

SPIS TREŚCI

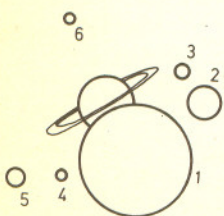
NUMERU 10 (142)

O ciekawych własnościach szeregu harmonicznego <i>mgr Piotr Zarzycki</i>	str. 1
Gdzie najlepiej nauczyć się mechaniki nieba? <i>dr Leszek Czechowski</i>	str. 4
Mała Delta	str. 8
Mechanika kwantowa <i>dr Włodzisław Duch</i>	str. 10
Zadania	str. 13
Zadanie Fryderyka II	str. 14
Klub 44	str. 15
Teoria względności (8)	str. 15
Patrz w niebo	str. 17

W następnym numerze: Powstawanie planet

Nasza okładka:

Montaż zdjęć Saturna i jego największych satelitów: 1 — Dione, 2 — Tethys, 3 — Mimas, 4 — Enceladus, 5 — Rhea, 6 — Tytan.



Przypominamy Czytelnikom o możliwości zakupu w Redakcji poprzednich numerów "Delta" z bieżącego roku, co umożliwi np. skompletowanie mapy nieba również tym, którzy nie nabyli jakiegoś numeru. Brakujące numery można kupić osobiście w Redakcji codziennie w godz. 10 - 12 /oprócz sobót i świąt/ po aktualnej cenie miesięcznika. Zgłoszenia spoza Warszawy prosimy nadsyłać listownie umieszczając w kopercie banknoty na sumę odpowiadającą aktualnej cenie tylu numerów, ile pragnie się zakupić /wraz z informacją o tym, które to numery/ oraz znaczki pocztowe na sumę 15 zł lub banknot 20 zł w celu pokrycia kosztów przesyłki. Uprzedzamy, że aktualnie dysponujemy numerami do 7 włącznie - następne numery będziemy mogli wysłać dopiero, gdy otrzymamy zwroty z kiosków, co zabiera zwykle ok. 3 miesięcy.

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astrofizyczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitariski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nacj.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nacj.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacj.
mgr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
mgr Ewa Ryllowa
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 696/12/85. N-52.

WARUNKI PRENUMERATY

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,
Informacji o cenie prenumeraty na rok 1986 udzielają Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Urzędy Pocztowe i doręczyciele.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

O ciekawych własnościach szeregu harmonicznego

Mgr Piotr ZARZYCKI

W listopadzie 1980 roku w dziale zadaniowym „Rozkosze Łamania Głowy”, ukazującym się raz w tygodniu w „Życiu Warszawy” znalazło się takie oto zadanie:

Pierwszego listopada br. wieczorem pewien ślimak postanowił wspinać się na szczyt liczącego 12 cm wysokości pędu bambusowego. Ślimak w ciągu nocy wspinał się o 3 cm i zasnął. W ciągu dnia zaczął rosnąć bambus i urósł o 12 cm. Jeżeli każdej następnej nocy ślimak będzie się wspinał o dalsze 3 cm i każdego następnego dnia bambus będzie rósł o 12 cm, to którego dnia ślimak będzie się już znajdował na wierzchołku bambusa?
Bambus rośnie równomiernie, zarówno pod, jak i nad ślimakiem.

Zdecydowana większość osób zapytanych o to, czy ślimak w ogóle dotrze do wierzchołka bambusa, odpowiadała prawie bez namysłu, że nie. Czy rzeczywiście? Treść zadania sugeruje, że nasz nieugięty ślimak w końcu dotrze do wierzchołka bambusa, a jednak intuicja mówi, że nie dojdzie. To, że tym razem intuicja zawodzi, związane jest z dość dziwnym zachowaniem się szeregu harmonicznego. Zanim dokładniej to wyjaśnimy, rozwiążemy zadanie z „Życia Warszawy”.

Czytelnik łatwo sprawdzi, że jeśli przez x_n oznaczymy wysokość, na której znajduje się ślimak po n -tej dobie wędrówki, to dla $n = 1, 2, \dots$ zachodzi następująca zależność

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n + 3,$$

a stąd po przekształceniach otrzymujemy wzór na wyraz ogólny ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = 3n(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n).$$

Aby rozwiązać nasze zadanie, wystarczy znaleźć takie n , by zachodziła nierówność

$$3n(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n) \geq 12n,$$

czyli

$$1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n \geq 4$$

($12n$ jest wysokością bambusa po n dniach). Najmniejsze n spełniające ostatnią nierówność jest równe 31, co daje nam odpowiedź: ślimak wszedł na wierzchołek bambusa w nocy z pierwszego na drugiego grudnia.

Rozwiązalność nierówności $1 + 1/2 + \dots + 1/n \geq 4$ wynika z następującego faktu (porównaj **Własność 1**):

dla dowolnej liczby rzeczywistej r istnieje taka liczba naturalna n , że $1 + 1/2 + \dots + 1/n \geq r$.

Innymi słowy, szereg $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ (oznaczać go będziemy przez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

jest rozbieżny. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ to właśnie ów tytułowy szereg harmoniczny. Liczbę $s_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ nazywamy n -tą sumą częściową szeregu harmonicznego.



Rozwiązanie zadania M 413. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą wektorami jednostkowymi prostopadłymi do prostych AB, BC, CD, AD — odpowiednio o zwrocie „do wewnątrz” czworokąta $ABCD$. Jeśli punkty X i Y leżą po tej samej stronie prostej AB co punkt C , to różnica odległości X i Y od prostej AB jest równa iloczynowi skalarnemu $|v_1 \cdot \overline{XY}|$, podobnie jest dla prostych BC, CD, AD . Z warunków zadania mamy, że różnica odległości wierzchołków A i B od wszystkich boków jest równa zeru. Zatem $\overline{AB} \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0$, oraz $\overline{BC} \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0$, czyli wektor $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ jest prostopadły do prostych AB i BC . Ponieważ AB i BC nie są równoległe, musi być $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$. Weźmy teraz dowolny punkt E , punkty $E, E + v_1, E + v_1 + v_2, E + v_1 + v_2 + v_3$ są wierzchołkami rombu ($E = E + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$), a więc wektory v_1, v_2, v_3 i v_4 są równoległe, stąd $AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$.

Własność 1 szeregu harmonicznego.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Najprostszy (chyba) dowód tej własności jest taki:

załóżmy, że szereg ten jest zbieżny, tzn. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = h < \infty$; wówczas $h = (1+1/2) + (1/3+1/4) + (1/5+1/6) + \dots > 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/6 + \dots = h$ — sprzeczność.

W przytoczonym powyżej dowodzie skorzystaliśmy z pewnej własności szeregów zbieżnych — jakiej?

Wyjaśnimy teraz, dlaczego **Własność 1** można uznać za dziwną, sprzeczną

z intuicją. Zauważmy, że wyraz ogólny szeregu harmonicznego, równy $\frac{1}{n}$, jest

zbieżny do zera, ponadto sumy częściowe tego szeregu rosną bardzo wolno, tak wolno, że komuś, kto oblicza kolejne sumy $1, 1+1/2, 1+1/2+1/3, \dots$ wydawać się może, że obliczone wartości zbliżają się do pewnej skończonej liczby. Wyliczone, że $1+1/2+ \dots +1/n \geq 100$ dopiero dla $n > 1,5 \cdot 10^4$.

Własność 2 szeregu harmonicznego.

Ciąg $a_n = 1+1/2+ \dots +1/n - \ln n$ jest zbieżny (dowód tej własności nie jest

trudny, można go znaleźć np. w „Rachunku różniczkowym i całkowym”, t. II, G. M. Fichtenholza), jego granicę nazywa się stałą Eulera, oznacza się ją przez γ .

Wartość stałej Eulera z dokładnością do 10^{-10} wynosi 0,5772156649. Dla dostatecznie dużych n przybliżone wartości $\ln n$ można obliczać za pomocą sum częściowych szeregu harmonicznego. Stałą Eulera γ obliczono z dokładnością do 10^{-20800} , nie wiadomo jednak do tej pory, czy jest to liczba wymierna. Problem ten jest bardzo trudny.

Własność 3 szeregu harmonicznego.

Własność ta dotyczy szeregów, które powstają w ten sposób, że w szeregu harmonicznym skreśla się nieskończoną liczbę składników. Niech A będzie nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych N . Przez h_A oznaczamy będziemy

szereg $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$, np. jeśli $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, to $h_A = 1/2+1/4+1/6+1/8+ \dots$.

Podstawowym pytaniem jest, czy szereg h jest zbieżny. Odpowiedź zależy od zbioru A , a w kilku przypadkach jest zaskakująca.

$1^{\circ} A_0 = \{n \in N: \text{w zapisie dziesiętnym liczby } n \text{ nie występuje cyfra } 0\}$. W przypadku tym szereg h_{A_0} jest zbieżny, a dowód wygląda tak:

suma tych składników szeregu h_{A_0} , których mianowniki są jednocyfrowe, jest mniejsza od 9, suma tych składników h_{A_0} , których mianowniki są dwucyfrowe, jest mniejsza od $9^2/10$, itd., zatem

$$h_{A_0} < 9 + 9^2/10 + 9^3/10^2 + \dots = 90.$$

Nieznacznie modyfikując dowód można pokazać, że szereg h_{A_i} jest zbieżny, gdy $A_i = \{n \in N: \text{w zapisie dziesiętnym liczby } n \text{ nie występuje cyfra } i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 9$. Obliczono wartości h_{A_i} z dość dużą dokładnością, tutaj podamy te wartości z dokładnością do 10^{-4} :

$$\begin{aligned} h_{A_0} &= 23,1034, & h_{A_1} &= 16,1769, & h_{A_2} &= 19,2573, & h_{A_3} &= 20,5698, \\ h_{A_4} &= 21,3274, & h_{A_5} &= 21,8346, & h_{A_6} &= 22,2055, & h_{A_7} &= 22,4934, \\ h_{A_8} &= 22,7263, & h_{A_9} &= 22,9206. \end{aligned}$$

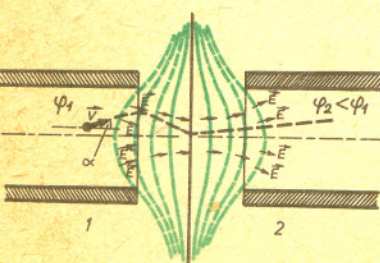
Nie wiadomo, czy wartości $h_{A_0}, h_{A_1}, \dots, h_{A_9}$ są liczbami wymiernymi.

$2^{\circ} B_i = \{n \in N: \text{w zapisie dziesiętnym liczby } n \text{ jest dokładnie } i \text{ zer}\}$.

Szereg h_{B_0} i szereg h_{A_0} określony w przypadku 1° są identyczne. Można pokazać, że $h_{B_0} > h_{B_1} > h_{B_2} > \dots$, wynika stąd, że szeregi $h_{B_0}, h_{B_1}, h_{B_2}, \dots$ są zbieżne. Pokażemy na przykład, że $h_{B_0} > h_{B_1}$:



Rozwiązanie zadania F 182. Rozważmy jon, którego prędkość tworzy pewien kąt z osią rury (rysunek). Równoległa do osi składowa pola elektrostatycznego powoduje przyspieszanie jonu w całym obszarze przecięcia w tym samym kierunku. Składowa prostopadła skierowana jest w pierwszej połowie przecięcia ku osi, a w drugiej połowie — od osi. Ponieważ w pierwszej połowie jon porusza się wolniej, czas działania siły skierowanej do osi jest dłuższy, a więc zmiana pędu jest większa niż w drugiej połowie. Wynika stąd, że całkowita zmiana pędu jonu przy przechodzeniu przecięcia jest skierowana do osi. Podobne soczewki stosuje się w akceleratorach.





