

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 7(139)

Czy istnieją smoki? <i>prof. dr Grzegorz Białkowski</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Gdzie są środki? <i>dr Jerzy Bednareczuk</i>	str. 4
Współczesny model ewolucji gromad kulistych <i>mgr Mirosław Giersz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Liczby przestępne i liczby Liouville'a <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 10
Przyroda jednak lubi próżnię <i>doc. dr Michał Świącki</i>	str. 12
Klub 44	str. 14
Teoria względności (6)	str. 15
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:  
Różne odległości**

#### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astrofizyczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempala  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciennodawców indywidualnych i o 100% dla zleciennodawców instytucji i zakładów pracy.  
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,

- Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
- Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryllowa  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93

Biurowisko Reklam i Propagandy

tel. 25-56-26

Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 356/85. N-49



Zadałem to pytanie, śmiałością swoją dorównujące chyba słynnej frazie Gałczyńskiego „Dlaczego ogórek nie śpiewa?” zastanawiając się, jakiej odpowiedzi na nie będą teraz ode mnie oczekiwać Czytelnicy. Na miłość Boską, chyba nie zwykłego „nie”? (Tu oczekuję odruchu buntu u niejednego i niejednej: „Chyba autor zapomniał, że wyrosliśmy już z wieku, kiedy kazano nam wierzyć w bajki” — i na to odrzekłbym tylko „czyżby”?) Sprawa wcale nie jest taka prosta. Ileż tu zależy od (a) definicji smoka, (b) definicji słowa „istnieje”, (c) od możliwości weryfikacji, a choćby i falsyfikacji jakiegokolwiek odpowiedzi na to pytanie.

Po pierwsze: w pewnym sensie istnieje wszystko, o czym w danej chwili co najmniej ja myślę jako o istniejącym. W tym sensie istnieje i smok, i pan Zagłoba, i Apollo. Na przykład pan Zagłoba, gdy o nim myślę, istnieje, co prawda w sposób całkowicie ode mnie zależny, ale ode mnie odrębny. Nie jest on przecież żadnym aktem mojej świadomości, gdyż o żadnym takim akcie nie można sensownie orzec, że ma dziurę w czole i umie wypić półgarncówkę miodu nie odrywając naczynia od ust. Ponieważ w tym sensie na pewno istnieją też i smoki, i to wszystkich możliwych rodzajów, więc kwestię tę dalej pomijam jako trywialną. Interesować mnie będzie tylko istnienie „na serio”, takie, jakim istnieje na przykład biurko, przy którym piszę ten artykuł.

Po drugie zatem: wszystko zależy od tego, jaką przyjmę definicję smoka. Jeśli na przykład patrząc na psa powiem: „Ten smok gotów jest wszystko pożreć”, to stosuję takie określenie smoka, przy którym smoki istnieją nie gorzej niż biurka. Ale i to wydaje się za łatwe, za trywialne. Niechże więc smok będzie istotą o jaszczurczych łapach, skrzydłach nietoperza, pokrytą łuską i z siedmioma pyskami zięjącymi ogniem. Czy takie smoki istnieją? Z pewnym wahaniem odpowiadam — chyba nie. Na czym opieram tę odpowiedź? Po pierwsze na tym, że nikt nigdy takiego potwora nie uświadczył, a po drugie na tym, że jego istnienie w tej postaci wydaje mi się całkowicie sprzeczne ze znanymi prawami biologii. Pierwszy powód — choć ważny! — nie wydaje się bardzo przekonujący. Wszak do czasu nikt nie widział na przykład radu. Czy w owym okresie rad nie istniał? Trudno byłoby zaryzykować takie twierdzenie. W końcu każde odkrycie przekonuje nas o czymś, czego przedtem nie znaliśmy. Pozostaje drugi powód, moim zdaniem poważniejszy. Istnienie smoka wydaje mi się sprzeczne z prawami biologii. Istnieją prawa biologii, jak i każde inne, także się zmieniają. Czy mogę przysiąc, że jakieś rozszerzone prawa astrobiologii nie dopuszczają istnienia smoków w zapadłym zakątku naszej Galaktyki? A więc? Na dziś, w obecnym stanie wiedzy mógłbym tylko co najwyżej powiedzieć, że istnienie smoków wydaje mi się niezmiernie mało prawdopodobne.

Przejdźmy więc teraz na drugi kraniec naszego poznania i zapytajmy, czy biurka istnieją? Czy istnieją mocniej niż moje wyobrażenie biurka? Skłonny jestem odpowiedzieć, że owszem, chyba istnieją. Na czym to z kolei swoje przekonanie opieram? Po pierwsze, na tym, że odbieram rozmaite wrażenia zmysłowe — wzrokowe, dotykowe, może i słuchowe, jeśli stuknę w blat palcami, może jeszcze inne. Po drugie, że moje wrażenia mają walor spójności, są ze sobą nawzajem zgodne. Po trzecie, że ten kompleks wrażeń wykazuje wielką trwałość. Odchodzę od biurka, odwracam się do niego tyłem, potem znowu na nie spoglądam, a ono nic, stoi jak stało. Każdy może zrobić to doświadczenie.

Łatwo zauważyć, że prowadząc to rozumowanie opierałem się zarówno na danych wraźniowych, jak i na mojej wiedzy (przesądach?), o tym, jaki świat powinien być. Powinna w nim obowiązywać jakaś konsekwencja! jakaś przyczynowość! jakaś spójność wewnętrzna! Bez tego nic! Widać, że i w tym wypadku, podobnie jak przy smoku, nasze przekonanie o istnieniu bądź nieistnieniu opierało się na dwu czynnikach — zespole danych wraźniowych i zespole naszych teorii co do tego, jaki świat jest, wynikających z naszej chęci zrozumienia go. Biurko chyba istnieje — powiadam, ukrywając w tym „chyba” teoretyczną możliwość długotrwałego złudzenia zmysłowego, czy też rozchwiania się zasady przyczynowości akurat w tym kącie mojego pokoju.

Do czego zmierzam? Po prostu chciałbym uświadomić każdemu, kto jeszcze tego nie wie, że twierdzenia żadnej nauki przyrodniczej ani też zresztą poznania potocznego, codziennego, nie mają charakteru sądów absolutnych, lecz tylko mniej lub bardziej prawdopodobnych hipotez. Zgadzam się — czasem bardzo, bardzo prawdopodobnych. Jednakże możliwość zasadniczego wątplenia zawsze pozostaje. Należałoby odróżnić subiektywną pewność człowieka od zasadniczej hipotetyczności nauki. To samo dotyczy także sądów o istnieniu. Jeśli na przykład mówimy, że atomy istnieją, to dlatego, że ta hipoteza stała się obecnie wystarczająco prawdopodobna, aby ją można było przekształcać na subiektywną pewność. Lecz nie zawsze przecież tak było! W ostatnich latach XIX wieku wybitny filozof i fizyk, Ernest Mach, tak pisał o atomach: „nie przystoi wiedzy przyrodniczej zmiennym środkom ekonomicznym, które sama stworzyła, cząsteczkom i atomom, przyznawać bytu realnego poza zjawiskami”.







Innymi słowy, atomy są przydatne jako środki służące do ekonomicznego opisu zjawisk, ale naprawdę nie istnieją! I dopiero wyniki badań nad ruchami Browna (Einstein i Smoluchowski) oraz wspaniałe doświadczenia Jeana Perrina nad zachowaniem się kropelek emulsji żywicy przekonały — już chyba wszystkich (?) — że atomy jednak istnieją.

Przyznam się teraz szczerze Czytelnikom, że Redakcja *Delty* zamówiła u mnie artykuł nie o smokach i nawet nie o atomach, lecz o kwarkach, i że tytuł tego artykułu początkowo miał brzmieć „Czy istnieją kwarki?” Lecz bez tego wstępu, który już prawie mamy za sobą, nie byłbym w stanie jasno przedstawić zagadnienia.

Zacznijmy od protonu. Czy proton istnieje? W odróżnieniu od biurka nikt chyba nie może się pochwalić, że odbierał wrażenia zmysłowe pochodzące „wprost” od protonu. „No, dobrze”, zapyta ktoś, „a ślady pozostawione przez proton na przykład w emulsji fotograficznej czy w komorze pęcherzykowej? Czy to nie jest „fotografia” protonu?” Zastanówmy się, bo to ważny problem. Co w rzeczywistości widzimy na zdjęciu? Na negatywie widać zaczerwienienia, powstałe w wyniku dość prostych reakcji chemicznych zachodzących w emulsji podczas wywoływania fotografii. Ziarenka te pojawiły się w wyniku rozpadu bromku srebra i wydzieleniu się srebra metalicznego. Cząsteczki bromku rozpadły się zaś w wyniku działania sił elektrycznych wywieranych na nie przez przebiegającą przez emulsję cząstkę. Siły te maleją ze wzrostem odległości, a więc najsilniej oddziaływały w tych miejscach, w których było największe prawdopodobieństwo wykrycia (znalezienia) owej cząstki. Na podstawie oceny gęstości ziaren wzdłuż toru można oszacować ładunek elektryczny przebiegającego obiektu. I tak dalej. Biorąc to wszystko pod uwagę widzimy, że nasze rozumowanie, które i tym razem rozpoczyna się od wrażeń zmysłowych, dociera do konkluzji po bardzo długiej drodze. Musiało ono przebyć terytoria należące do teorii jonizacji ośrodków i do teorii reakcji chemicznych szczególnego rodzaju. Ponieważ liczenie ziaren (w celu oceny stopnia jonizacji) odbywa się pod mikroskopem, musimy też stosować prawa optyki. Jak widać i w tym wypadku nasze przekonanie o istnieniu protonu opiera się nie tylko na danych zmysłowych, ale także na naszej wiedzy o przyrodzie. Można by powiedzieć tak, że założenie czy hipoteza istnienia protonu ratuje naszą wiarę w racjonalność świata, który — gdyby proton nie istniał — byłby dla nas paradoksalną zagadką.



A neutron? Neutron nie pozostawia przecież śladu na kliszy. W tym wypadku — pomijając informacje pochodzące z interpretacji danych dotyczących budowy jądra atomowego — opieramy się na badaniu takich zdarzeń, w których w jednym punkcie przestrzeni w pewnej chwili zachodzi proces, w którym nie jest najwyraźniej zachowana energia, ani pęd, ani moment pędu, po czym, po pewnej chwili, w innym miejscu jakaś energia, i jakiś pęd, i jakiś moment pędu pojawiają się — z niczego. Do poprzednio już analizowanych czynników dochodzi jeszcze nasze głębokie przekonanie o słuszności zasad zachowania wymienionych wielkości mechanicznych. Nasza wiara w racjonalność świata wymaga od nas teraz jeszcze większego wysiłku — musimy założyć istnienie neutronu, chociaż nie widzimy jego śladu nawet w takim sensie, w jakim widzimy ślad protonu.

Niektóre cząstki elementarne żyją zdumiewająco krótko — ich średni czas życia jest rzędu  $10^{-24}$  s. W takim wypadku śladów ich, choć niekiedy są to cząstki naładowane, nigdy nie widzimy. Aby cząstka o tak małym czasie życia przebiegła w komorze drogę rzędu 1 mm, musiałaby się poruszać z pędem około  $10^{21}$  razy większym od jej masy (w układzie jednostek, w którym  $c = 1$ ). Tego rodzaju pędy nie są obecnie osiągalne i może nigdy nie będą. Nawet w promieniowaniu kosmicznym nie obserwuje się energii większych od mniej więcej  $10^{22}$  mas elektronu. Cóż więc takiego widzimy, co pozwala nam wierzyć w istnienie tak nietrwałych obiektów? Okazuje się, że żaden pojedynczy wypadek z udziałem takiej cząstki nic nam nie da. Musimy zebrać wiele „podejrzanych” wypadków, zrobić odpowiedni wykres i być może na tym wykresie pojawią się pewne cechy, które przemawiać będą za tym, że dana cząstka rzeczywiście istnieje. Przemawiają, ale tylko do tego, kto zdaje sobie sprawę, że hipoteza istnienia takiej cząstki jest jedyną znaną możliwością wyjaśnienia zdarzeń, które bez niej stanowiłyby irracjonalny chaos. „Znaną”? No tak, dlatego właśnie jest to hipoteza, a nie pewnik, dlatego hipoteza ta początkowo przyjmowana jest ostrożnie lub nawet z zastrzeżeniami i dopiero wtedy, gdy danych zgromadzi się dużo, mówi się o potwierdzeniu istnienia cząstki. Potwierdzeniu — ale zawsze w domyśle pozostaje „w ramach naszej dzisiejszej wiedzy o świecie”.



No a co z tymi kwarkami? Chyba wszyscy domyślamy się, w czym rzecz i dlaczego Redakcja *Delty* kazała mi zadać sobie pytanie „czy istnieją kwarki?” Bo, po prostu, kwarku swobodnego nikt jeszcze z całą pewnością nie zaobserwował, choć było wielu takich, którzy sądzili, że go schwycili jak motyla w sieć swoich przyrządów. Ale chyba było to złudzenie wspomagane dobrą (bardzo dobrą!) wolą zaobserwowania tego niezwykłego obiektu, którym wydaje się kwark. Innymi słowy, kwark, jeżeli istnieje, nie może opuścić wnętrza hadronu. Nie mamy zatem żadnych szans go „zobaczyć”, choć pewno co najmniej jeden kwark byłby całkowicie trwały. I naładowany elektrycznie.





