

SPIS TREŚCI

NUMERU 8 (140)

Ciała cechujące i elipsoidy <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str. 1
Liczenie fotonów <i>doc. dr Kazimierz Rzążewski</i>	str. 4
Kiedy zaczyna się jesień?	str. 5
Inna odległość, inna geometria	str. 6
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Powierzchnie Riemanna <i>dr Ryszard Kopiecki</i>	str. 10
Klub 44	str. 12
Teoria względności (7)	str. 13
Mierzenie Wszechświata <i>mgr Jacek Choloniewski</i>	str. 14
Paradoks parkowania <i>dr Bogdan Cichoński</i>	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:
Informatyka**

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitariski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Szubowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wojska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zleciodawców instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. naczel.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. naczel.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczel.
mgr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
mgr Ewa Ryłłowa
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93

Biurowisko Reklam i Propagandy

tel. 25-56-26

Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.

2,50 ark. druk.

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 487/85. N-57

Jak pewnie Czytelnikowi wiadomo, w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej \mathbb{R}^k można wprowadzić na wiele sposobów metrykę. Z punktu widzenia Analizy Funkcjonalnej najistotniejsze są te metryki, które określone są przez normę jednorodną i tymi też metrykami zajmiemy się w tym artykule.

Funkcja $\|\cdot\|: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się normą jednorodną, jeżeli

- $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ dla każdych $x \in \mathbb{R}^k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^k$.

Przykłady norm będą podane w dalszej części artykułu.

Za pomocą normy można następującym wzorem zdefiniować metrykę

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} \|x - y\| \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że funkcja ta ma wszystkie własności metryki, a poza tym jeszcze dwie dodatkowe:

- $\rho(x + x_0, y + x_0) = \rho(x, y)$ dla każdego $x_0 \in X$ (tzn. jest przesuwalna),
- $\rho(\lambda x, \lambda y) = \lambda \rho(x, y)$ dla każdego $\lambda \geq 0$, $x, y \in X$ (w przypadku, gdy $k = 2$ i przy „zwykłej” odległości na płaszczyźnie jest to twierdzenie Talesa).

Łatwo zauważyć, że gdy metryka ρ spełnia warunki (i) oraz (ii), to wyznacza normę jednorodną daną wzorem

$$\rho(x, 0) \stackrel{\text{df}}{=} \|x\|.$$

Jeżeli w przestrzeni \mathbb{R}^k określona jest norma jednorodna $\|\cdot\|$, to parę $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ nazywamy k -wymiarową przestrzenią liniową unormowaną. Powstaje zasadnicze pytanie: Jak konstruować w przestrzeni \mathbb{R}^k normy jednodrodne?

Przyjrzyjmy się trochę dokładniej zbiorowi

$$W_0 = \{x: \|x\| \leq 1\} = \bar{K}(0, 1) \text{ (domknięta kula jednostkowa względem normy } \|\cdot\|).$$

Zbiór ten ma następujące własności:

- W_0 jest zbiorem wypukłym,
- $0 \in W_0$ oraz 0 jest środkiem symetrii W_0 (tzn. $x \in W_0 \Rightarrow -x \in W_0$),
- dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ istnieje $t > 0$ takie, że $tx \in W_0$ (W_0 jest zbiorem pochłaniającym),
- jeżeli $x_0 \in W_0$ i dla każdego $t > 0$ jest $tx_0 \in W_0$, to $x_0 = 0$ (W_0 nie zawiera półprostych).

Jeżeli $W \subset \mathbb{R}^k$ spełnia warunki 1, 2, 3, 4, to W nazywa się ciałem cechującym. Zatem $\bar{K}(0, 1)$ jest ciałem cechującym. Zachodzi też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne, a mianowicie

Jeżeli $W \subset \mathbb{R}^k$ jest ciałem cechującym, to wzór

$$p_W(x) = \inf \left\{ t > 0: \frac{1}{t} x \in W \right\} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^k$$

wyznacza normę jednorodną w \mathbb{R}^k .

Norma ta nazywa się funkcjonałem Minkowskiego generowanym przez W . Na rysunku 1 przedstawione są trzy standardowe ciała cechujące w \mathbb{R}^2 . Wówczas, jak łatwo sprawdzić, mamy dla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$p_{W_1} = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2,$$

$$p_{W_2} = \max(|x_1|, |x_2|) = \|x\|_\infty,$$

$$p_{W_3} = |x_1| + |x_2| = \|x\|_1.$$

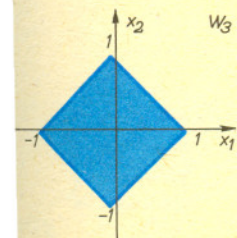
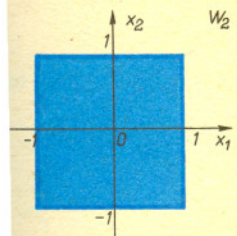
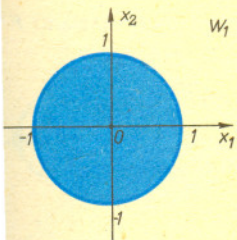
Symbole występujące w prawych częściach wzorów to standardowe oznaczenia tych norm używane w Analizie Funkcjonalnej. Metryka wyznaczona przez normę $\|\cdot\|_2$ jest zwykłą metryką euklidesową znaną Czytelnikowi z lekcji geometrii.

Zauważmy wreszcie, że norma $\|\cdot\|_2$ jest generowana zarówno przez koło z brzegiem, jak i bez brzegu.

Łatwo zauważyć, że:

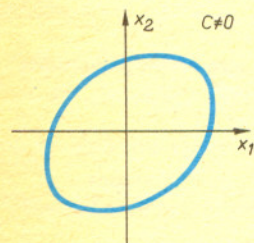
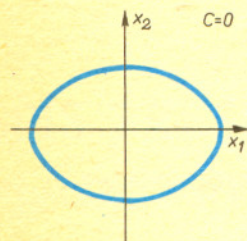
- $A = \{x: p_W(x) < 1\} \subset W \subset \{x: p_W(x) \leq 1\} = B$,
- Jeżeli W' jest ciałem cechującym takim, że $A \subset W' \subset B$, to $p_W(x) = p_{W'}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$,
- Jeżeli $\|\cdot\|$ jest normą jednorodną i $W = \bar{K}(0, 1)$, to $\|x\| = p_W(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.

W ten sposób uzyskaliśmy pełny opis konstrukcji norm jednorodnych w przestrzeni \mathbb{R}^k .

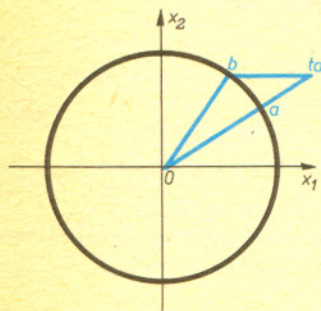




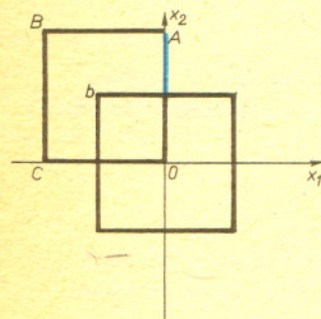
Rozwiązanie zadania M 408. Przypuśćmy, że suma długości cięciw jest nie mniejsza niż $k\pi$. Wówczas suma długości krótkich łuków opartych na tych cięciwach jest większa od $k\pi$. Suma długości tych łuków i łuków symetrycznych do nich względem środka okręgu jest większa od $2k\pi$. Istnieje więc punkt okręgu należący do co najmniej $k+1$ spośród tych wszystkich łuków. Średnica poprowadzona przez ten punkt przecina co najmniej $k+1$ cięciw.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Wrodzone lenistwo autora nie pozwoliło mu nigdy doprowadzić do końca obliczeń wyznaczających ogólną postać zbioru $A(a, b, \alpha)$ w przypadku norm $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$. Byłby więc bardzo wdzięczny Czytelnikowi, gdyby zechciał wykonać za niego to zadanie i o wyniku tych ustaleń zawiadomił autora za pośrednictwem redakcji *Delta*.

W Analizie Funkcjonalnej wyróżnia się normy pochodzące od iloczynu skalarnego nazywane normami hilbertowskimi.

Funkcję $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli

- $F(x, x) \geq 0$ oraz $F(x, x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- $F(x, y) = F(y, x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}^k$,
- $F(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha F(x_1, y) + \beta F(x_2, y)$ dla $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Jeżeli F jest iloczynem skalarnym, to kładąc $\|x\|_F \stackrel{\text{df}}{=} (F(x, x))^{1/2}$ dla $x \in \mathbb{R}^k$ otrzymujemy, jak Czytelnik z łatwością sprawdzi, normę jednorodną. Normę taką nazywamy normą hilbertowską w \mathbb{R}^k .

Jeśli $F_0(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2$ dla $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, to F_0 jest iloczynem skalarnym i $\|x\|_{F_0} = \|x\|_2$, więc norma $\|\cdot\|_2$ jest normą hilbertowską w \mathbb{R}^2 .

Można zadać pytanie: Czy norma $\|\cdot\|_\infty$ jest normą hilbertowską?

Wykonując niezbyt trudne rachunki Czytelnik może sprawdzić, że w przestrzeni \mathbb{R}^2 każdy iloczyn skalarny ma postać:

$$F(x, y) = ax_1 y_1 + bx_2 y_2 + c(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \text{gdzie } a > 0 \text{ i } \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 > 0.$$

Wówczas $\|x\|_F = (ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1 x_2)^{1/2}$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.

Ciałem cechującym generującym tę normę jest zbiór

$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1 x_2 \leq 1\}$, a więc obszar ograniczony elipsą (rys. 2).

Mamy też twierdzenie

Jeżeli W jest ciałem cechującym w \mathbb{R}^2 ograniczonym elipsą, to norma generowana przez W jest normą hilbertowską.

Podobnie w przypadku przestrzeni \mathbb{R}^3 norma jest hilbertowska wtedy i tylko wtedy, gdy ciało cechujące jest ograniczone elipsoidą.

Możemy postawić teraz następujący problem:

Jak w \mathbb{R}^k wyróżnić wśród norm jednorodnych normy hilbertowskie lub wśród wszystkich ciał cechujących ciała ograniczone elipsoidami?

Zacznijmy od pierwszej części powyższego pytania.

1. Przypuśćmy, że norma $\|\cdot\|$ jest normą hilbertowską w \mathbb{R}^k wyznaczoną przez iloczyn skalarny F . Wówczas

$$(*) \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2tF(x, y) + t^2\|y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wstawiając w (*) $t = 1$ oraz $t = -1$ i dodając stronami otrzymujemy:

$$(i) \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^k \quad (\text{jest to tzw. równość von Neumanna}).$$

Wstawiając w (*) $\|x\| = \|y\| = 1$ otrzymujemy:

$$(ii) \|x + ty\| = \|tx + y\| \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^k, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Okazuje się, że następujące warunki są równoważne:

- norma jednorodna $\|\cdot\|$ jest normą hilbertowską w \mathbb{R}^k ,
- dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^k$ $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$,
- dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R}$, jeśli $\|x\| = \|y\| = 1$, to $\|x + ty\| = \|tx + y\|$.

2. Zauważmy, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^2, t > 1$, jeśli $\|a\| = \|b\| = 1$, to $\|ta - b\| > \|a - b\|$ (rys. 3).

Inaczej jest, gdy mamy do czynienia z normą $\|\cdot\|_\infty$. Wówczas (rys. 4) wszystkie punkty leżące na zaznaczonym kawałku boku kwadratu $OABC$ są odległe w sensie normy $\|\cdot\|_\infty$ od punktu b o 1. Tak więc $\|ta - b\|_\infty = \|a - b\|_\infty = 1$ dla każdego $t \in \langle 1, 2 \rangle$.

Okazuje się, że do warunków (a), (b), (c) można dołączyć jeszcze jeden warunek równoważny:

$$(d) \text{ dla każdych } a, b \in \mathbb{R}^k \text{ oraz } t > 1, \text{ jeśli } \|a\| = \|b\|, \text{ to } \|ta - b\| > \|a - b\|.$$

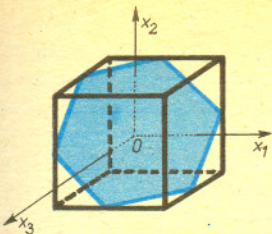
3. W przestrzeni $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ rozpatrzmy zbiór

$$A(a, b, \alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : \frac{\|x - a\|}{\|x - b\|} = \alpha \right\}, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{R}^k, \quad a \neq b, \quad \alpha > 0.$$

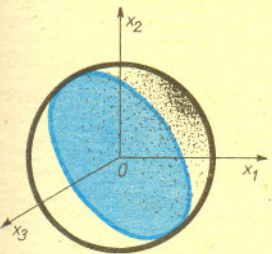
W przypadku $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ jeśli $\alpha = 1$, to $A(a, b, \alpha)$ jest symetryczną odcinką ab , zaś gdy $\alpha \neq 1$, jest okręgiem (por. artykuł J. Bednarczuka w *Delcie* 7/1985). Okazuje się, że mamy kolejny warunek równoważny warunkowi (a):

(e) dla każdych $a, b \in \mathbb{R}^k, a \neq b$ i $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ istnieją takie $x_0 \in \mathbb{R}^k$ oraz $r > 0$, że:

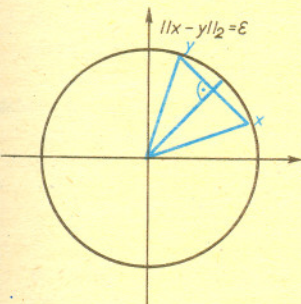
$$A(a, b, \alpha) = \{x : \|x - x_0\| = r\}.$$



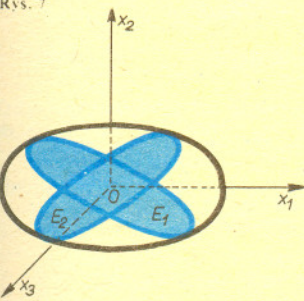
Rys. 5



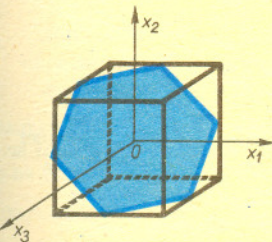
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Teraz podamy parę uwag związanych z drugą częścią problemu.