Rozwiązanie zadania F 183. Korzystając z prawa Gaussa można wykazać, że natężenie pola elektrostatycznego między okładkami kondensatora cylindrycznego jest równe

$$E = \frac{C}{r}, \text{ gdzie } C \text{ — stała, a } r \text{ — odległość od osi.}$$

Oznaczmy przez x odchylenie jonu od podstawowego toru o promieniu r_0 . Wówczas siła działająca na jon o ładunku q

$$F = \frac{Cq}{r_0 + x}$$

Rozważmy ruch jonu w układzie odniesienia wirującym wokół osi kondensatora z prędkością kątową ω równą prędkości kątowej jonu.

W tym nieinercyjnym układzie odniesienia na jon działa dodatkowo siła odśrodkowa $F_o = m\omega^2(r_0 + x)$, gdzie m — masa jonu. Korzystając z zasady zachowania momentu pędu $m(r_0 + x)^2\omega = mr_0^2\omega_0$ (ω_0 — początkowa prędkość kątowa jonu) możemy tę siłę zapisać w postaci

$$F_o = m\omega_0^2 \frac{r_0^2}{(r_0 + x)^3}$$

Ponieważ dla jonu krążącego po torze podstawowym $m\omega_0^2 r_0 = \frac{Cq}{r_0}$, siła elektrostatyczna ma postać $F = \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{r_0 + x}$

Wypadkowa siła działająca na jon (zwrót dodatni od osi kondensatora)

$$F_w = F_o - F = - \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{(r_0 + x)^3} (2xr_0 + x^2)$$

Dla $x \ll r_0$ otrzymujemy $F_w = -2m\omega_0 x$. Wynika stąd, że w kierunku radialnym jony drgają ruchem harmonicznym o okresie $T = \pi\sqrt{2}/\omega_0$. Wiązka zogniskuje się po czasie $T/2$ i zatoczy w tym czasie kąt $\omega_0 T/2 = \pi/\sqrt{2}$

$$h_{B_1} = (1/10 + 1/20 + \dots + 1/90 + 1/110 + 1/120 + \dots) + (1/101 + 1/102 + \dots + 1/201 + 1/202 + \dots) + (1/1011 + 1/1012 + \dots + 1/2011 + 1/2012 + \dots) + \dots < (1/10)h_{B_0} + (9/100)h_{B_0} + (81/1000)h_{B_0} + \dots = h_{B_0}$$

3° Szereg $\sum_{p \in P} 1/p$ jest rozbieżny, gdzie P jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.

Fakt ten udowodnił Euler. Dowód, który teraz przedstawimy, podał w 1966 roku Clarkson.

Niech $P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}$; załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ jest zbieżny. Istnieje

liczba naturalna k taka, że $\sum_{n=k}^{\infty} 1/p_n < 1/2$, zatem $\sum_{n=k}^m 1/p_n < 1/2$, gdzie $m \geq k$.

Oznaczmy przez s liczbę $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$. Niech r będzie dowolną liczbą naturalną, można tak dobrać liczbę m , aby wszystkie dzielniki pierwsze liczb $1+s, 1+2s, \dots, 1+rs$ były większe od p_{k-1} i nie większe od p_m . Zauważmy, że każdy składnik sumy

$$\sum_{n=1}^r 1/(1+ns), \text{ którego mianownik jest iloczynem } j \text{ liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), pojawia się w iloczynie } \left(\sum_{n=k}^m 1/p_n\right)^j < 2^{-j}, \text{ stąd } \sum_{n=k}^m 1/(1+ns) < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^r 1/(1+ns) = \infty$ (jak to pokazać?).

4° Niech P' będzie zbiorem takich liczb pierwszych p , że liczba $p+2$ jest też pierwsza (takie liczby pierwsze $p, p+2$ nazywamy liczbami bliźniaczymi). W 1919 roku matematyk norweski Viggo Brun pokazał, że szereg $h_{P'}$ jest zbieżny. Jest to dość dziwny wynik, jeśli dodamy, że nie wiadomo, czy zbiór P' jest nieskończony. Nieskończoność zbioru P' jest jedną z najbardziej znanych hipotez teorii liczb.

5° $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{w zapisie dziesiętnym liczby } n \text{ występują tylko cyfry parzyste}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : \text{sąsiednie cyfry występujące w zapisie dziesiętnym liczby } n \text{ są różne}\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest liczbą pierwszą i w jej zapisie dziesiętnym występuje przynajmniej jedna cyfra zero}\}$.

Szeregi h_A, h_B są zbieżne, szereg h_C jest rozbieżny. Dowody pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Z własnością 3 szeregu harmonicznego wiąże się znane, nie rozwiązane dotąd, zagadnienie tzw. kombinatorycznej teorii liczb. Jest to hipoteza znakomitego matematyka węgierskiego Paula Erdösa. Brzmi ona tak:

Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ oraz szereg h_A jest rozbieżny, to dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje w zbiorze A k -elementowy ciąg arytmetyczny.

Zagadnienie to jest bardzo trudne już choćby w szczególnym przypadku dla $A = P$, bowiem najdłuższy znany ciąg arytmetyczny złożony z liczb pierwszych ma 18 elementów (ciąg ten odkrył Pritchard). Aha, Erdős oferuje osobie, która udowodni jego hipotezę bądź poda kontrprzykład ją obalający, aż 3000 dolarów. Niebagatelna sumka, zatem do roboty!

Własność 4 szeregu harmonicznego.

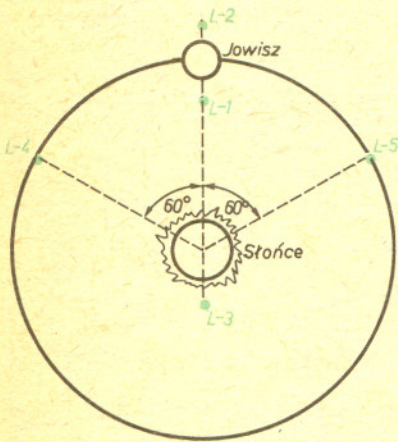
Sumy częściowe s_2, s_3, s_4, \dots szeregu harmonicznego nie są liczbami całkowitymi. Własność ta powinna być znana stałym Czytelnikom *Delty*, pojawiła się ona jako zadanie nr 1 w konkursie zadaniowym „Klub 44” (patrz numer 9 z 1981 roku), rozwiązanie można znaleźć w numerze 1 z 1982 roku. Można udowodnić następujące uogólnienie **własności 4**:

dla wszystkich $k, n \in \mathbb{N}$ liczba $\pm 1/k \pm 1/(k+1) \pm \dots \pm 1/(k+n)$ nie jest całkowita.

Myślę, że Czytelnicy *Delty* znają inne ciekawe własności szeregu harmonicznego, może niektórzy z Was sami coś w tej dziedzinie odkryli. Napiszcie do nas.

Pytanie od redakcji: Czy ślimak może zejść z wierzchołka bambusa?

Wyberzemy się na wycieczkę w okolice największych planet naszego Układu: Jowisza i Saturna. Po minięciu orbity Marsa musimy pokonać jeszcze 500 mln kilometrów, aby dotrzeć do Jowisza. Przestrzeń ta nie jest jednak pusta. Krążą tam tysiące ciał nazwanych ze względu na niewielkie rozmiary planetoidami lub asteroidami. Pierwsza planetoida zastała odkryta w 1801 roku przez Piazziego, jest to zarazem największa ze znanych planetoid, ma średnicę około 1080 km. Typowe rozmiary planetoid wynoszą 1 km. Ocenia się, że planetoid o średnicy większej niż 1 km jest około 500 tysięcy. Mimo niewielkich mas dają one o sobie znać na różne sposoby. Odpowiedzialne są za powstanie wielkich struktur uderzeniowych, np. Caloris na Merkury czy Hellas na Marsie. Zagrożają też i Ziemi. W 1937 roku Hermes — ciało o rozmiarach około 1 kilometra — przeszedł w odległości 800 tys. km od Ziemi. Jego zderzenie z Ziemią spowodowałoby powstanie 20 kilometrowego krateru i zniszczenie 8000 km² obszaru wokół — efekt eksplodowania superbombi o mocy stu tysięcy megaton! Na szczęście zderzenie takie jest bardzo mało prawdopodobne. Orbity planetoid wykazują też inne ciekawe, a mniej niebezpieczne własności.



Położenie pięciu punktów libracyjnych Lagrange'a względem Jowisza i Słońca (rysunek schematyczny).

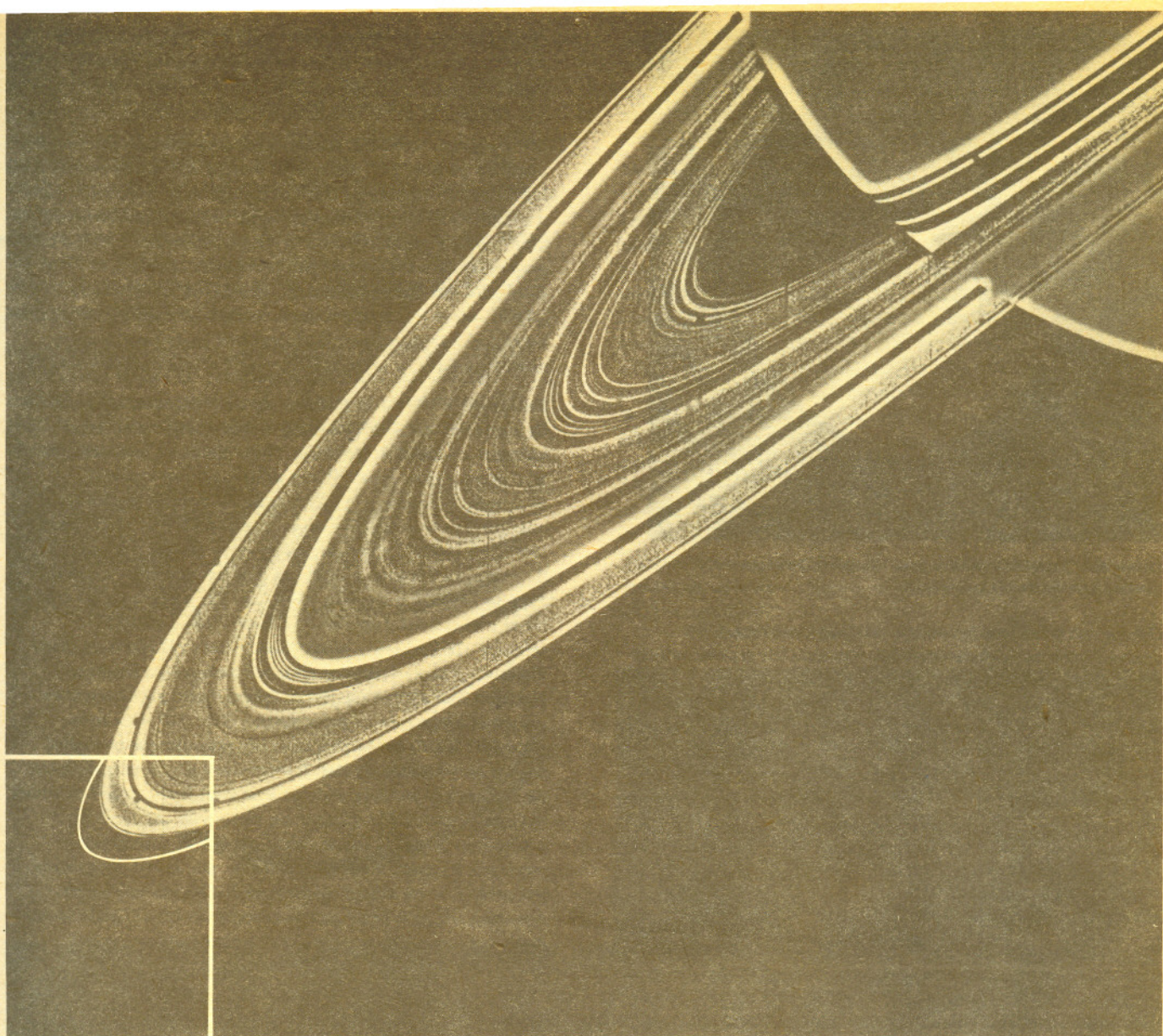
Francuski uczyony J. L. Lagrange udowodnił istnienie tzw. punktów libracyjnych. Lagrange rozważał ruch trzech ciał przyciągających się grawitacyjnie. W ogólnym przypadku wyznaczenie orbit takiego układu wymaga użycia komputera, jednakże istnieją dwa szczególne rozwiązania analityczne znalezione przez Lagrange'a. W jednym z nich trzy ciała obiegające środek masy układu pozostają przez cały czas na prostej, natomiast w drugim umieszczone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego, przy czym rozmiary tego trójkąta mogą zmieniać się w czasie. Punkty, w których znajdują się ciała spełniające te rozwiązania, nazywane są punktami libracyjnymi. W polu grawitacyjnym dwóch dominujących wielkości ciał, jak Słońce i Jowisz, istnieje pięć punktów libracyjnych poruszających się w miarę obiegu Jowisza wokół Słońca. Ciało, które raz zacznie się poruszać wraz z punktami L_4 i L_5 , już łatwo ich okolic nie opuści. Punkty te więc działają jako swojego rodzaju pułapki na planetoidy. Planetoidy poruszające się wraz z punktami libracyjnymi L_4 i L_5 nazwano imionami bohaterów wojny trojańskiej. Zauważmy, że orbity ciał poruszających się w punktach libracyjnych L_1 , L_2 , L_3 nie spełniają zasad Keplera, choć oczywiście spełniają prawa dynamiki Newtona.

