

#### UWAGA CZYTELNICY

Krajowe Wydawnictwo Czasopism informuje, że począwszy od numeru 12/1985 ulega zmianie cena "Delta". Wynosić będzie ona obecnie 35zł.

Konieczność podwyższenia ceny "Delta" wynika ze znacznego wzrostu kosztów wydawania.

Od czasu ostatniej podwyżki ceny "Delta", czyli od 1982r., zwiększyły się one o ponad 60% w stosunku do 1983r. W tym okresie wzrosły koszty papieru o ponad 57%, a koszty druku o ponad 67%.

Te dwie pozycje kosztów stanowią ponad 75% kosztów wydawania. Niestety również wzrosły pozostałe koszty, jak np. transportu, energii, czynsze.

Nowa cena w najniezbędniejszej wielkości pokrywa niezależny od wydawcy wzrost poniesionych kosztów produkcji pisma.

W stosunku do prenumeratorów nowe ceny wejdą w życie z chwilą wygaśnięcia opłaconych okresów prenumeraty.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11 (143)

Co udowodnił Étienne Fouvry? <i>doc. dr Jerzy Browkin</i>	str. 1
Teoria względności (9)	str. 1
Jak powstawały planety? <i>mgr Paweł Artymowicz</i>	str. 4
Klub 44	str. 7
Konkurs	str. 7
Mała Delta	str. 8
Najprostszy najszybszy	str. 10
Mechanika kwantowa (II) <i>dr Włodzisław Duch</i>	str. 12
Zadania	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

### W następnym numerze: Rozdmuchany Wszechświat

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brójan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — *vp*-przewodniczący  
dr Jan Rempala  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pochwa zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.  
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,  
Informacji o cenie prenumeraty na rok 1986 udziela Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Urzędy Pocztowe i doręczyciele.

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryłłowa  
dr Jerzy Ryłł  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26  
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.:  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 696/12/85. N-52.

# Co udowodnił Étienne Fouvry?

Doc. dr Jerzy BROWKIN

Omówimy pewne, uzyskane ostatnio, wyniki dotyczące rozwiązań równania Fermata

$$(1) \quad x^n + y^n = z^n$$

w liczbach całkowitych  $x, y, z$  różnych od zera, gdzie  $n$  jest liczbą naturalną większą od 2.

Można zakładać, że liczby  $x, y, z$  nie mają wspólnego dzielnika większego od 1; można by bowiem przez taki wspólny dzielnik te liczby podzielić uzyskując znów rozwiązanie równania (1). Można również zakładać, że żadne dwie z liczb  $x, y, z$  nie mają wspólnego dzielnika większego od 1. Byłby on bowiem również dzielnikiem trzeciej liczby na mocy (1).

Już Pierre Fermat (1608—1665) udowodnił, że równanie (1) nie ma rozwiązań dla  $n = 4$ . Dowód tego faktu jest całkiem elementarny; można go znaleźć w każdej niemal książce z elementarnej teorii liczb, np. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, PZWS, Warszawa 1965.

Wobec tego wystarczy ograniczyć się do badania równania (1) w przypadku, gdy  $n = p$  jest liczbą pierwszą większą od 2.

Oznaczając  $w = -z$  i przenosząc wszystkie składniki na stronę lewą otrzymujemy więc równanie

$$(2) \quad x^p + y^p + w^p = 0.$$

Ograniczymy się w dalszym ciągu do rozważania tylko takich rozwiązań równania (2) w liczbach całkowitych  $x, y, w$  parami względnie pierwszych i różnych od zera, że żadna z tych liczb nie jest podzielna przez  $p$ . Jest to tak zwany *pierwszy przypadek* równania (2). Oczywiście, do zbadania wszystkich rozwiązań tego równania należy rozpatrzyć jeszcze drugi przypadek, gdy jedna z liczb  $x, y, w$  jest podzielna przez  $p$ . Tym drugim przypadkiem w niniejszym artykule zajmować się nie będziemy.

Na początku XIX wieku Sophie Germain (1776—1831) udowodniła, że dla wielu pierwszych  $p$  równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku. Wykazała mianowicie, że jeżeli również  $q = 2p + 1$  jest liczbą pierwszą, to równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Dowód jest prosty i elementarny, więc go przytoczymy. Z konieczności został on zredagowany zwięźle, więc dokładne zrozumienie go będzie wymagało od Czytelnika pewnego samodzielnego wysiłku.

Udowodnimy najpierw kilka faktów pomocniczych.

## 9. Paradoks rozmiarów

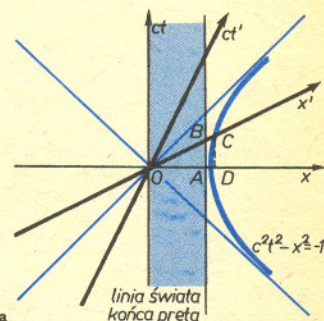
Względność równoczesności ma także wpływ na pomiar odległości. Na przykład długość pręta mierzy się wyznaczając w tej samej chwili współrzędne jego końców. Ponieważ zdarzenia równoczesne w jednym układzie inercyjnym nie są równoczesne w innym, wynik pomiaru zależy od układu odniesienia.

Niech pręt o jednostkowej długości spoczywa w układzie  $O$ , a obserwator znajduje się w układzie  $O'$  poruszającym się względem  $O$  z prędkością  $v$ . Na rysunku 9a przedstawione są linie światła końców pręta oraz fragment hiperboli jednostkowej. Dla  $\mathbf{0}$  zdarzenia  $O$  i  $A$  są równoczesne i pomiar długości daje wynik 1. Dla  $O'$  równoczesne są zdarzenia  $O$  i  $B$ , a więc długość pręta  $l'$  jest mniejsza od 1 ( $OC$  jest jednostką długości w układzie  $O'$ ).

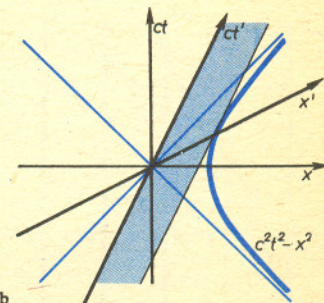
$$\text{Łatwo można uzyskać wynik ilościowy: } l' = \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD},$$

gdzie  $OA = 1$ , a  $OD$  otrzymujemy z warunku przecięcia hiperboli z osią  $Ox'$ . Stąd  $l' = \sqrt{1 - (v/c)^2}$ .

Taki sam wynik otrzymujemy w przypadku, gdy pręt spoczywa w układzie  $O'$ , a obserwator w  $O$  (rys. 9b).



Rys. 9a



Rys. 9b





**Lemat 1.** Jeżeli  $p$  oraz  $q = 2p + 1$  są liczbami pierwszymi i liczba  $u$  nie jest podzielna przez  $q$ , to liczba  $u^p$  daje resztę 1 lub  $-1$  z dzielenia przez  $q$ .

**Dowód.** Skorzystamy z tzw. małego twierdzenia Fermata, które orzeka, że jeżeli liczba  $u$  nie jest podzielna przez liczbę  $q$ , to liczba  $u^{q-1} - 1$  jest podzielna przez  $q$ . Dowód tego twierdzenia można znaleźć w podanej wyżej książce. Mamy zatem

$$q \mid u^{q-1} - 1 = u^{2p} - 1 = (u^p - 1) \cdot (u^p + 1),$$

tzn. jedna z liczb  $u^p - 1$ ,  $u^p + 1$  jest podzielna przez  $q$ . Wynika stąd teza lematu.

**Wniosek.** Jeżeli liczba  $a^p + b^p + c^p$  jest podzielna przez  $q$ , to jedna z liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jest podzielna przez  $q$ .

**Dowód.** Jeżeli żadna z liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nie jest podzielna przez  $q$ , to na mocy lematu 1 liczba  $a^p + b^p + c^p$  przy dzieleniu przez  $q$  daje resztę  $\pm 1 \pm 1 \pm 1$  (przy odpowiednim wyborze znaków  $+$  lub  $-$ ). To znaczy, ta reszta jest równa 1,  $-1$ , 3 lub  $-3$ . Jest to niemożliwe, ponieważ liczba  $a^p + b^p + c^p$  z założenia jest podzielna przez  $q$  bez reszty, a  $q = 2p + 1 > 3$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że wniosek jest prawdziwy.

Oznaczmy  $T(x, y) = x^{p-1} - x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 - \dots - xy^{p-2} + y^{p-1}$ .

Mamy tożsamość

$$(3) \quad (x + y) \cdot T(x, y) = x^p + y^p.$$

**Lemat 2.** Jeżeli  $d$  jest dzielnikiem liczby  $x + y$ , to liczby  $T(x, y)$  oraz  $px^{p-1}$  dają tę samą resztę z dzielenia przez  $d$ .

**Dowód.** Z założenia  $d \mid x + y$  wynika, że liczby  $x$  oraz  $-y$  dają tę samą resztę z dzielenia przez  $d$ . Zatem każda z  $p$  liczb:

$$x^{p-1}, x^{p-2} \cdot (-y), x^{p-3} \cdot (-y)^2, \dots, x \cdot (-y)^{p-2}, (-y)^{p-1}$$

daje tę samą resztę z dzielenia przez  $d$ . Teza lematu wynika więc ze wzoru określającego  $T(x, y)$ .

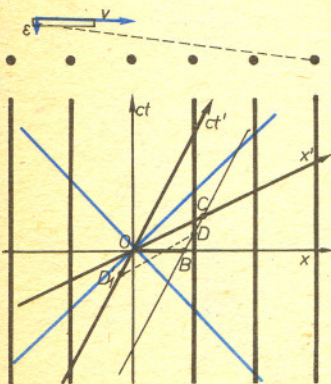
Przystępujemy teraz do dowodu twierdzenia Germain. Przypuśćmy, że liczby całkowite różne od zera  $x$ ,  $y$ ,  $w$  są parami względnie pierwsze i niepodzielne przez  $p$  oraz spełniają równanie (2). Z powyższego wniosku wynika, że jedna z nich jest podzielna przez  $q$ . Niech np.  $q \mid w$ . Liczby  $x + y$  oraz  $T(x, y)$  są względnie pierwsze, ponieważ na mocy lematu 2 każdy ich wspólny dzielnik  $d$  dzieliłby też liczbę  $px^{p-1}$  i na mocy (3) i (2) dzieliłby liczbę  $w^p$ . Z założenia jednak liczba  $w$  nie jest podzielna przez  $p$ , a liczby  $x$  i  $w$  są względnie pierwsze. Zatem  $d = 1$ .

Na mocy (3) i (2) iloczyn liczb względnie pierwszych  $x + y$  oraz  $T(x, y)$  jest  $p$ -tą potęgą liczby całkowitej różnej od zera. Każda z tych liczb jest więc  $p$ -tą potęgą liczby całkowitej.

W szczególności  $x + y = r^p$ . Podobnie dowodzimy, że  $x + w = s^p$ ,  $y + w = t^p$  dla pewnych liczb całkowitych  $s$  i  $t$ .

Znany jest następujący paradoks. Wzdłuż szeregu przeszkód porusza się z dużą prędkością pręt (rys. 9c). Długość pręta i odległości między przeszkodami mierzone we własnych układach odniesienia są takie same. Pręt zaczyna zbliżać się do przeszkód z niewielką prędkością. Czy może je minąć? W układzie związanym z przeszkodami pręt ulega skróceniu i minięcie przeszkód jest możliwe. Inaczej jest w układzie związanym z prętem. Teraz skróceniu ulega odległość między przeszkodami i przejście pręta nie jest możliwe.

Na rysunku 9d widoczny jest „przekrój” czasoprzestrzeni, do którego należą przeszkody. Przedstawione na nim linie świata końców pręta są rzutami rzeczywistych linii świata w trójwymiarowej czasoprzestrzeni. W układzie  $O$  długość pręta  $OB$  jest mniejsza od odległości między przeszkodami. W układzie tym oba końce pręta dochodzą równocześnie do szeregu przeszkód (zdarzenia  $O$  i  $B$ ). W układzie  $O'$  prawy koniec pręta dochodzi do przeszkód (zdarzenie  $D$  równoczesne z  $D_1$ ) wcześniej niż lewy (zdarzenie  $O'$ ). Ciąg przeszkód nie jest więc w tym układzie równoległy do pręta i mimo że przeszkody rozmieszczone są gęściej, pręt może je minąć. W ten sposób paradoks został rozwikłany. Jego źródłem jest „względność równoległości”. Dwa poruszające się względem siebie odcinki mogą być równoległe tylko w jednym układzie odniesienia. Dlatego gdy mówimy o pręcie poruszającym się równoległe do przeszkód, musimy określić, w którym układzie ma miejsce ta równoległość. My wybraliśmy układ związany z przeszkodami. Czytelnikom pozostawiamy przedyskutowanie przypadku, gdy pręt jest równoległy do przeszkód w układzie odniesienia związanym z prętem.



