dowieść, iż możliwy jest przypadek, że w każdej czwórce tych osób są takie dwie, które się nie znają. Przyjmujemy, że jeżeli osoba A zna osobę B , to również osoba B zna osobę A .

(zadanie 2 z zawodów III stopnia XVIII Olimpiady)

Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 innych. Dowieść, że jest na tej sali taka czwórka osób, w której każde dwie osoby się znają. Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B , to również osoba B zna osobę A .

(3-III-XXVIII)

Niech α będzie liczbą niewymierną, A_1 — punktem okręgu S o środku O . Rozważamy ciąg nieskończony A_n punktów okręgu S , w którym punkt A_{k+1} jest obrazem punktu A_k w obrocie dookoła punktu O o kąt $\alpha \cdot \pi$. Dowieść, że każdy łuk okręgu S zawiera pewne punkty ciągu A_n .

(10-I-XXVI)

Rozstrzygnąć, czy kwadrat K o boku równym 7 można pokryć ośmioma kwadratami o bokach równych 3

- przy założeniu, że boki tych ośmiu kwadratów są równoległe do boków kwadratu K ,
- bez tego założenia.

(1-II-XXVII)

mgr Jerzy WOJCIECHOWSKI

W lidze matematycznej niewiele nowego. Rzecz jasna, zmieniają się liczby — uczestników ligi jest już dobrze ponad trzy setki, liczba członków Klubu 44 zbliża się do czterdziestki (ciekawe, kto będzie czterdziestym czwartym). Jak co roku w styczniu jest sposobność do obejrzenia obszernej tabeli ligowej. Każdy, kto był dostatecznie wytrwały, znajdzie na niej swe nazwisko.

Wszystkich, oczywiście, interesują własne wyniki w rozwiązywaniu poszczególnych zadań. Jak poznać swe oceny? Nic prostszego: należy — a tę formę proponowaliśmy już w omówieniu ligi przed dwoma laty — należy więc przysłać nam kartkę pocztową, ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką, z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Tę samą formę informacji proponujemy też uczestnikom ligi fizycznej, prosimy jedynie, gdy ktoś uczestniczy w obu konkurencjach, o przysyłanie oddzielnej „karty informacyjnej” dla M i F. I w ogóle — wszelką korespondencję (rozwiązania zadań, propozycje zadań, uwagi, komentarze) dotyczącą ligi matematycznej i dotyczącą ligi fizycznej bardzo prosimy przysyłać w oddzielnych kopertach.

Teraz tradycyjne styczniowe omówienie zadań ligowych. Jak zwykle, znajdują się w nim te zadania, które przez niezliczonych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi tylko lukami) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z rozwiązaniem podanym przez nas.

Zadanie 89 [Płaski przekrój sześcianu o maksymalnym polu] (WT = 3,67) zostało rozwiązane przez czterech uczestników; tylko S. Solecki i T. Rawlik zauważyli, że zadanie redukuje się do wcześniejszego zadania 76 (które zresztą z tą myślą zostało w konkursie ligowym umieszczone); M. Galecki i Z. Koza przysłali uciążliwe rozwiązania rachunkowe, nie wolne od usterek.

Zadanie 91 [Dany ciąg L_0, L_1, \dots łamanych zamkniętych, kolejne wierzchołki L_{n-1} to środki kolejnych boków $L_n \Rightarrow \lim |L_n| = 0$] (WT = 3,76) rozwiązali poprawnie tylko J. Janowicz, P. Kamiński, T. Komorowski; ich rozwiązania są różne od naszego i opierają się (u pierwszych dwóch z wymienionych autorów; u trzeciego trochę inaczej, choć podobnie) na spostrzeżeniu, że gdy przez $P_n, i (i = 1, \dots, m)$ oznaczamy kolejne wierzchołki łamanej L_n , a przez O środek ciężkości wszystkich tych łamanych, to zachodzi równość wektorowa

$$OP_{n,i} = 2^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} OP_{0,i+j} \text{ (dodawanie } i+j \text{ modulo } m), \text{ prowadząca do oszacowania } M_{km} \leq M_0 \left(1 - \frac{m}{2m-1}\right)^k, \text{ gdzie } M_n = \max(OP_{n,1}, \dots, OP_{n,m}), \text{ skąd teza.}$$