Planetoidy odczuwają bliskość Jowisza jeszcze w jeden sposób. Zaobserwowano, że ich orbity grupują się w kilkanaście pierścieni oddzielonych od siebie tzw. przerwami Kirkwooda. W przerwach

tych planetoid prawie wcale nie spotykamy. Aby wyjaśnić istnienie przerw, zauważmy, że okres obiegu dookoła Słońca ciała znajdującego się w takiej przerwie i okres obiegu Jowisza mają się do siebie jak niewielkie liczby całkowite: 1 : 2, 4 : 9, 3 : 7, 2 : 5, 3 : 8, 1 : 3, 2 : 7. Mamy tu do czynienia z rezonansem. Przykładowo rozważmy planetoidę będącą z Jowiszem w rezonansie 1 : 2. Co Jowisz zrobi jeden obieg, to planetoida dwa i zawsze w tym samym miejscu jej orbity nastąpi niewielka deformacja. Po milionach lat orbita wreszcie zmieni się na tyle, że planetoida opuści przerwę Kirkwooda. Tak więc to Jowisz oczyszcza cały czas „rezonansowe” orbity.

Następnym obiektem naszego zainteresowania będzie Io. Jest to jeden z czterech satelitów Jowisza odkrytych jeszcze przez Galileusza. Przez kilkaset lat badań naziemnych i kilkanaście lat lotów kosmicznych nie odkryto poza Ziemią aktywnego wulkanizmu. Niewielu uczonych w 1979 roku, gdy Voyager 1 zbliżał się do Jowisza i jego księżyców, spodziewało się tam te zjawiska znaleźć. Gdy pani Linda A. Morabito, członkini zespołu obsługującego misję Voyagera 1, zajmująca się opracowaniem obrazów przekazywanych przez Voyagera, zauważyła jasny łuk wystający ponad brzeg tarczy Io, próbowano najpierw wyjaśnić to jako defekt techniczny zdjęcia. Ale technika nie zawiodła, wkrótce następne zdjęcia ukazały jeszcze piękniejsze przykłady wybuchów wulkanicznych. Na Io okazują się one być codziennością. Voyager 1 zaobserwował osiem erupcji, z czego siedem jeszcze trwało, gdy cztery miesiące później do Io zbliżyła się druga sonda Voyager 2. Io okazała się być zupełnie inna, niż mogliśmy się spodziewać. Rozmarami i masą ten satelita prawie nie różni się od wygasłego od miliardów lat i gęsto pokrytego kraterami meteorytowymi Księżyca. Na Io nie odkryto natomiast choćby jednego takiego krateru. Przy takiej aktywności wulkanicznej to zresztą nic dziwnego. Jak się oblicza, materiał wyrzucony przez wulkany przykrywa co roku jednomilimetrową warstwą całą jej powierzchnię. Niby to mało, ale na powstanie krateru meteorytowego o średnicy 5 — 10 km można liczyć raz na milion lat. W ciągu tego okresu istniejące poprzednio kraterzy zostaną pokryte kilometrową warstwą wulkanicznego materiału. Wyjaśnienie różnicy między Io a Księżycem sprowadza się więc do odpowiedzi na pytanie, skąd się bierze energia konieczna do podtrzymania procesów wulkanicznych przez miliardy lat. Na Ziemi jest to przede wszystkim energia cieplna wydzielana przy rozpadzie radioaktywnych pierwiastków: uranu, toru i izotopu potasu ⁴⁰K. Mniejsze znaczenie ma ciepło zachowane we wnętrzu planety od czasu jej powstania. Ale we wnętrzu Io trudno spodziewać się większej zawartości pierwiastków radioaktywnych niż na Księżycu, a tym bardziej niż na Ziemi. Także początkowe ciepło Io musiałaby szybko stracić wskutek swoich małych rozmiarów. Trzeba więc znaleźć jakieś inne źródło energii! Znalaziono je. Energia jest dostarczana przez najbliższe towarzystwo, satelity: Europę i Ganimedesa, oczywiście w jedyny możliwy sposób — przez rezonans grawitacyjny. Praca Stanton Peala, Patricka Cassena i Raya Reynoldsa na ten temat ukazała się trzy dni przed zbliżeniem się Voyagera 1 do Io. W pracy tej wykazano, że Europa i Ganimedes powodują systematyczne perturbacje orbity Io. Odchylenia orbity powodują zmianę wielkości sił przyptywowych działających na Io ze strony Jowisza. Zmiany te pociągają z kolei znaczne deformacje satelity, przez co rozgrzewa się on podobnie jak zgniatana bryła metalu. Na podstawie tych rozważań uczeni wysunęli hipotezę o istnieniu czynnego wulkanizmu na Io. Niedługo czekali na jej potwierdzenie.

Ciepło powstałe w tym procesie, około $7 \cdot 10^{13}$ W, jest wydzielane z niezliczonych kraterów pokrywających około 5% powierzchni Io.

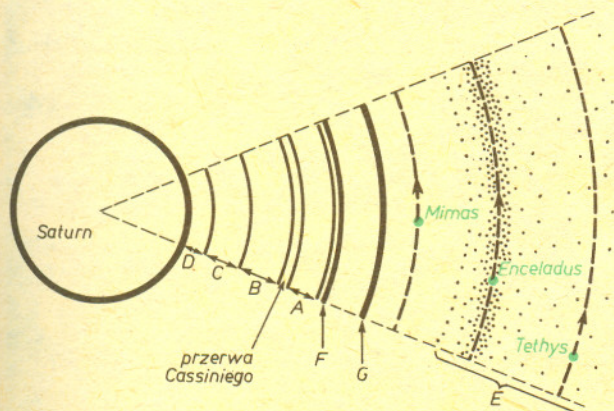


Komputerowo opracowane zdjęcie pierścieni Saturna. W ramce słabo widoczny w tej skali pierścień F.

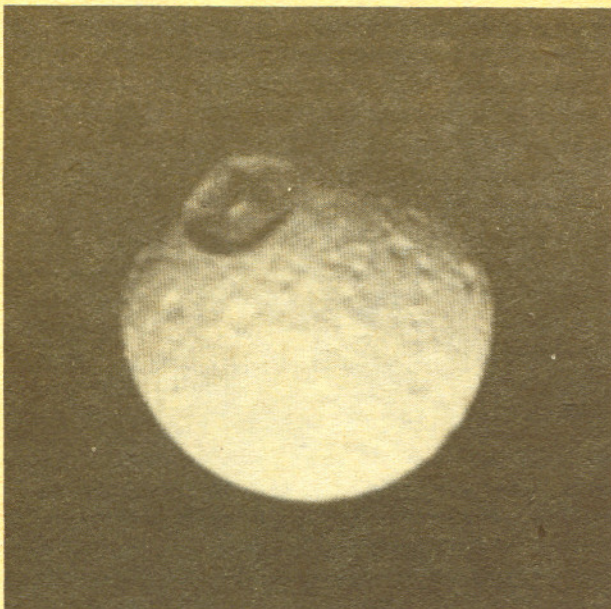
Temperatura gazów wylatujących z wulkanów waha się w granicach od 300 do 600 K. Z obserwacji przeprowadzonych z Ziemi udało się zlokalizować miejsce o największej aktywności. Okazuje się, że pokrywa się ono z wulkanem o nazwie Loki, zaobserwowanym przez Voyagera. Na podstawie analizy zdjęć i obserwacji spektroskopowych przypuszcza się, że w wulkanie tym znajduje się jezioro płynnej siarki lub SO_2 . Ciemna powierzchnia jeziora pokryta jest jasnymi plamami, jak się przypuszcza, są to kry utworzone z zestalonej siarki.

W podobny sposób, choć w mniejszym stopniu, rozgrzewane jest wnętrze Europy, następnego satelity Jowisza.

Na zakończenie naszej wycieczki odwiedzimy okolice Saturna. Celem nie jest sama planeta ani liczne jej satelity, lecz znane wszystkim pierścienie. Strukturę podobną mają także Jowisz i Uran, spodziewamy się, że kiedyś obdarzony nią będzie Mars. Pierścienie wokół Saturna są jednak najpiękniejszymi znanymi „okazami”. Istnienie ich odkrył Galilusz w 1610 roku, lecz wskutek niskiej rozdzielczości swego teleskopu mylnie je zinterpretował. Dopiero w 1665 roku Holender Christian Huygens rozpoznał te twory jako pierścienie. W końcu dziewiętnastego wieku J. E. Keeler udowodnił, że pierścienie nie stanowią jednolitego dysku, lecz składają się z wielu drobnych ciał krążących wokół Saturna. Pierścienie mają bardzo małą grubość.



Pierścienie Saturna



Satelita Mimas (zdjęcie wykonane przez Voyagera 1 z odległości 425 tys. km) — największy krater ma 100 km średnicy.

Gdy są one ustawione krawędzią do Ziemi, nie można ich dostrzec przez największe teleskopy. Obecnie ich grubość ocenia się na około 150 metrów.

Zajmijmy się najpierw trzema najlepiej widocznymi pierścieniami oznaczonymi literami *A*, *B*, *C*. Zewnętrzna krawędź pierścienia *A* znajduje się 78600 km od Saturna (licząc od górnej warstwy chmur) i ma szerokość 17400 km. Wewnątrz tego pierścienia, oddzielony tzw. przerwą Cassiniego o szerokości 4000 km, znajduje się najjaśniejszy z pierścieni — pierścień *B*.

Jego szerokość wynosi 25300 km. Z kolei wewnątrz pierścienia *B* znajduje się pierścień *C* o szerokości 16500 km. Wewnętrzny brzeg pierścienia *C* znajduje się 12900 km ponad powłoką chmur.

Chcąc obejrzeć pierścienie najlepiej wznieść się ponad ich płaszczyznę. Widać je będzie oświetlone Słońcem jak na dłoni. Uderza nas charakterystyczna struktura. Pierścień *B* przypomina przecięty pień drzewa z setkami słoików lub płytę gramofonową — składa się on bowiem z setek wąskich kręgów. Podobnie zbudowane są pierścienie *A* i *C*, choć kręgi są tu szersze i jest ich mniej. Zauważymy także szersze przerwy, m.in. przerwę Enckego w pierścieniu *A*.