Rys. 9c

Rys. 9d

Ponieważ  $q|w$ , więc  $q|x$  i  $q|y$ . Stąd  $q|s$  i  $q|t$ . Ze wzoru  $x+w = s^p$  wynika więc, że liczby  $x$  i  $s^p$  dają tę samą resztę z dzielenia przez  $q$ , mianowicie resztę 1 lub  $-1$  na mocy lematu 1. Wobec tego resztą z dzielenia liczby  $px^{p-1}$  przez  $q$  jest liczba  $p \cdot (\pm 1)^{p-1} = p$ . Mamy  $2w = (x+w) + (y+w) - (x+y) = s^p + t^p + (-r)^p$ . Ponieważ  $q|w$ ,  $q|s$ ,  $q|t$ , więc z wniosku otrzymujemy, że  $q|r$ , a zatem  $q|x+y$ . Wobec tego  $q|T(x, y)$  bowiem liczby  $x+y$  i  $T(x, y)$  są względnie pierwsze.

Ponieważ  $T(x, y)$  jest  $p$ -tą potęgą, więc z lematu 1 otrzymujemy, że reszta z dzielenia  $T(x, y)$  przez  $q$  jest równa 1 lub  $-1$ . Z drugiej strony z lematu 2 wynika, że liczba  $T(x, y)$  przy dzieleniu przez  $q$  daje taką resztę, jak liczba  $px^{p-1}$ , tzn. resztę  $p$ . Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczby 1,  $-1$  i  $p$  dają różne reszty z dzielenia przez  $q = 2p \pm 1$ .

Sprzeczność ta dowodzi, że równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku, jeżeli liczba  $q = 2p+1$  jest pierwsza.

Z udowodnionego twierdzenia wynika na przykład, że równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku dla  $p = 3$  (ponieważ liczba  $2 \cdot 3 + 1 = 7$  jest pierwsza) i podobnie dla  $p = 5, 11, 23$  itd.

Sophie Germain udowodniła twierdzenie ogólniejsze:

Jeżeli dla pewnej liczby naturalnej  $m$  liczba  $q = 2mp+1$  jest pierwsza oraz (\*) wśród reszt, jakie dają przy dzieleniu przez  $q$  liczby  $1^p, 2^p, 3^p, \dots, (q-1)^p$  nie ma liczby  $p$  ani nie ma dwóch liczb kolejnych, to równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Zastosujemy to ogólniejsze twierdzenie do liczby  $p = 7$ . Biorąc  $m = 2$  stwierdzamy, że liczba  $q = 2mp+1 = 29$  jest pierwsza. Sprawdzimy warunek (\*). Znajdujemy więc reszty, jakie dają liczby  $1^7, 2^7, 3^7, \dots, 27^7, 28^7$  przy dzieleniu przez 29. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń stwierdzamy, że wśród tych reszt są tylko liczby 1, 12, 17, i 28. Nie ma tu ani liczby 7, ani dwóch liczb kolejnych. Zatem na mocy ogólniejszego twierdzenia Germain równanie (2) przy  $p = 7$  nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Twierdzenie Germain było uogólniane przez wielu autorów na różne sposoby. Zastępowano warunek (\*) innymi, zwykle dość skomplikowanymi, warunkami na liczbę  $m$ , przy których spełnieniu równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Posługując się takimi warunkami sprawdzono, że równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku dla wielu miliardów początkowych liczb pierwszych  $p$ . Nie umiano jednak udowodnić tymi metodami (ani żadnymi innymi), że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych  $p$  równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Dopiero ostatnio to udowodniono wykorzystując m.in. ideę Sophie Germain, by badać liczby pierwsze postaci  $2mp+1$ .

Mianowicie L. M. Adleman i D. R. Heath-Brown udowodnili, że jeżeli jest „dostatecznie dużo” liczb pierwszych postaci  $2mp+1$ , gdzie  $m$  i  $p$  spełniają odpowiednie warunki, to wśród rozważanych tu liczb pierwszych  $p$  istnieją takie, dla których równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Mówiąc dokładniej: Ustalamy (dużą) liczbę  $X$  oraz liczbę  $\Theta$  spełniającą  $\frac{2}{3} < \Theta < 1$  i rozważamy wszystkie takie liczby pierwsze  $p$ , że  $X^\Theta < p < X$ . Jeżeli liczb pierwszych  $q$  mniejszych od  $X$ , postaci  $q = 2mp+1$ , gdzie  $3 \nmid m$ , jest dostatecznie dużo, tzn. więcej niż  $C \frac{X}{\log X}$ , gdzie  $C$  jest pewną stałą dodatnią niezależną od  $X$  i  $\Theta$ , to wśród rozważanych tu liczb pierwszych  $p$  są i takie, że równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku.

Tak więc problem został sprowadzony do zbadania, czy jest dostatecznie dużo liczb pierwszych  $q$  spełniających powyższe warunki.

Otóż Étienne Fouvry w pracy opublikowanej w 1985 roku w czasopiśmie *Inventiones Mathematicae* stosując m.in. metodę sita oraz przeprowadzając długie i skomplikowane rachunki udowodnił, że przy  $\Theta = 0,6687$  liczba liczb pierwszych  $q$  opisanych wyżej jest większa niż

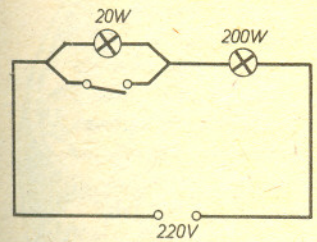
$C \frac{X}{\log X}$ , gdzie  $C$  jest pewną stałą dodatnią niezależną od  $X$ .

Ponieważ  $\Theta = 0,6687 > \frac{2}{3}$ , więc na mocy sformułowanego wyżej wyniku Adlemana i Heath-

Browna otrzymujemy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby  $X$  istnieje liczba pierwsza  $p$  większa od  $X^\Theta$ , dla której równanie (2) nie ma rozwiązań w pierwszym przypadku. Liczb pierwszych  $p$  o tej własności jest więc nieskończenie wiele.



Rozwiązanie zadania F 185. Nominalna moc żarówki  $P$  wynosi  $V^2/R$ , gdzie  $V$  — napięcie skuteczne sieci elektrycznej,  $R$  — oporność włókna.



Ze względu na dziesięciokrotną różnicę oporności żarówek przy otwartym włączniku (patrz rysunek) napięcie na żarówce o mocy 20 W jest bliskie napięciu sieci, a napięcie na żarówce 200 W około 10 razy mniejsze. Oznacza to, że moc wydzielona w żarówce 20 W jest bliska nominalnej, a moc żarówki 200 W około 100 razy mniejsza od nominalnej, czyli żarówka ta praktycznie nie zaświeci.

Gdy klucz jest zamknięty, świeci się tylko żarówka 200 W, bo napięcie na żarówce 20 W jest znikomo małe.

# Jak powstawały planety?

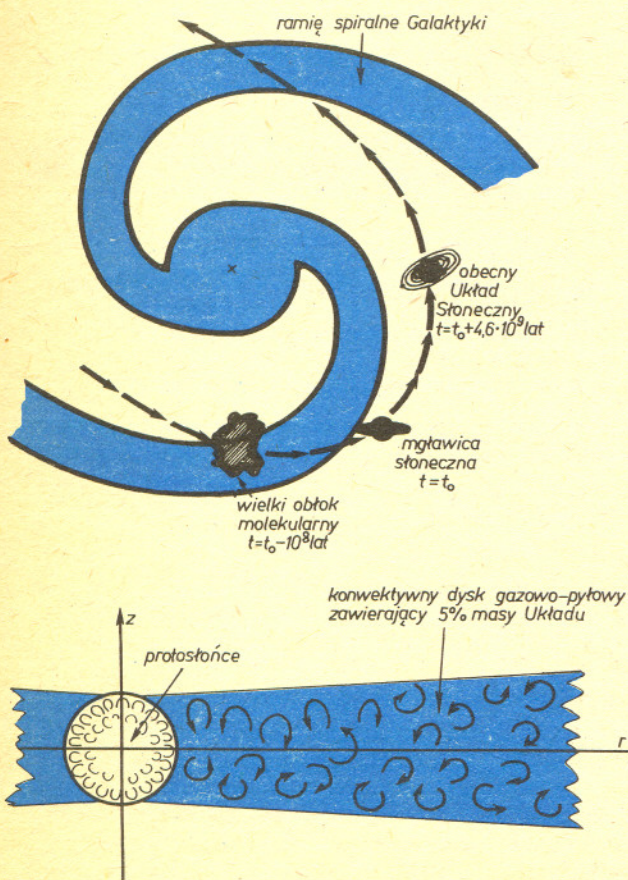
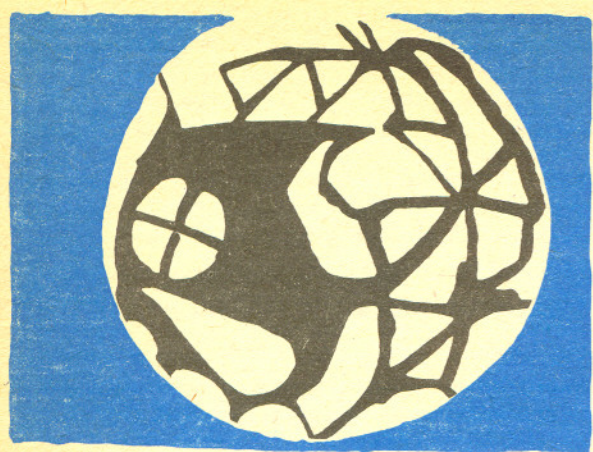
Mgr Paweł ARTYMOWICZ

Jedną z pierwszych prób naukowej odpowiedzi na to pytanie były prace kosmogoniczne Kartezjusza, jednak dopiero hipotezy mgławicowe Kanta (z r. 1755) i Laplace'a (z r. 1796) stały się podwalinami współczesnej kosmogonii planetarnej. Według tych teorii Układ Słoneczny powstał z obłoku materii międzygwiazdowej, który spłaszczył się pod wpływem swej rotacji do postaci dysku (Laplace uważał zresztą obiekty mgławicowe z katalogu Messiera, z których wiele okazało się galaktykami spiralnymi, za powstające układy planetarne). Protoplanety, czyli pierwotne planety, miały powstać przez koncentrację materii gazowej pod wpływem własnej grawitacji fragmentów dysku bądź, jak sądził Kant, przez zlepianie się (akumulację) drobnych pyłków materii stałej krążącej wokół Słońca.

Hipoteza mgławicowa panowała w astronomii niepodzielnie przez cały wiek XIX, i dopiero w latach dwudziestych naszego wieku pojawiły się teorie przyływowowe powstawania planet, które przyjmowały możliwość wyrwania materii protoplanetarnej z obiektu macierzystego wskutek silnych zaburzeń grawitacyjnych od przelatującego blisko, napotkanego przypadkowo na galaktycznych szlakach obiektu, np. gwiazdy. W pierwotnej wersji Jeansa (z r. 1916) i Jeffreysa (z r. 1929) planety powstały przez kondensację materii wyrwanej ze Słońca przez blisko przechodzącą gwiazdę. Ponieważ jednak w latach czterdziestych model ten znalazł się w sprzeczności m. in. z danymi kosmochemicznymi, wskazującymi na to, że planety powstawały z materii chłodnej (temperatura  $\lesssim 10^3$  K), która nie mogła pochodzić z gorącego wnętrza Słońca, od lat pięćdziesiątych datuje się zmierzch teorii przyływowowych. Narastało wówczas przekonanie o tym, że powstawanie planet jest zjawiskiem częstym i związanym z powstawaniem gwiazd, a nie rezultatem „katastroficznego”, niezmiernie mało prawdopodobnego zbliżenia dwóch gwiazd w galaktyce. W tej sytuacji wszystkie współczesne teorie powracają do idei Kanta i Laplace'a. A oto, jak przedstawia się zgodnie z osiągnięciami kosmogonii wspieranej przez kosmochemię, mechanikę nieba, astronautykę, planetologię i geofizykę najprawdopodobniejszy scenariusz powstawania planet w pięciu odslonach.