Zadanie 93 [Ułamek $m/n \in (0,1)$ przedstawić jako sumę odwrotności $\leq n-1$ różnych liczb naturalnych] (WT = 2,94) ma rozwiązanie znacznie prostsze od podanego przez nas: w wyniku stosowania algorytmu przedstawionego na rysunku 1 otrzymujemy ciągi liczb naturalnych

$$m = m_0 > m_1 > \dots > m_{s-1} > m_s = 0 \text{ (stąd } s \leq m)$$

$$n = n_0 < n_1 < \dots < n_{s-1} < n_s$$

$$1 < k_0 < k_1 < \dots < k_{s-1}$$

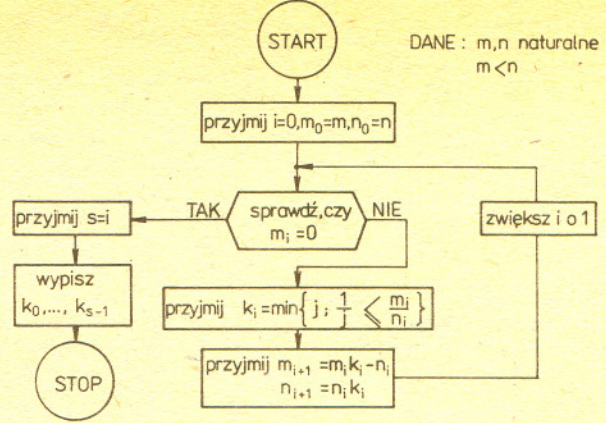
(sprawdzenie nierówności nietrudne); przy tym

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k_0} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{m_2}{n_2} = \dots = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_{s-1}}$$

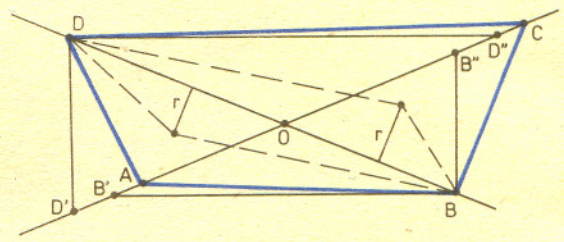
Rozwiązanie to (w postaciach nieznacznie różniących się) podali M. Galecki, P. Kamiński, T. Komorowski, Z. Koza, R. Mazurek, M. Mikucki, A. Pawłowski, D. Sowizdrzał, T. Szymczyk, A. Wyrwa. Również poprawne, ale mniej proste, rozwiązania oparte na rozwinięciach dwójkowych podali J. Janowicz, J. Mańdziuk, E. Orzechowski, T. Rawlik.

Zadanie 94 [Dane półproste $OP_i, i \leq n, \sum \angle P_i OP_{i+1} < 360^\circ \Rightarrow$ istnieje półprzestrzeń zawierająca te półproste] (WT = 3,76) zostało rozwiązane poprawnie przez trzech uczestników; T. Komorowski i A. Bonk podali to samo rozwiązanie, co Delta; M. Galecki — rozwiązanie bardziej skomplikowane; przysłano jeszcze kilka rozwiązań z bardzo istotnymi lukami.

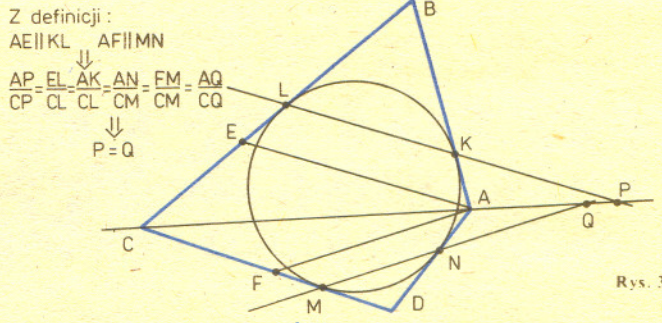
Zadanie 98 [$x_1 = 1, x_{n+1} = (\sqrt{1+x_2^2}-1)/x_n; \lim 2^n x_n = ?$] (WT = 2,94). Siedemnaście dobrych rozwiązań, w większości nie odwołujących się do interpretacji geometrycznej, tylko korzystających ze wzoru na tangens $x/2$.