1. Rozważmy przypadek $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$. Ciałem cechującym tę normę jest sześcian

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1\}.$$

Niech P_0 będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt 0 przecinającą sześcian W , tak jak na rysunku 5. Punkty należące do zakreskowanego sześciokąta mają normę nie większą niż 1. Jeżeli weźmiemy dowolny rzut na płaszczyznę P_0 , to po zrzutowaniu co najmniej jeden z obrazów wierzchołków sześcianu będzie leżał na zewnątrz sześciokąta, a więc będzie miał normę większą od 1.

Zupełnie inaczej jest w przypadku $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$. Jeżeli weźmiemy rzut w kierunku prostopadłym do P_0 , to obraz każdego punktu ciała cechującego będzie leżał w zakreskowanej części płaszczyzny P_0 , a więc będzie miał normę nie większą niż 1.

Okazuje się, że dla $k \geq 3$ następujące warunki są równoważne:

(A) W jest ciałem cechującym w \mathbb{R}^k ograniczonym elipsoidą,

(B) dla każdej podprzestrzeni $P_0 \subset \mathbb{R}^k$ istnieje taki rzut π na P_0 , że $p_W(\pi(x)) \leq 1$ dla dowolnych $x \in W$.

2. Dla ciała cechującego W i $\varepsilon > 0$ określamy

$$\omega_W(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - p_W \left(\frac{x+y}{2} \right) : p_W(x) = p_W(y) = 1, p_W(x-y) = \varepsilon \right\}.$$

Liczbę tę nazywamy ε — modułem wypukłości ciała cechującego W .

W przypadku przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ mamy $\omega_W(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}$ dla $\varepsilon > 0$

(rys. 7), stąd $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{8}$. Gdy W jest ciałem cechującym ograniczonym elipsą, to można

wykazać, że istnieją stałe dodatnie M i m takie, że $m \leq \frac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leq M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Okazuje się, że do warunków (A) i (B) można dodać jeszcze jeden im równoważny:

(C) istnieją stałe $m > 0$ i $M > 0$ takie, że $m \leq \frac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leq M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

3. Rozważmy ciało cechujące W w \mathbb{R}^3 ograniczone elipsoidą. Przekroje podprzestrzeniami dwuwymiarowymi P_1 i P_2 ciała W są zbiorami ograniczonymi przez elipsy E_1 i E_2 (rys. 8). Istnieje afiniczne odwzorowanie $\Phi: P_1 \xrightarrow{\text{na}} P_2$ takie, że $\Phi(E_1) = E_2$. Możemy więc powiedzieć, że każde dwa przekroje ciała cechującego W są afinicznie równoważne.

Inaczej jest w przypadku, gdy ciałem cechującym jest sześcian. Na rysunku 9 pokazane są dwa przekroje, które nie są afinicznie równoważne.

Okazuje się, że także następujący warunek

(D) każde dwa przekroje ciała cechującego W podprzestrzeniami dwuwymiarowymi są afinicznie równoważne jest równoważny warunkowi (A).

Problem postawiony powyżej można uogólnić w następujący sposób: Niech W będzie ciałem cechującym położonym w przestrzeni \mathbb{R}^k . Przypuśćmy, że każde dwa przekroje W przestrzeniami l -wymiarowymi ($1 < l < k$) są afinicznie równoważne. Czy W jest wtedy ciałem cechującym ograniczonym elipsoidą? Pełnej odpowiedzi na to pytanie nie znamy. nierozstrzygnięty przypadek dotyczy sytuacji, w której k jest parzyste, a $l = k - 1$ (np. $k = 4$ i $l = 3$). W pozostałych przypadkach odpowiedź jest pozytywna.

Na zakończenie sformułujemy jeszcze pewną własność charakteryzującą kulę (a nie elipsoidę!) w \mathbb{R}^3 . Własność tę łatwo sformułować w języku fizyki. Niech W będzie ciałem cechującym w \mathbb{R}^3 wykonanym np. z żelaza, mającym tę własność, że jakkolwiek postawimy je na stole, będzie to położenie równowagi. Wówczas W jest kulą. Zauważmy, że położenie W na stole można traktować jako zanurzenie W w cieczy o gęstości równej ∞ . Można więc postawić ogólniejszy problem: ciało cechujące W ma tę własność, że każda pozycja zanurzenia jego w cieczy jest pozycją równowagi. Czy W jest kulą? Odpowiedź nie jest znana do dzisiaj.

I już zupełnie na koniec autor ma następujące pytanie do Czytelnika: Jak sformułować powyższą własność (tj. tę ze stołem) w języku matematyki?

Doc. dr Kazimierz RZAŻEWSKI

Przyzwyczajiliśmy się już do pojęcia fotonu. Foton to najmniejsza porcja promieniowania elektromagnetycznego. Znajdujemy fotony w tabelach cząstek elementarnych obok elektronów, protonów, mezonów π itp.

Jeśli fotony to „porządne” cząstki, to powinny się dać zliczać podobnie jak elektrony czy protony. Gdy patrzymy na zdjęcia torów cząstek naładowanych w emulsjach jądrowych lub komorach pęcherzykowych, nie mamy wątpliwości, że wytworzone one zostały przez pojedyncze cząstki. Jeśli na przykład tory te są zakrzywione w polu magnetycznym, to bez trudu można potwierdzić właściwy stosunek ładunku do masy cząstki wytwarzającej ślad.

Zaledwie kilka lat temu rozwinięto doświadczalną technikę tak zwanych pułapek jonowych. Za jej pomocą udało się niemieckiemu fizykowi Toschkowi (RFN) złapać w taką pułapkę pojedynczy jon baru i utrzymać go przez wiele godzin. Jego obecność w pułapce stwierdza się analizując światło fluorescencji wysyłanej przez taki jon oświetlany laserem. Posługując się techniką pułapek jonowych można dziś prowadzić doświadczenia z udziałem małej i dokładnie określonej liczby jonów.

Czy można przygotować stan pola elektromagnetycznego tak, by była w nim dokładnie określona liczba fotonów? Jeśli tak, to jak się przekonać, że mamy do czynienia z takim właśnie stanem?

Otóż wszystkie znane sposoby wykrywania fotonów polegają na ich pochłanianiu. Nawet gdyby udało się wytworzyć stan pola zawierający dokładnie N fotonów, to nie jest łatwe wykazanie tego za pomocą prostego pomiaru.

Gdybyśmy próbowali ustalić liczbę elektronów znajdujących się w bardzo małej objętości (o rozmiarach rzędu 10^{-29}cm^3 — niezbyt istotne ograniczenie z praktycznego punktu widzenia), to, wedle relatywistycznej elektrodynamiki kwantowej, natrafilibyśmy także na trudności. Otóż w procesie takiego pomiaru mogą się tworzyć pary elektron-pozyton i pojęcie liczby elektronów traci sens. Pozostaje jednak wciąż pojęcie całkowitego ładunku w takiej małej objętości.

Wyobraźmy sobie „pułapkę na fotony”. Taką pułapką może być układ zwierciadeł, lub prościej — puszka metalowa. Fotony nie mogą wydostać się z wnętrza puszek, gdyż odbijane są od metalicznej powierzchni do wewnątrz. Taką metalową puszkę nazywa się wnęką rezonansową. Aby wnęka była dobrą „pułapką fotonową”, materiał odbijający promieniowanie musi być tak dobrany, aby pochłanianie promieniowania przy odbiciu było możliwie małe. Najlepsze wnęki rezonansowe wykonane są z niobu i utrzymywane w bardzo niskiej temperaturze tak, że materiał ścianek pozostaje w stanie nadprzewodnictwa. Nawet takie wnęki nie są jednak doskonałe. Promieniowanie ucieka z nich. Dobroć wnęki mierzymy stosunkiem czasu życia promieniowania we wnęcie do okresu drgań pola. Najlepsze wnęki w obszarze fal milimetrowych mają dziś dobroć $Q \sim 10^6$. Dla doświadczeń trwających znacznie krócej niż milion okresów taka wnęka zachowuje się więc jak doskonała.

We wnęcie rezonansowej o zadanych rozmiarach i kształcie mogą istnieć jedynie drgania pola o szczególnych konfiguracjach oraz dyskretnym ciągu częstości. Mówimy o zbiorze tak zwanych modów własnych wnęki. Wyobraźmy sobie dla uproszczenia, że w naszym myślowym doświadczeniu występować będą fotony jednego tylko typu — obsadzony będzie tylko jeden mod własny wnęki.

Pomówmy teraz o możliwym delikatnym detektorze fotonów. Idealnym detektorem mógłby być niewzbudzony atom wpadający do naszej wnęki. Taki atom wylatujący z wnęki może być w stanie wzbudzonym w wyniku pochłonięcia fotonu. Nie wnikając w szczegóły możemy przyjąć, że wylatujący z wnęki atom wpada do urządzenia pomiarowego stwierdzającego, czy jest on wzbudzony czy nie.

Oczywiście, wszystkim tym rządzi mechanika kwantowa i nie sposób w takim pojedynczym doświadczeniu przewidzieć, czy wylatujący atom jest wzbudzony czy nie. Należy wykonać bardzo wiele doświadczeń polegających na: a) przygotowaniu tego samego stanu pola we wnęcie, b) przelocie atomu-detektora, c) analizie stanu końcowego atomu.

Rezultatem jest jedna liczba $0 < P_1 < 1$ — prawdopodobieństwo wzbudzenia. Dobry detektor powinien być liniowy. To znaczy, że jeśli we wnęcie było dokładnie N fotonów, to P_1 powinno być proporcjonalne do N

$$(1) \quad P_1 = C_1 \cdot N.$$

Tak może być tylko wówczas, gdy $C_1 \cdot N \ll 1$. W przeciwnym razie pojawiają się zjawiska nasycenia. Stałą proporcjonalności C_1 można wyznaczyć na drodze teoretycznej.

Czy pomiar P_1 dowodzi, że we wnęcie było $N = P_1/C_1$ fotonów? Nie. Opisany przez nas pomiar wyznacza jedynie średnią liczbę fotonów we wnęcie. Aby powiedzieć coś więcej o rozkładzie prawdopodobieństwa liczby fotonów we wnęcie, należy wprowadzić przynajmniej jeszcze jeden atom-detektor. Niech to będzie atom jakiegoś innego pierwiastka. Gdybyśmy go użyli, to dostalibyśmy jakiś inny pomiar średniej liczby fotonów.

$$(2) \quad P_2 = C_2 \cdot N.$$

Rozważmy teraz pomiar koincydencyjny: zapytajmy, jakie jest prawdopodobieństwo jednoczesnego pochłonięcia fotonu przez detektor 1 oraz detektor 2. Niech to zmierzone prawdopodobieństwo będzie równe P_{12} . Wprowadza się wówczas współczynnik korelacji pola we wnęcie następującym wzorem

$$(3) \quad g^{(2)} = P_{12}/(P_1 \cdot P_2);$$

$g^{(2)} = 1$ oznacza, że oba detektory reagują niezależnie. Jeżeli we wnęcie byłoby dokładnie N fotonów, to teoria przewiduje

$$(4) \quad P_{12} = C_1 \cdot C_2 \cdot N \cdot (N-1),$$

a zatem dla stanu N -fotonowego

$$(5) \quad g^{(2)} = 1 - \frac{1}{N}.$$

Rezultat (4) ma dosyć proste wytłumaczenie intuicyjne. Otóż, jeśli jeden z detektorów absorbuje jeden spośród N fotonów, to drugiemu pozostaje pochłonięcie jednego z $N-1$ pozostałych.

Dla bardzo małych N współczynnik korelacji $g^{(2)}$ dany wzorem (5) jest istotnie mniejszy od jedności. Oczywiście widzimy, że gdy N jest bardzo duże, to oba detektory reagują zupełnie niezależnie, choć dokonują pomiaru jednocześnie.