Jak wytłumaczyć istnienie kręgów? Co spowodowało ułożenie się miliardów bryłek materii w prawie idealnie równy krąg długości ponad miliona kilometrów? Geneza ich jest analogiczna jak przerw Kirkwooda w pasie asteroidów. Wąskie ścieżki w pierścieniach oczyszczane są przez liczne satelity Saturna. Przykładowo Mimas obiegający planetę co 0,94 doby jest w rezonansie 1:2 z bryłkami w przerwie Cassiniego przy zewnętrznym skraju pierścienia *B*. Za istnienie pozostałych kręgów odpowiedzialny jest inny rezonans z Mimasem lub z innym satelitą. Nawet jeśli zderzenia spowodują wypchnięcie którejs z bryłek tworzących krąg w puste miejsce, to jednak wskutek oddziaływania odległego satelity grudka znowu zostanie usunięta do najbliższego kręgu.

Czy opisany powyżej mechanizm tłumaczy strukturę pierścieni? Częściowo tak. Zwłaszcza jeśli chodzi o pierścienie *A* i *C*.

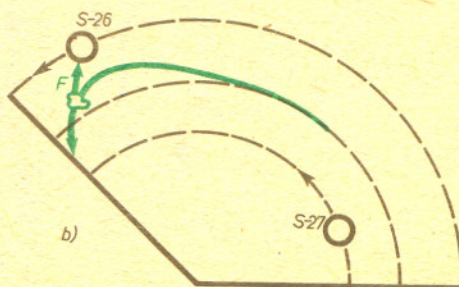
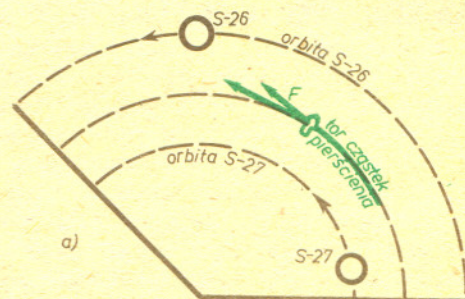
Trudniejszy problem sprawia pierścień *B*. Ucneni podejrzewają, że działa tam jeszcze jeden mechanizm. Ale o tym później.

Omówimy teraz pierścienie *E*, *G*, *F* znajdujące się na zewnątrz pierścienia *A*. Pierścień *E* położony jest najdalej od Saturna.

Jest on rzadki, ale bardzo szeroki, rozciąga się od odległości 120 tys. km od planety aż za orbitę Tethys. O satelicie tym warto powiedzieć, że ma dwóch towarzyszy o rozmiarach kilkudziesięciu kilometrów poruszających się w punktach Lagrange'a L_4 i L_5 .

Materia w pierścieniu *E* pochodzi prawdopodobnie z powierzchni satelitów planety. Być może część materii wyrzucona została przez hipotetyczne wulkany wodne Enceladusa. Jest to niewielki glob o średnicy 510 km, poruszający się po orbicie o promieniu 238 tys. km. Z daleka przypomina on kryształowy żyrandol, odbija bowiem prawie całkowicie padające nań promienie. Możliwe, że Enceladus jest saturnijskim odpowiednikiem Io. Rezonans 2:1 z Dione może być źródłem ciepła wulkanów wodnych — gejzerów, które wyrzucając z wnętrza globu masy wody tworzą nową skorupę satelity, a także przyczyniają materiału pierścieniowi *E*.

Pierścienie *F* i *G* nie są podobne do dotychczas omawianych. Są znacznie węższe. Szerokością przypominają raczej kręgi któregoś z większych pierścieni. Tego nie da się wytłumaczyć z pomocą rezonansów. Muszą tu działać inne czynniki utrzymujące materię w wąskim pasie. W pobliżu pierścienia *F* odkryto dwa małe satelity oznaczone w myśl przyjętych zasad: 1980S26 i 1980S27 (pierwsze cztery cyfry podają rok odkrycia, S — oznacza Saturna, a liczba za nim jest numerem satelity). Satelita 1980S26 o średnicy około 200 km porusza się po orbicie nieco większej niż pierścień *F*. Z kolei satelita 1980S27 (o średnicy 220 km) krąży nieco bliżej planety niż pierścień *F*. Peter Goldreich i Scott Tremaine wysunęli następującą hipotezę: pierścień *F* utrzymywany jest w całości dzięki *gravitacyjnemu odpychaniu* jego materii przez satelity S26 i S27. Cóż to za zjawisko? Każdy przecie wie, że siły grawitacyjne powodują zawsze przyciąganie się ciał. Rzeczywiście siły są przyciągające, ale w efekcie powodują oddalanie się ciał! Rozważmy dokładnie ten efekt. Satelita S26 porusza się nieco dalej niż pierścień *F*, a więc jego prędkość jest mniejsza niż bryłek tworzących pierścień. Rysunek *a* obrazuje sytuację, gdy satelita doganiający jest przez chmurę cząstek pierścienia *F*. Dopóki satelita jest z przodu, siła jego przyciągania przyspiesza cząstki pierścienia, zyskują one większą energię i przechodzą na nieco wyższą orbitę. Gdy wreszcie cząstki przegonią satelitę (rys. *b*), sytuacja



Mechanizm grawitacyjnego odpychania (rysunek schematyczny).

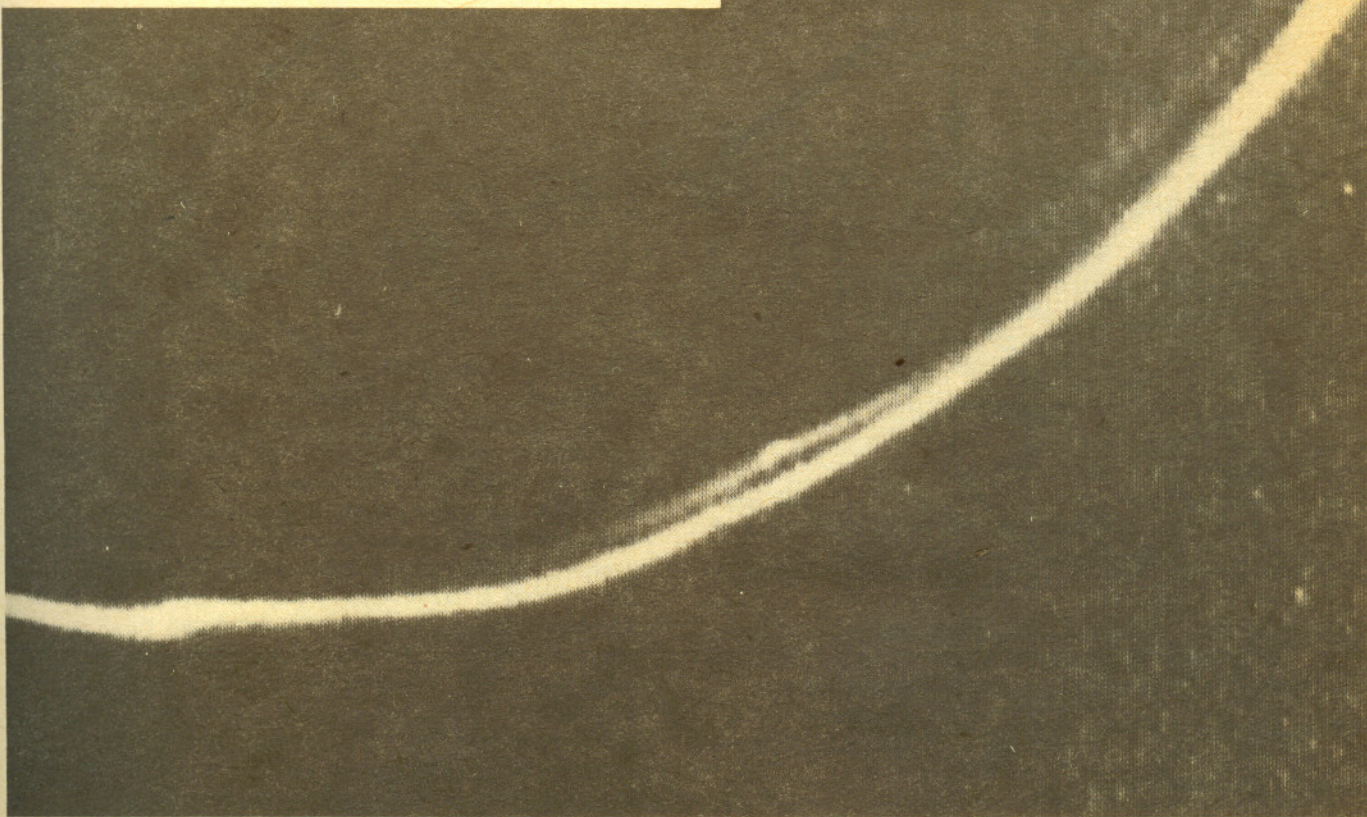
się odwraca — przyciąganie satelity hamuje je i cząstki zaczynają spadać na niższą orbitę. Ponieważ w czasie hamowania cząstki są bliżej satelity, więc hamowanie jest większe niż poprzedzające je przyspieszanie, ostatecznie cząstki znajdują się na niższej orbicie niż poprzednio. Ale oto zbliża się satelita S27. Jego orbita przebiega poniżej pierścienia, więc porusza się on szybciej niż cząstki. Z początku siła jego przyciągania hamuje cząstki, które spadają na jeszcze niższą orbitę, ale po minięciu ich z nadmiarem je przyspiesza przerzucając na nieco wyższą orbitę. Później znowu S26 zepchnie je niżej i tak od milionów lat satelity „zaganiają” obłoki pyłu tworząc wąski pierścień *F*. Stąd uczeni nazwali te satelity pasterkami pierścieni.

Przedstawiony mechanizm grawitacyjnego odpychania znalazł zastosowanie także i do pozostałych pierścieni, np. wyraźny zewnętrzny brzeg pierścienia *A* jest wynikiem działania satelity 1980S28. Wszelkie cząstki wyrzucone z pierścienia wskutek zderzeń „zagania” on z powrotem na swoje miejsce.

Grawitacyjne odpychanie zrobi więc pewnie karierę, ale nawet ono nie wytłumaczy następującego faktu. Popatrzmy z bliska na pierścień *F*. Okazuje się, że jest on zbudowany z kilku wąskich smug spiralnie ze sobą skręconych niby pokrętki sznura lub spirala DNA — najważniejszego dla życia związku. Voyager 1 odkrył życie wokół Saturna — żartowali z tego powodu niektórzy

uczeni uczestniczący w opracowywaniu danych. Inni byli mniej skłonni do żartów. „Splatanie” się smug w pierścieniu *F* nie zgadza się z prawami mechaniki z wielu względów. Ale te smugi na pewno stosują się do tych praw. To raczej my ich nie rozumiemy wystarczająco dobrze — powiedział jeden z uczonych.

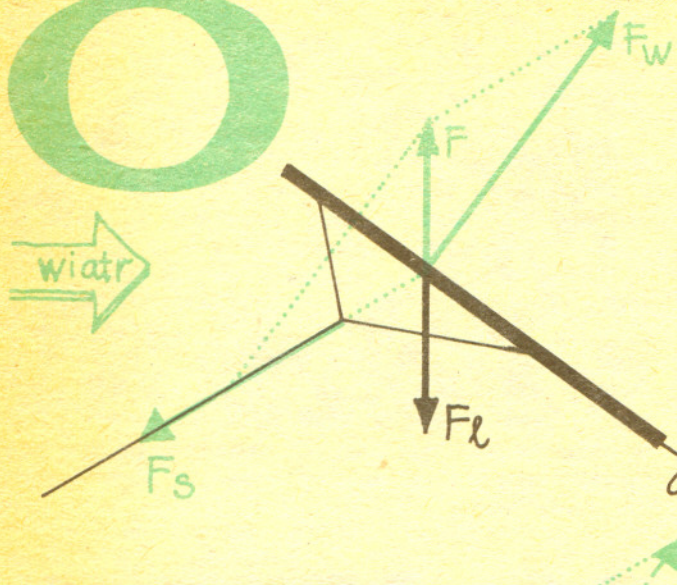
Na zakończenie zajmijmy się problemem powstania pierścieni. Chociaż nie potrafimy tego problemu rostrzygnąć, to warto zauważyć, że granica Roche’a znajduje się niedaleko od zewnętrznego skraju pierścienia *A*. Pierścienie więc mogły powstać przez rozpad satelity, który zbyt blisko zbliżył się do Saturna. W myśl innej hipotezy pierścienie są materiałem pozostałym po utworzeniu Saturna i jego księżyców. Ich położenie wewnątrz granicy Roche’a wyjaśnia, dlaczego nie utworzyły one jednego ciała. Kończymy naszą wycieczkę po Układzie Słonecznym w poszukiwaniu oddziaływań między różnymi ciałami Układu. W okolicy Saturna znaleźliśmy najwięcej przykładów: rezonanse między satelitami, satelity towarzyszące w punktach Lagrange’a, setki rezonansów między satelitami a cząstkami pierścieni, odpychanie grawitacyjne. Zjawiska te pokazują, jakimi niewidzialnymi nićmi jedne ciała wpływają na ruchy innych. Nici te są cienkie, lecz przez miliardy lat doprowadziły do zsynchronizowania ruchów wielu ciał. Układ Słoneczny powoli upodabnia się więc do zegara, w którym każdy trybik zazębiony jest z pozostałymi.