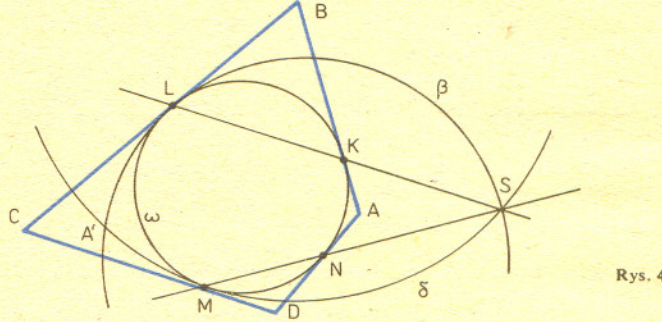
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadanie 100 [Dwa koła współśrodkowe podzielone na 100 sektorów, 51 czerwonych, 49 niebieskich \Rightarrow istnieje obrót dający ≥ 52 „nałożonych” (czerwone na czerwone, niebieskie na niebieskie)] (WT = 2,92). Dwadzieścia rozwiązań poprawnych. Oto najbardziej eleganckie (J. Cisło): Przyjmijmy pewne położenie kół za „zerowe” i ponumeruj sektory zgodnie liczbami od 1 do 100. Dla $i \in \{1, \dots, 100\}$ niech $x_i = 1$, gdy i -ty sektor pierwszego koła jest czerwony, $x_i = -1$, gdy niebieski, $y_i = 1$, gdy i -ty sektor drugiego koła est czerwony, $y_i = -1$, gdy niebieski. Przyjmijmy $z_k = \sum x_i y_{i+k}$ (dodawanie $i+k$ modulo 100). Wystarczy pokazać, że $z_k \geq 4$ dla pewnego k (bo wówczas w sumie 100 składników, definiującej z_k , musi być ≥ 52 składników równych +1). Nietrudno dowieść, że każde z_k dzieli się przez 4, a ponieważ $\sum z_k = (\sum x_i)(\sum y_i) = 2 \cdot 2 = 4$, więc istnieje $z_k \geq 4$.

Zadanie 101 [W czworokącie wypukłym ABCD koła wpisane w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe promienie \Rightarrow ABCD jest prostokątem] (WT = 3,24). Czternaście dobrych rozwiązań. Wyróżnić trzeba pomysł P. Figurnego:

$$S_{ABC} + S_{CDA} = (r/2)(AB + BC + CA + CD + DA + AC)$$

$$S_{BCD} + S_{DAB} = (r/2)(BC + CD + DB + DA + AB + BD) \Rightarrow AC = BD.$$

Można założyć, że z czterech odległości OA, OB, OC, OD najmniejsza jest OA, wówczas największa jest OC. Niech $OB' = OB'' = OB, OD' = OD'' = OD$ (rysunek 2):

$$(*) \quad |\sphericalangle ABD| \leq |\sphericalangle B'BD| = |\sphericalangle D''DB| \leq |\sphericalangle CDB|$$

$$|\sphericalangle BDA| \leq |\sphericalangle BDD'| = |\sphericalangle DBB''| \leq |\sphericalangle DBC|$$

$$BD = r \left(\operatorname{ctg} \frac{ABD}{2} + \operatorname{ctg} \frac{BDA}{2} \right) = r \left(\operatorname{ctg} \frac{CDB}{2} + \operatorname{ctg} \frac{DBC}{2} \right).$$

Wobec nierówności (*) ostatnia równość zachodzić może tylko wtedy, gdy nierówności (*) są wszystkie równościami, a to ma miejsce tylko wtedy, gdy $OA = OB = OC = OD$, czyli gdy $ABCD$ jest prostokątem. Typowym błędem było w wielu pracach korzystanie z (nieprawdziwej) „cechy przystawania trójkątów”: równość dwóch boków i promieni kół wpisanych.

Zadanie 107 [Czworokąt $ABCD$ opisany na kole \Rightarrow proste KL, MN, AC (rys. 3) mają wspólny punkt lub są równoległe] (WT = 2,57). Czternastnie poprawnych rozwiązań; dużo ciekawych metod (tw. Menelausa, tw. Pascala o stożkowych, rzut środkowy, trygonometria). Prostotą wyróżnia się rozwiązanie przedstawione na rysunku 3 (W. Boratyński, D. Kowalczyk, a dość podobnie T. Rawlik, K. Witek), oryginalnością zaś — rozwiązanie następujące (M. Mazur). Niech $\{S\} = \operatorname{pr} KL \cap \operatorname{pr} MN$ (przypadek $KL \parallel MN$ pomijamy jako trywialny) i niech f będzie inwersją o środku S i potęgze $SK \cdot SL = SM \cdot SN$. Okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$ zawiera punkty K, L, M, N (rysunek 4). Ponieważ $f(K) = L, f(L) = K, f(M) = N, f(N) = M$, więc $f(\omega) = \omega$. Proste AB i AD styczne do ω w punktach K i N , uzupełnione punktem w nieskończoności, przejdą na okręgi β i δ styczne do ω w punktach L i M , przy czym $\beta \cap \delta = \{S, A'\}$, gdzie $A' = f(A)$. Punkt C ma równą potęgę względem okręgu β i okręgu δ ($CL^2 = CM^2$), więc należy do prostej potęgowej pary okręgów β, δ , czyli do prostej SA' . Stąd i ze współliniowości punktów S, A, A' wynika współliniowość S, A, C .