Może się wydać zaskakujące, że nawet przy bardzo małej średniej liczbie fotonów N są stany pola, dla których $g^{(2)} = 1$, to znaczy istnieją bardzo słabo wzbudzone stany pola o tej własności, że obecność jednego pochłaniającego detektora nie wpływa na reakcje drugiego. Są to tak zwane stany koherentne. Jeśli przyjąć intuicyjne wyjaśnienie rezultatu (4) dla stanu N -fotonowego, to własności stanów koherentnych mogą się wydać paradoksalne. Różnice między własnościami stanu N -fotonowego a stanu koherentnego zilustrować można następującą analogią:

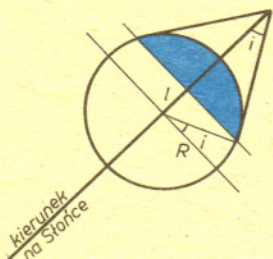
Wyobraźmy sobie, że umiemy różniczkować, ale tylko funkcje będące potęgami zmiennej x , więc funkcje postaci x^n . Uważalibyśmy

wówczas, że operacja różniczkowania d/dx ma własności „destrukcyjne”. Jej działanie obniża potęgę jednomianu. Operacja różniczkowania zastosowana do skończonej kombinacji różnych potęg zmiennej x , to znaczy do wielomianu, też obniża jego stopień. Po skończonej liczbie różniczkowań zniszczeniu ulega wszystko. Rezultatem jest zero. Oczywiście funkcja x^n to jakby stan n -fotonowy, a operacja różniczkowania to operacja pomiaru powiązana z pochłonięciem fotonu. Pomiar koincydencyjny to ... druga pochodna. Nawet współczynnik się zgadza! Przecież

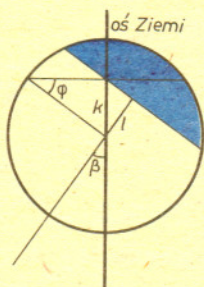
$$(6) \quad \frac{d^2}{dx^2} (x^n) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Czy nasza analogia daje się rozszerzyć na stany koherentne? Tak. Znamy funkcję wykładniczą, która nie ulega zmianie w wyniku różniczkowania. To właśnie funkcja wykładnicza reprezentuje w naszej analogii stan koherentny, a potęgowa — stan o określonej liczbie fotonów.

Przedstawiona tu analogia jest znacznie głębsza niż mogłoby się wydawać. Wiąże się ona blisko z bardzo użyteczną w kwantowym opisie stanów pola tak zwaną reprezentacją Bargmanna.



Odległość l płaszczyzny terminatora od środka Ziemi jest równa $R \sin i$.



Szukamy takiego kąta β , żeby płaszczyzna terminatora przecinała rzut równoleżnika odpowiadającego szerokości geograficznej φ na połowę. Jeżeli przez k oznaczymy odległość płaszczyzny

równoleżnika od środka Ziemi, $k = R \sin \varphi$, to $\cos \beta = \frac{l}{k} = \frac{\sin i}{\sin \varphi}$.

β jest kątem między osią Ziemi a kierunkiem na Słońce, jest on związany z deklinacją Słońca wzorem $\beta = 90^\circ + \delta$. Jeżeli wprowadzimy taki układ współrzędnych, w którym oś X skierowana jest w stronę punktu Wagi, oś Y jest prostopadła do niej i leży w płaszczyźnie orbity Ziemi, a oś Z jest prostopadła do płaszczyzny orbity, to wektor kierunkowy osi Ziemi $v = (0, \sin \epsilon, \cos \epsilon)$, a wektor kierunkowy leżący na prostej Słońce-Ziemia to $u = (\cos \mu, \sin \mu, 0)$, gdzie μ jest kątem w płaszczyźnie orbity Ziemi, liczonym od osi X ($\mu = \alpha - 180^\circ$, α jest tu rektascensją Słońca).

Zatem $\cos \beta = u \cdot v = \sin \epsilon \sin \mu$, czyli $\mu = \arcsin \left(\frac{\sin i}{\sin \varphi \sin \epsilon} \right)$,

o taki kąt powinna przemieścić się Ziemia na orbicie w stosunku do punktu równonocy, żeby na danej szerokości geograficznej φ nastąpiło zrównanie dnia z nocą.

Czas na uwagi końcowe:

1. Od wielu lat dokonuje się pomiarów współczynnika korelacji $g^{(2)}$, choć nieco inaczej niż w opisany tu, wyidealizowany sposób. Bardzo często okazuje się, że $g^{(2)} = 1$, a bliższe badania potwierdzają, że mamy do czynienia ze stanem koherentnym. W istocie każdy dobrze stabilizowany laser o pracy ciągłej wytwarza pole elektromagnetyczne bardzo bliskie idealnemu stanowi koherentnemu.

2. Zjawisko $g^{(2)} < 1$, tak jak dla stanu N -fotonowego, nosi nazwę antygrupowania i od lat trwają próby odkrycia go. Próby te przyniosły częściowy sukces. W dwóch laboratoriach: w Rochester (USA) L. Mandel ze współpracownikami oraz w Monachium (RFN) H. Walther ze współpracownikami otrzymali wyniki zgodne z warunkiem $g^{(2)} < 1$.

3. Współczynnik korelacji może być także większy od jedności. Mówimy wówczas o grupowaniu fotonów. Bardzo powszechnie spotykany stan pola — stan równowagi cieplnej — ma $g^{(2)} = 2$. To także dosyć łatwo daje się zmierzyć.

Kiedy zaczyna się jesień?

Zwykle spotykacie się z jedną z dwóch odpowiedzi: (a) jesień zaczyna się w dniu równonocy we wrześniu lub (b) z chwilą przejścia Słońca przez punkt wyznaczony przez przecięcie płaszczyzny ekliptyki z płaszczyzną równika (tzw. punkt Wagi) — 23 września. Choć każde z określeń odwołuje się do innego zjawiska, ich równoważność wydaje się oczywista, przecież w momencie przejścia przez punkt Wagi Słońce świeci prostopadle do osi ziemskiej: powinno wówczas oświetlać dokładnie połowę każdego równoleżnika. Czy wobec tego 23 września dzień i noc trwają równie długo? Okazuje się, że dzień 23 września jest o kilka minut dłuższy od następującej po nim nocy, a zrównanie dnia z nocą przypada 26 września — możecie to łatwo sprawdzić obserwacyjnie lub zajrzeć do kalendarza podającego godziny wschodu i zachodu Słońca. Rozbieżność tę powodują występowanie refrakcji oraz duże rozmiary Słońca. Oba czynniki dodają się sprawiając, że Słońce oświetla zawsze więcej niż połowę powierzchni Ziemi, a cień za Ziemią ma kształt stożka, a nie walca, jak się zwykle zakłada. Kąt i — między wysokością i tworzącą stożka wynosi $i \approx 50'$. Jeżeli Słońce oświetla więcej niż połowę powierzchni Ziemi, oznacza to, że gdy świeci ono prostopadle do osi ziemskiej, dzień musi być dłuższy od nocy. Wyrównanie długości dnia i nocy dla danej szerokości geograficznej występuje więc o kilka dni później. Opóźnienie t zrównania dnia z nocą w stosunku do początku astronomicznej jesieni opisuje wzór

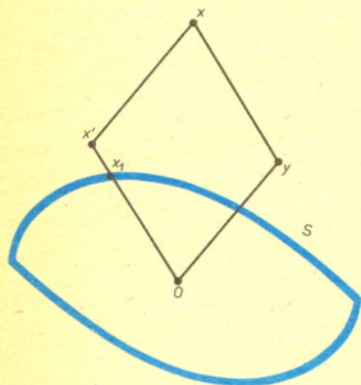
$$\frac{2\pi}{T} t = \arcsin \left(\frac{\sin i}{\sin \varphi \sin \epsilon} \right),$$

gdzie φ — szerokość geograficzna, $\varphi \neq 0$, T — okres obiegu Ziemi wokół Słońca, ϵ — kąt między płaszczyzną ekliptyki i płaszczyzną równika. Podstawiając dane np. dla Warszawy $\varphi \approx 52^\circ$ i wiedząc, że $\epsilon = 23^\circ 27'$ otrzymujemy $t = 2,7$ dnia. Wymieniony wyżej wzór można stosować tylko dla takich kątów φ , że $\sin \varphi \geq \sin i / \sin \epsilon$, dla mniejszych φ dzień jest zawsze dłuższy od nocy!

A.M.

Inna odległość, inna geometria

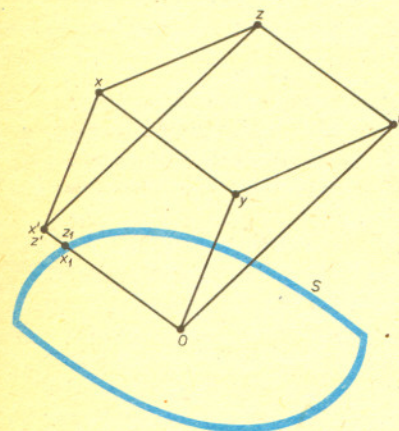
Narysujmy dowolną krzywą płaską zamkniętą S , mocno wypukłą i mającą środek symetrii, np. taką jak na rysunku. Mocno wypukła to taka, której każda cięciwa w całości (poza końcami) zawiera się w ograniczonym z obszarów, na które tą krzywą rozcina płaszczyznę (krzywa nie zawiera odcinków).



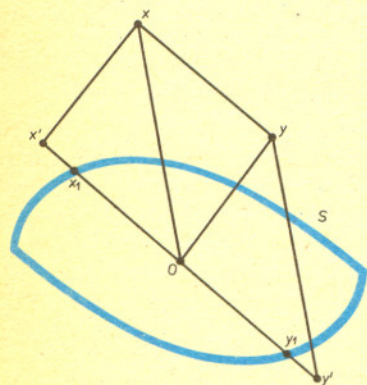
Oznaczmy jej środek przez o . Dla dowolnych dwóch punktów x, y płaszczyzny niech

$$\varrho_S(x, y) = \frac{x'o}{x_1o},$$

gdzie $xyox'$ jest równoległobokiem, a punkt x_1 to przecięcie półprostej ox' z S .



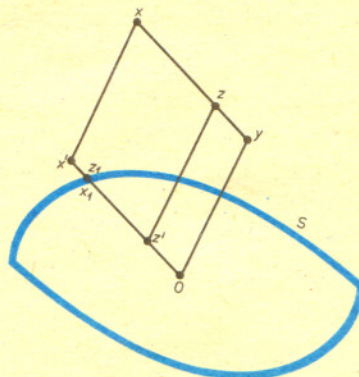
Zauważmy, że funkcja ϱ_S jest przesuwalna, to znaczy jeśli $xytz$ jest równoległobokiem, to $\varrho_S(x, y) = \varrho_S(z, t)$.



Mamy też

$\varrho_S(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$, a z posiadania przez S środka symetrii wynika, że

$$\varrho_S(x, y) = \varrho_S(y, x).$$



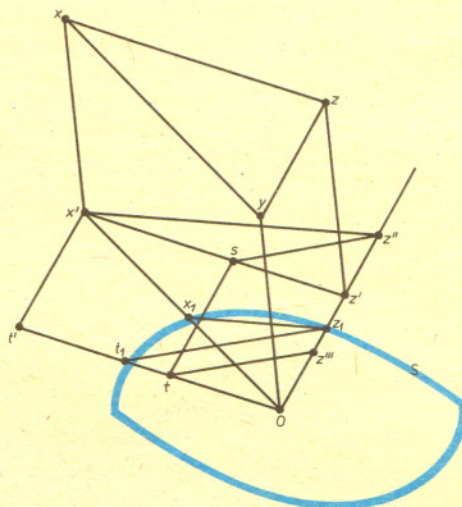
Łatwo zauważyć, że: (*) jeśli z jest punktem odcinka xy , to

$$\varrho_S(x, z) + \varrho_S(z, y) = \varrho_S(x, y).$$

Istotnie, wynika to z oczywistej równoważności

$$xz + zy = xy \leftrightarrow \frac{x'z'}{x_1o} + \frac{z'o}{x_1o} = \frac{x'o}{x_1o}$$

i z przesuwalności funkcji ϱ_S .



Jeśli natomiast z nie jest punktem odcinka xy , to

$$\varrho_S(x, z) + \varrho_S(z, y) > \varrho_S(x, y).$$

Gdy z jest punktem prostej xy , wynika to natychmiast z (*).

Niech więc z nie leży na prostej xy . Dorysujemy kilka punktów

z' : leży na półprostej oz_1 i $z'x' \parallel x_1z_1$,

z'' : leży na półprostej oz_1 i $z'' = z'z'$,

t' : $t'x'z'o$ jest równoległobokiem,

t_1 : przecięcie półprostej ot' z S ,

s : leży na prostej $x'z'$ i $sz'' \parallel t_1z_1$,

t : $tsz''z'''$ jest równoległobokiem.

Zauważmy, że $\varrho_S(x, y) = \varrho_S(x', o) = \varrho_S(z'', o)$, gdyż z

twierdzenia Talesa mamy $\frac{x'o}{x_1o} = \frac{z''o}{z_1o}$.