Na czym więc opiera się nasze przekonanie o tym, że kwarki jednak istnieją? Sytuacja jest analogiczna do wszystkich poprzednich. Pewne doświadczenia dostarczają nam pewnych danych zmysłowych, które zanalizowane w świetle obecnie uznawanej za ważną wiedzy fizycznej nie znajdują innego wyjaśnienia poza tym: kwarki istnieją.

Takich doświadczeń uprawdopodobniających hipotezę istnienia kwarków uskładało się już bardzo wiele. Poniżej przedstawiam ich niekompletną listę.

1. Fakt istnienia tylko tych cząstek elementarnych, które można złożyć z par kwark-antykwar (mezony) i trzech kwarków (bariony) (a więc fakt, że nie obserwuje się w przyrodzie tzw. cząstek egzotycznych, które by miały inną kompozycję kwarkową).
2. Fakty dotyczące pewnych własności barionów — mas, momentów magnetycznych itd., które można wyjaśnić tylko zakładając istnienie kwarków (posługując się rozmaitymi modelami teoretycznymi, przede wszystkim modelem worka).
3. Fakty dotyczące wielu procesów zachodzących w świecie cząstek elementarnych — zarówno tzw. procesów głęboko nieelastycznych zderzeń leptonów z hadronami (w praktyce — z nukleonami), jak procesów anihilacji par elektron-pozyton w układy hadronów. W tym ostatnim wypadku szczególnie prosty dowód eksperymentalny istnienia kwarków i to kwarków z kolorem daje pomiar stosunku prawdopodobieństwa anihilacji w układy hadronowe do prawdopodobieństwa anihilacji w parę mion-antymion.
4. Fakty wyjaśniane przez jednolitą teorię oddziaływań słabych i elektromagnetycznych, która nie mogłaby powstać, gdyby nie można było założyć, że kwarki istnieją.

I inne.

To, co chciałem w tym artykule powiedzieć, już właściwie powiedziałem, ale jeszcze krótko to podsumuję. Nie można wprawdzie powiedzieć, że kwarki istnieją z równym prawdopodobieństwem jak to, z którym orzekamy o istnieniu biurka. A nawet protonu. Ale też można śmiało powiedzieć, że istnienie kwarków wydaje się znacznie, znacznie bardziej prawdopodobne od istnienia smoków. Więc jeśli ktoś wierzy w smoki, to tym bardziej powinien uwierzyć w istnienie kwarków. A nawet — jeśli w smoki od dawna już nie wierzy.



## Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 404. Czy można tak wybrać 1000 punktów na okręgu o promieniu 1, aby odległość każdego dwóch spośród nich była liczbą wymierną?

Rozwiązanie na str. 6

M 405. Na wszystkich ulicach miasta  $A$  obowiązywał ruch dwukierunkowy. W okresie remontu dróg na części ulic wprowadzono ruch jednokierunkowy, po pewnym czasie przywrócono na tych ulicach ruch dwukierunkowy, natomiast na wszystkich pozostałych wprowadzono ruch jednokierunkowy. W obydwu przypadkach z dowolnego punktu miasta można było przejechać do dowolnego innego. Wykazać, że w mieście  $A$  można tak wprowadzić ruch jednokierunkowy na wszystkich ulicach, aby przejazd z każdego punktu miasta do dowolnego innego był możliwy.

Rozwiązanie na str. 16

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 176. Dolny koniec cienkiej, pionowej rurki o długości  $2L$  jest zatopiony, a górny otwarty. W dolnej połowie rurki znajduje się gaz o temperaturze  $T_0$ , a górna połowa wypełniona jest rtęcią. Ciśnienie atmosferyczne jest równe ciśnieniu słupa rtęci o wysokości  $L$ . Do jakiej minimalnej temperatury należy ogrzać gaz w rurce, aby całkowicie wyparł rtęć? Rozszerzalność cieplną rtęci i rurki oraz ciśnienie związane z napięciem powierzchniowym rtęci można pominąć.

Rozwiązanie na str. 13

F 177. Izolowany cieplnie zbiornik jest połączony jednakowymi, bardzo małymi otworkami z dwoma naczyniami zawierającymi hel gazowy. W obu naczyniach utrzymywane jest ciśnienie  $p$  i temperatury:  $T$  w jednym naczyniu oraz  $2T$  w drugim. Jakie ciśnienie i temperatura ustalą się wewnątrz zbiornika, jeśli początkowo był on całkowicie opróżniony z gazu?

Rozwiązanie na str. 11

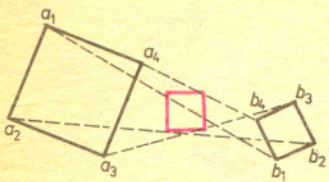




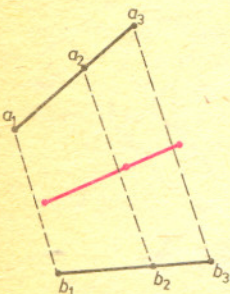
# Gdzie są środki?

Dr Jerzy BEDNARCZUK

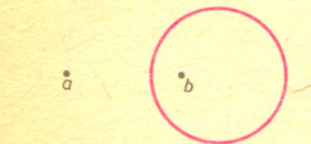
Weźmy dwa dowolne, jednakowo zorientowane kwadraty  $a_1a_2a_3a_4$  i  $b_1b_2b_3b_4$ . Wówczas środki odcinków  $\overline{a_1b_1}$ ,  $\overline{a_2b_2}$ ,  $\overline{a_3b_3}$ ,  $\overline{a_4b_4}$ , jeśli się nie pokrywają, także są wierzchołkami kwadratu (rys. 1). Weźmy dla odmiany dwa podobne „trójkąty”  $a_1a_2a_3$  i  $b_1b_2b_3$  (dlatego „trójkąty”, a nie trójkąty, że punkty  $a_1a_2a_3$  są współliniowe). Wówczas środki odcinków  $\overline{a_1b_1}$ ,  $\overline{a_2b_2}$ ,  $\overline{a_3b_3}$  także są współliniowe, a nawet są wierzchołkami „trójkąta” podobnego do  $a_1a_2a_3$ , oczywiście, jeśli się te środki nie pokrywają (rys. 2).  
Przed dalszym czytaniem warto pokusić się o samodzielne udowodnienie obu tych faktów.



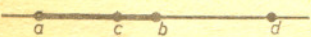
Rys. 1



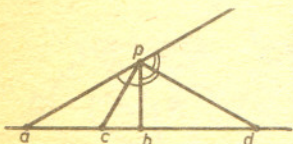
Rys. 2



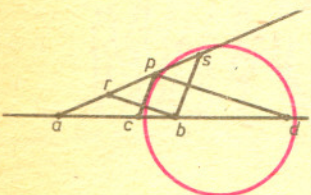
Rys. 3



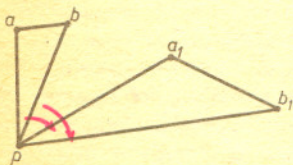
Rys. 4



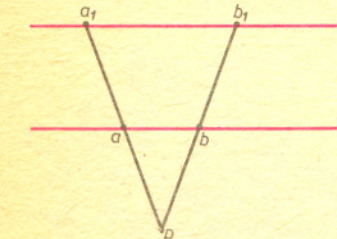
Rys. 5



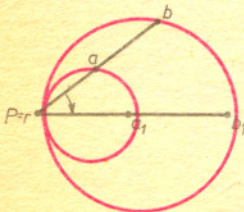
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

## Okrąg Apoloniusza

Jeżeli mamy dane dwa różne punkty  $a$  i  $b$  oraz dodatnią i różną od 1 liczbę  $t$ , to zbiorem takich punktów  $p$ , że

$$(*) \quad \frac{pa}{pb} = t$$

jest okrąg (rys. 3).

Udowodnimy to.

Znając twierdzenie Talesa łatwo znajdziemy na prostej przechodzącej przez punkty  $a$  i  $b$  takie punkty  $c$  i  $d$ , które spełniają warunek (\*). Jeden z nich należy do odcinka  $\overline{ab}$ , drugi do niego nie należy (rys. 4). Wykażemy, że  $cd$  jest średnicą poszukiwanego okręgu.

Weźmy dowolny punkt  $p$ , spełniający (\*). Wówczas

$$\frac{pa}{pb} = t = \frac{ca}{cb}$$

Wobec tego prosta  $pc$  jest dwusieczną kąta wewnętrznego o wierzchołku  $p$  w trójkącie  $apb$ .

Podobnie prosta  $pd$  jest dwusieczną kąta zewnętrznego o tym samym wierzchołku w tym samym trójkącie (rys. 5). Kąt  $\sphericalangle cpd$  jest więc kątem prostym, czyli punkt  $p$  istotnie należy do okręgu o średnicy  $cd$ .

Niech teraz punkt  $p$  należy do okręgu o średnicy  $cd$ . Wykażemy, że  $p$  spełnia warunek (\*). Niech punkty  $r$  i  $s$  będą takimi punktami prostej  $ap$ , że  $br \parallel pd$  i  $bs \parallel pc$  (rys. 6). Wówczas

$$\frac{pa}{pr} = \frac{da}{db} = t = \frac{ca}{cb} = \frac{pa}{ps}$$

Stąd  $pr = ps$ , a ponieważ trójkąt  $rbs$  jest trójkątem prostokątnym, więc  $pr = ps = pb$ . W rezultacie

$$\frac{pa}{pb} = \frac{pa}{ps} = \frac{ca}{cb} = t.$$

Okrąg, o którym tu mówiliśmy, nazywany jest okręgiem Apoloniusza wyznaczonym przez punkty  $a$  i  $b$  oraz stosunek  $t$ .

## Podobieństwa

Każde podobieństwo płaszczyzny euklidesowej można przedstawić jako złożenie izometrii i jednokładności. Jeśli jest to złożenie izometrii parzystej i jednokładności, to podobieństwo takie nie zmienia orientacji płaszczyzny i nazywane jest podobieństwem zgodnym. Złożenie izometrii nieparzystej i jednokładności zmienia orientację płaszczyzny i nazywane jest podobieństwem przeciwnym.

## Podobieństwa zgodne

Podobieństwo zgodne może być w szczególności złożeniem obrotu i jednokładności o wspólnym środku  $p$ , czyli tak zwanym podobieństwem spiralnym o środku  $p$ .

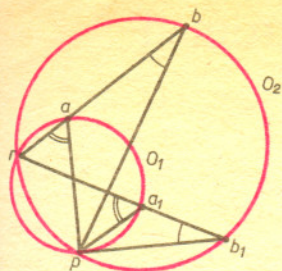
Wykażemy, że każde podobieństwo zgodne jest przesunięciem lub podobieństwem spiralnym. Skorzystamy tu z tego, że dla dowolnych różnych punktów  $a$  i  $b$  oraz różnych punktów  $a_1$  i  $b_1$  istnieją dokładnie dwa podobieństwa  $f$  i  $g$  takie, że  $f(a) = a_1$ ,  $f(b) = b_1$  oraz  $g(a) = a_1$ ,  $g(b) = b_1$ , przy czym jedno z tych podobieństw jest podobieństwem zgodnym, a drugie przeciwnym. Niech  $f$  będzie podobieństwem zgodnym, ale nie przesunięciem. Obierzmy dwa dowolne różne punkty  $a$  i  $b$  i oznaczmy  $f(a) = a_1$ ,  $f(b) = b_1$ . Dla dowodu wystarczy wskazać taki punkt  $p$ , by trójkąty  $pab$  i  $pa_1b_1$  były podobne i miały tę samą orientację. Wówczas bowiem  $f$  będzie

złożeniem obrotu wokół punktu  $p$  o kąt  $\sphericalangle apa_1$  i jednokładności o środku  $p$ , o stosunku  $\frac{a_1p}{ap}$ , a więc podobieństwem spiralnym (rys. 7).

W przypadku, gdy proste  $ab$  i  $a_1b_1$  są równoległe, takim punktem  $p$  jest po prostu punkt przecięcia prostych  $aa_1$  i  $bb_1$ , a  $f$  jest jednokładnością (rys. 8).

Jeśli proste  $ab$  i  $a_1b_1$  przecinają się w punkcie  $r$ , poprowadźmy dwa okręgi:  $O_1$  przez punkty  $r, a, a_1$ , oraz  $O_2$  przez punkty  $r, b, b_1$ . Może się okazać, że są one styczne w punkcie  $r$ , ale wtedy  $r$  jest środkiem jednokładności przekształcającej  $O_1$  na  $O_2$  i „trójkąty”  $rab$  i  $ra_1b_1$  są podobne. Wystarczy więc przyjąć  $p = r$  (rys. 9). Jeśli natomiast okręgi  $O_1$  i  $O_2$  przecinają się





Rys. 10

w dwóch punktach, to poszukiwanym punktem  $p$  jest drugi ich punkt przecięcia (rys. 10). Trójkąty  $pab$  i  $pa_1b_1$  są podobne, bo przystają kąty  $\sphericalangle rbp$  i  $\sphericalangle rb_1p$  jako kąty wpisane w  $O_2$  oparte na tych samych łukach; z podobnego powodu przystają kąty  $\sphericalangle rap$  i  $\sphericalangle ra_1p$ , tyle tylko, że dzieje się to w okręgu  $O_1$ .