Zadanie 108 $\{x_n = (x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3})/3, x_1, x_2, x_3 \text{ dane}; \text{ uzasadnić istnienie i obliczyć } \lim x_n\}$ (WT = 2,42). Siedemnaście rozwiązań poprawnych. Tylko dowód istnienia granicy sprawiał kłopot. Oto jak sobie z tym poradził P. Figórny. Niech M będzie stałą taką, że $|x_{n+1} - x_n| \leq M(3/4)^n$ dla $n = 1, 2, 3$; wówczas nierówność ta zachodzi już dla wszystkich n — dowód indukcyjny:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \frac{1}{3} |x_{n-2} + x_{n-1} - 2x_n| \leq \frac{1}{3} |x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{3} |x_n - x_{n-2}| = \\ &= \frac{1}{3} |x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{9} |x_{n-3} + x_{n-1} - 2x_{n-2}| \leq \frac{1}{3} |x_n - x_{n-1}| + \\ &+ \frac{1}{9} |x_{n-1} - x_{n-2}| + \frac{1}{9} |x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \frac{1}{3} M \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \\ &+ \frac{1}{9} M \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{9} M \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} < M \left(\frac{3}{4}\right)^n; \end{aligned}$$

z tej nierówności łatwo dostać warunek Cauchy'ego dla ciągu (x_n) .

Pięciu autorów (J. Cisło, M. Gałęcki, P. Jędrzejewicz, Z. Koza, D. Kurpiel)

podaje uogólnienie na przypadek ciągu $x_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n-i}$ (x_1, \dots, x_k dane);

$$\text{wynik: } \lim x_n = \left(\sum_{i=1}^k ix_i \right) / \left(\sum_{i=1}^k i \right).$$

Możemy już dokonać krótkiego podsumowania pierwszych pięciu miesięcy funkcjonowania ligi zadaniowej z fizyki. Sądząc po liczbie rozwiązań, które wpłynęły po ukazaniu się pierwszych zadań, nowa konkurencja została przyjęta z dużym zainteresowaniem. Po dobrym starcie następne miesiące przyniosły jednak spadek liczby prac. Tłumaczymy to zbliżaniem się gorącego okresu matur i egzaminów: ponad połowa z 77 dotychczasowych uczestników (wśród nich trzy panie) to uczniowie i studenci, ze zdecydowaną przewagą uczniów, głównie z klas maturalnych.

Dalej zamieszczamy pierwszą listę uczestników ligi zadaniowej Klub 44 F. Pięcioro uczestników ligi fizycznej jest już członkami matematycznego Klubu 44, większość jednak nie próbowała dotychczas swych sił w konkurencji matematycznej.

Wytrwałych, którzy nadesłali rozwiązania wszystkich dziesięciu zadań, jest zaledwie pięciu. Może więc zadania były za trudne? Od przerwy wakacyjnej częściej już pojawiają się zadania łatwiejsze. Chętnie widzimy wszelkie uwagi na ich temat oraz — jak zawsze — propozycje zadań.

Liczba zadań z fizyki do omówienia jest znacznie skromniejsza, aniżeli z matematyki. Ponieważ czynimy to po raz pierwszy, najpierw parę uwag ogólnych. Jak podaliśmy przed rokiem, do rozwiązań zadań ligi zasadniczo wystarcza zasób wiadomości szkolnych z matematyki i fizyki. Chociaż niektóre zadania zakładają (i stymulują zarazem) pewne rozszerzenie wiedzy w stosunku do podręczników szkolnych, to jednak do ich rozwiązywania wystarcza aparat pojęciowy i matematyczny, w jaki wyposaża szkoła średnia (np. liceum ogólnokształcące o profilu matematyczno-fizycznym). Uważamy zatem, że stosowanie na przykład zaawansowanych metod mechaniki teoretycznej bądź złożonych równań różniczkowych do zadania dającego się rozwiązać znacznie prostszymi metodami jest uchybieniem przeciw elegancji, która — zgodnie z regulaminem ligi — liczy się przy ocenie rozwiązań. A teraz omówienie wybranych zadań:

Zadanie 1 [Opór zastępczy przerwanej sieci oporów] (WT = 2,19). Większość uczestników rozwiązała zadanie poprawnie. Decydująca okazała się znajomość (lub wymyślenie) sposobu, który podaliśmy w naszym rozwiązaniu (numer 5/1985). Wielu Czytelników znalazło ten sposób ze zbiorów zadań z Olimpiad Fizycznych.

Zadanie 2 [Powstawanie dźwięku w „grającej rurze”] (WT = 3,23). Znaczna część rozwiązujących słusznie zauważyła, że przepływ powietrza w wirującej rurze powodowany jest przez siłę odśrodkową. Podane w rozwiązaniu, wydrukowanym w numerze 5/1985, zjawisko Bernoulliego odgrywa tu — jak wykazały przeprowadzone doświadczenia — mniejszą rolę.