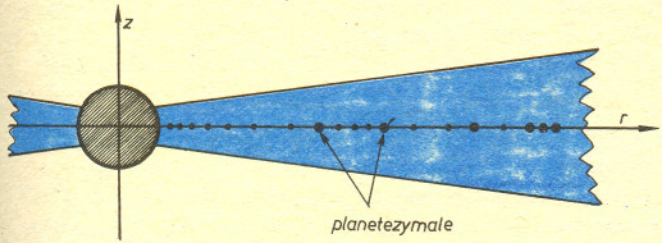
**Odslona pierwsza: Umiejscowienie w Galaktyce.** Układ Słoneczny powstał 4,6 miliarda lat temu z materii ciemnego obłoku molekularnego, zawierającego obok ogromnej większości wodoru i helu także pierwiastki ciężkie (w postaci pyłu) i lód (nie tylko  $H_2O$ , ale i  $CH_4$ ,  $NH_3$ ). Wzbogacenie pierwiastkami ciężkimi zawdzięczamy między innymi pobliskim wybuchom supernowych i nowym w czasie przechodzenia obłoku przez obszar galaktycznych ramion spiralnych. Układ Słoneczny krąży w takiej odległości od centrum Galaktyki (około 10 kiloparseków), że prędkości kątowe ruchu Układu i ramion spiralnych różnią się niewiele — to zaś chroni nas przed częstymi spotkaniami z ramionami spiralnymi i niszczącym życie promieniowaniem pochodzącym od licznych supernowych związanych z takimi obszarami.

**Odslona druga: Mgławica Słoneczna.** Stanowiła fragment obłoku molekularnego o masie nieco większej, niż obecna masa Słońca ( $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg) i momencie pędu, który był za mały do utworzenia układu podwójnego gwiazd (około 75% gwiazd wchodzi w skład układów podwójnych), był zaś zbyt duży, by cała mgławica mogła skupić się w pojedynczą, sferyczną gwiazdę. Pierwotne Słońce otoczone więc było dyskiem gazowym o rozmiarach rzędu 100 j.a. (1 j.a. = średnia odległość Ziemia — Słońce =  $1,5 \cdot 10^8$  km), gromadzącym większość momentu pędu Układu





Słonecznego. Dysk był mocno spłaszczony. Mówi o tym mały stosunek  $z/r = 0,05-0,1$  na powierzchni dysku ( $r, z$  — współrzędne, jak na rysunku). Ze względu na znaczną nieprzezroczystość gazu wywołaną obecnością mikroskopijnych ziaren pyłu i lodu ciepło było przenoszone w kierunku prostopadłym do płaszczyzny dysku. Prowadziło to do powstawania pionowych ruchów konwekcyjnych materii zaznaczonych schematycznie na rysunku. Lepkość gazu związana z niewielką turbulencją towarzyszącą konwekcji powodowała powolny dryf materii dysku ku protosłońcu z prędkościami rzędu centymetrów na sekundę. Dlatego też mgławica Laplace'a była w istocie dyskiem akrecyjnym (porównaj artykuł B. Paczyńskiego w *Delcie 2/1980*).

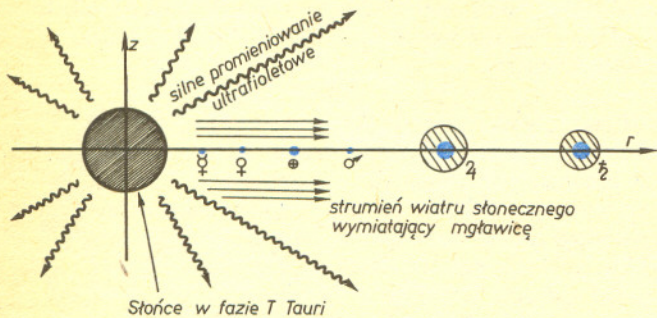
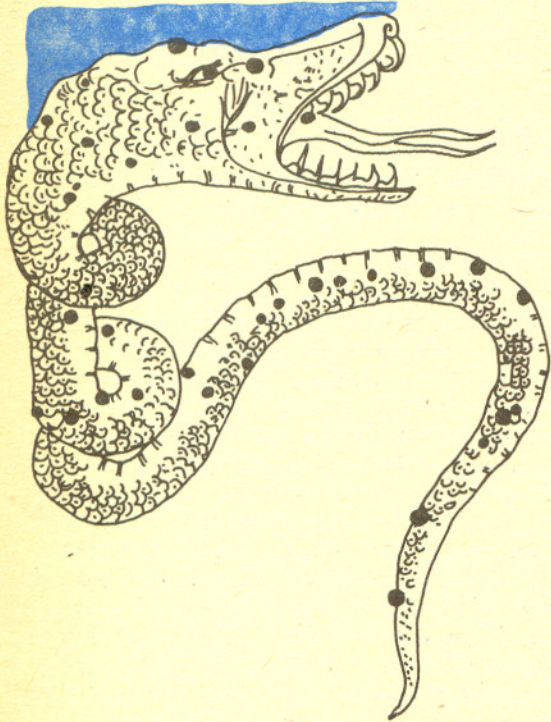
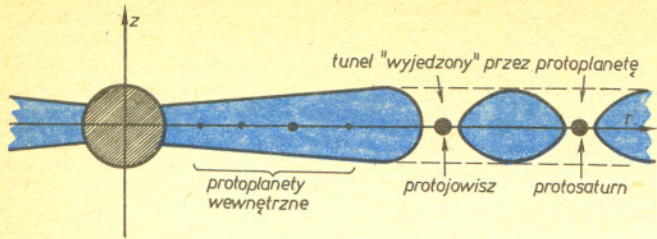


**Odsłona trzecia: Fragmentacja dysku pyłowego.** Masa dysku gazowo-pyłowego, stanowiąca około 5%  $M_{\odot}$ , była zbyt mała, aby przypadkowe zagęszczenia w dysku mogły narastać przyciągając okoliczny gaz mgławicy i w ten sposób tworzyć protoplanety gazowe. Ale, jak mówi rzymska maksyma, „przeznaczenie znajdzie drogę”. Pyłki zawarte w dysku zlepiając się w zderzeniach niesprężystych rosły do rozmiarów milimetrowych i opadając pod wpływem pionowej siłowej przyciągania dysku ku jego płaszczyźnie równikowej tworzyły wewnątrz dysku wodorowo-helowego tysiące razy cieńszy od niego dysk pyłowo-lodowy (chemicy nazwaliby ten proces sedymentacją). Gęstość w owym cienkim dysku przekroczyła szybko graniczną wartość, konieczną do niestabilności grawitacyjnej i dysk pyłowy uległ fragmentacji, pozostawiając po sobie kondensacje o masach  $10^{15}-10^{17}$  kg, które po 10 tys. lat, a więc bardzo szybko w kosmogonicznej skali czasowej, przeistoczyły się w kilometrowego rozmiaru ciała, przypominające dzisiejsze planetoidy. Rysunek obrazuje ten etap powstawania planet; zaznaczono jedynie kilka planetezymali — tak bowiem nazywa się obiekty o masach  $10^{17}-10^{22}$  kg. Ich skład chemiczny zależał od temperatury: w pobliżu Słońca, gdzie temperatura była wyższa, składały się one z minerałów o dużej zawartości Mg, Al, Si i Fe, w odległościach większych niż 5 j.a. przeważały lody  $CH_4, H_2O$  i  $NH_3$  oraz lżejsze krzemiany.



**Odsłona czwarta: Ewolucja zderzeniowa roju planetezymali.** Kolejnym etapem historii powstawania planet była ewolucja dynamiczna roju małych ciał obiegających Słońce po niemal kołowych orbitach. Istniało kilka czynników odpowiedzialnych za niezerowy rozrzut prędkości ciał należących do roju. Były to głównie: bliskie przejścia dwóch ciał zaburzające ich początkowe orbity oraz opór aerodynamiczny gazu orbitującego wokół Słońca z nieco mniejszą, niż ciała stałe prędkością (różnice ciśnień między sąsiednimi warstwami powodują, że w dysku gaz porusza się nieco wolniej). W ten sposób w roju nie panowała stagnacja, lecz obok milionów planetezymali pojawiać się zaczęły i rosnąć dalej kosztem pochłanianych planetezymali i meteoroidów ciała zwane protoplanetami — zwycięzcy wyścigu ku większym masom, o masach  $10^{22}-10^{24}$  kg, porównywalnych z masą Księżyca. Do ich akumulacji potrzeba było dużo czasu, bo aż kilkudziesięciu milionów lat. Protoplanety otaczały się pierwotną, rzadką atmosferą wodorowo-helową.

Bombardowanie drobnymi ciałami i większymi planetezymalami rozgrzewało zewnętrzne warstwy protoplanet do temperatury topnienia. Wówczas początkowo jednorodny materiał skalny miał szansę dyferencjacji, to znaczy przemieszczania się cięższych frakcji skalnych ku centrum, lżejszych zaś ku powierzchni protoplanety, co doprowadziło do występującego u wszystkich planet wewnętrznych podziału na gęste jądro i lżejsze — płaszcz i skorupę. Do ostatecznego wykończenia budowy Ziemi i sąsiednich planet trzeba już było tylko kilku drobnych retuszów: pierwotne atmosfery złożone z lekkich atomów helu i wodoru



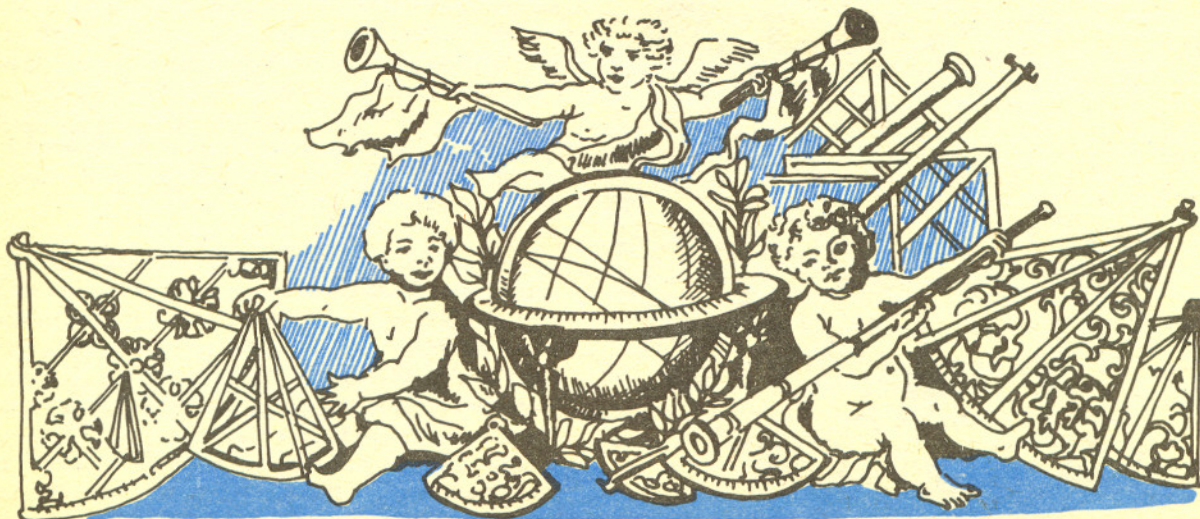
rozproszyły się pokonując niezbyt silną grawitację planet, a ich miejsce zajęły atmosfery wydzielone w drodze uwolnienia gazów zawartych w skorupie litosfery. W przypadku Ziemi, już po okresie tworzenia się Układu Słonecznego, trwającym nie więcej, niż 100 mln lat, skład chemiczny atmosfery został istotnie zmodyfikowany przez bakterie beztlenowe, a następnie inne istoty żywe.

Co działo się jednak w rejonie planet olbrzymów? Protoplanety urosły tam do masy równej kilkunastu masom Ziemi. Do dziś zresztą tę masę mają wszystkie, kamienno—lodowe jądra tych planet. Powyżej tej granicznej masy, jak to wynika z obliczeń struktury podobnych obiektów przeprowadzonych przez astronomów japońskich, następuje gwałtowne zapadnięcie się i zagęszczenie otaczającej protoplanetę pierwotnej, rozległej atmosfery. Przebiegiem i momentem zakończenia procesu opadania gazowej materii dysku na jądra planet zewnętrznych rządziły szczególnie dynamiki związane ściśle z rezonansami orbitalnymi i tworzeniem w okolicach orbit protoplanet pustych tuneli, przypominających przerwy w pierścieniach Saturna. Być może uda się w oparciu o mechanikę nieba i mechanikę fal gęstościowych zrozumieć nie tylko obecne położenia planet, ale i masy planet olbrzymów. Ale na pewno w tych kwestiach trzeba jeszcze zaczekać.

**Odsłona piąta i ostatnia: Rozproszenie mgławicy słonecznej.** Wszystkie gwiazdy o masach porównywalnych z masą Słońca przechodzą w okresie „dziecięcym” przez krótkotrwałą (milion—10 mln lat) fazę zwaną fazą *T Tauri*, w której wyrzucają ze swej powierzchni intensywny strumień wiatru gwiazdowego i promieniowania — głównie ultrafioletowego. Ich łączne ciśnienie było w stanie rozwiać w przestrzeń międzygwiazdową resztki materii dysku protoplanetarnego, które nie weszły w skład planet i nie opadły na Słońce, nim weszło ono w fazę *T Tauri*.