Przy powyższej konstrukcji punktu  $p$  możemy natknąć się na trudności: może okazać się, że okrąg  $O_1$  lub  $O_2$  nie jest wyznaczony jednoznacznie, bo na przykład punkty  $a, a_1, b_1$  są współliniowe. W tym przypadku na okręgu  $O_2$  przechodzącym przez punkty  $a, b, b_1$  obieramy taki punkt  $c$ , by cięciwy  $\overline{ab}$  i  $\overline{cb_1}$  były przystające (rys. 11). Punkt  $p$  otrzymamy na przecięciu okręgu  $O_2$  z prostą  $ca_1$ .

### Podobieństwa przeciwne

Podobieństwo przeciwne może być w szczególności złożeniem symetrii osiowej względem pewnej prostej  $K$  i jednokładności o środku  $p$  należącym do  $K$ , czyli tak zwanym odbiciem dylatacyjnym o osi  $K$  i środku  $p$ .

Każde podobieństwo przeciwne jest symetrią z poślizgiem lub odbiciem dylatacyjnym. Jak to wykazać?

Niech  $f$  będzie podobieństwem przeciwnym, ale nie symetrią z poślizgiem. Podobnie jak poprzednio, obieramy dwa dowolne różne punkty  $a$  i  $b$  i oznaczamy  $f(a) = a_1, f(b) = b_1$ . Tym razem należy znaleźć taki punkt  $p$ , by trójkąty  $pab$  i  $pa_1b_1$  były podobne i miały przeciwne

orientacje. Wtedy  $f$  będzie złożeniem jednokładności o środku  $p$  i stosunku  $\frac{a_1p}{ap}$ , przekształcającej

$a$  na  $a_2$  i  $b$  na  $b_2$  oraz symetrii względem symetralnej  $K$  odcinka  $\overline{a_2a_1}$ . Prosta  $K$  jest wówczas również symetralną odcinka  $\overline{b_2b_1}$  i przechodzi przez  $p$  (rys. 12). Tym razem poszukiwania punktu  $p$  pozostawiamy Czytelnikowi. Poszukiwania te można zacząć nie od punktu  $p$ , ale od osi  $K$ , zwłaszcza że łatwo można zauważyć, iż powinna ona mieć kierunek dwusiecznej kąta między prostymi  $ab$  i  $a_1b_1$ .

### Jeszcze raz podobieństwa

Obierzmy dwa dowolne różne punkty  $a$  i  $b$  oraz różne punkty  $a_1$  i  $b_1$  takie, by długości odcinków  $\overline{ab}$  i  $\overline{a_1b_1}$  były różne. Znajdźmy teraz taki punkt  $p$ , by trójkąty  $pab$  i  $pa_1b_1$  były podobne. Skoro trójkąty  $pab$  i  $pa_1b_1$  mają być podobne, to powinniśmy mieć

$$\frac{pa}{pa_1} = \frac{ab}{a_1b_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{pb}{pb_1} = \frac{ab}{a_1b_1}.$$

Z pierwszej równości wynika, że poszukiwany punkt  $p$  należy do okręgu Apoloniusza

wyznaczonego przez punkty  $a$  i  $a_1$  oraz różny od jedności stosunek  $\frac{ab}{a_1b_1}$ . Z drugiej równości

wynika natomiast, że  $p$  należy do okręgu Apoloniusza wyznaczonego przez punkty  $b$  i  $b_1$  oraz ten sam stosunek. Jeśli narysujemy obydwie okręgi (rys. 13), to  $p_1$  — jeden z ich punktów przecięcia — będzie środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odpowiednio  $a$  i  $b$  na  $a_1$  i  $b_1$ , a drugi —  $p_2$  — środkiem odbicia dylatacyjnego, także przekształcającego  $a$  i  $b$  na  $a_1$  i  $b_1$  odpowiednio.

### Raz jeszcze środki i nie tylko

Powróćmy do naszego zadania o kwadratach. Niech kwadraty  $a_1a_2a_3a_4$  i  $b_1b_2b_3b_4$  będą jednakowo zorientowane. Mamy wykazać, że środki  $c_i$  odcinków  $\overline{a_i b_i}$  są wierzchołkami kwadratu lub się pokrywają. Wiemy już, że podobieństwo przekształcające odpowiednio punkty  $a_i$  na punkty  $b_i$  jest przesunięciem lub podobieństwem spiralnym. W pierwszym przypadku środki odcinków  $\overline{a_i b_i}$  są obrazami punktów  $a_i$  przy przesunięciu, a więc są także wierzchołkami kwadratu (rys. 14). Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy podobieństwem tym jest podobieństwo spiralne i niech punkt  $p$  będzie jego środkiem (rys. 15). Podobieństwo to jest więc złożeniem

obrotu wokół punktu  $p$  o kąt  $\sphericalangle a_1pb_1$  oraz jednokładności o środku  $p$  i stosunku  $\frac{b_1p}{a_1p}$ . Wobec

tego kąty  $\sphericalangle a_1pb_1$  są przystające i liczby  $\frac{b_1p}{a_1p}$  są równe, a stąd wynika, że wszystkie trójkąty

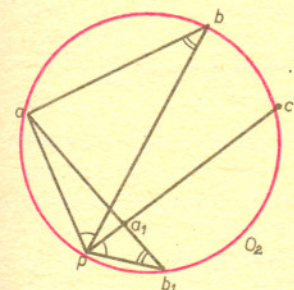
$a_ipb_i$  są podobne. W takim razie i wszystkie trójkąty  $a_i p c_i$  są podobne (rys. 16). Punkty  $c_i$  są więc obrazami odpowiednio punktów  $a_i$  przy złożeniu obrotu wokół punktu  $p$  o kąt  $\sphericalangle a_1pb_1$

z jednokładnością o środku  $p$  i stosunku  $\frac{c_1p}{a_1p}$ , a więc są wierzchołkami kwadratu.

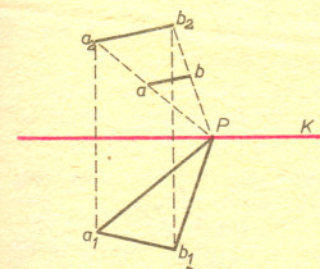
Dowód powyższy ma pewną zaletę. Można go bez istotnych zmian przepisać jako dowód ogólniejszego twierdzenia:

Jeżeli figury  $F_1$  i  $F_2$  są podobne i istnieje podobieństwo zgodne  $f$ , takie że  $f(F_1) = F_2$ , to zbiór wszystkich takich punktów, które dzielą w tym samym, ustalonym stosunku odcinki  $\overline{af(a)}$ , gdzie  $a \in F_1$ , jest figurą podobną do  $F_1$  lub wszystkie te punkty się pokrywają.

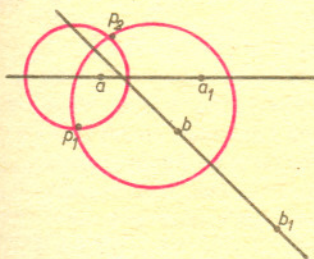
Rys. 16



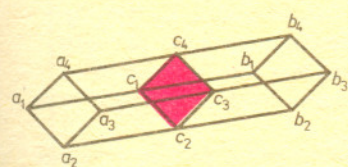
Rys. 11



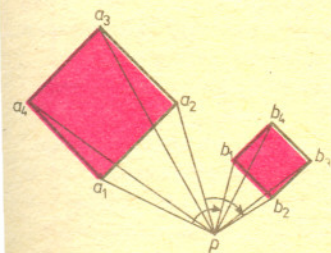
Rys. 12



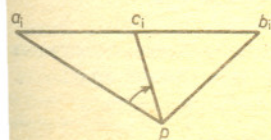
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15





# Współczesny model ewolucji gromad kulistych

Mgr Mirosław GIERSZ

Gromady kuliste są jednymi z najstarszych, a zarazem najprostszych systemów gwiazdowych. Ich wiek porównywalny z wiekiem Wszechświata (około 10 miliardów lat) sprawia, że są one ważnym ogniwem w zrozumieniu procesów zachodzących podczas formowania galaktyk. Prosta struktura gromad, wykazująca wiele symetrii, sprawia, że są one dla astronomów doskonałym „poligonem”, na którym uczą się oni badania dynamicznej ewolucji bardziej złożonych obiektów astronomicznych: jąder galaktyk, galaktyk i gromad galaktyk.

Gromady kuliste są masywnymi, sferycznie symetrycznymi systemami gwiazdowymi o rozmiarach 50–100 parseków, złożonymi z dziesięciu tysięcy do miliona gwiazd o koncentracji wzrastającej w kierunku centrum. Rozmiary gromad kulistych ograniczone są przez oddziaływanie z Galaktyką. Siły pływowe wywołane przez Galaktykę powodują „wyrwanie” z gromady gwiazd, których odległości od centrum przekraczają krytyczny promień zwany promieniem przyływowym.

Ewolucja gromad kulistych może być umownie podzielona na trzy okresy.

Pierwsza epoka związana jest z początkowym zapadaniem się (kolapsem) pierwotnego obłoku gazowego do stanu bliskiego równowagi, czyli stanu, w którym suma energii potencjalnej i podwojonej energii kinetycznej jest równa zero. Okres ten zwany jest gwałtowną relaksacją i jest najkrótszym okresem w życiu gromady kulistej. Trwa on od kilku do kilkunastu milionów lat. W wyniku gwałtownej relaksacji w gromadzie kulistej powstają dwa obszary: wewnętrzny obszar o dużej gęstości, zwany jądrem, charakteryzujący się izotropowym i zbliżonym do maxwellowskiego rozkładem prędkości oraz zewnętrzny, zwany halo, w którym gwiazdy poruszają się po wydłużonych orbitach.

Następna epoka związana jest z powolnym, trwającym wiele miliardów lat zapadaniem się wewnętrznych obszarów gromady kulistej i rozbudową halo. Okres ten zdominowany jest głównie przez ciągłą ucieczkę z gromady gwiazd o dużych prędkościach z praktycznie zerową energią całkowitą. Proces ten nazywany jest „parowaniem” gwiazd. W dużych systemach gwiazdowych, a więc i w gromadach kulistych głównymi czynnikami wymuszającymi ewolucję są odległe spotkania między gwiazdami powodujące małe zmiany prędkości przelatujących względem siebie gwiazd. Spotkania te podtrzymują proces „parowania” gwiazd z gromady, ponieważ w ich wyniku pojawiają się gwiazdy o dużych prędkościach. Prowadzą one także do wyrównywania energii kinetycznej gwiazd o różnych masach (ekwipartycja energii). Proces ten jest czynnikiem przyspieszającym rozdzielanie (segregację) gwiazd o różnych masach w gromadzie: gwiazdy cięższe gromadzą się w centralnych obszarach gromady, podczas gdy gwiazdy lżejsze poruszają się głównie w halo. „Parowanie” gwiazd z centralnych obszarów gromady kulistej powoduje wzrost energii wiązania jądra, czyli wzrost gęstości i średniej prędkości gwiazd. Na tym etapie ewolucji jądro gromady zwiększając swoją energię wiązania (zapadając się) dostarcza poprzez „parujące” gwiazdy energii do halo, powodując jego rozbudowę i powolne rozpraszanie w otaczającej przestrzeni. Tak więc zapadające się jądro jest źródłem energii pochłanianej przez resztę gromady.

Przedstawiony powyżej początkowy okres ewolucji gromady kulistej możemy łatwiej zrozumieć przez analogię do protogwiazd, w których wnętrzu nie „rozpały” się jeszcze reakcje termojądrowe. Zapadanie się centralnych obszarów jest głównym źródłem energii w obu przypadkach. Energia ta w protogwiazdach przekazywana na zewnątrz powoduje świecenie oraz rozpraszanie znacznej części otoczki w otaczającej przestrzeni. Dla gromad kulistych odpowiednikiem tego procesu jest „parowanie” gwiazd powodujące rozbudowę i rozpraszanie halo oraz zmniejszanie energii wiązania gromady. W protogwieździe po osiągnięciu ciągu głównego włączają się nowe, wydajniejsze źródła energii związane z reakcjami termojądrowymi zachodzącymi w jej wnętrzu („spalanie” wodoru w hel). Podobną sytuację spotykamy w gromadach kulistych, kiedy to liczne procesy związane z gwiazdami tworzącymi gromadę stają się ważnym czynnikiem określającym jej dalszą ewolucję.

Możemy do nich zaliczyć: wpływ z gromady materii odrzuconej podczas ewolucji gwiazd oraz powstawanie układów podwójnych w wyniku oddziaływań przyływowych między dwiema gwiazdami (energia ruchu względnego przelatujących obok siebie gwiazd, przekazywana przez siły pływowe, powoduje zwiększenie ich energii wewnętrznej — gwiazdy zaczynają oscylować). Wpływ materii związany z ewolucją gwiazd odgrywa ważną rolę na początku drugiej epoki, kiedy segregacja gwiazd nie jest wyraźna. Utrata masy przez najcięższe gwiazdy powoduje zmniejszenie średniej gęstości gwiazd i energii wiązania gromady. Pozostałości



Okres gwałtownej relaksacji związany jest z przebudową struktury pierwotnego obłoku gwiazdowego, czyli z procesami, które zachodzą w najkrótszej skali czasowej. Skala ta odpowiada okresowi, po którym gwiazda poruszająca się z typową dla gromady kulistej prędkością (około 10 km/s) pokona odległość równą promieniowi gromady. Jest to tzw. czas przelotu i w typowych gromadach kulistych wynosi około miliona lat.

W wyniku wielokrotnych, odległych spotkań między gwiazdami ich prędkości ulegają znacznym zmianom. Czas, po którym zmiany energii wywołane wielokrotnymi spotkaniami między gwiazdami będą równe początkowej energii kinetycznej, nazywamy czasem relaksacji. Typowy czas relaksacji w gromadach kulistych wynosi około miliarda lat.