Wobec tego twierdzenie jest dowiedzione, gdy z' leży poza odcinkiem oz'' , bo wówczas $\varrho_S(z, y) > \varrho_S(x, y)$. Niech więc z' będzie punktem odcinka oz'' . Wówczas, wobec mocnej wypukłości S , mamy

$$\ast t_1z_1o < \ast z_1x_1o,$$

a więc punkt s jest punktem odcinka $x'z'$. Ponieważ (znow z twierdzenia Talesa) $\rho_S(z', z'') = \rho_S(o, z'') = \rho_S(o, t) = \rho_S(z', s) < \rho_S(z', x') = \rho_S(x, z)$, więc

$$\rho_S(x, z) + \rho_S(z, y) > \rho_S(z', z'') + \rho_S(o, z') = \rho_S(o, z'') = \rho_S(x, y).$$

Wszystkie dotychczas ustalone własności ρ_S mówią, że

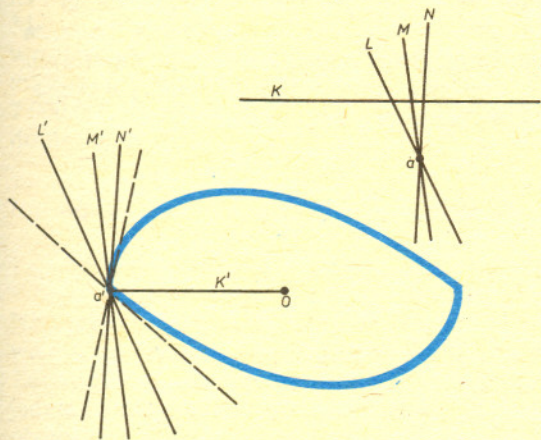
1° jest ona metryką (czyli sposobem mierzenia odległości) na płaszczyźnie,

2° jest przesuwalna,

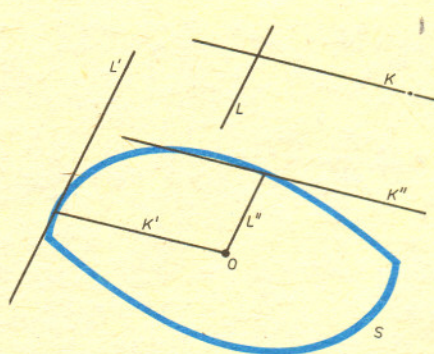
3° proste metryczne są zwykłymi prostymi (w dowolnie ustalonej metryce ρ prosta metryczna wyznaczona przez punkty a i b , to zbiór wszystkich punktów spełniających warunek $\rho(ax) + \rho(xb) = \rho(ab)$ lub $\rho(xa) + \rho(ab) = \rho(xb)$ lub $\rho(ab) + \rho(bx) = \rho(ax)$).

Jest to przykład metryki Minkowskiego, przy czym nie każda metryka Minkowskiego ma własność 3° (porównaj artykuł Z. Sawonia, a zwłaszcza przykłady z kwadratami).

Metryka, w szczególności ρ_S , określa na płaszczyźnie geometrię. Pokażemy, że geometria wyznaczona przez obraną przez nas krzywą S różni się od geometrii euklidesowej.



W przestrzeni metrycznej mówimy, że prosta K przechodząca przez punkt p i przecinająca prostą L w punkcie q jest prostopadła do L ($K \perp L$), gdy odcinek pq jest najkrótszym spośród odcinków łączących p z L (mierzymy oczywiście za pomocą obranej metryki). Na rysunku widać, że prosta K jest prostopadła do każdej z prostych L, M, N , mimo że wszystkie one przechodzą przez punkt a (prostopadła w sensie metryki ρ_S).



Kolejny rysunek pokazuje, że z $K \perp L$ nie wynika $L \perp K$ (znow w sensie metryki ρ_S). Warto też zobaczyć, jak w przestrzeni z naszą metryką wyglądają różne figury. Czytelniku, spróbuj narysować trójkąt równoboczny, kwadrat i okrąg.

Można udowodnić, że geometria wyznaczona przez krzywą S jest geometrią euklidesową (czyli są w niej takie same twierdzenia) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest elipsą. W szczególnym przypadku, gdy S jest okręgiem jednostkowym, ρ_S jest zwykłą odległością.

dr hab. Marek KORDOS



Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 406. W czworoboku $ABCD$ wszystkie pary przeciwległych krawędzi są wzajemnie prostopadłe. Udowodnić, że środki wszystkich krawędzi leżą na jednej sferze.

Rozwiązanie na str. 16

M 407. Niech a i d będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że w ciągu arytmetycznym $a, a+d, a+2d, \dots$ istnieje nieskończenie wiele liczb mających takie same dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie na str. 16

M 408. W okręgu o promieniu 1 dana jest pewna liczba cięciw. Wykazać, że jeśli każda średnica przecina co najwyżej k cięciw, to suma długości wszystkich cięciw jest mniejsza od $k\pi$.

Rozwiązanie na str. 2

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 178. W stanie nieważkości unoszą się w zamkniętym naczyniu dwie jednakowe krople cieczy. Ciecz jest w równowadze termodynamicznej z własną parą nasyconą. Jakie zmiany zachodzą będą w układzie?

Rozwiązanie na str. 15

F 179. Co nastąpi po połączeniu rurką dwóch jednakowych baniek mydlanych?

Rozwiązanie na str. 14

mata delta

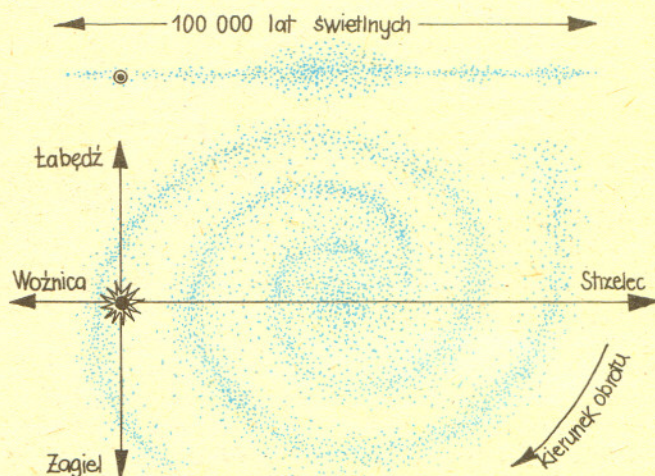
Galaktyka i galaktyki

Ile gwiazd jest na niebie? Jak daleko są od nas? Jak się poruszają? Odpowiedzi na te i podobne pytania szukali astronomowie dość długo i dopiero nieco ponad 50 lat temu pogląd na te sprawy się ustalił.

W 1838 roku stwierdzono, że najbliższa Słońcu gwiazda alfa Centaura, znajduje się w odległości, którą światło (poruszające się z prędkością 300 000 km/s) pokonuje w ponad 4 lata — mówimy, że alfa Centaura znajduje się w odległości ponad czterech lat świetlnych. Takie też są w przybliżeniu odległości między dwiema dowolnymi sąsiadującymi gwiazdami.



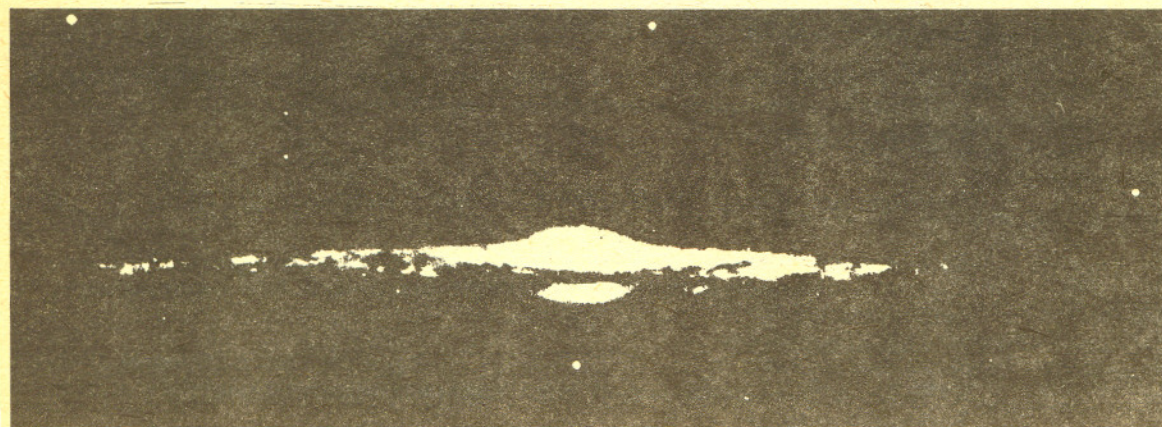
Galaktyka spiralna widziana z kierunku prostopadłego do jej płaszczyzny.



Szkic budowy naszej Galaktyki

Naprawdę jednak gwiazdy nie są rozmieszczone w przestrzeni równomiernie. Przede wszystkim tworzą one ogromny dysk o promieniu 50 000 lat świetlnych z niemal kulistym jądrem, gdzie gwiazdy upakowane są najgęściej. Cały ten system liczący 200 000 000 000 gwiazd nazywamy Galaktyką. Słońce leży w dysku galaktycznym w odległości 30 000 lat świetlnych od centrum Galaktyki. Domyślmy się, że patrząc w płaszczyźnie dysku musimy widzieć dużo więcej gwiazd niż w kierunku do niej prostopadłym.

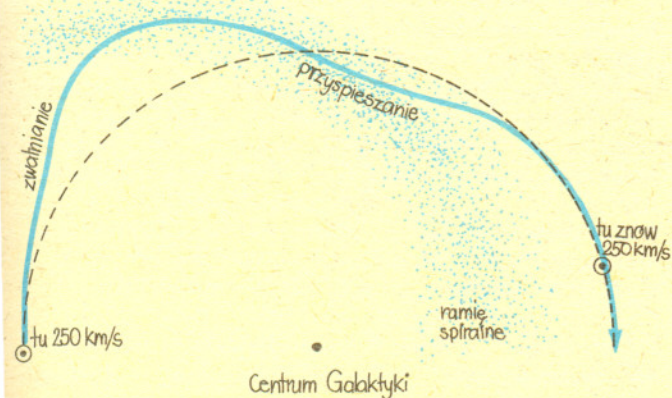
I rzeczywiście tak jest — w płaszczyźnie Galaktyki widzimy tyle gwiazd, że zlewają się one w świetlistą smugę widoczną w pogodne noce jako Droga Mleczna.



Galaktyka spiralna widziana z krawędzi.

W samym dysku galaktycznym gwiazdy również nie są rozmieszczone równomiernie i tworzą tzw. ramiona spiralne — mówimy, że nasza Galaktyka jest typu spiralnego. Jest to najczęściej spotykany typ galaktyk. Bo trzeba wiedzieć, że poza naszą we Wszechświecie, znajduje się nieprzebrana ilość innych galaktyk, ciągnących się tak daleko, jak sięgają największe teleskopy. Choć najbliższe i najjaśniejsze z nich obserwowane były od dawna, to nie znana była ich prawdziwa natura. Stało się to jasne dopiero w 1925 roku, gdy za pomocą największego wówczas teleskopu udało się w najbliższych galaktykach rozróżnić poszczególne gwiazdy. Gołym okiem możemy widzieć na niebie tylko jedną galaktykę. Jest nią Wielka Mgławica w Andromedzie widoczna w jesienne wieczory wysoko na niebie w postaci małej, słabej mgiełki. Jest ona oddalona od nas „zaledwie” o 2 000 000 lat świetlnych i najpewniej bardzo podobna do naszej Galaktyki.

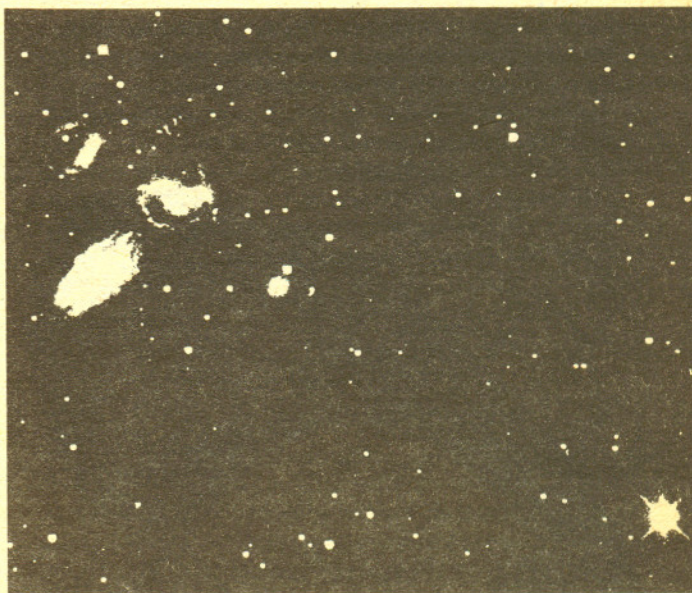
Nietrudno domyśleć się, że płaski kształt ogromnej większości galaktyk jest skutkiem ich obracania się. Zazwyczaj główna masa galaktyki skupiona jest w jądrze i dlatego gwiazdy dysku (ramion spiralnych) obiegają je podobnie jak planety obiegają Słońce — gwiazdy położone bliżej jądra obiegają je szybciej, zaś bardziej oddalone — wolniej. Słońce na przykład pędzi w kierunku gwiazdozbioru Łabędzia z prędkością 250 km/s wykonując jeden obieg w 250 000 000 lat. Widzimy, że np. od czasów powstania Układu Słonecznego Słońce wraz z nim wykonało do dziś około 20 obiegów wokół centrum Galaktyki. Natomiast sama struktura spiralna porusza się inaczej — obraca się niemal sztywno wokół jądra i wolniej niż jakiegokolwiek gwiazdy. Poszczególne gwiazdy doganiają ramiona spiralne od ich wewnętrznej strony, poprzez ramiona poruszają się wolniej (dlatego ramiona są stosunkowo gęsto wypełnione gwiazdami) i po jakimś czasie opuszczają je znowu zwiększając prędkość. W rezultacie ramiona spiralne zbudowane są z coraz to innych gwiazd; są wędrującymi zagęszczeniami w dysku galaktycznym.



Charakter zmian prędkości gwiazd (na przykładzie Słońca) przy przechodzeniu przez ramię spiralne Galaktyki.

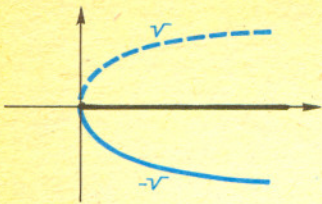


Wielka Mgławica w Andromedzie — najbliższa naszej galaktyka spiralna.