W powyższym scenariuszu mowa była o powstawaniu planet. Zapewne tworzenie satelitów planet przebiegało podobnymi torami. Jowisz i Saturn otoczone były gazowymi dyskami protosatelitarnymi, dającymi początek ich największym księżycom.

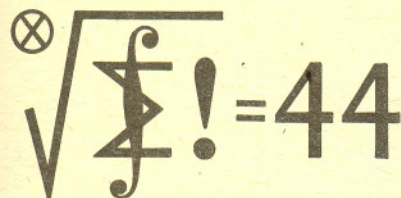
Także najmniejsze ciała Układu Słonecznego — meteoryty i komety — mogą pomóc w rekonstrukcji jego dziejów. Wielu ciekawych informacji oczekujemy np. z badań składu chemicznego jąder kometarnych, które są reliktem z czasów kondensacji materii stałej w gazowo—pyłowym dysku protoplanetarnym. Dlatego, między innymi, z ciekawością obserwujemy loty próbników „Vega”, „Giotto” i „Planeta A” ku zbliżającej się z dnia do Słońca komety Halleya.



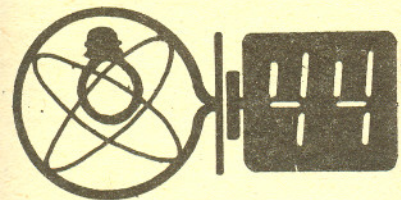
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1986

### Skrót regulaminu

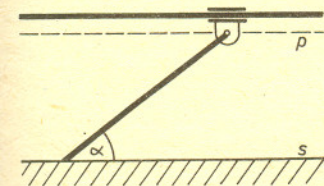
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.



Redaguje dr Marcin E.KUCZMA



Redaguje dr Andrzej NADOLNY



### Zadania z matematyki nr 119, 120

119. Ciąg liczb dodatnich  $(a_n)$  spełnia układ nierówności  $a_n < a_{n+1} + a_n^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Czy z tego wynika, że szereg  $\sum a_n$  jest rozbieżny?

120. Kolejne boki czworokąta mają długość  $a, b, c, d$ ; długości przekątnych równe są  $e$  i  $f$ . Suma miar kątów przeciwległych wynosi  $\omega$ . Udowodnić, że

$$(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos \omega = (ef)^2.$$

Zadanie 120 przysłał pan Waldemar Gorzkowski z Warszawy.

### Zadania z fizyki nr 17, 18

17. Jednorodny, sztywny, cienki pręt, którego górny koniec jest zamocowany przegubowo w taki sposób, że może się poruszać (bez tarcia) tylko po poziomej prostej  $p$ , spoczywa swym dolnym końcem na płaskim, sztywnym, poziomym podłożu  $s$  — jak na rysunku. Pręt leży w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez prostą  $p$  i jest nachylony do podłoża pod kątem  $\alpha$ . Współczynnik tarcia statycznego pręta o podłoże wynosi  $f$ .

Obliczyć, z jaką siłą  $F$  skierowaną wzdłuż prostej  $p$  należy działać na górny koniec pręta, aby przesunąć go po podłożu (należy rozpatrzyć wszystkie przypadki). Odległość prostej  $p$  od płaszczyzny  $s$  pozostaje stała, niezależnie od wartości siły  $F$ .

18. Przed aparatem fotograficznym nastawionym „na nieskończoność” umieszczono w odległości dwóch ogniskowych od obiektywu cienki, czarny krążek o średnicy  $D$ . Płaszczyzna krążka jest prostopadła do osi optycznej obiektywu, a jego środek leży na tej osi. Obliczyć średnice obszarów na błonie fotograficznej, które po wykonaniu zdjęcia będą (a) całkowicie i (b) częściowo zakryte przez obraz krążka. Średnica otworu obiektywu wynosi  $d < D$ . Obiektyw traktujemy jako soczewkę cienką, a dyfrakcję zaniedbujemy.

## Konkurs

Jak wiemy, zbliża się kometa Halleya. Jest to wydarzenie na tyle wyjątkowe (raz na 76 lat), że może niejednen z nas chciałby zostawić sobie po nim jakiś trwały ślad. W związku z tym ogłaszamy konkurs na zdjęcie komety Halleya. Ostrzegamy — konkurs jest trudny. Wiemy bowiem (*Patrz w niebo* w poprzednim numerze), że warunki widzialności komety w Polsce będą złe. Wprawdzie jasności komet sprawiają czasem duże niespodzianki, jednak kometa Halleya jest już dość „leciwa” i raczej nie należy oczekiwać, że będzie jaśniejsza, niż się przewiduje. Dlatego najprawdopodobniej dla uzyskania jej zdjęcia nie wystarczy kilkusekundowa ekspozycja nieruchomym aparatem — trzeba będzie przez dłuższy czas prowadzić aparat za obracającym się niebem. A jak tego dokonać — pozostawiamy już do rozstrzygnięcia uczestnikom konkursu.

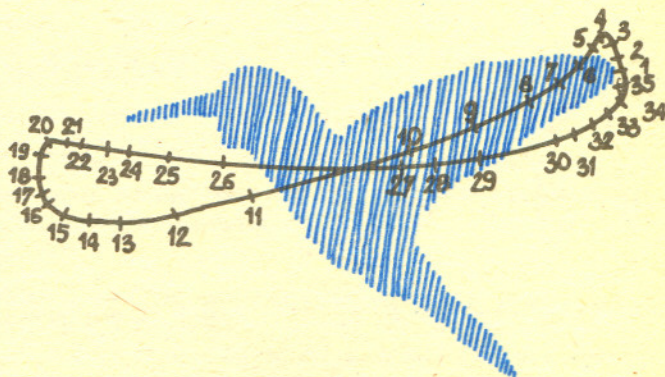
Chętnych prosimy o nadsyłanie zdjęć do końca maja 1986, a wraz z nimi następujących informacji: imię, nazwisko i adres autora, data i godzina zdjęcia, typ aparatu i użytego filmu, czas ekspozycji i krótki, techniczny opis całej aparatury. Najlepsze zdjęcia opublikujemy, a między uczestników konkursu rozlosujemy nagrody.



# delta



3. Znany jest lot trzepoczący owadów i kolibrów. W takim locie skrzydła poruszają się „w ósemkę” do przodu i do tyłu tak, że owad wisi w spokojnym powietrzu praktycznie nieruchomo.



## Rachunki i przyroda

1. W XVII wieku Galileusz dowodził, korzystając z praw mechaniki, że nie istnieją olbrzymy wiele razy większe od człowieka. Załóżmy, rozumował, że olbrzym jest dziesięciokrotnie większy od człowieka. Dziesięć razy większa jest jego wysokość, długość stopy i inne rozmiary, na ubranie dla niego potrzeba 100 razy więcej materiału, a jego objętość, a także masa, jest 1000 razy większa. Obciążenie jednostki powierzchni przekroju kości olbrzyma wzrasta w porównaniu z człowiekiem  $\frac{1000}{100} = 10$  razy.

Olbrzym okazuje się więc zbyt „kruchy”, by móc na przykład biegać.

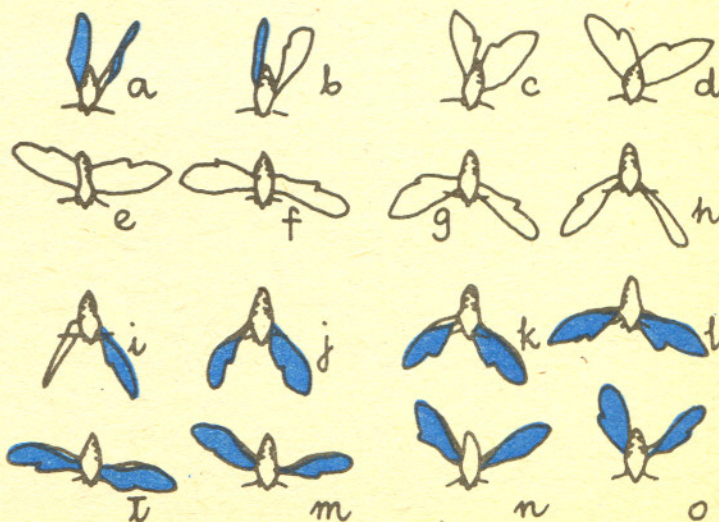
2. Wyobraźmy sobie, że 10 razy zwiększyliśmy rozmiary ptaka. Ciężar przypadający na jednostkę powierzchni skrzydeł wzrósł także dziesięciokrotnie. Aby powstała siła nośna równoważąca ten ciężar, prędkość ptaka musi być co najmniej  $\sqrt{10}$  razy większa. Stąd wniosek, że większy owad lub ptak (przy dłuższych przelotach) musi rozwijać większą prędkość. Rzeczywiście: średnia prędkość szarańczy o masie 2 g jest równa około 4 m/s, a prędkość gołębia grzywacza o masie 500 g — około 10 m/s.

Wynikają stąd dalsze wnioski. Zwiększenie prędkości np. 10 razy wymaga dziesięciokrotnego zwiększenia mocy na jednostkę masy. Maksymalną moc mięśni wśród zwierząt latających mają owady i nietoperze (około 200 W na kilogram mięśni). Z tego ograniczenia wynika, że duże ptaki, u których moc konieczna do lotu z minimalną prędkością przewyższa moc mięśni, nie mogą latać. Oszacowano w ten sposób, że największe latające ptaki nie mogą mieć masy większej niż 12 kg.

Wykażemy, że taki lot nie jest możliwy dla owadów zbyt małych. Skorzystamy przy tym z informacji, iż siła nośna praktycznie nie pojawia się dla małych wartości tzw. liczby Reynoldsa

$$R = \frac{vl}{\nu}$$

gdzie  $v$  to prędkość skrzydła względem powietrza,  $l$  — rozmiar skrzydła (np. szerokość), a  $\nu$  określa lepkość powietrza. Gdy  $R < 50$ , siła nośna jest bliska zeru. Załóżmy, że 10 razy zmniejszamy rozmiary owada. Aby utrzymać liczbę Reynoldsa na właściwym poziomie, prędkość skrzydeł musi wzrosnąć 10 razy, a częstość uderzeń 100 razy. Zmienia to wydawany przez skrzydełka dźwięk — komar brzęczy „cieniej” niż mucha.

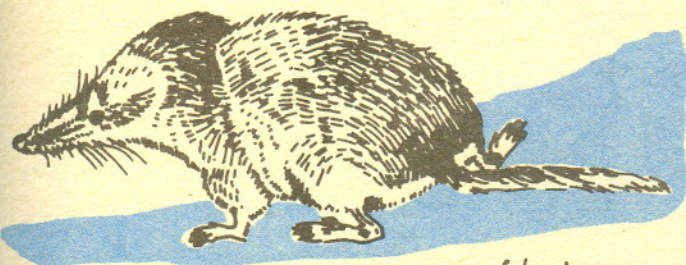


Jednak częstość uderzeń skrzydeł nie może być zbyt duża. Moc mięśni jest przecież ograniczona prędkością przemiany materii. Dlatego bardzo małe owady nie powinny latać.