Rozwiązanie zadania M 404. Niech  $n$  będzie

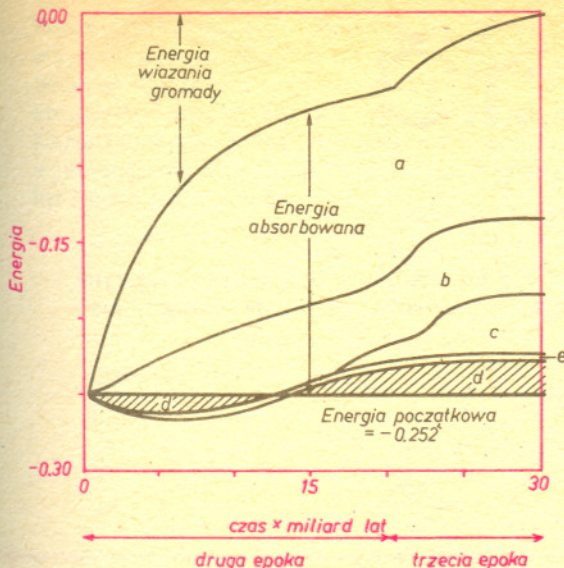
liczbą naturalną większą od  $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{2000}}$ .

Weźmy takie  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , że  $\sin \alpha = \frac{2n}{n^2+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Mamy } \alpha < \frac{\pi}{2000}, \text{ ponieważ } \sin \alpha &= \frac{2n}{n^2+1} < \frac{2}{2000} < \sin \frac{\pi}{2000} \text{ i } \cos \alpha = \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 + 1 - 4n^2}{(n^2+1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}} = \frac{n^2-1}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów  $\sin(k+1)\alpha = \sin k\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos k\alpha$ ,  $\cos(k+1)\alpha = \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha$  przez indukcję otrzymujemy, że  $\sin k\alpha$  i  $\cos k\alpha$  są wymierne dla dowolnej liczby naturalnej  $k$ . Weźmy teraz dowolny punkt  $A_0$  na danym okręgu i niech  $A_k$  będzie obrazem  $A_0$  przy obrocie (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) danego okręgu o kąt  $2k\alpha$  ( $k = 1, 2, \dots, 999$ ). Wówczas odległość  $A_k A_m = 2 \sin |k-m|\alpha$  jest liczbą wymierną dla dowolnych  $k, m \in \{0, 1, 2, \dots, 999\}$ .

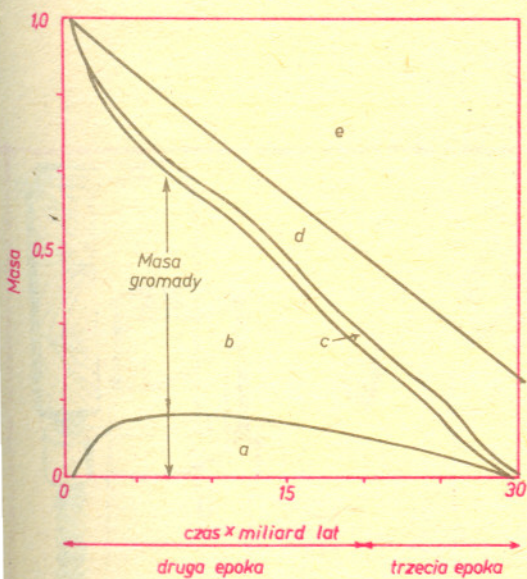




Energia wiązania gromady kulistej w zależności od czasu. Poszczególne obszary przedstawiają pochłanianą przez gromadę część energii produkowanej w wyniku: a) ewolucji gwiazd, b) powstawania układów podwójnych, c) powstawania układów potrójnych, d) relaksacji, e) powstawania fal uderzeniowych.



Rysunki zamieszczone w tekście pochodzą z pracy doc. J. Stodółkiewicza opublikowanej w materiałach z Sympozjum Nr 113 Międzynarodowej Unii Astronomicznej.



Zależność masy gromady kulistej od czasu. Poszczególne obszary oznaczają: a) masę gwiazd zwartych, b) masę gwiazd ciągu głównego, c) masę wyrzuconą z gwiazd w wyniku oddziaływania układów podwójnych z gwiazdą otoczenia, d) masę wyrzuconą w czasie ewolucji gwiazd, e) masę wyrzuconą w czasie procesów relaksacyjnych.

po zakończonej ewolucji gwiazd: białe karły, gwiazdy neutronowe i czarne dziury osiadają w wyniku segregacji mas w jądrze. Są to najmaszyniejsze obiekty w gromadzie — mają masy około  $1 M_{\odot}$  (w obecnie istniejących gromadach kulistych najmaszyniejszymi gwiazdami ciągu głównego są gwiazdy o masie około  $0,8 M_{\odot}$ ). Tak więc jądro gromady będzie się składało głównie z białych karłów, gwiazd neutronowych i czarnych dziur oraz niewielkiej domieszki gwiazd ciągu głównego. Pod koniec okresu gwałtownej utraty masy przez najcięższe gwiazdy pojawia się nowe źródło energii związane z powstawaniem układów podwójnych utworzonych ze zwartej gwiazdy i gwiazdy ciągu głównego. Układy podwójne w wyniku bliskich oddziaływań z gwiazdami otoczenia przekazują część swojej energii wiązania do gromady, czyli „ogrzewają” ją.

Energia produkowana przez układy podwójne na tym etapie ewolucji jest w stanie znacznie opóźnić zapadanie się jądra gromady kulistej. Jednakże w wyniku zderzeń między gwiazdami, „parowania” gwiazd z jądra i powstawania układów podwójnych liczba gwiazd ciągu głównego (niezbędnych w procesie tworzenia układów podwójnych w oddziaływaniach przytływowych) znacznie maleje. To powoduje, że układy podwójne powstające w oddziaływaniach między dwiema gwiazdami nie będą w stanie dostarczyć do gromady dostatecznej ilości energii, co

doprowadzi do ponownego, szybszego zapadania się jądra (zderzenia między gwiazdami powodują utratę energii kinetycznej gwiazd, przez co zwiększa się energia wiązania jądra). „Parowanie” gwiazd, wpływ materii związanej z ewolucją gwiazd oraz procesy związane z układami podwójnymi znacznie zmniejszają masę (liczbę gwiazd) i energię wiązania gromady. Tak więc w ostatniej fazie tej epoki gromada posiada małe, bardzo gęste jądro złożone praktycznie w całości z gwiazd zwartych i rozbudowane halo. Gromadę kulistą w tym okresie możemy porównać do gwiazdy, w której wnętrzu wyczerpało się paliwo jądrowe. Jądro gwiazdy pozbawione termojądrowego źródła energii zapada się. Energia grawitacyjna wyzwolona w procesie kolapsu przekazywana jest do otoczki powodując jej rozbudowę, a nawet częściowe rozproszenie. Kolaps jądra trwa aż do momentu włączenia reakcji termojądrowych, w których biorą udział cięższe pierwiastki. Podobnie jest w gromadzie kulistej, kiedy to „pojawienie” się nowego źródła energii rozpoczyna trzecią epokę w jej życiu. Źródłem energii w trzeciej epoce są układy podwójne powstałe w oddziaływaniach między trzema gwiazdami, głównie białymi karłami i gwiazdami neutronowymi. Układy te mogą efektywnie ogrzewać system w oddziaływaniach z gwiazdami otoczenia jedynie w przypadku bardzo dużych gęstości (miliard gwiazd na parsek sześcienny; odpowiada to średniej odległości między gwiazdami około 200 jednostek astronomicznych) w jądrze zawierającym małą liczbę gwiazd (kilkaset). Ponieważ w okresie tym masa i energia wiązania gromady kulistej jest małym

ułamkiem początkowej masy i energii wiązania, źródło energii związane z układami podwójnymi (powstałymi w oddziaływaniach między trzema gwiazdami) staje się bardzo efektywne.

Energia wydzielona przez te układy spowoduje powolne malenie gęstości centralnej gromady. Rozpocznie się ekspansja. Trzecia epoka trwa aż do momentu rozproszenia gromady kulistej w wyniku „parowania” gwiazd.

Okresowe przejścia gromady przez płaszczyznę Galaktyki są dodatkowym źródłem energii. W czasie tych przejść powstają fale uderzeniowe ogrzewające gromadę. Jednakże energia dostarczona w wyniku tego procesu do typowej gromady jest mała w porównaniu z innymi źródłami.

Przedstawiony opis ewolucji gromad kulistych wydaje się być prosty i jednoznaczny. Jednakże w rzeczywistości kryje on w sobie wiele zagadek i nie wyjaśnionych jeszcze problemów. Nie dziwno się jednak. Wszakże badania gromad kulistych mają bardzo krótką historię, której początki datuje się na 1917 r. Prace powstałe na początku lat osiemdziesiątych zdają się wskazywać, że jesteśmy bliscy momentu, kiedy przewidywania modeli teoretycznych będzie można porównać z danymi obserwacyjnymi, co przybliży nas do rozwiązania wielu zagadek związanych z obserwacjami obiektów pozagalaktycznych.

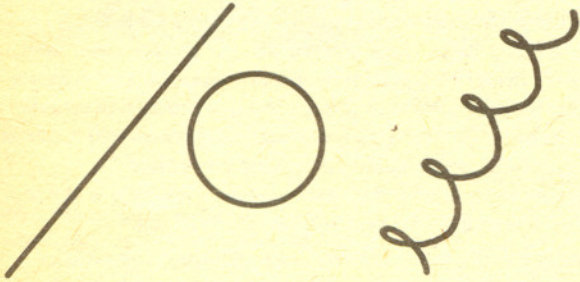




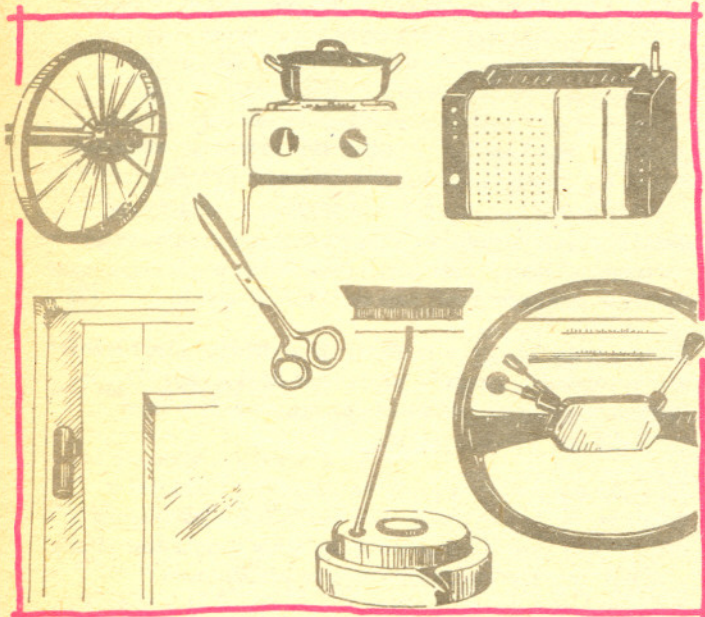
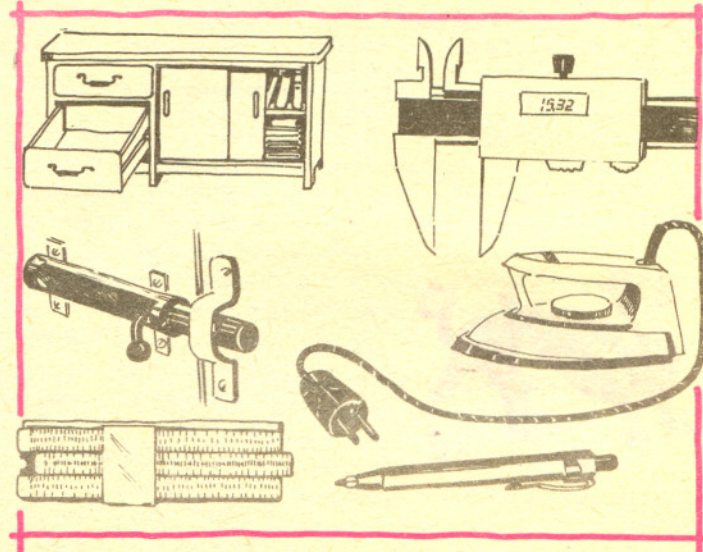
# mała delta

## Nie można się stoczyć

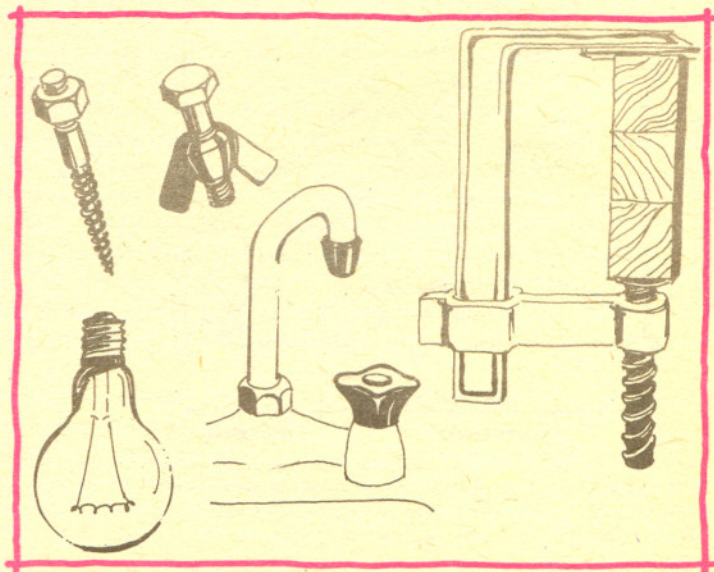
Od ponad 150 lat wiadomo, że jedynymi krzywymi, które ślizgają się po sobie, są prosta, okrąg i linia śrubowa.