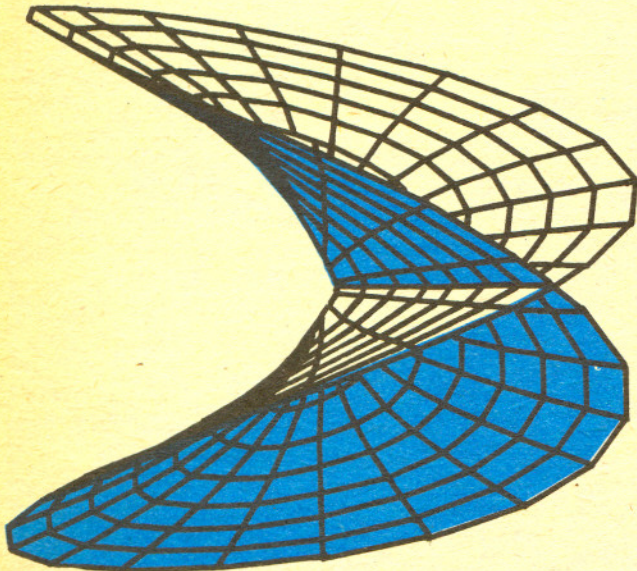


Gromada galaktyk

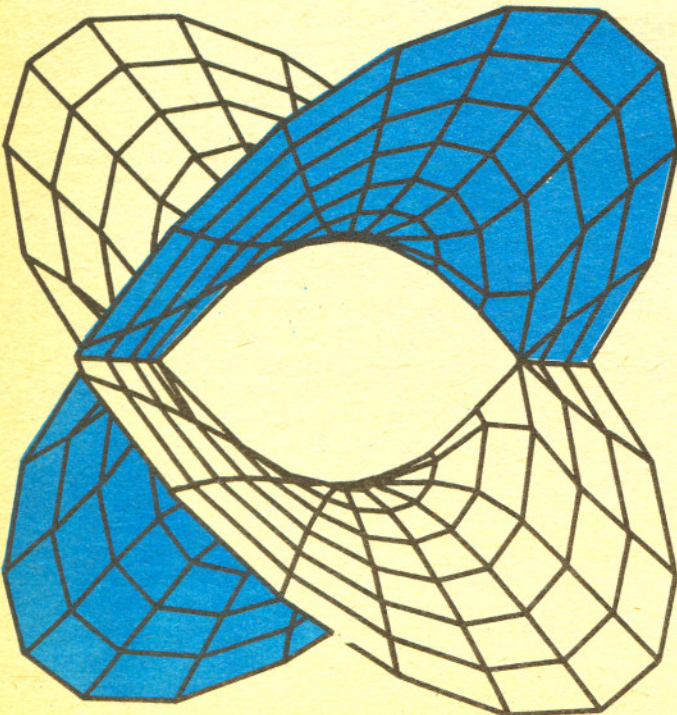
Dr Ryszard KOPIECKI



Rys. 1



Powierzchnie Riemanna powinniśmy rysować w przestrzeni czterowymiarowej, lecz tego nie potrafimy. Ich własności geometryczne można jednak poznać rysując w przestrzeni trójwymiarowej wykresy odpowiednich wieloznacznych funkcji rzeczywistych. W przypadku pierwiastka można rozpatrywać funkcję $z \rightarrow \operatorname{Re} \sqrt{z} + \operatorname{Im} \sqrt{z}$, gdzie ostatnia suma oznacza sumę wartości części rzeczywistej i urojonej pochodzących od tej samej gałęzi pierwiastka. Należy pamiętać, że otrzymana powierzchnia nie przecina się ze sobą, czego nie można było uniknąć na rysunku. Jednokrotne obiegnięcie wokół zera przenosi nas z jednego poziomu na drugi.



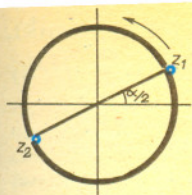
Oprócz operacji jednoznacznych (funkcji) występują w matematyce operacje wieloznaczne, dające dla ustalonej wartości argumentu nie jeden, lecz wiele wyników. Najprostszym przykładem takiej operacji jest pierwiastkowanie. Dla prostoty będziemy rozpatrywać pierwiastek kwadratowy. W przypadku liczb rzeczywistych wiemy, że dla każdej liczby dodatniej a istnieją dwa jej pierwiastki kwadratowe, czyli liczby rzeczywiste spełniające równanie $x^2 - a = 0$; oznaczamy je $-\sqrt{a}$, \sqrt{a} . Ten sam fakt ma miejsce, gdy a jest liczbą zespoloną (różną od zera) i rozpatrujemy rozwiązania tego równania w liczbach zespolonych.

Istnieje jednak istotna różnica między przypadkiem rzeczywistym i zespolonym. Pierwiastki rzeczywiste różnią się znakiem. Pozwala to łatwo związać z operacją pierwiastkowania dwie funkcje ciągłe, tzw. gałęzie, określone na zbiorze liczb nieujemnych. Jedną z nich jest niedodatnia ($-\sqrt{}$), a druga nieujemna ($\sqrt{}$) (rys. 1). I mimo że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa i jako taka nie może mieć funkcji odwrotnej, to jednak obie wydzielone gałęzie, $-\sqrt{}$ i $\sqrt{}$, są do niej odwrotne w tym sensie, że gdybyśmy dla dowolnej liczby nieujemnej obliczyli wartość którejkolwiek z nich i uzyskany wynik podnieśli do kwadratu, to otrzymalibyśmy z powrotem tę samą liczbę (czyli dla każdej $x \geq 0$, $f(-\sqrt{x}) = x$ i $f(\sqrt{x}) = x$). Jeśli składamy te operacje w odwrotnej kolejności, tzn. najpierw podnoszenie do kwadratu, a później pierwiastkowanie, to by otrzymać z powrotem argument, musimy wybrać odpowiednią gałąź pierwiastka, $-\sqrt{}$ lub $\sqrt{}$, w zależności od tego czy podnosiliśmy do kwadratu liczbę ujemną, czy dodatnią (tylko dla zera wybór gałęzi nie wpływa na wynik). Jak w wyniku potęgowania umieścić informację pozwalającą wybrać odpowiednią gałąź pierwiastka? Najprościej jest obok wyniku umieścić wartość argumentu, tzn. zamiast funkcji $f(x) = x^2$ rozpatrywać przyporządkowanie $x \rightarrow (x, x^2)$, którego wartościami są pary liczb. Wówczas każda liczba dodatnia wystąpi na drugim miejscu dwukrotnie, raz w parze ze swoim pierwiastkiem ujemnym, raz z dodatnim. Funkcją odwrotną do takiego przyporządkowania jest rzutowanie na pierwszą oś $(x, x^2) \rightarrow x$. Zatem pierwiastkowanie byłoby operacją jednoznaczną (funkcją), gdyby je określić nie na zbiorze liczb nieujemnych (obrazie funkcji $f(x) = x^2$), lecz na zbiorze par postaci (x, x^2) (wykresie funkcji f , tj. paraboli $y = x^2$). Podnoszenie do kwadratu byłoby złożeniem dwóch funkcji $x \rightarrow (x, x^2) \rightarrow x^2$, z których druga jest rzutowaniem na drugą oś.

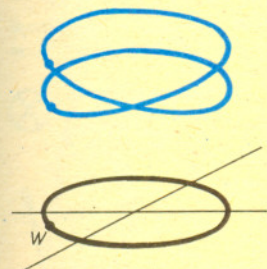
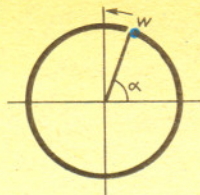
Przeniesienie dziedziny pierwiastkowania z półprostej na parabolę $x^2 - y = 0$ oznacza jakby podwojenie wszystkich argumentów (z wyjątkiem zera). Dopiero na takim zbiorze pierwiastkowanie staje się operacją jednoznaczną (funkcją). Zauważyli to Bernard Riemann i Karl Weierstrass, matematycy niemieccy dziewiętnastego wieku, a ich spostrzeżenie stało się początkiem ważnej i pięknej teorii tzw. powierzchni Riemanna. Lecz wartość tych idei można ocenić dopiero wtedy, gdy rozpatrujemy operacje i funkcje określone na liczbach zespolonych.

Rozpatrzmy funkcję zespoloną $f(z) = z^2$ określoną na liczbach zespolonych ($z \in \mathbb{C}$). Jej wykresem jest zbiór wszystkich par liczb zespolonych postaci (z, z^2) , czyli powierzchnia określona równaniem $z^2 - w = 0$, leżąca w czterowymiarowej przestrzeni $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pierwiastkowanie jest teraz funkcją o wartościach

Powierzchnia wieloznacznej funkcji $z \rightarrow \operatorname{Re} \sqrt{z^2 - 1} + \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - 1}$, odpowiadająca powierzchni Riemanna funkcji $\sqrt{z^2 - 1}$. Punktami osobliwymi są -1 i 1 . Obiegnięcie każdego z nich z osobna powoduje przemieszczanie się w górę lub w dół, podczas gdy obiegnięcie obu tego nie powoduje.



Rys. 2

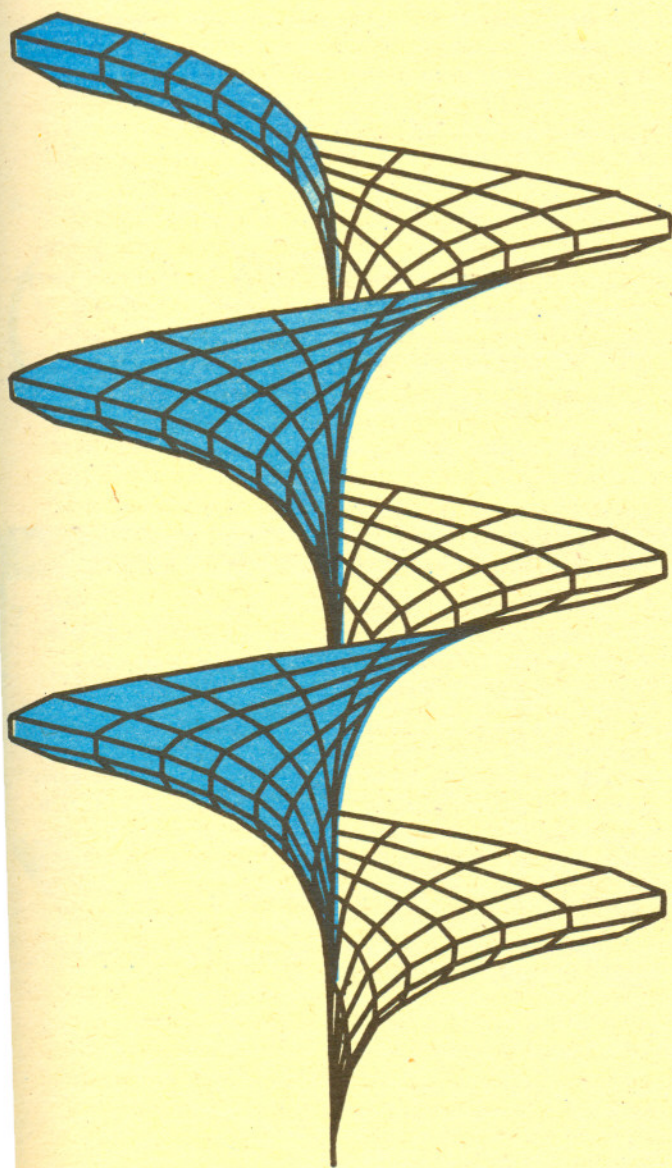


Rys. 3



Rys. 4

Rysunki powierzchni Riemanna wykonał Michał JANKOWSKI (Instytut Informatyki UW) na komputerze Mera 400.



Tak zazwyczaj wyobrażamy sobie powierzchnię Riemanna logarytmu. Rysunek przedstawia wieloznaczną funkcję rzeczywistą będącą sumą części rzeczywistej i urojonej logarytmu. Punkt 0 jest osobliwy, lecz nieco innego typu niż punkty 0, -1 i 1 w poprzednich przykładach. Obieganie po tej powierzchni zera w ustalonym kierunku nigdy nie spowoduje powrotu do punktu wyjściowego (taką osobliwość nazywamy osobliwością typu logarytmicznego).

zespolonych $(z, z^2) \rightarrow z$. Dla poznania jej własności potrzebna jest znajomość budowy powierzchni $z^2 - w = 0$. Niech $w \neq 0$ będzie liczbą zespoloną. We współrzędnych kartezjańskich możemy ją zapisać jako parę liczb postaci $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, gdzie $r = |w|$ jest jej odległością od zera oraz α jest kątem skierowanym, który tworzy wektor \vec{Ow} z półosią liczb rzeczywistych nieujemnych. Pierwiastki kwadratowe liczby w to liczby zespolone $z_1 = \left(\sqrt{r} \cos \frac{\alpha}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ i

$$z_2 = \left(\sqrt{r} \cos \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right), \sqrt{r} \sin \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right),$$

położone symetrycznie na okręgu o promieniu \sqrt{r} i środku w zerze. Gdy punkt w obiega okrąg o równaniu $|w| = r$, wówczas pierwiastki z_1 i z_2 poruszają się po okręgu $|z| = \sqrt{r}$ z prędkością kątową dwukrotnie mniejszą (rys. 2). Gdy w dokoną pełnego obrotu, punkty z_1 i z_2 wykonają po pół obrotu, czyli zamienią się miejscami. Po dwóch obrotach w punkty z_1 i z_2 powrócą na swoje miejsca. Uniemożliwia to rozróżnienie pierwiastków tak, jak to było możliwe w przypadku liczb rzeczywistych.