4. Ssaki i ptaki są zwierzętami stałocieplnymi. Wynika stąd, że ich rozmiary nie mogą być zbyt małe.

Zwierzę 10 razy mniejsze ma 100 razy mniejszą powierzchnię i 1000 razy mniejszą masę, a więc stygnie  $\frac{1000}{100} = 10$  razy szybciej. Dlatego małe

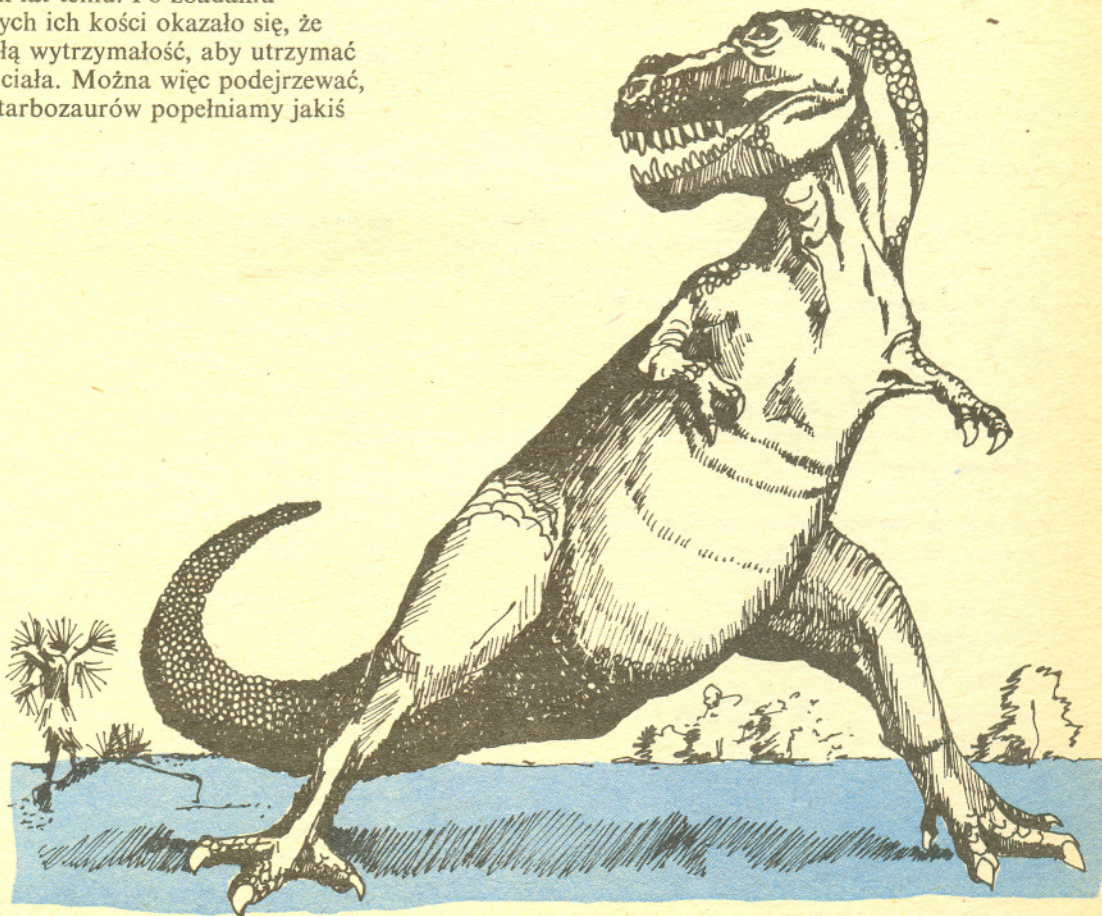
zwierzęta muszą jeść częściej niż duże. Najmniejszy ssak — ryjówka (długość 4 cm, waga 1,5 g — uwaga! mieszka w Polsce) musi jeść co kilka godzin. W przeciwnym razie ginie z utraty ciepła.



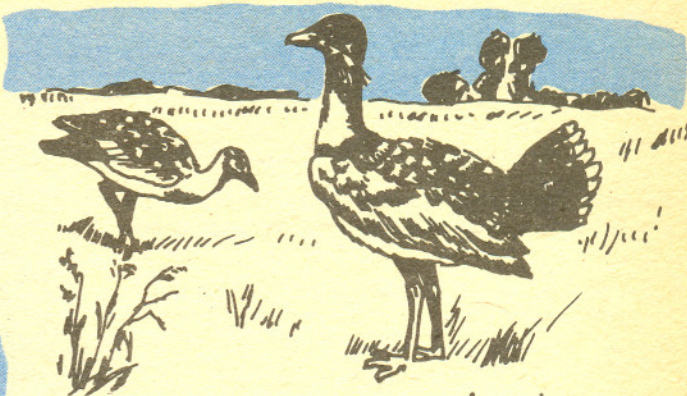
ryjówka

Podobne rozumowanie stosuje się dla wyjaśnienia wielu ogólnych prawidłowości obserwowanych w przyrodzie. Ponieważ pomija się przy tym większość indywidualnych cech, niemal od każdej z uzyskanych w ten sposób reguł istnieją wyjątki.

1. Tarbozaury to wielotonowe drapieżne gady żyjące na Ziemi około 60 mln lat temu. Po zbadaniu własności mechanicznych ich kości okazało się, że kości te mają zbyt małą wytrzymałość, aby utrzymać ciężar ich ogromnego ciała. Można więc podejrzewać, że przy rekonstrukcji tarbozaurów popełniamy jakiś istotny błąd.



2. Wyjątkiem jest drop, najcięższy spośród wszystkich ptaków latających (uwaga! mieszka w Polsce). Jego ciężar dochodzi do 16 kg. Również niektóre latające gady kopalne nie spełniają otrzymanego przez nas ograniczenia.



dropie

3. Niektóre owady potrafią utrzymać się w locie trzepoczącym nawet dla  $R < 20$ , w kilku przypadkach dzięki efektom nieznanym w aerodynamice.

4. Kolibry są tak małe, że dla utrzymania stałej temperatury muszą jeść niemal bez przerwy. W czasie snu obniżają temperaturę ciała do temperatury otoczenia (hibernują) i w ten sposób unikają grożącej im z braku pożywienia śmierci.

*Małą Deltę przygotowali Mirosław GORBACZOW i Maciej JĘDRZEJCZAK*

# Najprostszy najszybszy

W niektórych zadaniach rozpoznawania mowy i rozpoznawania obrazów występuje następujący problem:

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych  $x_1, \dots, x_n$ . Szukamy takiego

podciągu  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k$ , aby suma  $\sum_{i=j}^k x_i$  była jak

największa. Podciąg taki będziemy dalej nazywać *najlepszym*.

Potrzebny jest algorytm obliczania sumy najlepszego ciągu.

Przypuśćmy, że ciąg wygląda następująco:

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	-1	1	-2	3	2	-4

Najlepszym podciągiem jest podciąg 3 2 ( $j = 4, k = 5$ ), jego sumą jest 5.

Jeśli wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, to za najlepszy uznamy podciąg pusty ( $j = 0, k = 0$ ), o sumie zerowej.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że najprościej byłoby obliczyć sumy wszystkich możliwych podciągów i wybrać największą z nich:

Największa Suma: = 0

dla  $j$  od 1 do  $n$  wykonaj

dla  $k$  od  $j$  do  $n$  wykonaj

Suma: = 0

dla  $i$  od  $j$  do  $k$  wykonaj

Suma := Suma +  $x_i$

jeśli Suma > Największa Suma

to Największa Suma := Suma

Obliczmy, ile dodawań wykona ten algorytm. Dla pary ( $j, k$ ) trzeba ich wykonać  $k-j+1$ , a więc liczba wszystkich dodawań wyraża się przez

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n (k-j+1) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j+1} i = \sum_{j=1}^n \frac{(n-j+2)(n-j+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n l(l+1) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(n+2) = \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n,$$

a zatem liczba operacji jest rzędu  $n^3$ .

Zastanówmy się, jak można poprawić ten algorytm. Zwróćmy uwagę, że pętla oznaczona gwiazdką oblicza kolejno sumy

$$S_{j,j} = x_j$$

$$S_{j,j+1} = x_j + x_{j+1}$$

$$S_{j,n} = x_j + x_{j+1} + \dots + x_n$$

spełniające zależność  $S_{j,i+1} = S_{j,i} + x_{i+1}$ . Można więc zapisać tę pętlę następująco

Suma: = 0

dla  $k$  od  $j$  do  $n$  wykonaj

Suma := Suma +  $x_k$

jeśli Suma > Największa Suma

to Największa Suma := Suma

Po zastosowaniu tej modyfikacji algorytm wykonuje

$$\sum_{j=1}^n (n-j+1) = \sum_{l=1}^n l = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n,$$

czyli rzędu  $n^2$  dodawań.

Jeszcze lepszy algorytm można otrzymać stosując metodę „dziel i rządź”. Przypuśćmy, że interesuje nas na razie podciąg  $x_a, x_{a+1}, \dots, x_b$ . Podzielmy go na dwie w miarę równe części  $x_a, x_{a+1}, \dots, x_c$  oraz  $x_{c+1}, x_{c+2}, \dots, x_b$ . Możliwe są trzy różne położenia najlepszego podciągu:

$$1) a \leq j \leq k \leq c$$

$$2) a \leq j \leq c < k \leq b$$

$$3) c < j \leq k \leq b$$

Można więc znaleźć maksymalne sumy dla ciągów należących do tych trzech grup, a następnie wybrać największą z nich.

Najlepszy ciąg należący do grupy drugiej możemy znaleźć stosując pętlę analogiczną do pętli \*, kosztem  $b-a+1$  sumowań. Najlepsze ciągi z grupy pierwszej i trzeciej znajdziemy stosując ten sam algorytm do podciągów  $x_a, \dots, x_c$  oraz  $x_{c+1}, \dots, x_b$ . Jeśli oznaczyć koszt znalezienia najlepszego ciągu wśród  $n$  elementów przez  $T_n$ , to zachodzi równość

$$T_n = n + 2 \cdot T_{n/2}$$

mająca rozwiązanie  $T_n = n \log_2 n$ . Pełny zapis algorytmu pozostawiamy Czytelnikowi.

Okazuje się jednak, że istnieje algorytm jeszcze lepszy i — co dziwne — jeszcze prostszy. Korzysta on z faktu, że najlepszy ciąg musi się zaczynać i kończyć liczbą dodatnią (w przeciwnym razie usunięcie skrajnego elementu zwiększyłoby sumę ciągu). Skoro tak, to zacznijmy analizę od pierwszego dodatniego elementu,  $x_a$ . Rozważmy najdłuższy podciąg  $x_a, x_{a+1}, \dots, x_b$  taki,

że dla każdego  $c$  ( $a \leq c \leq b$ )  $\sum_{i=a}^c x_i > 0$ . Zastanówmy się, jak

ma się ten podciąg do najlepszego ciągu  $x_j, \dots, x_k$ . Otóż albo  $a = j \leq k \leq b$ , albo  $b < j \leq k \leq n$ . Gdyby bowiem  $a < j \leq b$ , to dołączenie elementów  $x_a, \dots, x_{j-1}$  polepszyłoby ów ciąg. Z drugiej strony, gdyby  $a = j < b < k$ , to opuszczenie elementów  $x_a, \dots, x_{b+1}$  (o sumie nie większej od zera) co najmniej nie pogorszy ciągu.

Poszukajmy więc sum najlepszych ciągów, dla których  $a = j \leq k \leq b$  oraz  $b < j \leq k \leq n$  i porównajmy je. W pierwszym przypadku wymaga to  $b-a+1$  dodawań, natomiast w drugim — powtórzenia opisanego rozumowania dla reszty wyjściowego ciągu, poczynając od elementu  $b+1$ . Pełny algorytm wygląda następująco

Największa Suma: = 0

Suma Częściowa: = 0

dla  $i$  od 1 do  $n$  wykonaj

Suma Częściowa := Suma Częściowa +  $x_i$

jeśli Suma Częściowa < 0 to Suma Częściowa := 0

jeśli Suma Częściowa > Największa Suma

to Największa Suma := Suma Częściowa

Algorytm ten wykonuje dokładnie  $n$  dodawań!

Oszacowano czas pracy czterech podanych algorytmów na komputerze VAX 11/750 dla różnych długości ciągu:

$n$	Algorytm $n^3$	Algorytm $n^2$	Algorytm $n \log n$	Algorytm $n$
$10^2$	3,4 s	130 ms	30 ms	3,3 ms
$10^4$	39 dni	22 minuty	6,1 s	0,33 s
$10^6$	108 tys. lat	5 miesięcy	15 minut	33 s

(ms = milisekunda = 1/1000 s).

Jeszcze wymowniejsze jest porównanie czasu pracy algorytmu pierwszego, zaprogramowanego na superkomputerze CRAY-1, i algorytmu czwartego, zaprogramowanego na mikrokomputerze TRS-80 (Meritum 1).

$n$	CRAY-1	TRS-80
10	0,003 ms	200 ms
1000	3,0 s	20 s
2500	50 s	50 s
10 000	49 minut	3,2 minuty
1 000 000	95 lat	5,4 godziny

Na zakończenie dodajmy, że nie jest znany tani algorytm dla analogicznego problemu dwuwymiarowego (znalezienie najlepszego prostokąta w tablicy  $n \times n$ ). Prymitywny algorytm ma złożoność rzędu  $n^6$ , a więc zupełnie nie do zaakceptowania. A może komuś z Was coś przyjdzie do głowy?

J.D.



**Rozwiązanie zadania M 416.** Wśród  $10^n + 1$  kolejnych potęg trójki:  $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{10^n + 1}$  istnieją dwie  $3^k, 3^m$  ( $m > k$ ) dające tę samą resztę przy dzieleniu przez  $10^m$ . Liczba  $3^m - 3^k = 3^k(3^{m-k} - 1)$  dzieli się przez  $10^m$ , a ponieważ  $3^k$  i  $10^m$  są względnie pierwsze, to  $3^{m-k} - 1$  dzieli się przez  $10^m$ , czyli  $3^{m-k} = l \cdot 10^m + 1$  dla pewnego naturalnego  $l$ . Ostatnie  $n$  cyfr  $3^{m-k}$  to  $n-1$  zer i jedynka. W rozwinięciu dziesiętnym  $0,392781243729\dots$  występują więc dowolnie długie ciągi złożone z samych zer, nie może więc wystąpić okres, czyli omawiana liczba jest niewymierna.