Zadanie 3 [Upadanie pręta podpartego na gładkim, poziomym podłożu] (WT = 2,83).

Sporo osób rozwiązywało to zadanie korzystając z zasady zachowania energii. Tą metodą stosunkowo łatwo uzyskuje się wzór na prędkość kątową pręta

$$\omega = \sqrt{\frac{12(1 - \cos \alpha) g}{1 + 3 \sin^2 \alpha} \frac{1}{l}},$$

dalej oblicza się przyspieszenie kątowe pręta jako $\epsilon = \omega \frac{d\omega}{d\alpha}$. Niewielu

uczestników (niezależnie od metody) przebrnęło do końca przez wszystkie rachunki bez popełnienia błędu. Cóż, kiedy przykry błąd trafił się nawet w rozwiązaniu, które wydrukowaliśmy w numerze 6/1985: związek (4) powinien mieć postać:

$$a = \frac{l}{2} (\epsilon \sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha),$$

odpowiednio do tego

$$\epsilon = \frac{6 \sin \alpha [1 + 3(1 - \cos \alpha)^2] g}{(1 + 3 \sin^2 \alpha)^2 l}.$$

Szczególnie starannie zostało to zadanie rozwiązane przez pana Dz. Lipniackiego.

Zadanie 7 [Ruch poślizgowo-obrotowy obręczy po poziomym podłożu] (WT = 2,30).

Większość rozwiązujących to zadanie starała się, z różnym powodzeniem, uwzględnić tarcie toczone. Tymczasem przy zaniedbaniu tego tarcia rachunki są dużo prostsze. Treść zadania — podobnie jak i niektórych innych — pozostawiała wybór sensownych założeń samym uczestnikom.

Zadanie 8 [Zjawisko aureoli na rosie] (WT = 3,50). Wśród rozwiązań tylko jedno całkiem poprawne wyjaśnienie, nadesłał je pan P. Bała.

Zadanie 9 [Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem] (WT = 2,39). W zadaniu chodziło o możliwie elementarne wyprowadzenie tzw. prawa Raoula. Podanie gotowej zależności, bez jej wyprowadzenia, nie było więc traktowane jako satysfakcjonujące rozwiązanie.

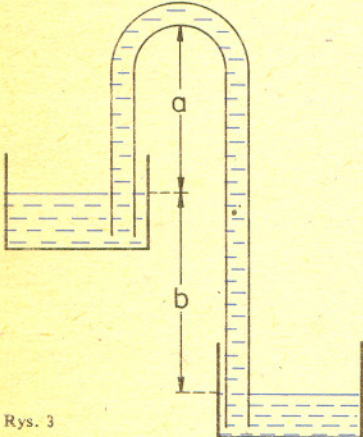
Zadanie 10 [Orbita rakiety wystanej na bliźniaczą planetę] (WT = 3,10). Jedyne dwa dobre rozwiązania nadesłali P. Bała i Dz. Lipniacki. Pan Bała zauważył, że podróż po orbicie półrocznej wymaga nadania rakiecie większej prędkości startowej względem Ziemi (w kierunku przeciwnym do ruchu Ziemi po orbicie wokółsłonecznej), aniżeli wynosi wymagana prędkość startowa (w kierunku zgodnym z ruchem Ziemi) dla orbity półtorarocznej; ta ostatnia orbita, o dużej półosi $1,31a_2$ i odległości od Słońca w apeliu $1,62a_2$ (a_2 — średnia odległość Ziemia-Słońce) jest więc orbity wymagającą najmniejszego zużycia paliwa. Pan Lipniacki postarał się nawet — co było całkiem poza oczekiwaniami — obliczyć orientacyjną masę startową rakiety, niestety, popełnił pomyłkę przy uwzględnianiu prędkości ucieczki z Ziemi.

Pierwsza lista uczestników ligi zadaniowej „Klub 44” F
(na podstawie ocen rozwiązanych zadań z numerów 1-5/1985)

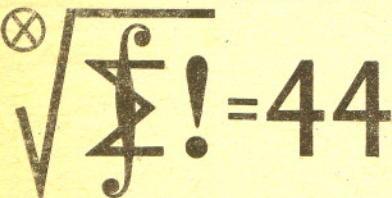
Piotr Bała	— Toruń	23,20
Dzierżysław		
Lipniacki	— Lublin	18,82
Tomasz Rawlik	— Gliwice	12,69
Maciej Stasiak	— Człuchów	12,15
Wiesław Stochmal	— Szczecin	11,88
Zbigniew Lipowczan	— Katowice	11,81
Piotr Dziembaj	— Kraków	10,05
Maciej Krzyżanowski	— Lublin	8,58
Paweł Rogocz	— Legnica	8,39
Aleksander Surma	— Myszków	8,09
Marek Kirejczyk	— Warszawa	7,39
M. Tasak	— Poznań	6,74
Mariusz Surma	— Kielce	6,55
Artur Sierant	— Człuchów	6,28
Rafał Sosna	— Warszawa	6,28

Zestawienie obejmuje nazwiska wszystkich uczestników, którzy w klasyfikacji ligowej uzyskali co najmniej 6 punktów.