Budowa powierzchni $z^2 - w = 0$ staje się teraz zrozumiała. Nad każdym punktem w w płaszczyźnie zmiennej w leżą dwa punkty powierzchni, (z_1, w) i (z_2, w) , przy czym ich pierwsze współrzędne to pierwiastki kwadratowe liczby w . Gdy w przebiega okrąg $|w| = r$, punkty (z_1, w) i (z_2, w) poruszają się po pewnej pętli leżącej na rozpatrywanej powierzchni w ten sposób, że moduł pierwszej współrzędnej pozostaje stały, równy \sqrt{r} . Przedstawia to rysunek 3, przy czym należy pamiętać, że pętla ta nie ma punktów samoprzecięcia, gdyż dla każdej $w \neq 0$ istnieją dwa (różne) pierwiastki kwadratowe. Rozpatrując dowolne wartości $r > 0$ dochodzimy do wniosku, że powierzchnia $z^2 - w = 0$ składa się jakby z dwóch płatów, przeplecionych ze sobą w ten sposób, że aby przejść z jednego na drugi, trzeba obieć jednokrotnie punkt $w = 0$. Rysunek 4 pomaga to sobie wyobrazić, lecz należy pamiętać, że nasza powierzchnia nie przecina się ze sobą (punkty na kreskowanej linii należy rozdzielić) i takie położenie jej jest możliwe dopiero w przestrzeni czterowymiarowej, gdzie w istocie (jako wykres funkcji $f: C \rightarrow C$, $f(z) = z^2$) powinna być umieszczona.

Punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem powierzchni, którego druga współrzędna jest zero. Wyraża to własność, że jedynym pierwiastkiem zera jest zero. Jest też jedynym punktem, którego obieganie powoduje przemieszczenie się z jednego płata na drugi. Pod wieloma względami punkt ten różni się od pozostałych: jest osobliwy. Jego osobliwość powodowana jest faktem, że operacja pierwiastkowania nie jest różniczkowalna w zerze. Pomimo tego punkty osobliwe są bardziej interesujące od pozostałych (regularnych), gdyż więcej mówią o własnościach rozpatrywanej powierzchni.

Omówiliśmy budowę jednej z najprostszych powierzchni Riemanna, powierzchni pierwiastka kwadratowego. Można zapytać, co zyskaliśmy dzięki ujednocznieniu operacji wieloznacznych przenosząc ich dziedziny na skomplikowane powierzchnie. Przede wszystkim stały się funkcjami, które w punktach regularnych swoich powierzchni mają te same istotne własności co funkcje do nich odwrotne. Możemy wykonywać na nich wszystkie działania, jakie wykonujemy na funkcjach. Trudności w wykonaniu takich działań na operacjach wieloznacznych łatwo odczujemy próbując poprawnie zdefiniować np. sumę pierwiastków liczb zespolonych. Ponadto wciąż żywe idee Riemanna i Weierstrassa ułatwiły wprowadzenie do teorii funkcji metod geometrycznych, dzięki którym uzyskano szereg nowych i głębokich wyników.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1985

Przypominamy treść zadań:

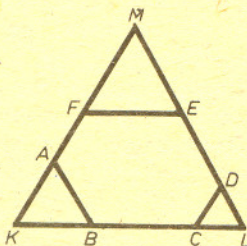
109. Znaleźć wszystkie wielomiany (jednej zmiennej) o współczynnikach równych ± 1 , mające wyłącznie pierwiastki rzeczywiste.

110. Dowiedź, że jeśli w sześciokącie wypukłym wszystkie kąty mają tę samą rozwartość, to sumy długości boków wychodzących z przeciwległych wierzchołków są równe.

109. Przypuśćmy, że wielomian $w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, w którym $|a_k| = 1$ ($k = 0, \dots, n$), $n \geq 2$, ma n pierwiastków rzeczywistych x_1, \dots, x_n (niekoniecznie różnych). Z wzorów Viète'a mamy $|\sum_{i=1}^n x_i| = |a_{n-1}| = 1$, $|\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j| = |a_{n-2}| = 1$, $|\prod_{i=1}^n x_i| = |a_0| = 1$.

Pierwszą z tych trzech równości podnosimy stronami do kwadratu wykorzystując równość drugą: $1 = (\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i > j} x_i x_j = \sum x_i^2 \pm 2$, a ponieważ $\sum x_i^2 \geq 0$, więc musi być $\sum x_i^2 = 3$. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb x_i^2 mamy zatem $3/n = \sum x_i^2/n \geq (\prod x_i^2)^{1/n} = |\prod x_i|^{2/n} = 1$, skąd $n \leq 3$. Gdy $n = 3$, nierówność przechodzi w równość, czyli wszystkie x_i^2 są równe: $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$; stąd i z równości $|\sum x_i| = 1$ wnosimy, że dwie spośród liczb x_1, x_2, x_3 równają się 1, a jedna -1 , lub odwrotnie. Daje to wielomiany trzeciego stopnia $\pm(x-1)^2(x+1) = \pm(x^3-x^2-x+1)$ oraz $\pm(x+1)^2(x-1) = \pm(x^3+x^2-x-1)$. Gdy $n < 3$, w jest wielomianem liniowym lub kwadratowym. Bezpośrednim sprawdzeniem przekonujemy się, że warunki zadania spełniają wielomiany $\pm(x^2-x-1)$, $\pm(x^2+x-1)$, $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$, ± 1 .

110. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym, w którym wszystkie kąty mają rozwartość 120° . Na bokach \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} , na zewnątrz sześciokąta, budujemy trójkąty równoboczne AKB , CLD , EMF (rysunek). Powstaje trójkąt równoboczny KLM .



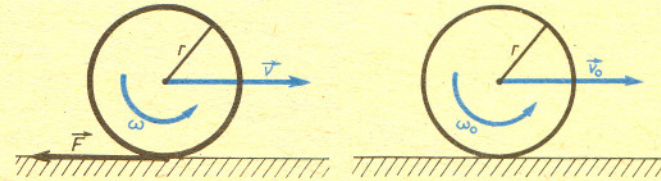
Pokażemy, że sumy długości boków sześciokąta wychodzących z wierzchołków B i E są równe: $AB+BC = KB+BC = KC = KL-CL = LM-LD = DM = DE+EM = DE+EF$.

7. Jednorodną, cienką obręcz o masie m i promieniu r wprowadzono w ruch ślizgowy po poziomym, płaskim podłożu z początkową prędkością środka masy v_0 , nadając jej jednocześnie prędkość kątową ω_0 wirowania w płaszczyźnie pionowej tak, jak to przedstawia rysunek. Jakie warunki muszą być spełnione, aby obręcz wróciła do punktu startowego? Zakładamy, że podłoże jest jednorodne.

8. Podczas słonecznego poranka, gdy trawa pokryta jest jeszcze rosą, można zaobserwować ciekawe zjawisko: spoglądając na swój cień na trawie widzi się aureolę wokół głowy, podczas gdy reszta własnego cienia jest jej pozbawiona. Wyjaśnić to zjawisko.

7. Powrót obręczy jest możliwy dzięki sile tarcia, działającej na obręcz ze strony podłoża podczas jej poślizgu. Siła ta ma wartość $F = f m g$ (f —współczynnik tarcia, g —przyspieszenie ziemskie). Po czasie t_1 , spełniającym równanie $F t_1 = m v_0$, nastąpi zatrzymanie ruchu postępowego obręczy, a jej prędkość kątowa zmaleje do ω_1 . Spełnione przy tym będzie równanie $F r t_1 = I(\omega_0 - \omega_1)$, gdzie $I = m r^2$ jest momentem bezwładności obręczy względem jej środka. Ponieważ $F = \text{const}$, omawiany ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem $a = -\frac{F}{m} = -fg$.

Stąd obliczamy $t_1 = \frac{v_0}{-a} = \frac{v_0}{fg}$.



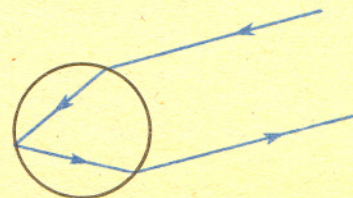
Warunkiem powrotu obręczy do punktu startowego jest $\omega_1 > 0$.

Ponieważ z równań powyższych wynika $\omega_0 - \omega_1 = \frac{v_0}{r}$,

warunek ten przyjmuje postać $\omega_0 > \frac{v_0}{r}$.

Oczywiście musi zachodzić $f > 0$ (tarcie toczne pomijamy).

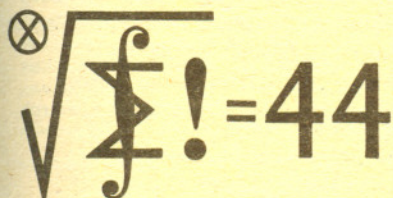
8. Rosa to kropelki wody, które nie zwilżają liści trawy; często osiadają one na drobnych włoskach tuż nad powierzchnią liścia. Taka kropla działa jak soczewka, skupiając raz promienie słoneczne na liściu, a następnie ponownie światło odbite od liścia skupia w prawie równoległą wiązkę wsteczną. Dzięki temu odbicie światła słonecznego od pokrytej rosą trawy ma wyraźne maksimum w kierunku padania światła. Dla obserwatora rejonów graniczące z cieniem głowy są znacznie jaśniejsze, gdyż dla nich promienie odbite w kierunku oka tworzą niewielki kąt z padającymi promieniami słonecznymi. Zjawisko kierunkowego odbicia wstecznego może być również związane z odbiciem od tylnej powierzchni kulistej kropli, jak na rysunku. Zachodzi ono jednak przy wyższych, aniżeli ma woda, współczynnikach załamania światła ($\sqrt{2} < n \leq 2$).



po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 105 /WT=2,47/ i 106 /WT=2,35/
z numeru 2/1985

Krystyna Witek	- Ostrów Maz.	44,90pkt
Marcin Mazur	- Białystok	43,30pkt
Anna Gluza	- Toruń	42,48pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Błk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- Bielsko-B.	40,97pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt

Serdecznie witamy panią Krystynę Witek,
drugą Panią w Klubie 44.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1985

Zadania z matematyki nr 113, 114

113. W przestrzeni dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B leżące poza tą płaszczyzną, po tej samej stronie. Niech Z będzie zbiorem tych punktów M , dla których istnieje sfera o środku M , przechodząca przez A i B , styczna do π . Udowodnić, że Z jest elipsą lub parabolą.

114. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) . Niech $x_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność $a_{n+1} + \dots + a_{n+m} \geq (n+m)x_{n+m} - nx_n$.

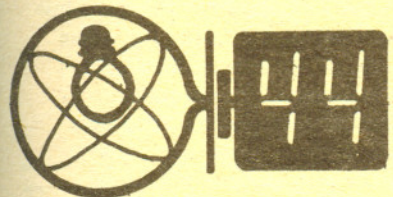
Zadanie 114 przysłał pan Ryszard Mazurek z Wrocławia.

Zadania z fizyki nr 11, 12

11. W środku prostopadłościennej gablotki znajduje się przedmiot z cennego kruszcu, zawieszony na lekkiej, wiotkiej sprężynie, która jest zaczepiona do górnej ścianki. Zaproponować metody doświadczalne wyznaczenia masy tego przedmiotu, które by wykluczały jego zetknięcie się ze ściankami gablotki. Wszystkie ścianki są wykonane z takiej samej przezroczystej płyty, gęstość kruszcu nie jest znana.

12. Przyjmując, że potencjał górnej warstwy atmosfery, na wysokości 50 km, względem powierzchni Ziemi wynosi + 400 kV, a pionowy gradient potencjału przy powierzchni Ziemi ma średnią wartość 100 V/m, obliczyć przybliżone wartości całkowitego ładunku elektrycznego kuli ziemskiej oraz całkowitego ładunku zawartego w atmosferze ziemskiej, podać znaki tych ładunków. Promień Ziemi wynosi ~ 6400 km.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



7. Interwał czasoprzestrzenny



Obserwator inercyjny, posługując się układem współrzędnych w czasoprzestrzeni, może określić czas i miejsce dowolnego zdarzenia. Ilościowe porównywanie wyników obserwacji prowadzonych przez różnych obserwatorów jest możliwe pod warunkiem, że znamy związek między skalami na osiach ich układów współrzędnych. Aby ustalić ten związek, znajdziemy, dla dowolnej pary zdarzeń, wielkość zależną od współrzędnych tych zdarzeń, która dla każdego obserwatora ma tę samą wartość (tzw. niezmiennik).

Punkt w przestrzeni euklidesowej ma inne współrzędne w każdym z obróconych względem siebie układów współrzędnych kartezjańskich. Odległości między punktami nie zależą jednak od układu. Odległość jest więc niezmiennikiem obrotów (rys. 7a).