## Czytelnicy proponują

Nasz Czytelnik, pan Tadeusz Foszcz z Ilmenau w NRD, przysłał list z następującym zadaniem:

Żarówki  $Z_1$  i  $Z_2$  połączono szeregowo i włączono do źródła prądu. Obie żarówki pracują pod napięciem znamionowym. Jakie jest prawdopodobieństwo awarii układu przed upływem tysiąca godzin pracy? Znałe są  $p_1$  i  $p_2$  — prawdopodobieństwo, że pierwsza (odpowiednio druga) żarówka spali się przed upływem tysiąca godzin pracy.

Pan Foszcz przysłał również rozwiązanie z propozycją znalezienia w nim błędu:

Niech  $S_1, S_2$  będą zdarzeniami polegającymi na tym, że  $Z_1$  (odpowiednio  $Z_2$ ) spali się przed upływem tysiąca godzin. Układ wytrzyma co najmniej tysiąc godzin wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie  $S'_1 \cap S'_2$  ( $S'_i$  oznacza zdarzenie przeciwne do  $S_i$ , tj.  $Z_i$  wytrzyma co najmniej tysiąc godzin). Mamy teraz

$$P((S'_1 \cap S'_2)') = P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2).$$

Ale  $P(S_1 \cap S_2) = 0$ , bo zawsze najpierw spali się jedna z żarówek — przez drugą przestanie płynąć prąd i nie będzie miała okazji się spalić. W takim razie szukane prawdopodobieństwo wynosi  $p_1 + p_2$  i może być większe od 1.

Panu Foszczowi rozgrzylenie tego problemu zajęło wiele czasu i sprawiło, że rachunek prawdopodobieństwa należy do tych działów matematyki, które najbardziej mu się podobają. Nie podaje jednak właściwego rozwiązania — rozumiemy to jako wyzwanie dla Redakcji. Oto nasza odpowiedź.

Błąd polega na tym, że  $S_1$  jest zdarzeniem „pierwsza żarówka spali się *nie później niż* druga przed upływem tysiąca godzin”, zatem  $P(S_1)$  jest zapewne różne od  $p_1$ . To samo odnosi się do zdarzenia  $S_2$ . Można to łatwo zobaczyć na rysunku. Rozpatrzmy, zamiast pierwotnego układu, obwód złożony z dwóch żarówek połączonych *równolegle*. Zdarzenie „ $Z_1$  spali się w chwili  $t_1$  i  $Z_2$  spaliła się w chwili  $t_2$ ” reprezentuje na rysunku punkt  $(t_1, t_2)$ . Zdarzenia — to teraz „porządne” podzbiory pierwszej ćwiartki płaszczyzny, a prawdopodobieństwo — to unormowana miara na teje ćwiartce. Widać teraz, że

$$P(S_1 \cup S_2) = 1 - P(S'_1 \cap S'_2) = 1 - P(A_1 \cap A_2).$$

Przypominamy, że rozpatrujemy teraz żarówki włączone równolegle i gdy przepali się jedna z nich, doświadczenie się kończy. Łatwo uwierzyć, że  $A_1$  i  $A_2$  są niezależne. Zatem

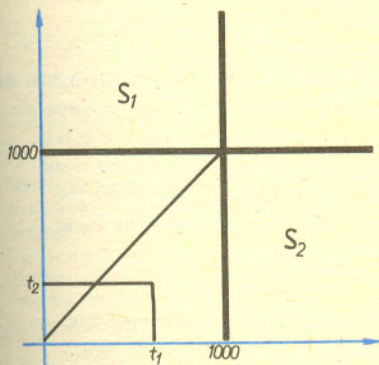
$$P(A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2).$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

Zauważmy jeszcze, że  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ . Niemniej jednak jest to zbiór „chudy” — przekątna kwadratu. Przy każdym rozsądnym określeniu prawdopodobieństwa będziemy mieli  $P(S_1 \cap S_2) = 0$ .

R.S.



- $A_1 = \{(t_1, t_2): t_1, t_2 \geq 0, t_1 > 1000\}$
- $A_2 = \{(t_1, t_2): t_1, t_2 \geq 0, t_2 > 1000\}$
- $S_1 = \{(t_1, t_2): 0 \leq t_1 \leq t_2, t_1 \leq 1000\}$
- $S_2 = \{(t_1, t_2): 0 \leq t_2 \leq t_1, t_2 \leq 1000\}$

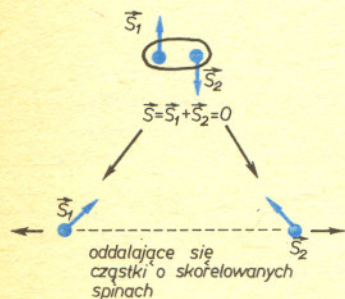


# Mechanika kwantowa, paradoks Einsteina-Podolsky'ego-Rosena i komunikacja z szybkością nadświetlną (II)

Dr Włodzisław DUCH

Paradoks EPR, jak nazwał doświadczenie myślowe Einsteina, Podolsky'ego i Rosena znany fizyk angielski Dawid Bohm, uznawany był przez długie lata za problem czysto akademicki. W 1951 roku Bohm opisał w swoim podręczniku mechaniki kwantowej znacznie prostszą wersję tego paradoksu, możliwą do eksperymentalnej weryfikacji. Bohm interesował się przez długi czas możliwością wprowadzenia do mechaniki kwantowej „ukrytych parametrów”, by uczynić z niej „porządną”, realistyczną i lokalną teorię. Próby takie nigdy się nie powiodły i w latach pięćdziesiątych interpretacja matematycznego formalizmu mechaniki kwantowej, stworzona głównie przez Bohra, zwana często „interpretacją kopenhaską” (Bohr pracował w Kopenhadze) była już dość powszechnie przyjęta. Poszukiwanie ukrytych parametrów doprowadziło jednak do pewnych rezultatów ubocznych: Bohm wymyślił nową wersję paradoksu EPR, a później John Bell swoją słynną nierówność.

Najprostszą parą wielkości komplementarnych są dwie składowe spinu cząstki. Spin, czyli wewnętrzny moment pędu, jest (jak każdy moment pędu) wielkością wektorową, ma więc trzy składowe. Jednoznaczny pomiar dowolnych dwóch składowych jest — jak wynika z podstawowych zasad mechaniki kwantowej — niemożliwy. Ponieważ składowe spinu mierzone w jednostkach kwantu działania  $\hbar = h/2\pi$  przyjmować mogą tylko wartości połówkowe lub całkowite, ich pomiar jest znacznie prostszy niż pomiar położenia czy pędów cząstek. David Bohm zaproponował więc następujący schemat doświadczenia: weźmy parę cząstek lub atomów, których sumaryczny spin jest równy zeru, a następnie je rozdzielmy. Otrzymujemy dwie cząstki w różnych, odseparowanych od siebie obszarach przestrzeni. Ponieważ ich sumaryczny spin nie uległ zmianie, wiemy, że jeśli składowa  $S_x$  dla pierwszej cząstki wynosi  $+1$ , to dla cząstki drugiej musi być dokładnie przeciwna, czyli  $-1$ . Pomiary składowych spinu w dwóch obszarach muszą więc dać dokładnie skorelowane wartości. Mierząc składową  $S_x$  dla cząstki pierwszej, a  $S_y$  dla drugiej, poznajemy więc dwie składowe spinu dla każdej z tych cząstek, a przecież zgodnie z mechaniką kwantową nie mogą one być określone równocześnie! Tak właśnie wygląda nowa wersja paradoksu EPR.



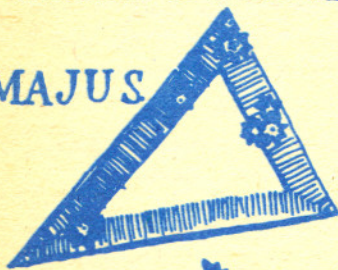
Rys. 1

Przeanalizujemy teraz dokładnie, co się właściwie w tym doświadczeniu dzieje. Ocena zależy od tego, w jaki sposób interpretujemy formalizm mechaniki kwantowej. Wersja trywialna, za którą opowiada się Einstein, jest taka: nie stało się nic nadzwyczajnego. Wszystkie składowe spinu są w rzeczywistości dobrze określone, chociaż my ich nie znamy, a mechanika kwantowa nie potrafi tego faktu opisać. Jest więc rzeczą całkiem oczywistą, że pomiar składowej spinu jednej cząstki daje informację o odpowiedniej składowej cząstki drugiej. Funkcja falowa nie opisuje rzeczywistego stanu układu, a jedynie dostępną nam wiedzę o uśrednionych wynikach dużej liczby pomiarów. Cząstki są niezależne i pomiar własności jednej z nich nie wpływa na drugą. Jest to postawa uznająca zarówno realizm, jak i lokalność. Wersja Bohra jest znacznie dziwniejsza: składowe spinu, podobnie jak położenie fotonu w opisanym poprzednio eksperymencie, nie są określone aż do momentu pomiaru. Dopiero pomiar powoduje, że z potencjalnie możliwych wartości aktualizuje się jedna; w tym samym momencie urzeczywistnia się również odpowiednia składowa drugiej cząstki. Pomiar nie jest więc aktem biernego stwierdzenia tego co jest, lecz „elementarnym aktem tworzenia”, jak nazywa to Wheeler. Interpretacja taka nie jest zgodna z realizmem — rzeczywistość nie jest w pełni aktualna przed pomiarem — ani z lokalnością — wpływ na drugą cząstkę jest natychmiastowy. Zauważmy jednak, że nie jest to zwykle przekazywanie informacji, gdyż nie ma tu wymiany żadnych sygnałów i nie mamy do czynienia z przekazywaniem energii.

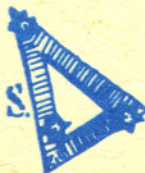
Czy można odróżnić te dwie interpretacje w jakimkolwiek eksperymencie? Przez długi czas wydawało się, że jest to niemożliwe. Przełom nastąpił w 1965 roku, kiedy to John S. Bell, pracujący w CERN-ie, udowodnił pewną bardzo ogólną nierówność, która obowiązuje dla wszystkich realistycznych teorii lokalnych, lecz nie zawsze jest zgodna z przewidywaniami mechaniki kwantowej. Realistyczne teorie lokalne (w skrócie teorie RL) są teoriami, które można interpretować „w duchu Einsteina”. Po raz pierwszy pojawiła się więc możliwość

TRIANGULUM

MAJUS



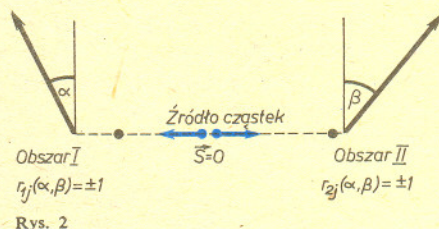
MINUS





eksperymentalnego sprawdzenia, czy warto szukać teorii RL, które zastąpiłyby mechanikę kwantową, czy też w naszych poszukiwaniach pełnego opisu zjawisk natury musimy z takich teorii zrezygnować. Wystarczyło w tym celu sprawdzić eksperymentalnie, czy spełniona jest nierówność Bella. Z jej spełnienia automatycznie wynika, że mechanika kwantowa nie jest dobrą teorią indywidualnych zjawisk. Jeśli natomiast nierówność ta nie będzie spełniona i wyniki doświadczeń potwierdzą przewidywania mechaniki kwantowej, trzeba będzie zrezygnować z poszukiwań „wielkiej, zunifikowanej teorii” wszystkich zjawisk, o której marzą fizycy, wśród teorii typu RL (mechanika kwantowa taką teorią oczywiście nie jest, gdyż nie obejmuje ani oddziaływań grawitacyjnych, ani silnych i słabych).

Spróbujemy teraz napisać nierówność Bella i pokazać, że założenie realizmu i lokalności prowadzi do sprzeczności z przewidywaniami mechaniki kwantowej. W tym celu wyobraźmy sobie (rys. 2) źródło, wysyłające pary cząstek, np. elektronów, w przeciwnych kierunkach.