Pierścień *F* złożony ze skręconych smug (zdjęcie i schemat).

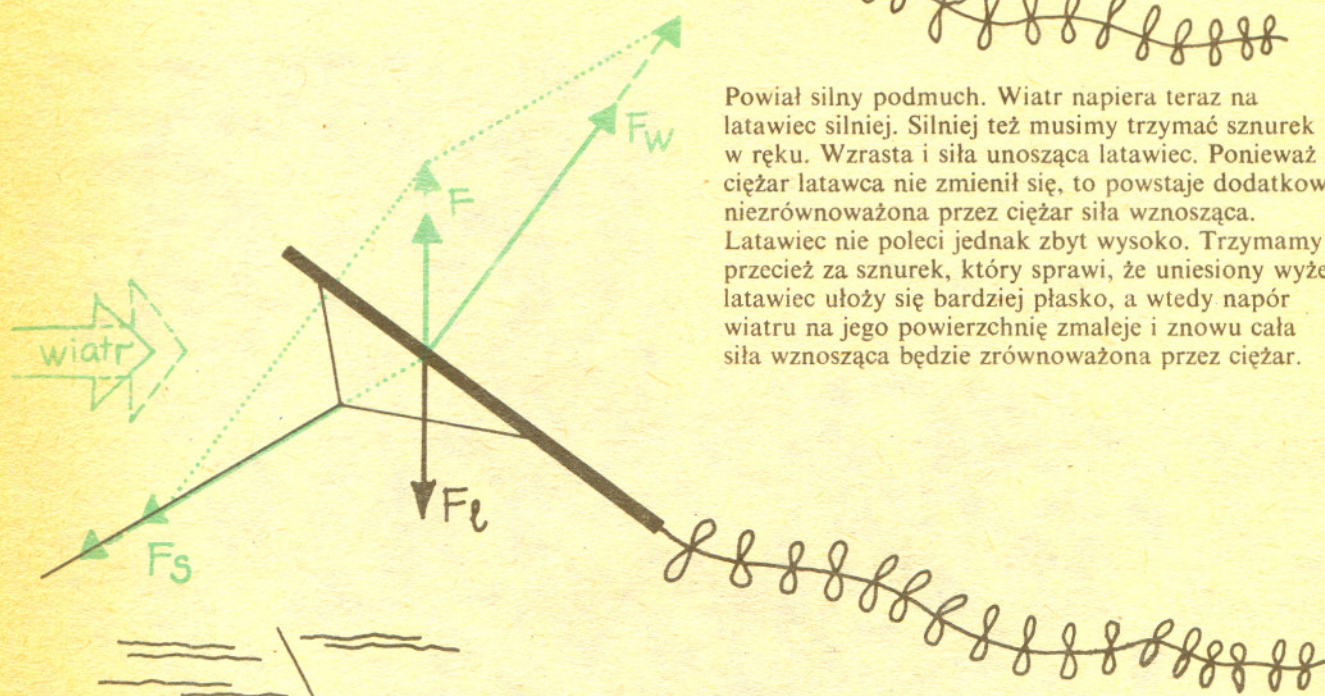


mata delta

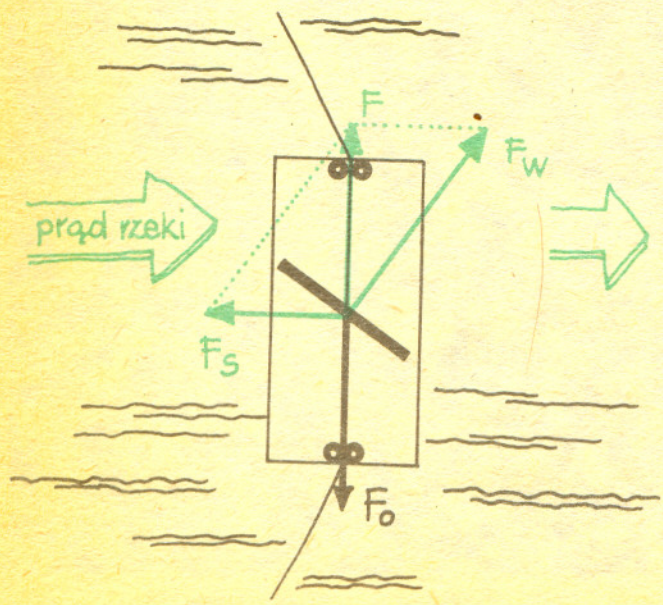


Dlaczego latawiec lata?

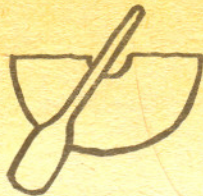
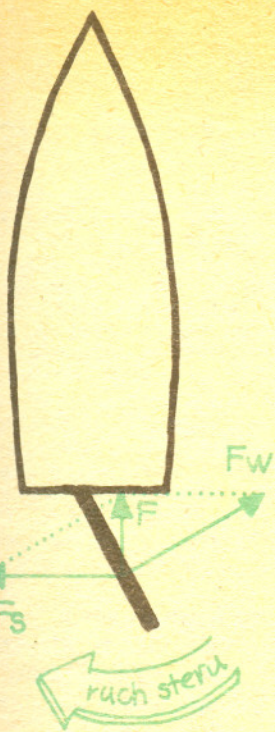
Wiatr napierając na latawiec z siłą F_w sprawia, że sznurek latawca wrywa się z ręk z siłą F_s . Powstaje przy tym skierowana ku górze siła F . Siła F równoważona jest przez ciężar latawca F_l i w efekcie latawiec unosi się spokojnie w powietrzu.



Powiał silny podmuch. Wiatr napiera teraz na latawiec silniej. Silniej też musimy trzymać sznurek w ręku. Wzrasta i siła unosząca latawiec. Ponieważ ciężar latawca nie zmienił się, to powstaje dodatkowa, nierównoważona przez ciężar siła wznosząca. Latawiec nie poleci jednak zbyt wysoko. Trzymamy przecież za sznurek, który sprawi, że uniesiony wyżej latawiec ułoży się bardziej płasko, a wtedy napór wiatru na jego powierzchnię zmaleje i znowu cała siła wznosząca będzie zrównoważona przez ciężar.



Widuje się czasem promy rzeczne wykorzystujące do pływania od brzegu do brzegu zamiast wiosł lub silnika siłę prądu. Prom taki porusza się wzdłuż rozciągniętej między brzegami liny. Pod jego dnem przymocowana jest pionowa płetwa ustawiona ukośnie do kierunku prądu. Woda napiera na płetwę. Spłynięciu promu z nurtem rzeki przeciwstawia się lina, do której jest on umocowany. W wyniku powstaje siła F skierowana w poprzek prądu. W latawcu siłą wznoszącą równoważył ciężar, tutaj zbyt niemu rozpędzeniu promu przeciwdziała opór wody. Gdy prom stoi przy brzegu, siłą F równoważy napięcie cum. Kiedy prom rusza, woda stawia mu opór tym większy, im szybciej on płynie. Prom przestaje przyspieszać wtedy, gdy siły F i F_0 zrównoważą się. Prom wraca sam, gdy obrócimy jego płetwę kierując siłą F w przeciwną stronę.

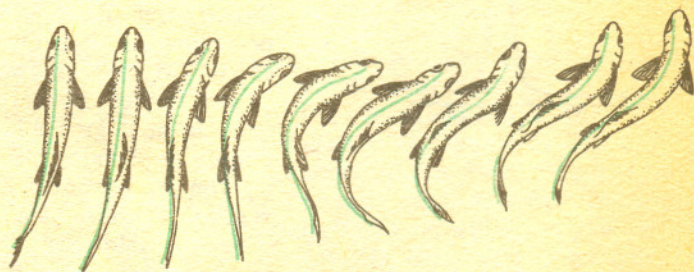
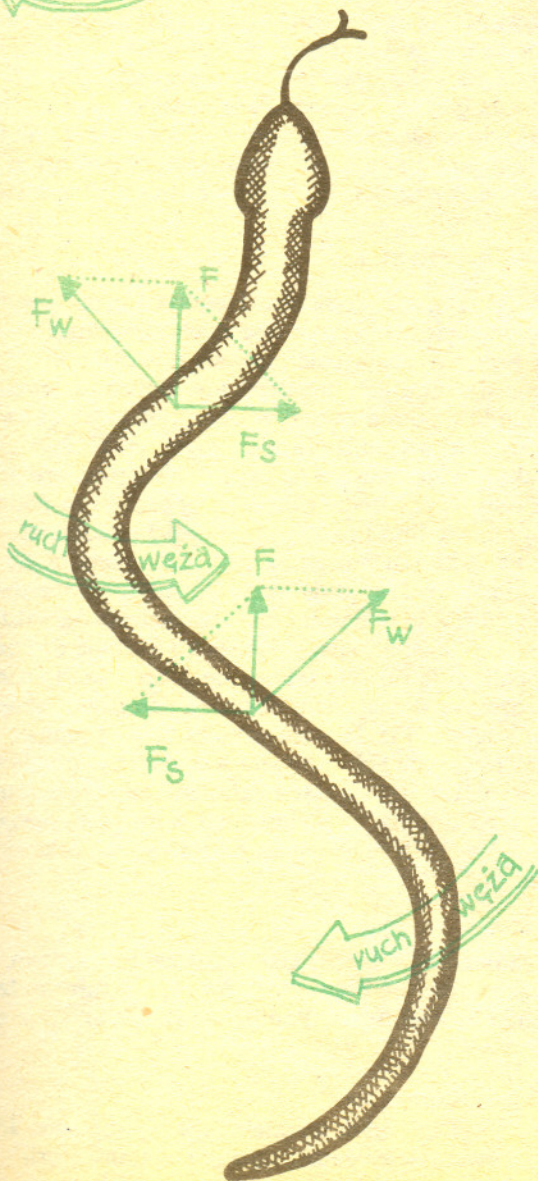


Latawiec i prom wykorzystują naturalny ruch środowiska, w którym się poruszają. Co jednak zrobić, gdy nie ma wiatru, a chcemy pływać po spokojnym jeziorze? Z latawcem można sobie łatwo poradzić. Trzeba po prostu mocno szarpnąć za sznurek. Ruch latawca względem powietrza da ten sam efekt co wzrost szybkości wiatru.

Na łódce można dać sobie radę za pomocą steru. Trzeba go najpierw wychylić powoli, a potem energicznie powrócić do położenia wyjściowego. Napór wody F_w przeciwdziałający sile sternika F_s sprawi, że siła F nada łódce ruch do przodu. Rolę sznurka w latawcu i liny w promie spełnia tutaj opór boczny kadłuba łódki, utrzymujący ją na kursie.