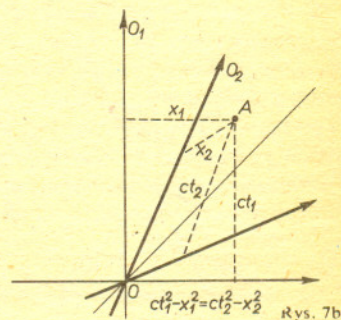
W dwuwymiarowej czasoprzestrzeni odpowiednikiem obrotu jest zmiana obserwatora inercyjnego, a niezmiennikiem wielkość

$$(*) \quad s^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 = c^2 t_2^2 - x_2^2,$$

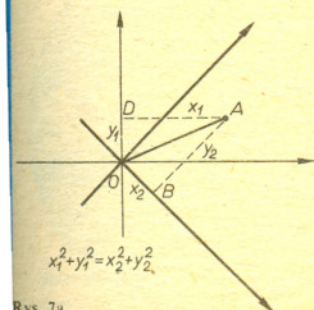
zwana interwałem czasoprzestrzennym (rys. 7b).

Udowodnimy wzór (*). Załóżmy, że dwóch obserwatorów O_1 i O_2 rejestruje zdarzenie A . Dodatkowo wybierzmy obserwatora O tak, by prędkości, z którymi poruszają się względem niego O_1 i O_2 , miały te same wartości i były przeciwnie skierowane (rys. 7c). Można łatwo wykazać, że taki wybór O jest zawsze możliwy.

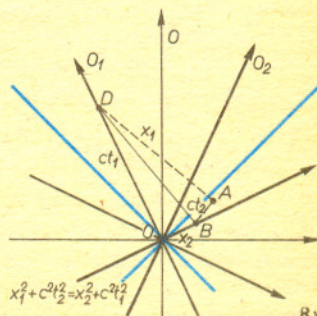
Na rysunku 7c obserwatorowi O przypisaliśmy prostokątny układ współrzędnych. Dlatego oś czasu obserwatora O_1 jest prostopadła do osi odległości O_2 , a oś odległości O_2 prostopadła do osi czasu O_1 .



Rys. 7b



Rys. 7a



Rys. 7c

Mierzenie Wszechświata

Mgr Jacek

CHOŁONIEWSKI

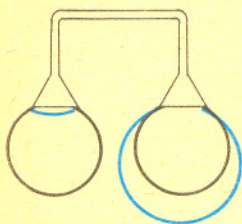


Rozwiązanie zadania F 179. Różnica ciśnień między wnętrzem bańki o promieniu R i otoczeniem jest równa

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

gdzie σ — napięcie powierzchniowe błony mydlanej.

Wynika stąd, że równowaga układu ma miejsce wtedy, gdy promienie bańek są takie same. Sytuacja przedstawiona w zadaniu odpowiada równowadze nietrwałej. Niewielkie zaburzenie prowadzące do zmniejszenia jednej z bańek spowoduje wzrost ciśnienia w jej wnętrzu i przepływ powietrza do drugiej bańki. Promień bańki będzie malał aż do momentu, gdy przyjmie ona kształt półsfery. Potem zacznie rosnąć. Nowy stan równowagi zostanie osiągnięty, gdy promienie krzywizny bańek ponownie się zrównają (rysunek). Jest to stan równowagi trwałej. Dlaczego?



Planety, gwiazdy i galaktyki to trzy podstawowe rodzaje obiektów znajdujących się na niebie. Tematem tego artykułu jest przedstawienie metod, jakie zastosowano do wyznaczania ich rozmieszczenia w przestrzeni.

Ziemia wraz z pozostałymi ośmioma planetami krąży wokół Słońca wchodząc w skład Układu Słonecznego. Słońce z kolei jest jedną ze 100 miliardów gwiazd, jakie krążą wokół wspólnego centrum tworząc Galaktykę. Ruchy planet wokół Słońca oraz ruchy gwiazd wokół środka Galaktyki odbywają się w przybliżeniu w płaszczyznach. Przedstawiony wyżej model Układu Słonecznego został podany przez Kopernika w 1543 roku na podstawie analizy ruchów planet na niebie. Podobnie, z obserwacji ruchów własnych i prędkości radialnych gwiazd Lindblad i Oort około roku 1926 wydedukowali kinematykę naszej Galaktyki. W obu przypadkach droga do poprawnego modelu była poprzedzona szeregiem nieudanych prób. Nie powinien dziwić fakt, że daty odkrycia struktury Układu Słonecznego i struktury Galaktyki, mimo że oba układy są kinematycznie podobne, dzieli blisko 400 lat. Obserwowane ruchy gwiazd na niebie, wynikające z ich ruchu galaktocentrycznego są bowiem o wiele mniejsze od ruchów planet. Jest to spowodowane bardzo długim, wynoszącym około 200 milionów lat, okresem obiegu Słońca wokół centrum Galaktyki, podczas gdy okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi tylko jeden rok.

Model układu planetarnego, który zaproponował Kopernik, wyjaśnia obserwowane ruchy planet na niebie. Ruchy te nie zależą jednak od prawdziwych rozmiarów orbit planetarnych (wyrażonych np. w centymetrach), a jedynie od wzajemnych proporcji tych orbit. Wynika z tego, że analiza samych tylko ruchów planet na niebie nie może dać odpowiedzi na pytanie o rozmiary Układu Słonecznego. Aby je poznać, potrzebna jest znajomość jakiegokolwiek odległości w obrębie tego układu, np. odległości Ziemia-Słońce. Podobnie do wyznaczenia rozmiarów Galaktyki niezbędna jest znajomość odległości do gwiazd, których ruchy na niebie były przedmiotem badań.

Pierwszym sposobem wyznaczania odległości, który zastosowano w astronomii, była tzw. metoda trygonometryczna polegająca na obserwacji danego obiektu z dwóch odległych od siebie punktów i wyznaczeniu jego przesunięcia kąтового na niebie na tle obiektów, o których wiadomo, że są bardzo daleko. Pomiarów odległości do planet, w obrębie Układu Słonecznego, dokonywano z dwóch odległych od siebie obserwatoriów na Ziemi. Do obliczenia odległości konieczna była znajomość rozmiarów kuli ziemskiej i położen obserwatoriów na niej. Od czasów Kopernika przypisującego Ziemi ruch obiegowy wokół Słońca wiemy, że największa różnica odległości między dwoma punktami obserwacyjnymi, jaką dysponuje człowiek, równa jest rozmiarom orbity ziemskiej. Okazuje się, że jest to odległość bardzo mała w porównaniu z odległością najbliższych nawet gwiazd. Powoduje to, że ich przesunięcie na niebie wynikające z obserwacji z dwóch przeciwległych punktów orbity ziemskiej jest mniejsze od jednej sekundy łuku. Metodę trygonometryczną można więc stosować tylko do najbliższych gwiazd. Pozostała, ogromna liczba gwiazd z powodu swej znacznej odległości od nas „nie reaguje” na ruch orbitalny Ziemi.

Ponieważ dla 0 kierunek „w prawo” jest równoważny kierunkowi „w lewo”, skale na osiach θ_1 i θ_2 na rysunku 7c powinny być jednakowe. Kwadrat długości wspólnej przeciwprostokątnej trójkątów DAB i BOD jest $DB^2 = x_1^2 + ct_1^2 = x_2^2 + ct_2^2$, a stąd wynika (*).

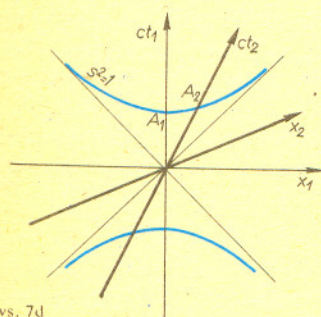
Możemy teraz przeprowadzić „kalibrację” osi układów współrzędnych. Wybierzmy w czasoprzestrzeni wszystkie zdarzenia, które dzieli od punktu 0 jednostkowy interwał. Współrzędne tych zdarzeń wyznacza równanie $ct_1^2 - x_1^2 = 1$, opisujące dwie gałęzie hiperboli, której asymptotami są linie świata promieni świetlnych (rys. 7d).

Hiperbola w górnej półpłaszczyźnie przecina oś czasu obserwatora θ_1 w punkcie A_1 o współrzędnych $(1, 0)$, czyli wyznacza jednostkę na tej osi.

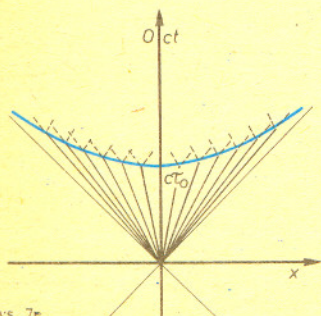
Dla zdarzenia A_2 współrzędna x_2 równa jest 0. Z niezmienniczości interwału wynika, że $ct_2 = 1$, a więc punkt ten wyznacza jednostkę na osi czasu obserwatora θ_2 .

Możemy teraz porównywać czasy przypisywane zdarzeniom przez różnych obserwatorów. Rysunek 7e przedstawia linie świata pęku jednakowych cząstek, które powstały w chwili $t = 0$ w punkcie $x = 0$. Cząstki mają różne prędkości. Czas życia (czas, który upływa do chwili rozpadu) spoczywającej cząstki wynosi $ct_0 = 1$. Zdarzenia rozpadu cząstek układają się na hiperboli jednostkowej. Z punktu widzenia obserwatora 0 szybkie cząstki żyją dłużej niż wolne. Wynik ten został potwierdzony w wielu eksperymentach.

Czytelnikowi pozostawiamy „kalibrację” osi odległości za pomocą hiperboli $ct_1^2 - x_1^2 = -1$ oraz porównanie wyników pomiarów długości pręta przez dwóch obserwatorów (na podstawie rys. 7d).



Rys. 7d



Rys. 7e



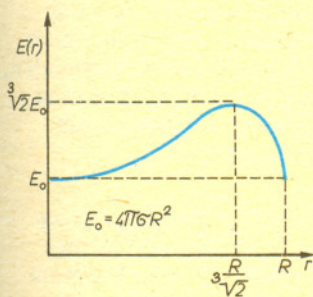
Rozwiązanie zadania F 178. Pomiędzy przypadkowe zderzenia kropli prowadzące do ich połączenia.

Układ kropki — para nasycona jest w równowadze nietrwalej. Jedna z kropli zniknie, a druga zwiększy swą objętość. Prędkość pary nasyconej nad zakrzywioną powierzchnią cieczy maleje ze wzrostem promienia krzywizny. Niewielka fluktuacja prowadząca do wzrostu jednej z kropli pociąga więc za sobą obniżenie prędkości pary nad jej powierzchnią i skraplanie pary z otoczenia. Ubytek pary uzupełnia ułatwione parowanie z drugiej kropli. W efekcie jedna z kropli całkowicie znika. Jeśli sumę objętości kropli oznaczyć przez V , promień jednej z nich przez r , to druga ma promień $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi} - r^3}$, a energia powierzchniowa obu kropli wynosi

$$E(r) = 4\pi\sigma \left(r^2 + \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi} - r^3\right)^2} \right),$$

gdzie σ — napięcie powierzchniowe cieczy graniczącej z własną parą nasyconą;

$r \in \left[0, \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \right]$. Z wykresu funkcji $E(r)$ widać,



że jednakowym kroplom odpowiada stan równowagi nietrwalej i po pewnym czasie (od czego on zależy?) układ znajdzie się w jednym ze stanów o energii E_0 . Energia wewnętrzna „zarłoczej” kropli i atmosfery wzrasta przy tym o $E_0(3\sqrt{2} - 1)$.

Następnym, niezwykle szeroko stosowanym w astronomii sposobem wyznaczania odległości jest tzw. metoda fotometryczna, wykorzystująca zależność

$$f = \frac{L}{4\pi r^2},$$

gdzie f jest strumieniem promieniowania na powierzchni Ziemi, który podlega bezpośredniemu pomiarowi, L — mocą promieniowania wysyłaną przez dany obiekt, a r — odległością do niego.

Równanie to jest prawdziwe dla ciał promieniujących z taką samą mocą we wszystkich kierunkach, można je więc stosować w odniesieniu do gwiazd i galaktyk, które w przybliżeniu tak właśnie świecą. Gdyby wszystkie gwiazdy miały jednakową moc promieniowania, to wystarczyłoby wyznaczyć odległość do jednej z nich (np. metodą trygonometryczną), na tej podstawie obliczyć jej moc promieniowania L , a odległość do pozostałych gwiazd wyznaczyć według powyższego wzoru. W rzeczywistości jednak gwiazdy promieniają z różną mocą. Metodę fotometryczną można jednak stosować, dzieląc zbiór wszystkich gwiazd na klasy zawierające już obiekty promieniujące jednakowo. Podziału takiego można dokonać biorąc pod uwagę takie cechy gwiazd, jak wygląd ich widma czy okres zmian blasku (dla gwiazd pulsujących), o których wiadomo, że są funkcjami mocy promieniowania. Opisana wyżej metoda posłużyła też do wyznaczania odległości do najbliższych galaktyk w momencie, gdy udało się zaobserwować w nich pojedyncze gwiazdy. Obiektami jaśniejszymi od gwiazd, które można wyodrębnić w galaktykach, są gromady kuliste i obszary świecącego wodoru zjonizowanego. Zakładając, że mają one w przybliżeniu jednakową moc promieniowania, można je również użyć do wyznaczania odległości do galaktyk, w których się znajdują. Wszystkie opisane wyżej metody są jednak skuteczne dla galaktyk względnie bliskich — u obiektów dalszych nie można już odróżnić gwiazd, gromad kulistych czy obszarów świecącego wodoru. Można także zastosować metodę fotometryczną do wyznaczania odległości galaktyk wprost, tzn. dzieląc je na grupy o stałych mocach promieniowania i dalej postępując jak w przypadku gwiazd.