Każda para cząstek ma całkowity spin równy zero. Po obu stronach ustawiona jest aparatura, za pomocą której możemy mierzyć dowolne składowe wektora spinu. Jest to bardzo proste — wystarczy przepuścić elektron przez pole magnetyczne, które odchyli go w dół lub w górę, zależnie od rzutu wektora spinu na kierunek pola magnetycznego. Ze względów historycznych nazywa się taką aparaturę „filtrem Sterna-Gerlacha” (filtr — bo oddziela cząstki o różnych składowych spinu). W obszarze I ustawimy nasz filtr pod kątem  $\alpha$  względem pionu, a w obszarze II pod kątem  $\beta$ . Wyniki pomiaru składowych spinu dla pary numer  $j$  w takim układzie eksperymentalnym oznaczymy przez  $r_{1j}(\alpha, \beta)$  i  $r_{2j}(\alpha, \beta)$ . Używając jako jednostek  $\hbar/2$  dla elektronów otrzymujemy wartości składowych równe  $\pm 1$ . Oznaczmy przez  $N_{++}(1\alpha, 2\beta)$  liczbę tych pomiarów, w których  $r_{1j}(\alpha, \beta) = r_{2j}(\alpha, \beta) = +1$ , czyli w obu obszarach rzut spinu zgodny jest z kierunkiem pola. Po wykonaniu serii  $N$  pomiarów możemy oczywiście zmienić kąty na inne. Nierówność Bella mówi, że dla trzech serii pomiarów musimy otrzymać

$$N_{++}(1\alpha, 2\beta) + N_{++}(1\beta, 2\gamma) \geq N_{++}(1\alpha, 2\gamma).$$

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę pomiarów w każdej serii otrzymujemy prawdopodobieństwo  $P_{++}(1\alpha, 2\beta) = N_{++}(1\alpha, 2\beta)/N$  tego, że oba wyniki wyniosą  $+1$ , przy pomiarze rzutu spinu na kierunek  $\alpha$  w obszarze I i  $\beta$  w obszarze II

$$P_{++}(1\alpha, 2\beta) + P_{++}(1\beta, 2\gamma) \geq P_{++}(1\alpha, 2\gamma).$$

Nierówność ta musi być spełniona, jeśli słuszny jest realizm i lokalność. Jak zachowuje się  $P_{++}(1\alpha, 2\beta)$  dla różnych kątów? Dla  $\alpha = \beta$  (pomiar rzutów na ten sam kierunek) musimy otrzymać w obu obszarach wartości przeciwne, a więc prawdopodobieństwo otrzymania obu jednakowych  $P_{++}(1\alpha, 2\alpha) = 0$ . Z drugiej strony jeśli  $\alpha - \beta = 90^\circ$ , mamy pomiar dwóch niezależnych składowych, dający z jednakowym prawdopodobieństwem cztery wyniki:  $+1/+1$ ,  $+1/-1$ ,  $-1/+1$  i  $-1/-1$ , a więc  $P_{++}(1\alpha, 2\beta) = 1/4$ . Zgodnie z mechaniką kwantową

$$P_{++}(1\alpha, 2\beta) = 1/2 \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

co zgadza się z powyższymi wynikami. Oszacujmy teraz lewą i prawą stronę nierówności Bella korzystając z powyższego wzoru dla kątów  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$  i  $\gamma = 90^\circ$ . Otrzymujemy:  $0,146 \dots \geq 0,250$ , a więc przewidywania mechaniki kwantowej nie zgadzają się z tą nierównością.

Nie wchodząc w subtelne rozważania zauważmy, że w przedstawionym powyżej rozumowaniu, jak i w dowodzie nierówności Bella, ukryte są trzy założenia. Pierwszym z nich jest uznanie słuszności wnioskowania indukcyjnego — z dużej liczby pomiarów określamy prawdopodobieństwa, a więc wnioskujemy o możliwym zachowaniu się układu w przyszłych pomiarach. Jest to założenie niezbędne do wyprowadzenia jakichkolwiek wniosków z eksperymentów. Drugim założeniem jest uznanie pewnej formy realizmu: przedmioty mają własności niezależnie od tego czy decydujemy się je mierzyć czy nie. Wreszcie trzecim, najbardziej tu widocznym założeniem, jest lokalność. W ostatnim dziesięcioleciu przeprowadzono szereg doświadczeń, mających na celu eksperymentalną weryfikację nierówności Bella. Były to doświadczenia fascynujące. Od ich wyniku zależy bowiem sposób, w jaki patrzymy na świat. Szczególnie dokładne doświadczenia wykonał w ostatnich latach Alain Aspect we Francji. Ze względów technicznych mierzono



Rozwiązanie zadania M 417. Przypuśćmy, że

wielomian  $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  spełnia założenia

zadania. Wielomiany  $P_i(x) = \frac{x(x-1) \dots (x-i+1) \cdot (x-i-1) \dots (x-n)}{i \cdot (i-1) \dots (-1) \cdot (-1) \dots (-i-n)}$

przyjmują w punktach  $0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$  wartość zero, a w punkcie  $i$  wartość 1. Tak

więc wielomiany  $Q$  i  $\sum_{i=0}^n Q(i) \cdot P_i$  są równe,

bo w  $n+1$  punktach przyjmują te same

wartości. Wielomian  $\sum_{i=0}^n Q(i) \cdot P_i$ , a więc

$Q$  ma wszystkie współczynniki wymierne.

Wielomian  $Q$  każdą wartość przyjmuje w skończonej liczbie punktów, czyli dla pewnego  $m > 0$  liczba  $Q(m) = q$  jest względnie pierwsza z mianownikami wszystkich współczynników  $a_i$ . Dla dowolnych naturalnych  $k, j$  liczba  $(m+kq)^j - m^j$  jest podzielna przez  $q$ , a więc również  $Q(m+kq) -$

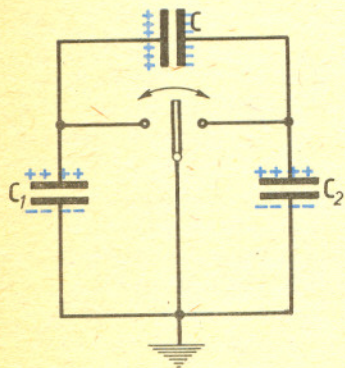
$-Q(m) = \sum_{j=1}^n a_j((m+kq)^j - m^j)$  dzieli się

przez  $q$ . Stąd któraś z wartości  $Q(m+kq)$  musi być liczbą złożoną ( $Q(m+kq) = Q(m)$  tylko dla skończenie wielu  $k$ ).

polaryzację fotonów, a nie rzuty spinów elektronów, nie czyni to jednak istotnej różnicy. Wyniki pomiarów wskazują jednoznacznie — nierówność Bella nie jest spełniona! Nie da się utrzymać jednocześnie lokalności i realizmu, niezależnie od teorii, jaką się posługujemy. W pierwszych wersjach doświadczeń polaryzatory ustawiano przed wykonaniem serii pomiarów, miały więc dość czasu, żeby „wyczuć” swoje wzajemne położenie. Chociaż możliwość taka wydaje się zupełnie nieprawdopodobna, postanowiono jednak wykluczyć ją doświadczalnie. W najnowszej wersji eksperymentów Aspecta kąt ustawienia polaryzatorów wybierany był w ostatnim momencie przed wykonaniem pomiarów tak, że żaden sygnał o prędkości nie większej od prędkości światła nie mógł przenieść informacji między przyrządami. Wszystkie wyniki zgadzają się znakomicie z przewidywaniami mechaniki kwantowej. Przedstawiając to zagadnienie celowo starałem się unikać szczegółowego omawiania różnych interpretacji i subtelności mechaniki kwantowej. Każda teoria fizyczna oprócz formalizmu matematycznego zawierać musi pewną interpretację. Większość fizyków radzi sobie jednak całkiem dobrze nie przejmując się takimi „subtelnościami”. W wydanym u nas podręczniku mechaniki kwantowej znany fizyk amerykański Wichman pisze np., że zagadnienia interpretacji nie są ważne, gdyż nie dyskutuje ich w czasie obiadu, gdy omawia z kolegami wszystkie ważne w fizyce tematy. W wyniku eksperymentów sprawdzających nierówność Bella zagadnienia interpretacji stały się znowu modne i z pewnością fizycy w Berkeley, gdzie pracuje Wichman, dyskutują o nich w czasie obiadów. Można jednak odnieść wrażenie, że prawie każdy fizyk, zabierający w tych sprawach głos, ma odmienną opinię. Nie chodzi przy tym o drobne różnice, lecz o tak podstawowe sprawy, jak: Co właściwie opisuje mechanika kwantowa? Czy pojedyncze cząstki, czy zespoły cząstek? Czy funkcja falowa daje informację o stanie układu, czy tylko o możliwej informacji dotyczącej tego stanu? Jaka jest rola obserwatora i rola świadomości w mechanice kwantowej? Nie brakuje przy tym bardzo radykalnych rozwiązań, takich jak teoria wielu światów Everetta, czy też teoria ukrytego porządku Davida Bohma. W opublikowanym niedawno wywiadzie Richard Feynman stwierdził: „Jak długo wydaje się, że przyroda skonstruowana jest na zasadzie trybików, w trybikach szukamy tego najbardziej wewnętrznego — ale to może nie być tak i wtedy szukamy, czym u diabła jest to, co znajdujemy!” Potrzeba takich radykalnych poszukiwań jest widoczna. Ponieważ prawie pod każdym z możliwych rozwiązań znaleźć można podpisy szeregu znakomitych fizyków, rozstrzygnięcie, kto ma rację, nie wydaje się w tej chwili możliwe. Nierówność Bella pozwala na wyeliminowanie pewnych interpretacji (np. ukrytych parametrów lokalnych), ale nie prowadzi do jednoznacznego rozstrzygnięcia tych zagadnień. Zamiast wdawać się w zagadnienia meta-fizyczne zastanówmy się nad możliwością praktycznego wykorzystania paradoksu EPR. Kilku autorów zwróciło uwagę na możliwość przesyłania informacji „bez przesyłania sygnałów” z prędkością większą niż prędkość światła, za pomocą korelacji między pomiarami składowych spinów. W Stanach Zjednoczonych jeden z takich pomysłów został nawet opatentowany. Podstawowa idea jest bardzo prosta: wysyłamy pary skorelowanych cząstek na dużą odległość rozciągając „nić cząstek” między miejscem, z którego będziemy nadawać sygnały, i miejscem odbioru. Wykonując pomiary rzutu spinu jednej z cząstek znamy odpowiedni rzut dla cząstki drugiej. Wyniki pomiarów tworzą jednak przypadkowe ciągi (średnio biorąc występuje tyle samo wartości dodatnich, co i ujemnych), nie przekazują



Rozwiązanie zadania F 184. Uziemienie okładek kondensatora modeluje obwód przedstawiony na rysunku, gdzie kondensatory  $C_1$  i  $C_2$  reprezentują pojemności układu okładka-ziemia.



Uziemianiu układu towarzyszy rozładowanie kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$ , a usuwaniu przewodu uziemniającego ponowne ich ładowanie ładunkiem z kondensatora  $C$ . Kondensator ten ulega więc stopniowemu rozładowaniu.

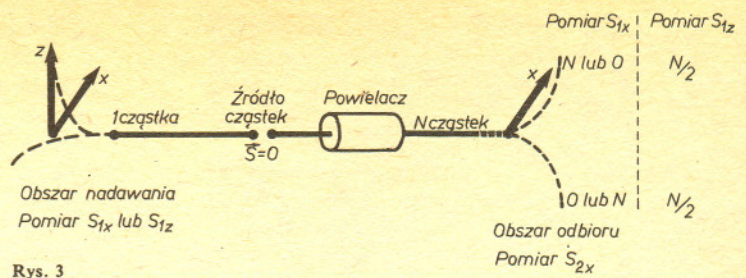
Pokażemy w inny sposób, że założenie lokalności i realizmu prowadzi do sprzeczności z wynikami mechaniki kwantowej. Obliczymy średnie wartości iloczynów  $r_{1j}(\alpha, \beta) \cdot r_{2j}(\alpha, \beta)$ . Jeśli wybierzemy jednakowe kąty, to iloczyn ten równy jest oczywiście  $-1$ , jeśli kąty różnią się o  $90^\circ$ , to mamy dwa niezależne pomiary, a więc iloczyn będzie równie często  $+1$ , jak  $-1$ , czyli średnia będzie zero. Średnia wartość iloczynu wynikająca z reguł mechaniki kwantowej wynosi  $-\cos(\alpha - \beta)$ , a więc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j}(\alpha, \beta) \cdot r_{2j}(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta).$$

Wybermy teraz  $\alpha = 0^\circ$  lub  $90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  lub  $135^\circ$ . Mamy więc cztery serie pomiarów, dla których przewidujemy:

- (1)  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j}(0^\circ, 0^\circ) \cdot r_{2j}(0^\circ, 0^\circ) = -1$
- (2)  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j}(90^\circ, 0^\circ) \cdot r_{2j}(90^\circ, 0^\circ) = 0$
- (3)  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j}(0^\circ, 135^\circ) \cdot r_{2j}(0^\circ, 135^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (4)  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j}(90^\circ, 135^\circ) \cdot r_{2j}(90^\circ, 135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Założmy teraz, że obszary I i II są od siebie oddzielone, a więc kąt ustawienia przyrządu w obszarze II nie wpływa na wynik pomiaru w obszarze I (jest to założenie lokalności). Wynika stąd:  $r_{1j}(0^\circ, 0^\circ) = r_{1j}(0^\circ, 135^\circ) = r_{1j}$ ,