To, że te linie rzeczywiście się po sobie ślizgają, było wiadomo od dawna. Wykorzystuje się to od stuleci w technice. Mamy różne suwaki: od zasuwki do potencjometrów w radiach i telewizorach. Mamy różne urządzenia obrotowe: od osi wozu do kurków gazowych. Fakt, że śruba ślizga się po sobie, najlepiej widać, gdy nakręcać na nią mutrę.

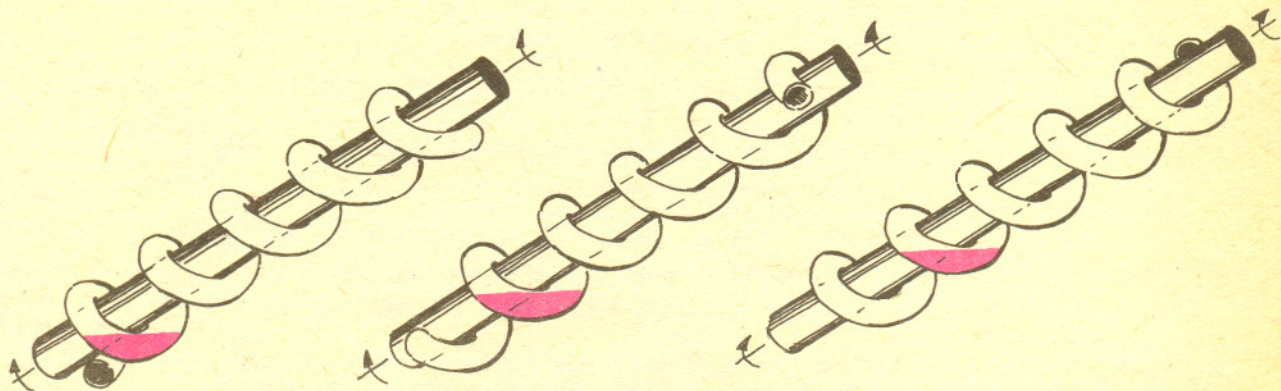


Rozliczne, szalenie wygodne zastosowania ślizgających się po sobie krzywych zachęcały inżynierów do poszukiwania innych krzywych o tej własności. Od początku XIX stulecia wiadomo jednak, że poszukiwania takie nie mogą przynieść żadnego efektu. Jeżeli spojrzymy na rysunek śruby, zobaczymy, że linia, jaka przedstawia ją na płaszczyźnie, biegnie w górę, a potem w dół, potem znów w górę, znów w dół itd. Może to nam nasunąć pomysł rewelacyjnego urządzenia.

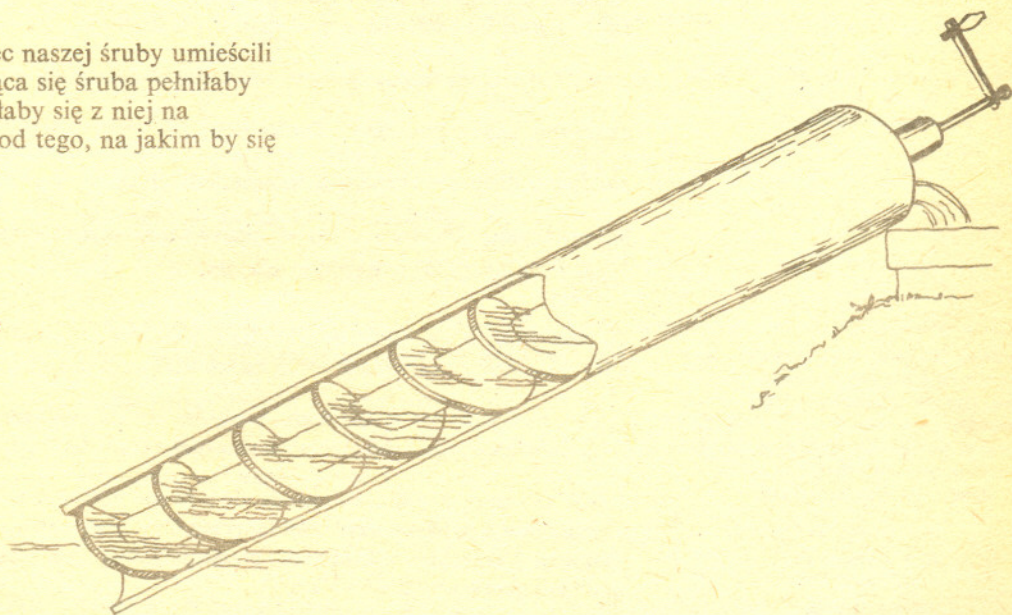




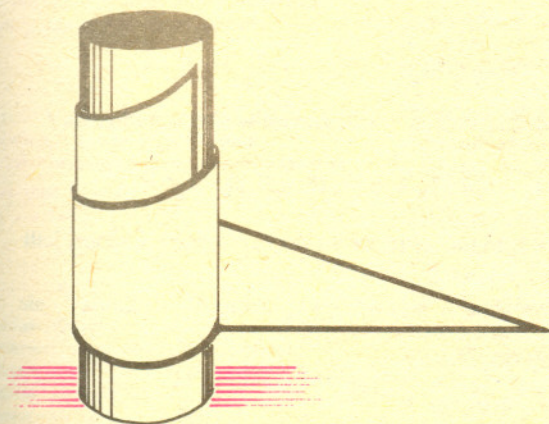
Weźmy rurkę wygiętą w kształcie śruby. Pochylmy ją tak, by fragmenty rurki rzeczywiście biegly w dół. Nalejmy do rurki trochę wody. A następnie obracamy rurkę wokół osi. Przy właściwym wyborze kierunku obrotu zobaczymy ciekawe zjawisko. Woda wybierając dla siebie możliwie najniższe położenie będzie się podnosiła do góry.



Gdybyśmy teraz dolny koniec naszej śruby umieścili w naczyniu z wodą, obracająca się śruba pełniłaby rolę pompy — woda wylewałaby się z niej na poziomie znacznie wyższym od tego, na jakim by się wlewała.



Zauważmy, że nie jest nam potrzebna rurka, a wystarczy tylko śrubowe korytko. Takie urządzenie było już w Starożytności używane do nawadniania pól i znane jest pod nazwą śruby Archimedesesa.

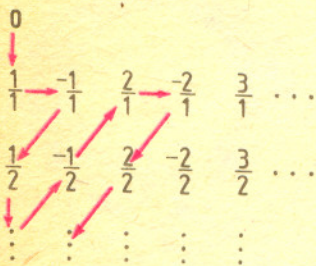


Jak to działa? Odpowiedź jest prosta. Śruba to równia pochyła nawinięta na walec. Podnoszenie wody w ten sposób wymaga mniej wysiłku niż gdyby ją po prostu podnosić w naczyniu. Genialność wynalazku — zwykłego pochylenia śruby — polega na tym, że z naszej równi pochyłej ciężar nie może się stoczyć, co jest największą wadą zwykłej równi.

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*



Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi). Na przykład zbiór liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  jest przeliczalny, gdyż wszystkie jego elementy można ponumerować według poniższego schematu:



Liczba  $stf$  to stopień wielomianu  $f$  — jest to największy wykładnik potęgi istotnie występującej w zapisie wielomianu.

**Twierdzenie (Cantora):** Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  jest nieprzeliczalny.  
**Dowód:** Użyjemy tak zwanej metody przekątniowej. Załóżmy, że wszystkie liczby rzeczywiste można ponumerować:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Ustawmy wszystkie rozwinięcia dziesiętne części ułamkowych tych liczb w tablicę

$$\begin{array}{l} x_1 = \dots, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ x_2 = \dots, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = \dots, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

W oparciu o cyfry położone na przekątnej tej tablicy zbudujemy nową liczbę rzeczywistą  $b$  zawartą między 0 i 1 w następujący sposób:  $n$ -tą cyfrą po przecinku jej rozwinięcia dziesiętnego jest liczba  $a_{nn} - 1$ , gdy  $a_{nn} \neq 0$  i 1, gdy  $a_{nn} = 0$ . Wtedy  $b$  różni się od liczby  $x_n$  przynajmniej na  $n$ -tym miejscu po przecinku. Tak więc  $b \neq x_n, n = 1, 2, \dots$ , co przeczy naszemu założeniu.

Stopniem liczby algebraicznej  $a$  jest najmniejszy stopień wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego  $a$  jest pierwiastkiem.

# Liczy przestępne i liczby Liouville'a

Mgr Jarosław GÓRNICKI

W *Delcie* 7/1984 Andrzej Pelc pisał o różnego rodzaju małych zbiorach liczb rzeczywistych. Między innymi wspomniał, iż liczby rzeczywiste można podzielić na dwa rozłączne podzbiory, z których każdy będzie w jakimś sensie mały. Jeden z takich podziałów, powstający w sposób naturalny, jest podany na końcu artykułu.

Zacznijmy od pojęcia liczby algebraicznej.

Mówimy, że liczba rzeczywista  $\alpha$  (podobnie liczba zespolona) jest algebraiczna, jeśli istnieje wielomian

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

o współczynnikach wymiernych, którego  $\alpha$  jest pierwiastkiem.

Nietrudno teraz zauważyć, że każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną ( $q \in \mathbb{Q}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x - q$ ). Jednak nie tylko liczby wymierne są liczbami algebraicznymi. Są nimi na przykład  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2+3\sqrt{3}}$  jako pierwiastki wielomianów:  $x^2 - 2, x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11$ .

Mimo iż większość liczb, z którymi spotykamy się, to liczby algebraiczne, jest ich jednak mało w porównaniu ze wszystkimi liczbami rzeczywistymi. Cantor w 1873 roku pokazał, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. A oto dowód:

Równanie  $F(x) = 0$  spełnione przez jakąś liczbę algebraiczną mnożymy przez wspólny mianownik wszystkich jego współczynników.

$$\text{Otrzymujemy wówczas równanie } f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych nie wszystkich równych zeru. Liczbę  $w(f) = stf + \sum_{i=0}^{stf} |b_i|$

nazywamy wagą wielomianu  $f$ . Dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  zbiór  $\{f: w(f) = k\}$  jest skończony, a więc

$$\text{zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych } Z[x] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f: w(f) = k\}$$

jest przeliczalny. Ponieważ każdy wielomian ma skończoną liczbę pierwiastków, więc  $A = \bigcup_{f \in Z[x]} \{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0\}$  jest przeliczalny.

To twierdzenie wobec faktu, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny, świadczy o istnieniu liczb rzeczywistych nie będących liczbami algebraicznymi.

Liczy rzeczywiste nie będące liczbami algebraicznymi nazywamy liczbami przestępnymi (jak powiedział Euler, „przestępują one możliwości metod algebraicznych”).

Jednak ta teoriomnogościowa metoda nie była początkiem teorii liczb przestępnych. Zapoczątkował ją blisko trzydzieści lat przed Cantorem matematyk francuski Joseph Liouville podając w 1844 roku przykład liczby przestępnej. Swą konstrukcję oparł na twierdzeniu zwanym *twierdzeniem Liouville'a*.

Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  będzie liczbą algebraiczną stopnia  $n > 1$ . Istnieje wówczas taka stała  $C > 0$ , że dla każdej liczby wymiernej  $\frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ) zachodzi nierówność

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}$$

**Dowód:** Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  będzie liczbą algebraiczną stopnia  $n > 1$ . Istnieje więc taki wielomian  $f$  stopnia  $n$ , że

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \quad (b_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n)$$

Gdy  $\frac{p}{q}$  jest liczbą wymierną i  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > 1$ , to teza twierdzenia jest oczywiście spełniona, jeśli tylko  $C \leq 1$ . Obierzmy dowolną liczbę wymierną  $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ . Skoro  $n > 1$ , liczba  $\frac{p}{q}$  może być pierwiastkiem wielomianu  $f$  (dlaczego?).

$$\text{Wobec tego mamy } \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} q + \dots + b_1 p q^{n-1} + b_0 q^n}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^n}$$



**Twierdzenie (Lagrange'a o wartości średniej):**  
Jeżeli funkcja liczbową  $f$  jest ciągła w przedziale domkniętym  $[a, b]$  i różniczkowalna w przedziale otwartym  $(a, b)$ , to istnieje  $r \in (a, b)$  takie, że

$$f(b) - f(a) = f'(r) \cdot (b - a).$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) \right| = |f'(r)| \cdot \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \leq M \cdot \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|,$$

gdzie  $r$  leży między liczbami  $\alpha$  i  $\frac{p}{q}$ ,  $M = \sup \{f'(x) : |x - \alpha| \leq 1\}$ .

Zatem

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) \right|}{|f'(r)|} \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

Za  $C$  wystarczy wziąć mniejszą z liczb 1 i  $\frac{1}{2M}$ .

Liouville rozważał liczby nazwane później liczbami Liouville'a.

Liczbę rzeczywistą  $\alpha$  nazywamy liczbą Liouville'a, gdy dla każdego  $n \geq 1$  nierówność  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$  jest spełniona dla nieskończenie wielu par  $(p, q)$  liczb całkowitych względnie pierwszych ( $q > 0$ ).