Gdy łódka płynie do przodu, to wychylony ster stawia duży opór wodzie. Nie można zatem w pokazany sposób płynąć zbyt szybko. Można za to udoskonalić tę metodę, zastępując ster wiosłem umieszczonym na rufie. Powolny ruch, po którym następuje energiczne szarpnięcie, nadające łódce prędkość, wykonywany jest tutaj płasko ustawionym piórem wiosła, które w takim położeniu stawia niewielki opór.

Podobne metody poruszania się stosują węże i ryby. Siła mięśni i opór piasku lub wody powodują w efekcie ich ruch do przodu.

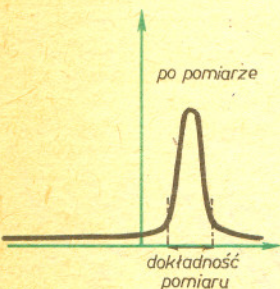
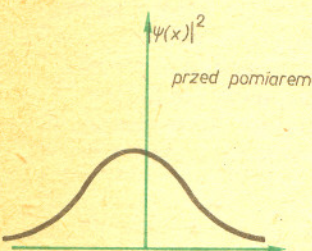


Sprostowanie do Małej Deltę 8/1984

W opisie działania telewizora kolorowego błędnie podano zestaw barw triady. W rzeczywistości tworzą ją kolory: zielony, niebieski i czerwony. Z tak świecących plamek można otrzymać każdą barwę zawartą w trójkącie o wierzchołkach odpowiadających triadzie (patrz okładka).

Mechanika kwantowa, paradoks Einsteina-Podolsky'ego-Rosena i komunikacja z szybkością nadświetlną (I)

Dr Włodzisław DUCH



Rys. 1

Był październik 1927 roku. W Brukseli, na piątym kongresie finansowanym przez belgijskiego przemysłowca Ernesta Solvaya, zebrało się ponad trzydziestu najlepszych fizyków świata. Byli wśród nich: Einstein, Bohr, de Broglie, Planck, Heisenberg, Born, Lorentz, Pauli, Schrödinger... Była też jedna kobieta — Maria Skłodowska-Curie. Uczestnicy kongresu mieli o czym dyskutować: w ostatnich dwóch latach de Broglie wysunął hipotezę dualizmu korpuskularno-falowego wszystkich cząstek, która szybko uzyskała potwierdzenie doświadczalne, Schrödinger podał swoje równanie falowe, zaledwie parę miesięcy przed tym kongresem Heisenberg odkrył zasadę nieoznaczoności, Born utożsamiał funkcję występującą w równaniu Schrödingera z amplitudą prawdopodobieństwa, a Bohr sformułował zasadę komplementarności. Podwaliny nowego obrazu świata były już widoczne w całej pełni.

Szczytowym punktem kongresu była ogólna dyskusja. Hendrik Lorentz, wyraziwszy swoje niezadowolenie z odrzucenia przez większość obecnych klasycznego determinizmu, poprosił Nielsa Bohra o omówienie podstaw nowej fizyki mikroświata. Albert Einstein nie słyszał nigdy przedtem idei Bohra na temat komplementarności i roli przyrządów pomiarowych w interpretacji wyników doświadczeń. Przez jakiś czas nie brał więc udziału w dyskusji, jaka rozgorzała po referacie Bohra. Dyskusja skupiła się głównie na zagadnieniu pomiaru położenia cząstki. Mechanika kwantowa opisuje położenie i inne cechy cząstki za pomocą pewnej funkcji, zwanej funkcją falową albo funkcją „psi”, gdyż najczęściej oznacza się ją grecką literą Ψ . Otóż kłopot polega na tym, że funkcja ta nie określa dokładnie, gdzie dana cząstka się znajduje, pozwala jedynie stwierdzić z jakim prawdopodobieństwem można ją w danym miejscu znaleźć. Jednakże w chwili pomiaru — na przykład padając na kliszę — cząstka zajmuje dobrze określone położenie, a więc opisująca ją funkcja falowa musi ulec gwałtownej zmianie: zamiast być funkcją rozmytą w znacznym obszarze przestrzeni staje się funkcją skupioną w jednym miejscu. Fizyków niepokoiło to, że zmiana funkcji falowej opisywana przez równanie Schrödingera jest zmianą stopniową, ciągłą, podczas gdy zmiana w wyniku pomiaru jest gwałtowna, nieciągła. Samego Schrödingera niepokoiło to do tego stopnia, że wykrzyknął w czasie dyskusji do Bohra: „Jeśli musimy trzymać się tych przeklętych kwantowych skoków, żałuję, że się w ogóle w to wdałem!”

Dyskusja toczyła się wokół zagadnienia pomiaru, kiedy głos zabrał Einstein. Z właściwą sobie skromnością stwierdził na początku: „Muszę przeprosić, że nie wnikałem głęboko w mechanikę kwantową. Pomimo tego chciałbym zrobić kilka uwag ogólnych”.

To właśnie kolaps funkcji falowej był głównym tematem jego wystąpienia. Jeśli jest to proces natychmiastowy, wówczas nie zgadza się z postulatami teorii względności: procesy fizyczne nie mogą zachodzić z szybkością większą od

Rozwiązanie zadania M 414. Przypuśćmy że a_1, a_2, a_3, \dots jest takim ciągiem liczb

naturalnych, że $a_{n+1} = \frac{2a_n a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$

Wówczas $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$, a więc ciąg

odwrotności $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ tworzy

postęp arytmetyczny. Nieskończony ciąg

arytmetyczny o niezerowej różnicy jest

nieograniczony, a ponieważ $0 < \frac{1}{a_1} < 1$,

ciąg a_1, a_2, a_3, \dots musi być stały.

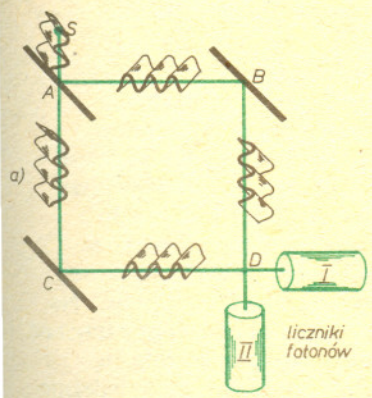


Rozwiązanie zadania M 412. Przyjmijmy, że sześcian $n \times n \times n$ spełnia warunki zadania. Dla każdego sześcianu a (o krawędzi 1) istnieje taki ciąg sześcianów tego samego koloru $a_1 = a, a_2, \dots, a_m$, że sześcian a_1 jest sąsiadem a_{i+1} (mają wspólną ścianę) oraz a_m jest sąsiadem a_1 . (Wybieramy kolejno, począwszy od a_1 , różne sześciany tak, by każdy sąsiedował z poprzednim; procedura ta musi się zakończyć, a ostatni sześcian będzie sąsiadem pierwszego.) Liczba m musi być parzysta — tyle samo razy musieliśmy posunąć się w lewo co w prawo; podobnie z górami i dołami oraz z przodem i tyłem. Różne „cykle” sześcianów jednakowego koloru są rozłączne, czyli liczba sześcianów, a więc i liczba n muszą być parzyste. Z drugiej strony dla dowolnego parzystego n istnieje sześcian o żądanych własnościach. W pierwszej warstwie układamy szachownicę z prostokątów $2 \times 2 \times 1$, a każda następna warstwa jest „negatywem” poprzedniej.

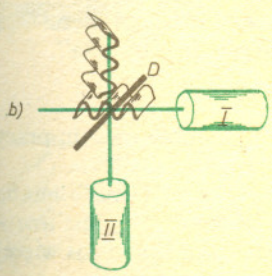
szybkości światła. Einstein doszedł do wniosku, że mechanika kwantowa nie daje pełnego opisu indywidualnych zdarzeń w mikroświecie. Powinien istnieć głębszy, ukryty porządek natury, gdzie wszystko zachodzi w sposób ściśle deterministyczny. Funkcja falowa i związane z nią prawdopodobieństwo pozwala na poprawny opis średniego wyniku dużej liczby pomiarów. Jeśli tak, zasada nieoznaczoności Heisenberga nie powinna stanowić ostatecznego ograniczenia dokładności pomiarów. Właśnie na zasadzie nieoznaczoności skupił Einstein swoje wysiłki, by wykazać wewnętrzną sprzeczność mechaniki kwantowej rozumianej jako opis indywidualnych zjawisk. Jego głównym oponentem był Niels Bohr, który twierdził, że opis rzeczywistości wynikający z mechaniki kwantowej jest już najpełniejszym z możliwych, że niemożliwa jest głębsza analiza indywidualnych zjawisk. Dyskusje Einsteina z Bohrem, rozpoczęte na piątym Kongresie Solvayowskim w 1927 roku, trwały aż do śmierci Einsteina w 1955 roku.

Swoje zarzuty sformułował Einstein chyba najjaśniej w pracy napisanej wspólnie z Borysem Podolskim i Natanem Rosenem w 1935 roku. Artykuł nosi znamienity tytuł: „Czy kwantowomechaniczny opis rzeczywistości fizycznej może uchodzić za kompletny?” Wydawało się, że artykuł ten udowodnił niezbicie, iż na pytanie zawarte w jego artykule odpowiedzieć należy przecząco. Argumentacja autorów opierała się na następującym, ostrożnym kryterium rzeczywistości fizycznej: „Jeśli nie zakłócając wcale układu można przewidzieć w sposób zupełnie pewny, tj. z prawdopodobieństwem równym jedności, wartości wielkości fizycznej, to istnieje element mający rzeczywistość fizyczną odpowiadający tej wielkości”. Innymi słowy, jeśli można określić dokładnie np. pęd i położenie cząstki bez zaburzenia jej ruchu, to obie te wielkości muszą być w każdej chwili dobrze określone dla obiektów mikroświata (czyli są „elementami rzeczywistości fizycznej”). Powinna więc istnieć teoria, która zezwala na dokładny opis, bez ograniczeń narzucanych przez wynikającą z formalizmu mechaniki kwantowej zasadę nieoznaczoności. Jak jednak określić dokładnie położenie i pęd cząstki wcale jej nie zaburzając? Wszystkie poprzednie próby Einsteina, by wykazać, że jest to możliwe w jednym eksperymencie, spełzyły na niczym. Einstein, Podolski i Rosen obeszli tę trudność w bardzo prosty sposób: wyjaśnili najpierw, co mechanika kwantowa orzeka o stanie układu składającego się z dwóch części, oddziaływających na siebie przez pewien czas, a później rozdzielonych, a następnie wykazali, że korzystając z zasad zachowania można wyznaczyć wartości pewnych wielkości, których ustalenie nie jest możliwe przy pomiarach na jednej z tych części, dokonując pomiarów na części drugiej. Zgodnie z przyjętym przez nich kryterium rzeczywistości fizycznej przyznać trzeba, że wielkości te są określone i odpowiada im pewna rzeczywistość, której mechanika kwantowa nie opisuje w pełni!