Współczynniki trudności zadań:
1—2,19 2—3,23 3—2,83 4—3,03 5—1,91
6—2,64 7—2,30 8—3,50 9—2,39 10—3,10



Rys. 3



Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru *n* należy nadsyłać do końca miesiąca *n* + 2 (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1986 upływa 31 stycznia 1987). W numerze *n* + 4 podane są szkieletowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studentci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie:

Klub 44 M lub Klub 44 F.

8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednorodzących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delta”

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1986

Zadania z matematyki nr 123, 124

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

123. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych *x*) równanie

$$\left(a^2x + \frac{b^2}{x}\right)\sqrt{1+(x-c)^2} = 2ab;$$

a, b, c są danymi liczbami dodatnimi.

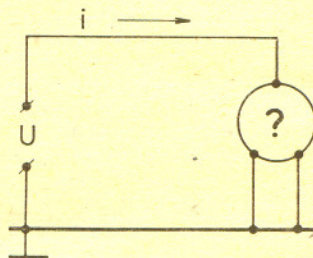
124. Na płaszczyźnie dane są wektory *u, v, w* mające długość 1. Wykazać, że co najmniej jeden z wektorów *u+v+w, u+v-w, u-v+w, -u+v+w* ma długość mniejszą lub równą 1.

Zadanie 124 przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Zadania z fizyki nr 21, 22

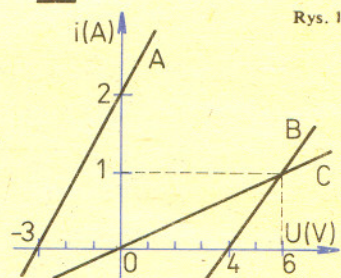
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

21. Dana jest elektryczna „czarna skrzynka”, zawierająca nieznaną obwód, z trzema zaciskami *A, B, C*. Posługując się układem pokazanym na rysunku 1 wyznaczono zależność natężenia prądu *i* od przyłożonego z zewnątrz napięcia *U* dla trzech kombinacji zacisków. Zależności te (charakterystyki prądowo-napięciowe) są przedstawione na rysunku 2. Dodatni kierunek prądu określa strzałka na rysunku 1, a symbol przy każdej z charakterystyk odpowiada symbolowi zacisku, który w danym przypadku połączony był ze źródłem napięcia (dwa pozostałe połączone z masą). Podać najprostszy możliwy układ elektryczny „czarnej skrzynki” i określić parametry jego elementów.



Rys. 1

22. Rysunek 3 przedstawia schematycznie lewar używany do przelewania cieczy między naczyniami o różnych poziomach. Jakie czynniki, poza ciśnieniem atmosferycznym, warunkują maksymalną wysokość *a* wzniesienia cieczy w lewarze nad poziom górnego naczynia? Wyznaczyć maksymalną wysokość *a* dla dwóch skrajnych przypadków: (1) gdy *b* ≪ *a* oraz (2) gdy *b* ≫ *a*. Należy przy tym przyjąć, że rurka lewarka ma na całej długości jednakową średnicę, że długość wygiętego łukowo odcinka lewarka jest mała w porównaniu z *a* oraz że ciecz jest czysta (jednoskładnikowa i nie zawiera rozpuszczonych gazów).



Rys. 2

i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustaloną według następującej zasady: jeżeli *N* oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a *S* oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

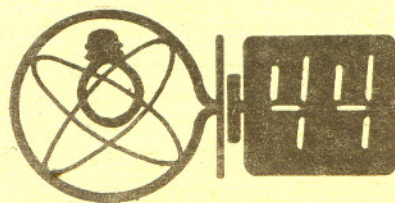
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

14. Członkowi listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.

15. Członkowie **Klubu 44** będą zapraszani na spotkania **Klubu 44**, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.

16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian Regulaminu.