Pokażemy teraz, że każda liczba postaci  $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{10^{j!}}$ , gdzie  $c_j$  są niezerowymi liczbami jednocyfrowymi, jest liczbą Liouville'a.

Niech  $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{10^{j!}}$ . Liczba ta jest wymierna i możemy przedstawić ją w postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $q = 10^{n!}$ .

Zachodzi wtedy

$$\left| x_0 - \frac{p}{q} \right| = \frac{c_{n+1}}{10^{(n+1)!}} + \frac{c_{n+2}}{10^{(n+2)!}} + \dots < \frac{1}{10^{(n+1)!}} \left( 9 + \frac{9}{10^{(n+2)}} + \frac{9}{10^{(n+3)}} + \dots \right) \leq \frac{10}{10^{(n+1)!}},$$

a wobec tego dla dowolnego naturalnego  $n$

$$\left| x_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{10}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{10^{n!} 10^{n!}} \leq \frac{1}{10^{n!n}} = \frac{1}{q^n}.$$

Zniecierpliwiony Czytelnik ma prawo zapytać: ale co to wszystko ma wspólnego z liczbami przestępnymi? Wyjaśnia nam to następujące twierdzenie:

Każda liczba Liouville'a jest przestępna.

**Dowód:** Załóżmy, że liczba  $y$  jest liczbą Liouville'a i że jest to liczba algebraiczna stopnia  $n > 1$ . Z twierdzenia Liouville'a mamy:

$$(*) \quad \bigvee_{C > 0} \bigwedge_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{q \in \mathbb{N}} \left| y - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}.$$

Niech  $k \in \mathbb{N}$  będzie taką liczbą, że  $C \cdot 2^k \geq 2^n$  i  $k \geq n$ . Ponieważ z drugiej strony  $y$  jest liczbą Liouville'a, więc istnieją liczby  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 1$  takie, że  $\left| y - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$ . Łącząc to z warunkiem (\*)

otrzymujemy  $\frac{1}{q^k} > \frac{C}{q^n}$ , skąd  $C < q^{n-k} \leq 2^{n-k} \leq C$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

W ten sposób Liouville wykazał jako pierwszy istnienie liczb przestępnych. Zgodnie z naszymi rozważaniami na przykład liczba 0,110001 ..., w której jedynki występują na miejscach o numerach  $n!$  po przecinku, jest przestępna.

Liczy przestępne zaprzętały najznamienitsze umysły, między innymi Charlesa Hermite'a, Ferdinanda Lindemanna, Davida Hilberta, Aleksandra Gelfonda. W wyniku ich pracy wykazano na przykład, że liczby:  $e$  (Hermite, 1873),  $\pi$  (Lindemann, 1882) są liczbami przestępnymi (patrz *Delta* 3/1983). Rozwiązano również VII problem Hilberta z 1900 roku — każda liczba postaci  $a^b$ , gdzie  $a$  jest liczbą algebraiczną różną od zera i jedności,  $b$  zaś jest dowolną liczbą algebraiczną niewymierną, jest liczbą przestępną (Gelfond, 1934 i Schneider, 1935).

Przykładem podziału, o którym była mowa na początku, jest zbiór liczb Liouville'a (jest on miary 0) i jego dopełnienie będące zbiorem cienkim.



**Rozwiązanie zadania F 177.** Ponieważ otwarki są bardzo małe, to można przyjąć, że w każdej chwili stan gazu w zbiorniku i w obu naczyniach jest stanem równowagi. Wszystkie cząsteczki trafiające w otworek przechodzą na drugą stronę. Ich liczba  $N$  na jednostkę powierzchni otwarka jest proporcjonalna do koncentracji cząsteczek  $n$  i średniej prędkości  $v_x$ :  $N \sim n v_x$ . Ponieważ  $n \sim \frac{p}{T}$ , a  $v_x \sim \sqrt{T}$ , to otrzymujemy, że

$N \sim \frac{p}{\sqrt{T}}$ . Przenoszona przez cząsteczki

energia  $E$  jest proporcjonalna do  $N$  i średniej energii cząsteczki, mamy więc:  $E \sim N \cdot T \sim p \sqrt{T}$ . W stanie ustalonym strumienie cząstek i energii wypływające ze zbiornika i wpływające do niego muszą być równe.

Otrzymujemy więc układ równań:

$$\frac{2p_x}{\sqrt{T_x}} = \frac{p}{\sqrt{2T}} + \frac{p}{\sqrt{T}},$$

gdzie  $p_x$  i  $T_x$  oznaczają wielkości charakteryzujące zbiornik. Rozwiązaniem są wartości  $T_x = T \sqrt{2}$ ,  $p_x = (\sqrt{2} + 1) 2^{-5/4} p$ . ( $p_x \approx 1,02 p$ ).

Redakcja pragnie zwrócić uwagę na różnicę w dowodach istnienia liczb przestępnych — Cantor wykazał, że takie liczby muszą istnieć (ponieważ nie wszystkie liczby rzeczywiste są algebraiczne), Liouville zaś podał konkretny przykład.



# Przyroda jednak lubi próżnię

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

W artykule, tym posługuję się językiem fizyki klasycznej. Do opisu wnętrza atomu, jądra i protonu właściwy jest język fizyki kwantowej, w którym pojęcie ruchu nie jest dobrze określone, gdyż nie ma sensu pojęcie toru cząstki. Zamiast o ruchu należałoby raczej mówić o rozkładzie prędkości.



Często w związku z opisywanymi doświadczeniami mówi się o głębokim rozpraszaniu nieelastycznym (w żargonie polsko-angielskim rozpraszanie jest głębokonieelastyczne). Słowo „głębokie” wiąże się oczywiście z faktem, iż elektrony rozpraszają się na głębokich warstwach protonu. A nieelastyczne? Otóż, w wyniku takiego głębokiego rozpraszania proton zostaje mocno odrzucony i zamienia się na grupę wielu różnych cząstek. Tylko nieliczne elektrony wywołują reakcję elastyczną, w której ta grupa sprowadza się do pojedynczego protonu. W opisywanym doświadczeniu nie chcemy narzucać żadnych ograniczeń na dalsze losy odbitego protonu, gdyż ograniczenia takie wpływają na rozkład kierunków rozpraszonych elektronów. Badamy więc ten rozkład zupełnie nie licząc się z tym, co stało się z protonem.

Zdążyliśmy przyzwyczać się do faktu, że atom nie jest cząstką niepodzielną, że ma nietrywialną strukturę wewnętrzną. Wiedzano o tym w zasadzie już w połowie XIX wieku, kiedy to okazało się, że atomy każdego pierwiastka wysyłają i pochłaniają charakterystyczne dla siebie barwy światła. Łatwo wyobrazić sobie, że w trakcie takich procesów atomy muszą zmieniać się w ściśle określony sposób — muszą więc mieć pewną określoną strukturę, której szczegóły należy jakoś zbadać. Udało się to osiągnąć dopiero wiele lat później. W 1911 roku Rutherford wpadł na pomysł rewelacyjnej w tych czasach interpretacji danych doświadczalnych uzyskanych przy rozpraszaniu cząstek alfa na cienkiej blaszce ze złota. Warto wspomnieć, że dobrze już znano wtedy własności cząstek alfa i wiedzano, że ich masa jest czterokrotnie większa od masy atomu wodoru, zaś ładunek elektryczny jest dodatni i dwukrotnie większy od ładunku elektronu.

Przechodzące przez złotą blaszkę cząstki alfa rozbiegały się w różnych kierunkach w taki sposób jakby nie natrafiały w blaszkę na żadną materię, a jedynie zmieniały swój lot w wyniku działania pewnej siły przypominającej siłę elektrostatyczną. Zakładając, że siła ta to nic innego jak znana dobrze siła Coulomba, Rutherford był w stanie wyznaczyć z wyników doświadczenia wartość ładunku elektrycznego centrum rozpraszającego cząstki alfa. W ten sposób zostały położone fundamenty współczesnego modelu atomu, sprawdzone wielokrotnie w różnych niezależnych doświadczeniach. Jak wiemy, atom w tym modelu jest praktycznie całkowicie pusty. W wypełnionej polami elektrycznymi próżni wewnątrzatomowej poruszają się bardzo lekkie pozbawione struktury wewnętrznej elektrony, które łatwo można oderwać od atomu. W samym środku znajduje się bardzo ciężkie jądro o średnicy 100 000 razy mniejszej od średnicy atomu.

Fakt, że jądro atomowe ma, w przeciwieństwie do elektronu pewną własną strukturę, został wkrótce udowodniony przez rozbicie jądra na kawałki. Zmiany tej struktury związane z wysyłaniem i pochłanianiem charakterystycznego promieniowania (promienie  $\gamma$ ) zostały szczegółowo zbadane później.

Składnikami jąder atomowych są protony i neutrony związane ze sobą potężnymi siłami wewnątrzjądrowymi. Strukturę tych cząstek zaczęto badać poważnie dopiero po II wojnie światowej.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że protony i neutrony muszą mieć bardzo bogatą strukturę. Przecież ogromne energie związane z działaniem sił jądrowych powinny wystarczyć, by same pola tych sił produkowały różne cząstki i tym samym tworzyły pewną wewnętrzną konstrukcję. Fakt ten należało jednak jakoś uzasadnić doświadczalnie. I tu właśnie zaczęły się mnożyć niepokonalne przez długi czas kłopoty. Okazało się bowiem, że w wyniku reakcji rozpraszania protonów na jądrach atomowych powstaje ogromna liczba zupełnie nowych cząstek. Żadna z nich nie mogła być uznana za składnik protonu i żadna też nie dawała się bezspornie zaliczyć do grona jego, oczekiwanych przez fizyków, stanów wzbudzonych. Co więcej, nie było nawet jasne, które z cząstek można by uznać za promieniowanie wewnątrzprotonowe. W tej sytuacji postanowiono wrócić do idei dawno już zapomnianego doświadczenia Rutherforda. Innymi słowy, zdecydowano się na zawieszenie badań wewnątrzprotonowych pól jądrowych, których najmniejsze zakłócenie wprowadza tak ogromny chaos. Zaczęto badać wewnątrzprotonowe pola elektromagnetyczne. Cząstką sondującą te właśnie pola mógł być elektron, który nie bierze udziału w reakcjach jądrowych i nie powinien podlegać działaniu żadnych pól wewnątrzprotonowych, z wyjątkiem elektromagnetycznego. Założono więc, że elektron oddziałuje jedynie z ładunkami elektrycznymi rozmieszczonymi w protonie i to według schematu znanego od czasów Maxwella. Wtedy szybko już okazało się (Hofstadter, 1956 rok), że od dawna oczekiwana struktura istnieje. Dopiero jednak budowa nowych, wysokoenergetycznych akceleratorów elektronów umożliwiła po roku 1969 dokładne jej badania.

Przy małych energiach przekazywanych protonowi przez uderzający elektron (rozpraszanie prawie bez zmiany kierunku lotu elektronu), gdy elektron zaledwie muska powierzchnię protonu, wyniki były zgodne z oczekiwaniami. O polach elektromagnetycznych nie dało się w tym przypadku powiedzieć nic ciekawszego niż to, że zostały wytworzone przez duże ilości naładowanych cząstek wyprodukowanych przez potężne pole jądrowe. Gdy jednak zaczęto sondować głębsze warstwy protonu, rejestrując elektrony, które utraciły podczas zderzenia dosyć dużą energię (rzędu masy protonu i więcej), obrazek wnętrza nieoczekiwanie zmienił się. Wnętrze to znów, podobnie jak prawie cały atom, okazało się być wypełnione jedynie polem elektromagnetycznym, którego źródłem musiały być jakieś cząstki wewnętrzne o rozmiarach zbyt małych na to, by elektron był w stanie uderzyć w nie bezpośrednio. Warto przypomnieć, że elektrodynamika Maxwella wyklucza możliwość, by źródłem pola wewnątrz protonu były (odkryte uprzednio) ładunki rozmieszczone na powierzchni (prawo Gaussa).

Niestety, odkryta w ten sposób prawie opróżniona struktura wnętrza protonu nie mogła być podobna do struktury atomu. Dane doświadczalne wykluczały możliwość, by w środku tkwiło jakieś ciężkie jądro protonowe. Małeńkie składniki protonu musiały szybko poruszać się, co dowodziło, że są dosyć lekkie (może nawet tak lekkie, jak elektron).





Trzeba było jeszcze skorzystać z wyników rozpraszania elektronów i neutrin na neutronach oraz założyć, że siły jądrowe działają na wszystkie kwarki tak samo.



**Rozwiązanie zadania F 176.** W czasie rozprężania gazu do wysokości  $x$  (zakładamy, że jest to proces powolny) jego ciśnienie  $p_x$  musi być równe sumie ciśnienia wywieranych przez rtęć i atmosferę.