Wyznaczenie odległości do najbliższych galaktyk, które nastąpiło w latach trzydziestych naszego stulecia, było ostatecznym dowodem na to, że są one układami o analogicznej budowie i rozmiarach co nasza Galaktyka. Umieściło to Galaktykę wśród wielu podobnych obiektów stanowiąc kolejną „decentralizację” naszego położenia we Wszechświecie.

Przełomowym momentem z punktu widzenia badania rozmieszczenia galaktyk w przestrzeni było odkrycie oddalania się od nas wszystkich galaktyk z prędkościami proporcjonalnymi do ich odległości

$$v = Hr,$$

gdzie v jest prędkością oddalania się galaktyki, a H — tzw. stałą Hubble’a. Jak wiadomo, fakt ten nie wyróżnia w jakikolwiek sposób naszej Galaktyki. Odkrycie Hubble’a umożliwiło badanie przestrzennego rozkładu galaktyk o wiele bardziej odległych niż poprzednio. Zdjęcie widma, które jest konieczne do znalezienia prędkości (na podstawie efektu Dopplera), można otrzymać nawet dla bardzo odległych galaktyk. Znając prędkości można na podstawie powyższego wzoru badać przestrzenne rozmieszczenie galaktyk nie znając nawet stałej Hubble’a.

Wynik takich badań przedstawiono na rysunku. Jak widać, galaktyki w naszym otoczeniu nie są rozmieszczone równomiernie, lecz tworzą wyraźne skupisko zwane Supergromadą *Virgo* od łacińskiej nazwy gwiazdozbioru Panny, w którym widzimy większość galaktyk należących do tego skupiska. Supergromada *Virgo* jest tworem o nieregularnym, spłaszczonym kształcie z dość wyraźnym centrum o zwiększonej liczbie galaktyk. Istnienie na rysunku obszaru, w którym nie ma galaktyk, ograniczonego dwiema przecinającymi się prostymi, wynika z zasłaniania go przez pył leżący w płaszczyźnie naszej Galaktyki. Tak więc na rysunku nasze położenie znajduje się w punkcie przecięcia się tych prostych. Widzimy zatem, że jesteśmy raczej na peryferiach tego ogromnego skupiska galaktyk zwanego Supergromadą *Virgo*.

Badania jeszcze bardziej odległych galaktyk wykazały istnienie innych podobnych supergromad.

Pora na podsumowanie. Wyznaczanie rozmieszczenia przestrzennego planet, gwiazd i galaktyk odbywało się i odbywa dwoma sposobami. Pierwszy z nich to znajdowanie odległości do poszczególnych obiektów metodą trygonometryczną, wykorzystującą własności geometryczne przestrzeni, lub fotometryczną — korzystającą z praw rozchodzenia się światła. Drugi sposób polega na braniu pod uwagę udziału planet w ruchu heliocentrycznym, gwiazd w ruchu dookoła centrum Galaktyki oraz ekspansji galaktyk.

Czyli, uogólniając, polega on na wykorzystaniu systematycznych, uporządkowanych ruchów ciał niebieskich.

Obie metody uzupełniają się. Należy jednak podkreślić, że jedynie pierwszy sposób może dostarczać informacji o skali odległości we Wszechświecie. Za pomocą drugiego sposobu można co prawda efektywnie badać wzajemne rozmieszczenie planet, gwiazd czy galaktyk, lecz bez dodatkowych informacji otrzymujemy obraz o nieznanym skali.

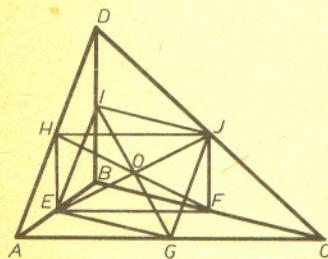


Dr Bogdan CICHOCKI

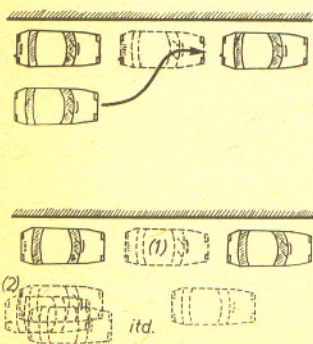
Rozwiązanie zadania M 407. Można założyć, że liczby a i d są względnie pierwsze oraz $a \geq 2$ (w przeciwnym przypadku wszystkie wyrazy ciągu można podzielić przez największy wspólny dzielnik a i d i odrzucić ewentualną jedynkę na początku).

Rozważmy ciąg a, a^2, a^3, \dots . Znajdują się w nim dwie liczby a^s i a^t ($s < t$) dające taką samą resztę przy dzieleniu przez d . Różnica $a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$ dzieli się przez d . Ponieważ a i d są względnie pierwsze, to $a^{t-s} - 1$ dzieli się przez d . Niech $k = t - s$. Dla dowolnej liczby naturalnej m : liczba $a^{km+1} - a = a(a^{t-s-1})(a^k(m-1) + a^k(m-2) + \dots + 1)$ dzieli się przez d , czyli $a^{km+1} = a + nd$, dla pewnej liczby naturalnej n , a więc a^{km+1} występuje w danym ciągu. Wszystkie liczby postaci a^{km+1} mają oczywiście takie same dzielniki pierwsze jak a .

Rozwiązanie zadania M 406. Oznaczmy środki krawędzi AB, BC, AC, AD, BD, CD odpowiednio przez E, F, G, H, I, J . Mamy $EF \parallel AC, HJ \parallel AC, EH \parallel BD, FJ \parallel BD$ i $AC \perp BD$, a więc $EF \perp HJ, EH \perp FJ$ i $\sphericalangle HEF = \frac{\pi}{2}$.



Czworokąt $EFJH$ jest prostokątem. Niech O będzie punktem przecięcia EJ i FH . Wówczas $OE = OF = OJ = OH$. W podobny sposób rozważając czworokąt $EGJI$ otrzymujemy równości $OE = OG = OJ = OI$.

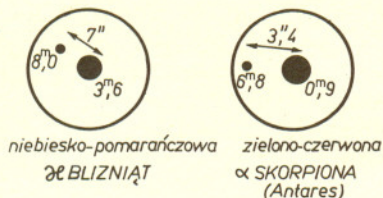


W *Delcie* 8/1982 opisano m.in. jeden z klasycznych paradoksów fizyki statystycznej tzw. paradoks odwracalności i jego wyjaśnienie zaproponowane przez Ludwika Boltzmann. Przypomnijmy pokrótce, w czym rzecz. Otóż paradoks odwracalności wiąże się z pewną trudnością, którą napotykamy przy próbie wyjaśnienia własności ciał makroskopowych (np. gazów) w oparciu o prawa rządzące ruchem atomów i cząsteczek. Trudnością tą jest sprzeczność między nieodwracalnością w czasie zjawisk makroskopowych (np. rozpyływanie się kropli atramentu w szklance wody) a odwracalnością zjawisk mikroskopowych (obserwując ruchy cząsteczek nie jesteśmy w stanie wyróżnić kierunku upływu czasu). Rozwinięcie przez Boltzmann tej, jak się okazuje, pozornej sprzeczności opiera się na stwierdzeniu dwóch podstawowych faktów. Po pierwsze formułując omawiany paradoks wprowadziliśmy dwa poziomy opisu stanu układu: jeden bardzo dokładny (mikroskopowy) i drugi dużo mniej dokładny (makroskopowy). Po drugie jeden ze stanów makroskopowych (tzw. stan równowagowy) jest realizowany przez ogromną większość możliwych do wyobrażenia sytuacji mikroskopowych, zaś inne (tzw. stany nierównowagowe) przez stosunkowo niewielką liczbę takich sytuacji. W tym właśnie tkwi źródło asymetrii w czasie zjawisk makroskopowych. Bowiem układ znajdujący się w stanie nierównowagowym ze względu na to, że położenia i prędkości atomów i cząsteczek stale się zmieniają, po pewnym czasie przejdzie do stanu równowagi i praktycznie na stałe w nim pozostanie. Czytelnika, który chciałby bardziej szczegółowo zapoznać się z rozumowaniem Boltzmann, odsyłam do wspomnianego artykułu z drobnym zastrzeżeniem — rysunki tam zamieszczone zostały zniekształcone w toku produkcji czasopisma.

Zrozumienie istoty paradoksu odwracalności i jego wyjaśnienia podanego przez Boltzmann jest jednym z warunków zrozumienia podstaw fizyki statystycznej. W zrozumieniu tym może być pomocna analiza pewnej sytuacji znanej każdemu kierowcy.

Bardzo często, aby zaparkować samochód, zmuszeni jesteśmy ustawić go między dwoma innymi, blisko stojącymi samochodami. Każdy kierowca (szczególnie początkujący) wie, że jest to manewr dość trudny; na pewno trudniejszy niż manewr odwrotny, tzn. wyjechanie ze wspomnianego miejsca parkowania. Dlaczego? Przecież samochód może jechać po tej samej trasie zarówno do przodu, jak i do tyłu. Możemy w tym przypadku mówić o paradoksie parkowania. Zauważmy, że jest on analogiczny do paradoksu odwracalności dla ciał makroskopowych. Pomimo symetrii ruchu samochodu (odpowiadającej odwracalności mikroskopowych ruchów cząsteczek) obserwujemy asymetrię między opisanymi powyżej manewrami (odpowiadającą nieodwracalności procesów makroskopowych). Wyjaśnienie paradoksu parkowania jest dokładnie takie samo, jak wyjaśnienie paradoksu odwracalności podane przez Boltzmann. Na początek zauważmy, że możemy wyróżnić dwa poziomy opisu położenia samochodu. Pierwszym jest opis „mikroskopowy”, w którym podajemy dokładnie położenie samochodu na jezdni. W tym przypadku będziemy mówić o „mikro stanie” samochodu. W drugim opisie (o wiele mniej dokładnym) wyróżniamy tylko dwie sytuacje („makrostany”) i podajemy, w której z nich samochód się znajduje. Te dwie sytuacje to: (1) samochód zaparkowany i (2) samochód poza miejscem parkowania. Zauważmy teraz, że (podobnie jak w przypadku stanu równowagi i stanów nierównowagowych) występuje istotna różnica między „makrostanami” (1) i (2). Stan (1) może być bowiem zrealizowany praktycznie przez jeden „mikro stan” samochodu, gdy tymczasem stan (2) przez bardzo dużą liczbę tych „mikrostanów”. W związku z tym wyjechać samochodem z miejsca parkowania, tzn. przeprowadzić go z (1) do (2) jest łatwo. Możliwym jest wiele różnych realizacji tego procesu. Tymczasem sytuacja z manewrem odwrotnym przedstawia się zupełnie inaczej. Startujemy bowiem wtedy z pewnego położenia na jezdni i musimy trafić do „makrostanu” (1). A to jest trudne, gdyż makrostanowi temu odpowiada tylko jeden „mikro stan”. Mam nadzieję, że ten przykład pozwoli Czytelnikom lepiej zrozumieć rozwinięcie paradoksu odwracalności podane przez Boltzmann ponad sto lat temu.

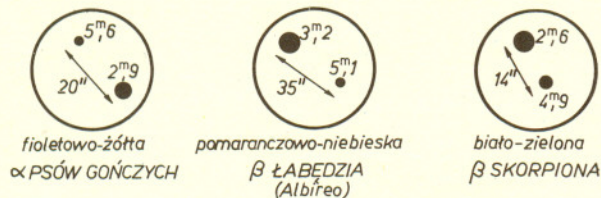
TRUDNE



TRUDNIEJSZE



ŁATWE



W tym odcinku opisu mapy chcemy zachęcić Was do obserwowania par gwiazd znacznie różniących się kolorami. Jest to zadanie trudne, ale dające wiele satysfakcji. Spójrzcie na Marsa pojawiającego się rano nad wschodnim horyzontem — czyż nie jest on krwistoczerwony! Żeby to zauważyć, trzeba zaopatrzyć się w lunetę albo lornetkę. Dlaczego, skoro i tak widać tę planetę?

Oko ludzkie wyposażone jest w dwa rodzaje elementów światłoczułych: czopki i pręciki. Jednak tylko czopki, przystosowane do widzenia dziennego, są wrażliwe na barwy. Ich czułość natomiast jest znacznie mniejsza niż pręcików. Patrząc na gwiazdy „uruchamiamy” przede wszystkim pręciki dopóty, dopóki jasność gwiazd nie jest wystarczająco duża, aby spostrzegły je czopki. A więc lornetka służy przede wszystkim zebraniu jak największej ilości światła gwiazdy. Poza tym wiele par gwiazd tworzy dość ciasne układy. Aby je rozdzielić, trzeba również zastosować lornetkę.

Do łatwiejszych układów należą żółto-fioletowa α Psów Gończych, pomarańczowo-niebieska β Łabędzia (to Albireo widoczna na sierpniowym sektorze) oraz biało-zielonożółta β Skorpiona. Do trudniejszych należą żółto-zielona ϵ Wolarza, żółto-fioletowa ξ Wolarza i pomarańczowo-żółta α Herkulesa. W trzech ostatnich układach głównym problemem będzie rozdzielenie dwóch składników. Trzeba dysponować lunetką dającą co najmniej 30-krotne powiększenie. Jeszcze trudniejsze są pomarańczowo-niebieska α Bliźniąt i czerwono-żółty Antares (α Skorpiona). Usytuowanie składników tych układów zaznaczyliśmy dla ułatwienia na rysunku.

Życzymy powodzenia w poszukiwaniu innych, nie wymienionych tu kolorowych gwiazd.