Lista uczestników ligi zadaniowej

„Klub 44” M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 111 (WT=3,60) i 112 (WT=1,16)

Anna Gluza	— Toruń	45,09
Jacek Mańdziuk	— Lublin	42,93
Andrzej Sudol	— Nowy Sącz	41,68
Marian Roman	— Elk	1—41,28
Andrzej Pawłowski	— Zabrze	2—40,07
Grzegorz Kuś	— Kraków	39,93
Jerzy Janowicz	— Bolesławiec	4—35,45
Zbigniew Zaus	— Kraków	34,91
Wojciech Krzyżański	— Żywiec	34,45
Andrzej Bonk	— Chełmża	33,79
Jerzy Tyszkiewicz	— Warszawa	33,28
Wojciech Boratyński	— Warszawa	33,06
Marek Prauz	— Poraj	1—32,72
Mariusz Łopusiewicz	— Legnica	32,15
Krzysztof Jakubczak	— Kudowa Zd.	31,00
Zbigniew Koza	— Jelenia G.	1—30,70
Dariusz Kurpiel	— Zarszyn	30,57
Henryk Mikołajczak	— Wałbrzych	30,39
Zygmunt Bartkowski	— Warszawa	29,95
Władysław Wasiak	— Toruń	28,92
Michał Marczak	— Radom	28,86
Dariusz Sowizdrzał	— Szczecin	2—28,47
Jarosław Kaczyński	— Starogard Gd.	28,31
Jacek Uryga	— Bytom	3—27,93
Maciej Głuszek	— Wrocław	27,85
Mirosław Mikucki	— Augustów	27,60
Janusz Prajs	— Opole	27,57
Stanisław Dorosz	— Kraków	26,60
Artur Smolczyk	— Tarnów Op.	1—25,15
Krzysztof Zygan	— Lubin	24,98
Adam Stadler	— Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	— Sopot	24,93
Tomasz Masłowski	— Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	— Warszawa	1—24,31
Edward Orzechowski	— Warszawa	2—23,58
Tomasz Rawlik	— Gliwice	2—23,53
Adam Wyra	— N. Wiśnicz	1—23,43
Krzysztof Jedziński	— Katowice	1—23,24
Lech Bartłomiejczyk	— Gliwice	22,50
Mirosław Matługa	— Skoczów	22,27
Marek Gałęcki	— Milanówek	4—21,44
Radosław Zapert	— Kielce	21,11
Jerzy Cisło	— Wrocław	20,62
Małgorzata Czerniakowska	— Gdańsk	1—20,54
Kazimierz Serbin	— Sanok	1—20,28
Piotr Jędrzejewicz	— Toruń	19,38
Piotr Figurny	— Lubartów	1—19,34
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	18,15
Karol Jachacy	— Tłuszcz	17,25
Dezso Gross	— Budapeszt	17,12
Robert Mitraszewski	— Wrocław	16,79
Jacek Jakubiak	— Łódź	16,30
Ryszard Pagacz	— Zawadzkie	2—11,06
Zbigniew Bartold	— Gdynia	2— 6,50
Paweł Kamiński	— Warszawa	4— 5,73
Tomasz Komorowski	— Świdnik	2— 2,12

Legenda (przykładowo): stan konta 4-35,45 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma już 35,45 pkt.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 16 punktów, a także czterech mających aktualnie mniej na koncie, ale będących już co najmniej dwukrotnymi członkami Klubu 44.

Pozostali członkowie Klubu 44 (alfabetycznie): Biegański, Ciach, Fiszler, Jóźefczyk, Małopolski, Mazur, Mazurek, Mikuta, Milczarek, Olszewski, Siwy, Solecki, T. Szymczyk, W. Szymczyk, Witek.

Rozwiązania zadań z numeru 9/1985

115. Niech $a > 0$ będzie pierwiastkiem równania $x^2 - x - 1 = 0$. Dowiedz, że $[a^n] = [a[an]] + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

116. Czy wykresy funkcji $y = a^x$ i $y = b^x$ są figurami podobnymi? ($a, b > 0, 1 \neq a \neq b \neq 1$).

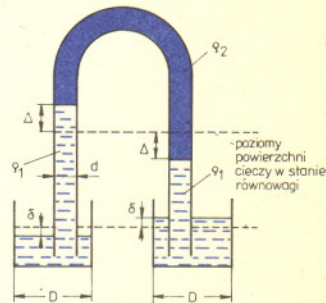
115. Oznaczmy $[an] = m$; wówczas $[a^n] = [(a+1)n] = m+n$. Należy więc dowiedzieć, że $m+n = [am] + 1$. Równoważnym zapisem tej tezy jest pierwsza z napisanych poniżej nierówności podwójnych, a dalej każda następną nierówność jest równoważna poprzedniej:

$$\begin{aligned} n-1 &\leq am-m < n, \\ a(n-1) &\leq (a^2-a)m < an, \\ an-a &\leq m < an, \\ [an] &< an \leq [an]+a. \end{aligned}$$

Prawdziwość ostatniej nierówności wynika z niewymierności a i z tego, że $a > 1$.