W tym przypadku:

$$p_x = L\varrho g + (2L - x)\varrho g = (3L - x)\varrho g,$$

gdzie  $\varrho$  jest gęstością rtęci, a  $g$  przyspieszeniem pola grawitacyjnego Ziemi. Z równania stanu gazu wynika, że temperatura gazu  $T$  musi spełniać zależność:

$$\frac{p_x \cdot x}{T} = \text{const.}$$

Warunek równowagi ma więc postać

$$T = \frac{T_0}{2L^2} (3L - x)x.$$

Temperatura jako funkcja  $x$  ma maksimum dla  $x_m = 1,5 L$ . Odpowiadająca  $x_m$

temperatura  $T_m = \frac{9}{8} T_0$  jest maksymalną

temperaturą, przy której gaz i pozostała w górnej części rurki rtęć mogą być w równowadze; dla każdej wyższej temperatury rtęć musi zostać wyparta. Gaz należy więc ogrzać co najmniej do temperatury

$$T_m = \frac{9}{8} T_0.$$

## Paradoks

Kartami szczególnie pożądanymi przez grających w remika są jokery — dwa czerwone i dwa czarne, przy czym ich kolor w grze nie odgrywa roli. Często po rozdaniu kart gracz chwali się:

„A ja mam jokera”, czasem nawet pokazuje go; a potem dodaje

„A może mam i drugiego”. Zaskakujące jest, iż nawet jeśli

byliśmy pewni, że nie blefował i rzeczywiście miał pierwszego

jokera, to po pokazaniu go prawdopodobieństwo posiadania

drugiego zwiększyło się. Cóż to za czary? Otóż po zobaczeniu

jokera znamy jego kolor i ta dodatkowa informacja zmienia

prawdopodobieństwo.

Wyjaśnijmy to na prostym przykładzie. Z talii złożonej

z czterech kart: jokera czarnego ( $jc$ ), jokera czerwonego ( $jez$ ), asa pik ( $ap$ ) i asa kier ( $ak$ ), wyciągnięto dwie karty. Jest to więc jeden z układów:  $\{jc, jez\}$ ,  $\{jc, ap\}$ ,  $\{jc, ak\}$ ,  $\{jez, ap\}$ ,  $\{jez, ak\}$ ,  $\{ap, ak\}$ . Informacja, że jedną z dwóch wyciągniętych kart jest joker, wyklucza ostatni układ. Prawdopodobieństwo, iż

wyciągnięto dwa jokery, jest więc równe  $\frac{1}{5}$ . Natomiast

informacja, że jedną z kart jest joker czarny, wyklucza ostatnie trzy układy. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia układu dwóch

jokerów jest więc wtedy równe  $\frac{1}{3}$ .

Fakt ten wprowadził następną dowolność. Nie wiadomo było, ile jest tych cząstek i jak rozdzielony jest między nimi całkowity ładunek protonu (całkowity ładunek skórki protonowej wynosi zero). Z wyników rozpraszania elektronów nie można już było nic więcej wydusić. Wtedy sięgnięto po inną sondę — po neutrina i antyneutrina.

Neutrina, znane już od lat trzydziestych naszego wieku, również nie oddziałują z wewnątrzprotonowymi polami jądrowymi, a ponieważ są elektrycznie neutralne, także z polami elektromagnetycznymi. Wyjątkowo słabe oddziaływania neutrina z materią (nie bez powodu zwane oddziaływaniami słabymi) mają pewną istotną cechę uniwersalności. Biorąc w nich udział wszystkie cząstki z wyjątkiem fotonu. Wszystkie też działają na neutrina taką samą siłą. Oznacza to, że odpowiedzialny za tę siłę słaby ładunek jest dla wszystkich cząstek jednakowy.

Łatwo teraz domyślić się, jak analizowano strukturę protonu za pomocą neutrin. Założono mianowicie, że ładunki słabe składników protonu są takie same, jak odpowiednie ładunki wszystkich innych cząstek. Przy tym założeniu szybko odtworzono obrazek znany uprzednio z wyników rozpraszania elektronów.

Co więcej, uniwersalność ładunków słabych pozwoliła wyznaczyć parametry ruchu składników protonu, a to wraz z odpowiednimi danymi z oddziaływania antyneutrin pozwoliło na pełne rozszyfrowanie struktury. Okazało się wtedy (choć podejrzewano to wcześniej), że proton składa się z kwarków, hipotetycznych poprzednio cząstek, które fizycy wprowadzili do swych teorii po to, by wyjaśnić pewne cechy symetrii obserwowane w świecie cząstek elementarnych (Gell-Mann i Zweig, rok 1964). Teraz (był to rok 1973) istnienie kwarków zostało udowodnione.

Potwierdzono, że w protonie znajdują się trzy kwarki o ładunkach równych  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  i  $-\frac{1}{3}$  ładunku

elementarnego, oraz że kwarki mają spin taki jak elektron ( $\frac{1}{2} \hbar$ ). Co więcej, przy okazji

stwierdzono, że wewnątrz protonu (i neutronu też, a zapewne i innych cząstek zbudowanych z kwarków) jest pusta dziura, w której kwarki poruszają się prawie swobodnie (oddziaływania elektromagnetyczne i słabe są znacznie słabsze od jądrowych, a te okazały się silne tylko w protonowej skorupie). Odkrycie to dało impuls do budowy nowych teorii, w których wszystkie rodzaje oddziaływań są w pewnych warunkach słabe i takie same.

Na zakończenie warto podkreślić, że przy założeniu ścisłego obowiązywania wewnątrz protonu praw odkrytych poprzednio poza protonem, istnienie kwarków zostało udowodnione ponad wszelką wątpliwość. Nie ma tu żadnej różnicy z odkryciem jądra atomowego przez Rutherforda. A to, że niektórym nie podoba się owa skórka przepuszczająca swobodnie elektrony i neutrina, a nie wypuszczająca na zewnątrz kwarków? Według Galileusza odkrywanie prawdy polega na próbach wyjaśnienia nowych faktów za pomocą znanych już praw. Dopiero gdy jesteśmy pewni, że jest to niemożliwe, stajemy w obliczu konieczności zmian fundamentów naszych teorii. Nie jest też prawdą, że obowiązująca obecnie teoria pól kwantowych nie może być obalona przez żaden fakt doświadczalny. Po umieszczeniu w ramach tej teorii kwarkowej struktury protonu i innych cząstek obraz świata złożonego z cząstek i pól kwantowych stał się prawie kompletny. Nie ma w nim już prawie miejsca na możliwe dowolności, co z pewnością przybliży dzień odkrycia faktów, które zmuszą nas do jego całkowitej przebudowy. Należy sądzić, że w nowym obrazie świata nie ostaną się takie twory, jak kwarki, elektrony, neutrina i fotony, ani też współczesne wyobrażenia o czasie i przestrzeni. Potrzeba takiej rewolucji wydaje się wcale istotna. Trzeba bowiem przyznać, że domknięcie kwantowego obrazu świata, jakim było rozszyfrowanie struktury cząstek, nie stało się żadnym istotnym osiągnięciem cywilizacyjnym. Ani w sferze ducha, ani materii (nie ma jak skorzystać z energii rozszczepienia protonu, bo nie można go rozbić na kwarki).



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 103 /WT=2,62/ i 104 /WT=1,83/

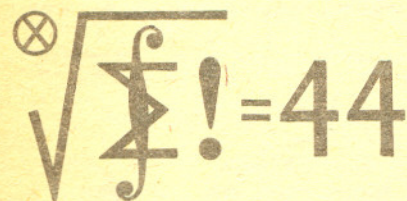
Tomasz Komorowski	- Świdnik	46,12pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	44,91pkt
Jan Ciach	- Ostrowiec Św	44,01pkt
Krzyszyna Witek	- Ostrow Maz.	43,96pkt
Anna Gluza	- Toruń	42,48pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- BielskoBiała	40,97pkt

44 punkty: pan T. Komorowski po raz drugi,  
pan P. Kamiński po raz czwarty, pan J. Ciach  
po raz pierwszy.

Uwaga! Panie w ofensywie!

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Rozwiązanie zadań z numeru 3/1985

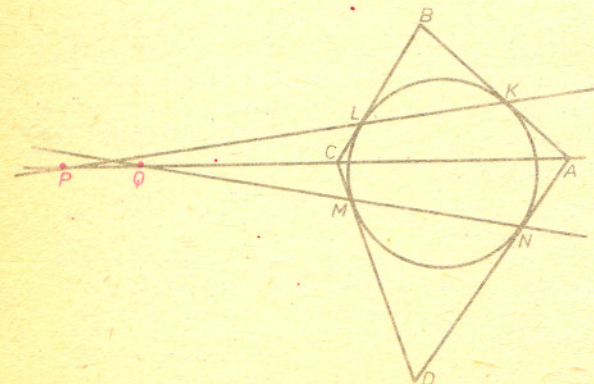
Przypominamy treść zadań:

107. Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na kole.  $K, L, M, N$  są odpowiednio punktami styczności boków  $AB, BC, CD, DA$  z kołem. Udowodnić, że proste  $KL, MN$  i  $AC$  przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

108. Udowodnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu  $(x_n)$ , w którym  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$  ( $a, b, c$  — dane liczby),  $x_{n+3} = (x_n + x_{n+1} + x_{n+2})/3$ .

107. Jeśli którekolwiek dwa z odcinków  $\overline{KL}, \overline{MN}, \overline{AC}$  są równoległe, to mają one wspólną symetralną, będącą osią symetrii czworokąta  $ABCD$ ; jest ona wówczas także symetralną trzeciego z tych odcinków, a więc wszystkie te odcinki są równoległe. Odrzucając ten przypadek, przyjmijmy, że prosta  $KL$  przecina prostą  $AC$  w punkcie  $P$ , a prosta  $MN$  przecina prostą  $AC$  w punkcie  $Q$ . Na mocy twierdzenia Menelausa, zastosowanego do trójkąta  $ABC$  przeciętego prostą  $KL$  oraz do trójkąta  $ADC$  przeciętego prostą  $MN$ , mamy

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1 = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA}$$



Stąd, wobec równości  $LB = BK, MD = DN, CL = CM, KA = NA$ , dostajemy  $AP : PC = AQ : QC$ . Ponieważ  $P \notin \overline{AC}, Q \notin \overline{AC}$ , więc z ostatniej proporcji wynika, że punkty  $P$  i  $Q$  pokrywają się.

108. Dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  oznaczmy przez  $T_k$  zbiór złożony z liczb  $x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}$ , przez  $a_k$  oraz  $b_k$  — najmniejszą oraz największą liczbę w tym zbiorze, a przez  $r_k$  — średnicę tego zbioru, czyli różnicę  $b_k - a_k$ . Z określenia ciągu  $(x_n)$  wynikają równości

$$x_{3k+1} = \frac{1}{3} x_{3k-2} + \frac{1}{3} x_{3k-1} + \frac{1}{3} x_{3k},$$

$$x_{3k+2} = \frac{1}{3} x_{3k-1} + \frac{1}{3} x_{3k} + \frac{1}{3} x_{3k+1} = \frac{1}{9} x_{3k-2} + \frac{4}{9} x_{3k-1} + \frac{4}{9} x_{3k},$$

$$\begin{aligned} x_{3k+3} &= \frac{1}{3} x_{3k} + \frac{1}{3} x_{3k+1} + \frac{1}{3} x_{3k+2} = \\ &= \frac{4}{27} x_{3k-2} + \frac{7}{27} x_{3k-1} + \frac{16}{27} x_{3k}. \end{aligned}$$

Widzimy, że każdy z elementów zbioru  $T_{k+1}$  jest kombinacją wypukłą elementów zbioru  $T_k$  (tj. kombinacją o współczynnikach nieujemnych, dających w sumie jedynekę). Zatem  $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$  i ciągi  $(a_k), (b_k)$  są zbieżne jako monotoniczne i ograniczone. Niech  $a = \lim a_k, b = \lim b_k$ . Odejmując stronami poszczególne równości powyższego układu dostajemy

$$x_{3k+3} - x_{3k+2} = \frac{4}{27} (x_{3k} - x_{3k-1}) + \frac{1}{27} (x_{3k-2} - x_{3k-1}),$$

$$x_{3k+3} - x_{3k+1} = \frac{5}{27} (x_{3k} - x_{3k-2}) + \frac{2}{27} (x_{3k} - x_{3k-1}),$$

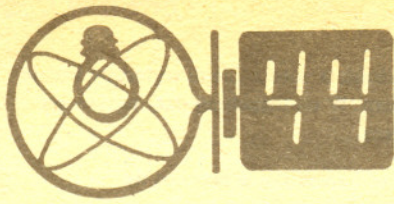
$$x_{3k+2} - x_{3k+1} = \frac{1}{9} (x_{3k} - x_{3k-2}) + \frac{1}{9} (x_{3k-1} - x_{3k-2}).$$

Wszystkie różnice w nawiasach są co do modułu niewiększe od  $r_k$ . Zatem moduły lewych stron są niewiększe, odpowiednio, od  $\frac{5}{27} r_k, \frac{7}{27} r_k, \frac{6}{27} r_k$ , skąd  $r_{k+1} \leq \frac{7}{27} r_k$ . Wobec tego  $\lim r_k = 0$  i  $a = b$ , czyli ciąg  $(x_n)$  jest zbieżny. Ponieważ  $3x_{n+3} = x_n + x_{n+1} + x_{n+2}$ , więc dodając obustronnie  $x_{n+1} + 2x_{n+2}$  otrzymujemy  $x_{n+1} + 2x_{n+2} + 3x_{n+3} = x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2}$ , skąd przez oczywistą indukcję  $x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2} = a + 2b + 3c$  dla każdego  $n$ .