W tym momencie musimy zrobić dłuższą dygresję: jak można sobie wyobrazić sytuację przeciwną, np. położenie cząstki jako wielkość nieokreśloną? Nie chodzi tu przecież o nieokreślenie, jakie wynika z niepewności, braku informacji co do rzeczywistego położenia, lecz o prawdziwą nieokreśloność rzeczywistości. Wyobrazić to sobie jest bardzo trudno, gdyż w świecie dostępnym naszym zmysłom nic takiego nie obserwujemy. Przyroda zachowuje się jednak w zupełnie dla nas paradoksalny sposób. Najlepszą ilustracją jest tu doświadczenie, o którym Einstein niejednokrotnie dyskutował z Bohrem. Spójrzmy na rysunek 2. Mamy tu źródło światła S przedstawionego w postaci fali padającej na półprzepuszczalne lustro A : połowa światła odbija się i padając na lustro B dochodzi do punktu D , połowa zaś przechodzi i po odbiciu od lustro C również dochodzi do punktu D . Zmniejszmy teraz natężenie światła tak, by do punktu D dochodziły tylko pojedyncze fotony. Możemy się o tym przekonać ustawiając za punktem D liczniki fotonów. Zauważamy wówczas, że raz licznik pierwszy, a raz drugi zarejestruje jakiś impuls. Możemy więc powiedzieć, że foton przebiegł drogę ACD przed dotarciem do pierwszego licznika i drogę ABD przed zarejestrowaniem przez licznik drugi. Dotychczas nie ma w tym nic tajemniczego. Pamiętajmy jednak, że światło ma również własności falowe. Ustawmy w punkcie D półprzepuszczalne lustro w taki sposób, by w kierunku CD zachodziła interferencja konstruktywna (wzmocnienie), a w kierunku BD — destruktywna (osłabienie). Jedynie licznik pierwszy rejestruje teraz impulsy. Impulsy pojawiają się pojedynczo, lecz do interferencji konieczne są przecież dwa ciągi falowe. W jaki sposób pojedynczy foton może interferować sam ze sobą? Mechanika kwantowa daje tu odpowiedź sprzeczną z intuicją i poczuciem realizmu: foton jest w potencjalny sposób obecny wszędzie! Gdyby fotony w dalszym ciągu



A, D — lustra półprzepuszczalne
B, C — lustra zwykłe
S — źródło fotonów



Rys. 2



poruszały się po określonym torze, musiałyby być rejestrowane przez oba liczniki. Wystarczy wyjąć lustro C , by licznik II znowu rejestrował impulsy. Wystarczy wyjąć lustro D , by impulsy rejestrowały oba liczniki. Niezależnie od mechaniki kwantowej i jej interpretacji pozostaje faktem, że fotonowi ani innym cząstkom w doświadczeniach tego typu nie da się przypisać żadnego toru. Nie wynika to z naszej niewiedzy — nieoznaczoność położenia jest rzeczywistością! Włożenie dodatkowego lustra zmienia warunki eksperymentu i nie pozwala nam już powiedzieć, że foton porusza się wzdłuż określonej drogi. Wyjmując lustro „zmuszamy” więc fotony do wybrania określonego toru, zmieniamy sytuację fizyczną w całym, dowolnie dużym obszarze $ABCD$! Co za absurd! Brak tu zarówno realizmu (wybór położenia lustra „tworzy” rzeczywistość), jak i lokalności (jest to wpływ natychmiastowy).

Jeszcze bardziej absurdalny wynik otrzymujemy rozważając doświadczenie, w którym dokonujemy „opóźnionego wyboru”, jak nazywa to znakomity fizyk amerykański John Wheeler. Wyobraźmy sobie mianowicie, że nasze źródło światła wysyła pojedyncze fotony w regularnych, dość długich odstępach czasu, a lustra ustawione są w dość dużej odległości od siebie. Możemy więc łatwo wyliczyć, kiedy foton przebiegnie już prawie całą drogę i w ostatnim momencie dokonać wyboru — włożyć lustro czy nie. Możemy więc „stworzyć” przez akt pomiaru foton, który przebiegł określoną drogę, lub foton, któremu żadnej drogi przypisać się nie da.



Przyroda okazała się więc dziwniejsza, niż byliśmy skłonni to sobie wyobrazić. Trudności w zrozumieniu fizyki mikroświata spowodowały, że Einstein w opublikowanym w 1936 roku artykule „Fizyka i Rzeczywistość” wyraził swoje stanowisko wobec poglądu, że mechanika kwantowa stosuje się do opisu indywidualnych zdarzeń, w następujący sposób: „Pogląd ten jest logicznie możliwy i wolny od sprzeczności; sprzeciwia się jednak tak zdecydowanie mojemu naukowemu instynktowi, że nie mogę zaniechać szukania bardziej kompletnego sposobu pojmowania”. Wszystko wskazuje jednak na to, że mechanika kwantowa stosuje się do pojedynczych zdarzeń. Wykonane w ostatnich latach piękne doświadczenia, w których pojedynczy neutron interferuje sam ze sobą, stanowią kolejne potwierdzenie słuszności przewidywań mechaniki kwantowej.

Obrona Bohra przed wnioskami, wynikającymi z pracy Einsteina, Podolsky’ego i Rosena, opierała się na zasadzie komplementarności. Bohr stwierdził, że „dopiero wzajemne wyłączenie się jakichkolwiek dwóch sposobów eksperymentalnego postępowania umożliwiających jednoznaczne określenie komplementarnych wielkości fizycznych stwarza miejsce dla nowych praw fizycznych, których współistnienie na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać niezgodne z podstawami nauki”. Nie należy się więc przejmować możliwością wyznaczenia położenia i pędu cząstki bez zaburzania układu, skoro jest to niemożliwe w jednym doświadczeniu. Większość fizyków uznała jednak, że tym razem Bohr nie wyjaśnił problemu do końca. Chociaż pojawiło się na ten temat wiele ciekawych prac, żadna z nich nie zadowoliła w pełni Einsteina. Na kilka lat przed śmiercią pisał on: „Jednego, w mojej opinii, powinniśmy trzymać się mocno. Rzeczywista sytuacja systemu S_2 nie zależy od tego, co robi się z systemem S_1 , który jest od niego przestrzennie oddzielony. A jednak, zależnie od pomiaru, jaki robię na S_1 , dostaję różne Ψ_2 dla drugiego podsystemu. Jednakże prawdziwa sytuacja w S_2 musi być niezależna od tego, co dzieje się w S_1 . Dla tej samej rzeczywistej sytuacji S_2 można znaleźć, zależnie od swojego wyboru (pomiaru na S_1) różne funkcje Ψ_2 . Można uciec od tej konkluzji jedynie zakładając, że pomiar na S_1 zmienia (telepatycznie) prawdziwą sytuację w S_2 lub też zaprzeczając temu, że przestrzennie oddzielone podsystemy posiadają niezależną rzeczywistość. Obie możliwości wydają mi się całkowicie nie do przyjęcia”.



Poglądy Schrödingera były całkiem inne. Parę miesięcy po opublikowaniu pracy Einsteina, Podolsky’ego i Rosena udowodnił on, że opis dowolnych dwóch układów, które przez jakiś czas ze sobą oddziaływały, wymaga w ramach mechaniki kwantowej traktowania ich jako jednej całości. Mechanika kwantowa jest teorią holistyczną (od greckiego *holos* = cały), a więc traktującą całość jako coś więcej niż tylko sumę części, nawet jeśli te części już ze sobą nie oddziałują.

Czy dogoni?

Jeśli prędkości goniącego G i uciekającego U są takie same, to odpowiedź jest prosta — oczywiście nie. Ale jeśli U jest w środku kolistego stawu — jego prędkość w wodzie jest cztery razy mniejsza niż na łódzie — G zaś jest na brzegu, G nie umie co prawda pływać, lecz U też zbyt długo w stawie nie może przebywać? Odpowiedź wydaje się prosta. Zanim U dopłyne do brzegu, G zdąży obieć staw i złapać wychodzącego na brzeg U . Przecież połowa obwodu jest tylko π razy większa od promienia, a prędkość G cztery razy większa od prędkości U .

Okazuje się jednak, że U zdąży uciec. Zauważmy, że dopóki odległość U od środka stawu jest mniejsza niż ćwierć promienia, to jego prędkość kątowna (gdyby płynął po okręgu współśrodkowym z brzegiem stawu) jest większa niż prędkość kątowna G biegnącego po brzegu. A więc w tej sytuacji U może płynąć tak, by G był w dalszym końcu średnicy przechodzącej przez U oraz by oddalał się od środka stawu. W momencie gdy odległość U od środka będzie już większa niż $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ promienia, ale nadal mniejsza niż ćwierć promienia (jest to możliwe, gdyż $1 - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{4}$),

zmienia taktykę. Zaczyna płynąć prosto do brzegu. Ma doń mniej niż $\frac{\pi}{4}$ promienia, a więc dopłyne szybciej niż G dobiegnie z przeciwnego końca średnicy.

Taka taktyka jest skuteczna, gdy stosunek prędkości G i U jest mniejszy niż $\pi + 1$. Co się stanie, gdy będzie większy? Czy wtedy G dogoni U , czy też U wymyśli nowy sposób ucieczki? Spróbuj to rozstrzygnąć sam, Czytelniku! A co się dzieje, gdy prędkość G dokładnie $\pi + 1$ razy przewyższa prędkość U ?

J. R.



Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 412. Czy można z białych i czarnych sześcianów o krawędzi 1 zbudować sześcian o krawędzi n tak, aby dla każdego małego sześcianu dokładnie dwa sąsiadujące z nim (tzn. stykające się ścianami) miały ten sam kolor co on?

Rozwiązanie na str. 11

M 413. W wypukłym czworokącie $ABCD$ suma odległości wierzchołka od prostych zawierających boki $ABCD$ jest taka sama dla wszystkich wierzchołków. Udowodnić, że $ABCD$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie na str. 1

M 414. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych a_1, a_2, a_3, \dots , w którym nie wszystkie liczby są równe i liczba a_{n+1} jest średnią harmoniczną liczb a_n i a_{n+2} (średnią harmoniczną liczb a i b nazywamy liczbę $\frac{2ab}{a+b}$).

Rozwiązanie na str. 10

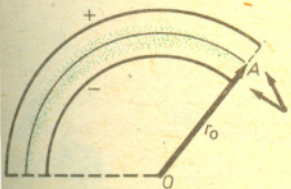
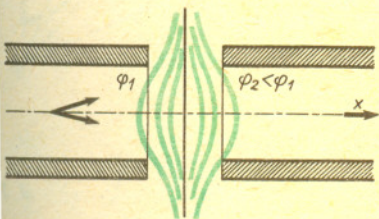
Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 182. Wzdłuż osi przewodzącej rury biegnie prawie równoległa wiązka dodatnich jonów. Rura jest przecięta prostopadłe do osi i jej dwie części mają różny potencjał. Powierzchnie ekwipotencjalne w przecięciu rury zaznaczono na rysunku. Dlaczego przy mijaniu przecięcia następuje nie tylko przyspieszanie, ale także ogniskowanie jonów?

Rozwiązanie na str. 2

F 183. Do kondensatora cylindrycznego wstrzelono w punkcie A (patrz rysunek) nieco rozbieżną wiązkę jonów dodatnich o niewielkim kącie rozbieżności. Energie wszystkich jonów są jednakowe. Jony o prędkościach początkowych prostopadłych do odcinka OA poruszają się po okręgu współśrodkowym z okładkami kondensatora. Gdzie nastąpi ponowne zogniskowanie wiązki?

Rozwiązanie na str. 3



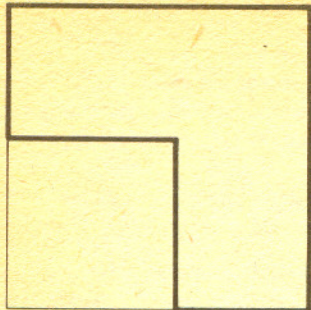
Zadanie Fryderyka II

W 1225 roku cesarz Fryderyk II zadał uczonemu Leonardo, znanemu jako Fibonacci, pytanie:

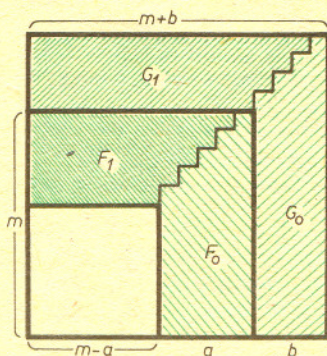
Jaki pełny kwadrat po zmniejszeniu i zwiększeniu o 5 pozostaje pełnym kwadratem? Trzeba dodać, że za pełne kwadraty uważano kwadraty liczb wymiernych.

Znamy odpowiedź Fibonacciego, $\frac{1681}{144}$, lecz nie wiemy jak do niej doszedł. Próby algebraicznego rozwiązywania prowadzą do równań co najmniej czwartego stopnia. A oto rozwiązanie używające metod znanych w epoce Fibonacciego.