116. Można ograniczyć uwagę do przypadku, gdy $a, b > 1$ (bo wykresy funkcji wykładniczych o podstawach a i $1/a$ są symetryczne). Znajdziemy liczby $c < 0$ i $k > 0$ takie, że jedynką o środku w punkcie $(c, 0)$ i o skali k przeprowadza zbiór $A = \{(x, y) : y = a^x\}$ na zbiór $B = \{(x, y) : y = b^x\}$. Jedynką o środku $(c, 0)$ i skali k jest dana wzorem $J(x, y) = (c+k(x-c), ky)$. Chcemy, by $J(A) = B$; ma więc zachodzić równoważność: $y = a^x \Leftrightarrow ky = b^{c+k(x-c)}$. W tym celu wystarczy, żeby tożsamościowo była spełniona równość $ka^x = b^{c-kx}b^{kx}$, a to zachodzi dla $k = \log_b a$, $c = (1-k)^{-1} \log_b k$.

13. Czy układ przedstawiony na rysunku, w którym gęstość cieczy ρ_2 jest większa od gęstości cieczy ρ_1 , może pozostawać w równowadze trwałej? Jeśli tak, jaki warunek musi być spełniony? Jeżeli zaś nie, to dlaczego?



14. Oszacować co do rzędu wielkości stosunek mocy promieniowania widzialnego padającego na dobrze oświetloną powierzchnię do mocy padającego na tę powierzchnię zrównoważonego promieniowania termicznego odpowiadającego temperaturze pokojowej. Ocenić, jakiego rzędu wielkości jest energia promieniowania zawarta w przestrzeni średniej wielkości pokoju. Niezbędne dane należy przyjąć samemu lub wziąć z tablic (żarówka elektryczna emituje w postaci promieniowania widzialnego około 1/30 mocy wydzielanej).

13. Aby stwierdzić, czy stan symetrycznego układu cieczy w obu ramionach jest stanem równowagi trwałej, rozważmy sytuację po niewielkim przemieszczeniu słupa cieczy w rurce o Δ — jak na rysunku — któremu odpowiada przesunięcie poziomu cieczy w każdym z naczyń o

$$\delta = \frac{d^2}{D^2 - d^2} \Delta.$$

Na skutek zmian poziomów cieczy pojawia się pewne niezrównoważone parcie hydrostatyczne działające na ciecz w rurce (można sobie wyobrazić, że działa ono na powierzchnię rozgraniczającą dwie ciecze). Wartość tego parcia wynosi

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 g [\rho_1 2\delta - (\rho_2 - \rho_1) 2\Delta], \text{ gdzie } g \text{ — przyspieszenie ziemskie.}$$

Dodatni znak P przy dodatnim Δ odpowiada dążeniu do przywrócenia stanu równowagi.

Stąd wyprowadzamy poszukiwany warunek: $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{D^2}{D^2 - d^2}$.

Gdy jest on spełniony, układ może znajdować się w równowadze trwałej.

14. Obliczamy przykładowo gęstość strumienia promieniowania widzialnego 60-watowej żarówki, padającego prostopadle na powierzchnię odległą o 0,4 m, jako 1 W/m^2 . W przypadku zrównoważonego promieniowania termicznego — jakie panuje we wnętrzu o jednorodnej temperaturze ścian — na dowolny element o jednostkowej powierzchni pada taki sam strumień energii, jaki byłby emitowany przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze. Gęstość tego strumienia energii, określona wzorem Stefana-Boltzmann, jest równa σT^4 ($\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$, T — temperatura bezwzględna) i dla $T = 293 \text{ K}$ wynosi 420 W/m^2 (jest to w przybliżeniu połowa gęstości strumienia energii promieniowania słonecznego padającego w warunkach pełnego nasłonecznienia!). Można więc stwierdzić, że stosunek mocy promieniowania widzialnego do promieniowania termicznego jest rzędu $10^{-3} - 10^{-2}$. Aby ocenić wartość energii zrównoważonego promieniowania termicznego zawartego w pewnej przestrzeni, spójrzmy na to promieniowanie jako na zbiór fotonów poruszających się z prędkością światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Rozpatrując wnękę sześcienną przy upraszczającym założeniu, że wszystkie fotony poruszają się tylko w kierunkach równoległych do krawędzi sześciannu, otrzymujemy na gęstość energii promieniowania wzór $6\sigma T^4/c$ (dokładny wzór ma postać $4\sigma T^4/c$). Stąd obliczamy, że energia promieniowania termicznego w przestrzeni pokoju o objętości około 30 m^3 jest rzędu 10^{-4} J . Energia zawartego w tej przestrzeni promieniowania widzialnego jest w normalnych warunkach znacznie mniejsza.