Rys. 3

więc żadnej informacji. Wprowadźmy teraz do naszego układu dodatkowy element (rys. 3): powielacz cząstek o określonym spinie. Powielacz powinien być tak skonstruowany, by nie zaburzał korelacji między pomiarami składowych spinu cząstek. Jedną z cząstek należących do pary o całkowitym spinie równym zero powielimy  $N$  razy. Nasze urządzenie można teraz wykorzystać jako telegraf Morse'a. Po stronie nadawania mamy do wyboru pomiar składowej  $S_x$  lub  $S_z$  wektora spinu, po stronie odbioru zawsze mierzymy składową  $S_x$  dla  $N$  powielonych cząstek. Jeśli po stronie nadawania wybierzemy pomiar składowej  $S_x$ , wszystkie  $N$  cząstek po stronie odbiornika powinny mieć składową przeciwną, a więc ulegną odchyleniu w tę samą stronę w polu magnetycznym. Jeśli jednak wybierzemy pomiar składowej  $S_z$ , nie ma powodu, by wszystkie  $N$  cząstek miały tę samą składową  $S_x$  (muszą mieć oczywiście określoną składową  $z$ -ową, ale tej nie mierzymy w naszym odbiorniku). Dlatego średnio połowa powinna ulec odchyleniu w górę, a połowa w dół. Zmiana kierunku pola magnetycznego w obszarze nadawania (wybór pomiaru) wywołuje łatwo dostrzegalny efekt w obszarze odbioru. Niestety! Cały ten piękny układ nie będzie działać. W 1983 roku pokazano, że z zasad mechaniki kwantowej wynika niemożliwość powielania cząstek o określonym spinie. Całe przedstawione tu rozumowanie zakłada zresztą pewną, niekoniecznie słuszną, interpretację mechaniki kwantowej, w której uznaje się realizm (spiny są określone, bo inaczej powielanie nie ma sensu), lecz nie lokalność. Jest jeszcze inny, bardzo mocny argument przeciwko możliwości zbudowania takiego urządzenia. Już na początku tego wieku, wkrótce po odkryciu teorii względności, udowodniono, że gdyby możliwe było przekazywanie sygnałów z prędkością większą niż prędkość światła (np. za pomocą tachionów — hipotetycznych cząstek poruszających się szybciej niż światło), musiałyby powstać zamknięte pętle czasowe! Otrzymywalibyśmy odpowiedź jeszcze przed wysłaniem pytania! Jest to konsekwencja zupełnie nieabstrakcyjna i dlatego prawie wszyscy fizycy z góry odrzucają możliwość takiej komunikacji.

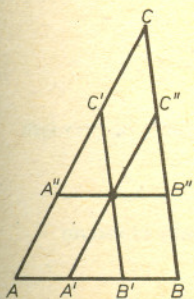
Einstein nawet nie podejrzewał, na jakie manowce doprowadzi fizyków odkrycie holistycznej natury mechaniki kwantowej, ujawniającej się w paradoksie EPR. Przyroda okazała się bardziej subtelna i interesująca, niż można to było przypuszczać. Zdrowy rozsądek — jak powiedział Einstein — ciągle okazuje się być sumą przesądów nabytych w dzieciństwie.



Rozwiązanie zadania M 415. Niech trójkąty  $ABC$ ,  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$  będą obrazami trójkąta  $ABC$  w jednokładności prostej o

stosunku  $\frac{2}{3}$  odpowiednio względem punktów

$A, B, C$ . Środek odcinka  $YZ$  leży w trójkącie  $ABC$ , a więc jeśli  $X$  znajduje się w punkcie  $A$ , to środek ciężkości  $\Delta XYZ$  leży w  $\Delta A'B'C'$ . Podobnie środek ciężkości  $\Delta XYZ$  musi leżeć w trójkątach  $A'B''C''$  i  $A''B''C''$ . Ponieważ środek ciężkości  $\Delta XYZ$  jest stały, więc musi leżeć w każdym z tych trójkątów, ale w przecięciu trójkątów  $A'B'C'$ ,  $A'B''C''$ ,  $A''B''C''$  leży dokładnie jeden punkt — środek ciężkości trójkąta  $ABC$ .



$r_{1j}(90^\circ, 0^\circ) = r_{1j}(90^\circ, 135^\circ) = r'_{1j}$  oraz  $r_{2j}(0^\circ, 0^\circ) = r_{2j}(90^\circ, 0^\circ) = r_{2j}, r_{2j}(0^\circ, 135^\circ) = r_{2j}(90^\circ, 135^\circ) = r''_{2j}$  ( $r_{1j}(\alpha, \beta)$  zależy tylko od  $\alpha$ , a  $r_{2j}(\alpha, \beta)$  tylko od  $\beta$ ). Podstawienie tych wartości do naszego układu prowadzi do sprzeczności, mamy bowiem wówczas:

$$(1) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r'_{1j} r'_{2j} = -1, \text{ a wynika stąd, że } r_{1j} = -r_{2j};$$

$$(2) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j} r_{2j} = 0 \text{ razem z wynikiem (1) daje to } \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r'_{1j} r_{1j} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{1j} r'_{2j} = \sqrt{2}/2;$$

$$(4) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r'_{1j} r'_{2j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ z dwóch ostatnich równości otrzymujemy: } \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (r_{1j} - r'_{1j}) r'_{2j} = \sqrt{2}, \text{ ale}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (r_{1j} r'_{2j} - r'_{1j} r'_{2j}) &= \frac{1}{N} \sum_j (r_{1j} r'_{1j} r'_{1j} r'_{2j} - r'_{1j} r'_{2j}) = \frac{1}{N} \sum_j (r_{1j} r'_{1j} - 1) r'_{1j} r'_{2j} \leq \frac{1}{N} \sum_j |r_{1j} r'_{1j} - 1| \cdot |r'_{1j} r'_{2j}| = \\ &= \frac{1}{N} \sum_j |r_{1j} r'_{1j} - 1| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - r_{1j} r'_{1j}) = 1 \text{ (skorzystaliśmy z faktu, że: } r_{1j} r'_{1j} = 1, |r'_{1j} r'_{2j}| = 1 \end{aligned}$$

oraz  $r_{1j} r'_{1j} - 1 = 0$  lub  $-2$ ), otrzymaliśmy więc sprzeczność  $\sqrt{2} \leq 1$ .



## IRAS

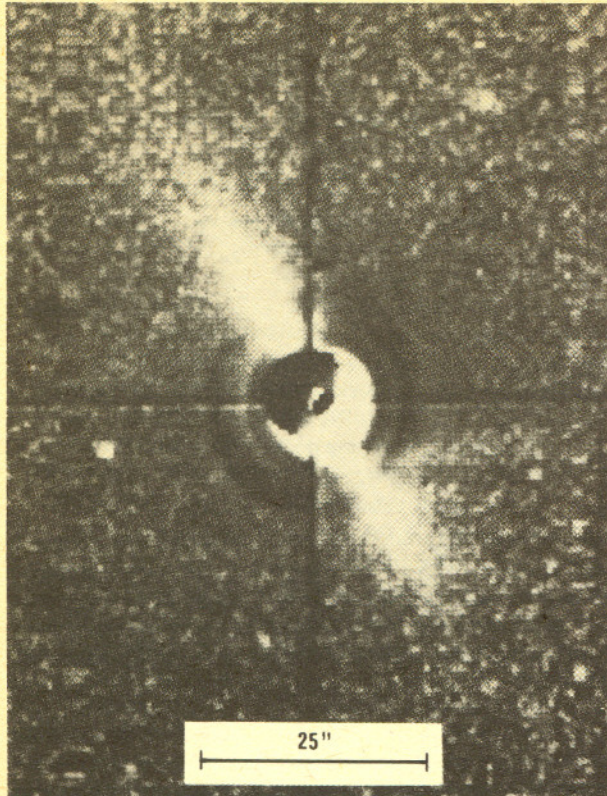
Satelita IRAS wystrzelony na początku 1983 roku przeznaczony był do prowadzenia obserwacji w podczerwieni. Jego detektory czułe były na promieniowanie pochodzące od pyłu o temperaturze od 30 do 200 K.

W ciągu kilku miesięcy obserwacji IRAS przebadał niemal całe niebo. Odkrył kilka komet, m.in. kometa IRAS-Araki-Alcock, która przeleciała w odległości pięciu milionów kilometrów od Ziemi. Poprzednio na taką odległość zbliżyła się kometa Lexella w 1770 roku.

Okazało się również, że w okolicy pasa asteroidów występuje pierścień pyłowy powstający w wyniku zderzeń planetoid. Pierścień ten „rozpływa” się w płaszczyźnie ekliptyki. Światło słoneczne odbijające się od pierścienia jest widoczne jako tzw. światło zodiakalne.

Najbardziej nieoczekiwanym wynikiem obserwacji IRASa było odkrycie dysków pyłowych wokół kilku gwiazd. Jak się przypuszcza, z takich dysków mogą powstawać układy planetarne. Dysk wokół Wegi ma średnicę 170 jednostek astronomicznych i masę około 0,001 masy Słońca, czyli taką jak masa planet Układu Słonecznego.

Zdjęcie (zrobione z Ziemi) przedstawia dysk wokół gwiazdy  $\beta$  Pictoris. Średnica dysku wynosi około 500 jednostek astronomicznych, a wiek kilkaset milionów lat. Centralna część obrazu (obejmująca obszar o średnicy 100 j.a.) została usunięta, aby światło od znacznie jaśniejszej gwiazdy nie przyćmiewało dysku.



## Zadania

*Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI*

**M 415.** Punkty  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  poruszają się po obwodzie trójkąta  $ABC$  w ten sposób, że środek ciężkości trójkąta  $XYZ$  jest stały. Wykazać, że jeśli  $X$  może „obejść” cały obwód trójkąta  $ABC$ , to środki ciężkości trójkątów  $XYZ$  i  $ABC$  pokrywają się.

Rozwiązanie na str. 15

**M 416.** Czy liczba  $0,392781243729\dots$  (wypisane kolejne potęgi trójki) jest wymierna?

Rozwiązanie na str. 11

**M 417.** Pokazać, że jeśli wartościami wielomianu w punktach  $0, 1, 2, \dots$  są liczby pierwsze, to jest on stały.

Rozwiązanie na str. 13

*Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ*

**F 184.** Okładki naładowanego kondensatora są na przemian uziemiane. Czy ulega on przy tym rozładowywaniu?

Rozwiązanie na str. 14

**F 185.** Dwie żarówki o mocy  $20\text{ W}$  i  $200\text{ W}$  oraz wyłącznik połączyć tak, by przy otwartym wyłączniku świeciła tylko żarówka  $20\text{ W}$ , a przy zamkniętym tylko  $200\text{ W}$ .

Rozwiązanie na str. 3

W listopadowym sektorze w pobliżu deklinacji  $+40^\circ$  pojawia się nie spotykany dotychczas znak — to tzw. Wielka Mgławica Andromedy — jedyna galaktyka (poza Drogą Mleczną) widoczna gołym okiem na północnym niebie. Dość trudno ją odszukać po raz pierwszy, potrzebna jest dobra pogoda, brak jasnych światel w okolicy oraz odpowiednia faza Księżyca. Galaktyka ta leży na przedłużeniu linii utworzonej przez gwiazdy  $\beta$  i  $\mu$  *And*, blisko gwiazdy  $\gamma$  *And*. Naprawdę można ją dostrzec gołym okiem! Spróbujcie. Jeśli ktoś ma jakąkolwiek lornetkę, nawet teatralną, niech spróbuje spojrzeć przez nią na Mgławicę Andromedy. Nawet przy użyciu lornetki teatralnej widać wyraźnie, że nie jest to mała kropka, ale wyraźny owal jaśniejszy w centrum i słabszy na brzegach.

Galaktyka Andromedy jest najdalszym obiektem na niebie, widocznym gołym okiem. Fotony wpadające do naszego oka opuściły ten obiekt dwa miliony lat temu. Mimo tej ogromnej odległości jej widoma średnica kątowa wcale nie jest mała. Zdjęcia wykonane przy użyciu czułej aparatury pokazują, że widome rozmiary są trzy razy większe niż rozmiar tarczy Księżyca.

Rzeczywiście, Mgławica Andromedy jest względnie dużą galaktyką spiralną. Jest nieco większa od naszej Galaktyki i wraz z nią tworzy jakby ogromny układ podwójny galaktyk, który jest osią systemu, w skład którego wchodzi kilkanaście mniejszych obiektów, w tym dwa Obłoki Magellana widoczne na południowej półkuli. Oba te nieregularne obłoki związane są jednak bardziej z Drogą Mleczną obiegając ją.

Galaktyka Andromedy ma również kilku karłowatych towarzyszy, m.in. dwie eliptyczne „galaktyczki” o nazwach katalogowych NGC 205 i 221. Widoczne są one na wszystkich zdjęciach Mgławicy jako dwie jasne plamki.