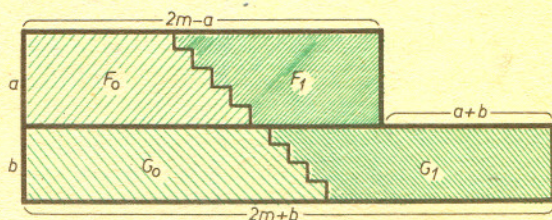
Chcemy znaleźć takie liczby naturalne m i n , że $m^2 - 5n^2$ i $m^2 + 5n^2$ są kwadratami liczb naturalnych. Oznacza to geometrycznie, że chcemy znaleźć dwa gnomony F i G jak na rysunku 2, każdy o polu $5n^2$.



Rys. 1. Gnomonem nazywamy figurę powstałą z odjęcia od kwadratu o boku naturalnym kwadratu o boku naturalnym.



Rys. 3a



Rys. 3b

Podzielmy gnomony linią łamaną (o odcinkach długości 1) jak na rysunku 3a i złożmy z otrzymanych części dwa prostokąty o podstawach równych a i b , gdzie a i b są liczbami naturalnymi, $a > b$ (rys. 3b). Zauważmy, że różnica wysokości prostokątów jest równa $a+b$ (wysokość wyższego prostokąta wynosi $2m+b$, zaś wysokość niższego — $2m-a$).

Odejmijmy teraz od każdego z prostokątów prostokąt o podstawie b i wysokości $2m-a$ (rys. 4). Mamy

$$\frac{a}{a-b} = \frac{\text{pole } P_1 \cup P_0}{\text{pole } P_1} = \frac{\text{pole } Q_1 \cup P_0}{\text{pole } Q_1} = \frac{5n^2}{b(a+b)},$$

$$\text{czyli } n^2 = \frac{ab(a+b)}{5(a-b)}.$$

Jeśli teraz założymy, że np. $a = 5k$, gdzie k jest liczbą naturalną, to $n^2 = \frac{kb(5k+b)}{5k-b}$

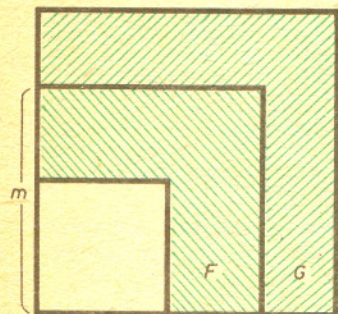
i dla $b = 4k$ ułamek po prawej stronie staje się kwadratem liczby naturalnej $n = 6k$.

Obliczmy teraz m . Mamy

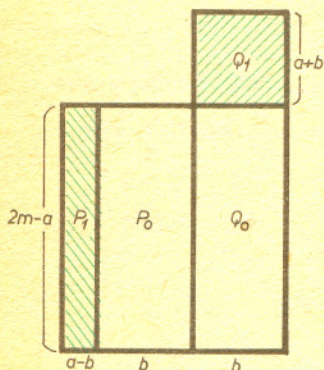
$$2m-a = \frac{\text{pole } P_1}{a-b} = \frac{\text{pole } Q_1}{a-b} = \frac{b(a+b)}{a-b},$$

$$\text{a więc } 2m = 41k \text{ i żądany ułamek } \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{41}{6k}\right)^2 = \left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

J.R.



Rys. 2



Rys. 4





Bieżący rok jest szczególnie atrakcyjny dla amatorów obserwacji astronomicznych, posiadających choćby niewielką lunetkę, ze względu na możliwość zaobserwowania wzajemnych zaćmień czterech najjaśniejszych satelitów Jowisza.

Płaszczyzny wokółjowiszowych orbit Io, Europy, Ganimesesa i Callisto niemal dokładnie pokrywają się z płaszczyzną okosłonecznej orbity Jowisza. Dlatego też co sześć lat (a więc dwa razy w ciągu okresu obiegu Jowisza wokół Słońca), gdy Jowisz znajduje się w pobliżu jednego z węzłów swej orbity, zdarzają się szczególne warunki do obserwacji zaćmień lub zakryć galileuszowych satelitów. Obiekty te są na tyle jasne (w opozycji Io: 4,8 mag., Europa: 5,2 mag., Ganimeses: 4,5 mag., Callisto: 5,5 mag.), że gdyby nie blask Jowisza, mogłyby być zaobserwowane nawet gołym okiem. Niewielka lunetka (powiększenie około 30 razy) pozwala śledzić te księżyce, względnie szybko przemieszczające się w sąsiedztwie planety.

W okresie od maja 1985 roku do kwietnia 1986 roku nastąpi kolejne korzystne usytuowanie Jowisza, czego efektem będzie seria 252 wzajemnych zaćmień i zakryć wspomnianych satelitów. Oczywiście tylko niektóre z tych zjawisk będzie można zaobserwować przy użyciu sprzętu amatorskiego.

Na przykład:

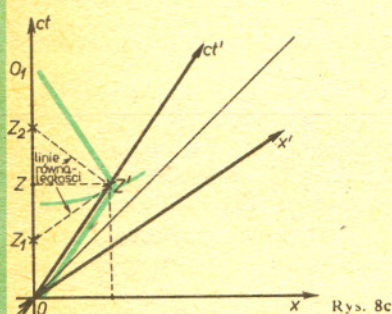
7 listopada o godzinie 17^h50^m (czasu zimowego) Io znajdzie się w stożku cienia Europy, przy czym blask pierwszego z wymienionych księżyców zmniejszy się o 0,87 mag. W czasie zaćmienia satelity będą widoczne na niebie w odległości 3,3 promienia Jowisza od jego centrum, a zjawisko będzie trwało około 5 minut.

14 listopada o godzinie 20^h04^m rozpocznie się niemal identyczne zjawisko, również będzie trwało 5 minut, jednak tym razem spadek blasku Io będzie większy — 0,94 mag.

Znacznie efektowniejsze zaćmienie nastąpi 14 grudnia — gdy Europa pograży się w cieniu Ganimesesa. Blask zaćmianego obiektu zmniejszy się o ponad 3 mag! Satelity będą odległe od centrum tarczy Jowisza o 5,6 jego promienia, zaćmienie rozpocznie się o 18^h30^m i będzie trwało do 18^h39^m.

Dla astronomów zjawiska te stanowią szczególną okazję do wyznaczenia dokładnych położeń galileuszowych satelitów, określenia ich rozmiarów, a nawet ustalenia pewnych szczegółów budowy ich powierzchni. Poprawienie dokładności określenia położeń tych obiektów jest szczególnie istotne dla misji sztucznego satelity Galileo, który ma dotrzeć do Jowisza w końcu 1988 roku.

J. U.



Rys. 8c

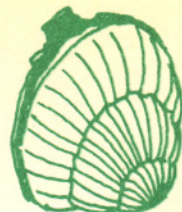
upłynął w O między zdarzeniami OB_1' , jest równy $\tau = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} > 1$.

Paradoks pojawia się, gdy doprowadzimy do ponownego spotkania obserwatorów. Załóżmy, że O' po pewnym czasie zawrócił (rys. 8c) i doszło do spotkania (zdarzenie O_1). Który z bliźniaków będzie starszy? Przecież cały czas, poza krótkim momentem zmiany prędkości, obaj znajdowali się w układach inercjalnych i każdy z nich twierdził, że jego zegar idzie szybciej niż brata. Tak więc przy spotkaniu każdy będzie uważał, że żył dłużej (np. więcej razy uderzyło jego serce). Prześledźmy to na rysunku 8c. Obserwator O' oddala się z prędkością v przez czas $ct'_2 = 1$, a następnie z taką samą prędkością wraca. Między spotkaniami (zdarzenia O i O_1) upłynął w jego układzie czas $2ct'_2 = 2$. Dla obserwatora O jest $ct_2 > 1$, a więc jego zegar wskaże w O_1 czas większy niż 2.

Gdzie powstała asymetria, która spowodowała, że wskazania zegarów po spotkaniu różnią się między sobą? Nastąpiło to w chwili zawracania. Mogłoby się wprawdzie wydawać, że z punktu widzenia O' obserwator O również zatrzymuje się, zmienia kierunek prędkości i zaczyna powrót, jest jednak ważna różnica. Obserwator O cały czas jest w tym samym układzie inercjalnym, a O' w momencie zawracania zmienia układ inercjalny — porusza się z przyspieszeniem. Zaobserwuje on na przykład pojawienie się sił bezwładności i to tym większych, im szybciej następuje zmiana prędkości.

Zmiana układu inercjalnego oznacza zmianę linii równoczesności. Zdarzenie Z' przed zwrotem jest równoczesne z Z_1 , a natychmiast po zwrocie z Z_2 . Z punktu widzenia podróżującego bliźniaka w chwili zawracania na Ziemi upływa duży czas (rys. 8c). Obaj bliźniacy są zgodni co do tego, że O' jest młodszy niż O.

W 1972 roku dwaj Amerykanie J. C. Hafele i R. E. Keating przewieźli cztery zegary cezowe samolotami pasażerskimi dookoła Ziemi na wschód i na zachód, a następnie porównali ich wskazania z identycznymi zegarami, które spoczywały na Ziemi. Po uwzględnieniu zależności natężenia pola grawitacyjnego od wysokości (pole grawitacyjne również wpływa na chód zegarów), otrzymali oni wyniki całkowicie zgodne z przewidywaniami (różnice są rzędu nanosekund). (cdn.)



Tor komety Halleya jest na naszej mapce raz cieńszy, raz grubszy. W sektorze wrześnieowym tor ten jest przerywany. Forma trajektorii odzwierciedla spodziewane zachowanie się komety.

Musimy od razu stwierdzić, że niestety tym razem zaobserwowanie komety Halleya nie będzie rzeczą łatwą. Jeśli będzie się zachowywać tak jak typowa kometa, jej jasność będzie większa niż 5^m ($m < 5$) w okresie od 16 I do 20 IV, $m < 7$ od 20 XI 1985 do 10 V 1986. Byłby to najlepszy okres do obserwacji komety, gdyby nie fakt, że w tym czasie jedynie przed 6 II będzie ona po zmierzchu nad horyzontem w Polsce. Dodatkowo trzeba uwzględnić to, że na początku lutego kometa przejdzie przez perihelium. Jej odległość kątowna od Słońca będzie w styczniu maleć, 19 I wyniesie 30° . Można więc uznać, że okres dogodnych warunków do obserwacji zawęży się do dni 16-19 I. Analizując warunki obserwacji musimy jeszcze uwzględnić odległość kątowną komety od Księżyca oraz jego fazę. Te dwa czynniki w połowie stycznia będą sprzyjające. Kąt kometa-Ziemia-Księżyc wyniesie około 90° , 11 I nastąpi nów. Oczywiście posłużenie się lornetką, nawet teatralną, znacznie przedłuży okres możliwości dostrzeżenia komety. Aby ułatwić obserwacje w innych dniach, przedstawiamy tabelę, w której zamieściliśmy:

1 kolumna — data, 2 — pora obserwacji (R — rano, W — wieczorem), 3 — deklinacja (δ), 4 — odległość od Ziemi (Δ) w j. a., 5 — odległość od Słońca (r) w j.a., 6 — spodziewana jasność (m), 7 — odległość kątowna od Słońca (θ) w stopniach, 8 — odległość kątowna od Księżyca (φ) w stopniach, 9 — faza Księżyca (f) (nów = 0 pełnia = ± 14).

data (1)	pora (2)	δ (3)	Δ (4)	r (5)	m (6)	θ (7)	φ (8)	f (9)
8 XII 1985	W	+8	0,7	1,4	6,3	108	162	-4
13 XII 1985	W	+5	0,8	1,3	6,2	94	81	+1
4 I 1986	W	-3	1,2	1,0	5,7	50	137	-7
3 II 1986	R,W	-9	1,6	0,6	4,0	8	84	-6
19 II 1986	R	-13	1,5	0,6	4,2	20	132	+10
4 III 1986	R	-17	1,2	0,8	4,4	39	45	-7
18 III 1986	R	-24	0,9	1,0	4,5	62	143	+7
3 V 1986	W	-17	0,9	1,7	6,3	125	148	-6