Przechodząc w ostatniej równości do granicy ( $n \rightarrow \infty$ ) dostajemy

$$\text{zatem } \lim x_n = \frac{1}{6} (a + 2b + 3c).$$





$$I_n = - \sum_{i=1}^{n-1} I_i = - \sum_{i=1}^{n-1} G_i \left( \frac{I_1}{G_1} + E_1 - E_i \right).$$

Po podstawieniu ostatniego wyrażenia do równania (3) dla  $i = n$  oraz dokonaniu przekształceń uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n G_i \frac{I_1}{G_1} + \sum_{i=1}^n G_i E_1 - \sum_{i=1}^n G_i E_i = 0,$$

a stąd poszukiwane napięcie  $U_{AB} = \frac{I_1}{G_1} + E_1 = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$ .

Widać, że bez wprowadzenia przewodności końcowy wzór miałby bardziej złożoną postać.

6. Przedstawione rozumowanie zawiera milczące założenie, że ciśnienie powietrza w cylindrycznej części kanału jest równe ciśnieniu panującemu na zewnątrz oraz pomija siły powstające przy opływie czołowej powierzchni walca.



Rys. 2



Rys. 3

Aby nie wdawać się w skomplikowany problem tego opływu, rozpatrzmy przypadek, w którym walec jest od strony wlotowej przedłużony rurą o średnicy równej jego średnicy zewnętrznej — jak na rysunku 3. Problem został w ten sposób sprowadzony do przepływu powietrza przez rurę o zmiennej średnicy. Ciśnienie powietrza w części zwężonej, na skutek wzrostu jego prędkości, spada w porównaniu z rurą wlotową. W stożkowej części wylotowej natomiast, w związku ze zmniejszeniem prędkości przepływu powietrza, ciśnienie wzrasta. Z porównania średnic i związanych z tym prędkości przepływu wynika, że nie przewyższa ono tam jednak ciśnienia panującego w rurze wlotowej, które działa na powierzchnię czołową walca. Stąd wniosek, że „siła napędowa” działająca na stożkowy wylot kanału nie może przewyższać „siły hamującej” działającej na powierzchnię czołową walca. Dzięki lepkości powietrza „siła napędowa” będzie w rzeczywistości mniejsza od „siły hamującej”.

## Rozwiązania zadań z numeru 3/1985

Przypominamy treść zadań:

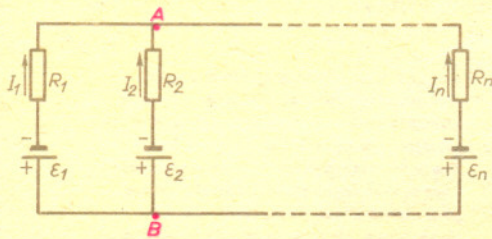
5. Obliczyć napięcie panujące między punktami A i B układu złożonego z n gałęzi zawierających dowolne oporności  $R_i$  i źródła siły elektromotorycznej  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

6. Dany jest walec z wydrążonym wzdłuż osi kanałem, który się rozszerza stożkowo z jednego końca jak na rysunku 2. Podczas poruszania tego walca w kierunku oznaczonym strzałką do kanału od jego wąskiej strony wpada powietrze. Po przepłynięciu powietrza do części stożkowej kanału jego ciśnienie — zgodnie z prawem Bernoulliego — wzrasta. Ciśnienie to działając na ścianki stożkowego kanału wywiera na walec pewną siłę, nadającą mu napęd w kierunku ruchu. Mamy więc perpetuum mobile. Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu.

5. Po oznaczeniu płynącego przez  $i$ -tą gałąź prądu przez  $I_i$  (dodatni znak  $I_i$  oraz  $E_i$  zgodny z oznaczeniami na rysunku 1) wypisujemy równania Kirchhoffa:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

$$(2) \quad R_i I_i + E_i = R_1 I_1 + E_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$



Rys. 1

Dla wygody rachunków wprowadzamy przewodność  $G_i = \frac{1}{R_i}$ ;

równanie (2) przyjmuje teraz postać

$$(3) \quad \frac{I_i}{G_i} + E_i = \frac{I_1}{G_1} + E_1.$$

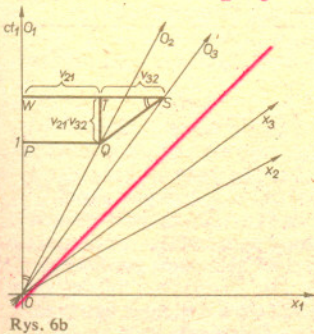
## 6. Składanie prędkości

Rozważmy trzech obserwatorów inercjalnych  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Niech  $\theta_2$  porusza się względem  $\theta_1$  z prędkością  $v_{21}$ , a  $\theta_3$  względem  $\theta_2$  z prędkością  $v_{32}$ . Dla prędkości dużo mniejszych od prędkości światła

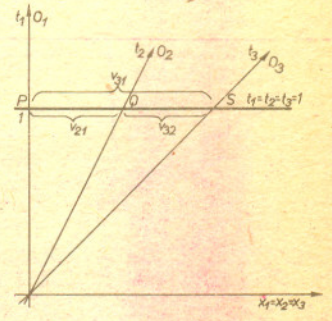
$$(*) \quad v_{31} = v_{32} + v_{21}.$$

Informację tę można odczytać z diagramu czasoprzestrzennego (rys. 6a). Linia światła obserwatora  $\theta_2$  w układzie  $(x_1, t_1)$  jest jednocześnie osią czasu układu  $(x_2, t_2)$ . Ponieważ przy małych prędkościach czas dla obu obserwatorów biegnie tak samo, oś  $x_2$  (punkty o współrzędnych  $t_1 = 0$ ) pokrywa się z osią  $x_1$ . Prosta  $t_1 = 1$  wprowadza skalę czasu na osiach  $t_2$  i  $t_3$ .

W jednostkowym czasie obserwator  $\theta_2$  przebył względem  $\theta_1$  odcinek  $PQ$ , czyli długość  $PQ$  jest równa  $v_{21}$ . Podobnie  $PS = v_{31}$ , a  $QS = v_{32}$ . Prędkość wypadkowa jest więc sumą prędkości  $v_{32}$  i  $v_{21}$ .



Rys. 6b



Rys. 6a

Rys. 6b przedstawia trzech obserwatorów poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Niech  $OP$  będzie jednostką czasu obserwatora  $\theta_1$ . Wtedy

$$v_{21} = \frac{PQ}{OP}, \quad v_{32} = \frac{QS}{OQ} \quad \text{i} \quad v_{31} = \frac{PS}{OS}.$$

Z podobieństwa trójkątów  $QST$  i  $QOP$  wynika:  $\frac{ST}{QS} = \frac{1}{OQ}$ , czyli  $ST = v_{32}$  oraz  $\frac{TQ}{ST} = \frac{PQ}{OP} = v_{21}$ ,

czyli  $TQ = v_{32} \cdot v_{21}$ . Stąd prędkość  $\theta_3$  względem  $\theta_1$   $v_{31} = \frac{ST+TW}{1+TQ} = \frac{v_{32}+v_{21}}{1+v_{32} \cdot v_{21}}$ .





## Planety w sierpniu i we wrześniu 1985 r.



28 sierpnia Merkury będzie w największej elongacji zachodniej, a więc z Ziemi widoczny będzie najdalej na zachód od Słońca, niewiele przed jego wschodem. W okolicach tej daty można go zaobserwować nad ranem nisko nad wschodnim horyzontem.

W sierpniu i we wrześniu Wenus, podobnie jak Merkury, widoczna jest o brzasku we wschodniej stronie nieba.

Również Mars w tych miesiącach pojawia się na niebie porannym. Przeszedł on fazę koniunkcji (złączenia) ze Słońcem 6 lipca i od tej pory coraz wcześniej wschodzi przed Słońcem. Na początku września wraz z Merkurym i Regulesem ( $\alpha$  Lwa) utworzy charakterystyczną konfigurację trzech dość jasnych obiektów niebieskich. 4 września o godzinie 23 Mars znajdzie się zaledwie 0,8 na północ od Merkurego. Choć o tej porze nie będą jeszcze widoczne, to nawet parę godzin później, gdy oba ciała pojawią się już nad horyzontem, będą jeszcze bardzo blisko siebie. 9 września Mars przejdzie 0,7 na północ od Regulusa.

Jowisz przez cały rok 1985 przebywa w konstelacji Koziorożca. Jego okres obiegu wokół Słońca wynosi 12 lat, a więc średnio jeden gwiazdozbiór zodiakalny przemierza w ciągu roku. Faza koniunkcji Jowisza ze Słońcem przypadła w czasie, gdy gwiazdozbiór Koziorożca nie był widoczny, mianowicie w styczniu. Jego opozycja nastąpi 4 sierpnia, najlepiej więc obserwować go w okolicach tej daty. Jest wtedy obiektem  $-2,8$  wielkości gwiazdowej.

Saturn i Uran w sierpniu i we wrześniu świecą na niebie wieczornym nisko nad zachodnim horyzontem. Uran, choć teoretycznie powinien być widoczny gołym okiem, jest trudny do odnalezienia, bowiem w tym roku znajduje się pomiędzy gwiazdozbiorami Strzelca i Skorpiona, w obszarze Drogi Mlecznej, bardzo bogatym w gwiazdy podobnej jak on jasności.

J. U.



**Rozwiązanie zadania M 405.** Wykażemy tezę zadania indukcyjnie ze względu na  $n$  — liczbę skrzyżowań w mieście. (Skrzyżowanie to punkt, w którym spotykają się trzy lub więcej dróg.) Dla  $n = 1$  teza jest oczywista. Przypuśćmy, że w dowolnym mieście o co najwyżej  $n$  skrzyżowaniach teza zadania zachodzi. Rozważmy miasto  $B$  z  $n + 1$  skrzyżowaniami. Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi sąsiednimi skrzyżowaniami w  $B$ . W pewnym okresie remontu na ulicy łączącej  $x$  i  $y$  wprowadzono ruch jednokierunkowy: np. z  $x$  do  $y$ . Rozważmy najkrótszą możliwą wówczas drogę z  $y$  do  $x$ , droga ta wraz

z ulicą z  $x$  do  $y$  tworzy zamknięty cykl  $S$  (bez przecięć). Rozpatrzmy teraz miasto  $B'$  którego plan jest utworzony z planu  $B$  przez „sklejenie” wszystkich skrzyżowań leżących na  $S$  w jedno skrzyżowanie  $s$  łączące wszystkie ulice ze sklejanymi skrzyżowań (być może plan miasta  $B'$  nie da się zrealizować na płaszczyźnie, ale to niczemu nie przeszkadza).  $B'$  spełnia założenia zadania i ma nie więcej niż  $n$  skrzyżowań, a więc można w  $B'$  wprowadzić ruch jednokierunkowy. W  $B$  możemy teraz w cyklu  $S$  ustalić ruch w jedną (dowolną) stronę, a na pozostałych ulicach wprowadzić ruch jednokierunkowy, taki jak, na odpowiadających im ulicach  $B'$ .



Rys. 6c

Jeśli na przykład w układzie  $O_2$  poruszają się naprzeciw siebie dwie cząstki o prędkościach  $v_{21} = v_{32} = 0,9$ , to ich prędkość względna jest równa „tylko”  $v_{31} = 0,994$ , a nie 1,8, jak wynikałoby z (\*). Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że dla dowolnych  $v_{32}$  i  $v_{21}$  prędkości  $v_{31} < 1$ .

Prędkość światła jest maksymalną prędkością, z jaką mogą rozchodzić się sygnały. Dlatego zaskakująca może się wydać informacja, iż promień światła obracającego się pulsara padając na Ziemię tworzy „płamkę świetlną”, która może się przesuwać z prędkością dużo większą od prędkości światła. Na przykład dla pulsara w Mgławicy Krab prędkość ta jest równa około  $10^{18}$  km/s. Jednak żadna informacja nie może być w ten sposób przekazywana między dwoma punktami na Ziemi, bo każdy punkt toru płamki tworzą nowe fotony nadchodzące z pulsara. Jeśli mimo wszystko przyjmijmy możliwość rozchodzenia się sygnałów z dowolną prędkością, napotkamy istotne trudności. Na rysunku 6c dwaj obserwatorzy  $O_1$  i  $O_2$  wymieniają między sobą sygnały. Obserwator  $O_1$  porusza się ruchem jednostajnym (w układzie  $O$ ), a następnie zatrzymuje się. Obserwator  $O_2$  początkowo spoczywa, a potem zaczyna poruszać się z prędkością równą początkowej prędkości  $O_1$ . Czytelnik łatwo sprawdzi, że zdarzenia  $A$  i  $A_1$  oraz  $C$  i  $C_1$  są równoczesne z punktu widzenia obu obserwatorów. Załóżmy, że  $O_2$  wysłał w kierunku  $O_1$  sygnał o nadświetlnej prędkości (zdarzenie  $A$ ). Odbiór sygnału przez  $O_1$  (zdarzenie  $B$ ) nastąpił w chwili późniejszej niż  $A_1$ . W odpowiedzi  $O_1$  wysłał sygnał (zdarzenie  $C$ ), który odebrał  $O_2$  (zdarzenie  $D$ ). Zdarzenie  $D$  jest niewątpliwie skutkiem zdarzenia  $A$ , a jednak z punktu widzenia obserwatora  $O_2$  zachodzi wcześniej niż  $A$ , czyli skutek poprzedził przyczynę. Taka pętla przyczynowo-skutkowa jest więc sprzeczna z zasadą przyczynowości głoszącą, iż obecnie nie możemy wpływać na to, co działo się w przeszłości.

Na zakończenie — akademicki problem dla Czytelnika. Rysunek 6d przedstawia linię świata emitującej światło cząstki o nadświetlnej prędkości. Co zaobserwuje inercjalny obserwator  $O$ ?

Rys. 6d

(cdn.)



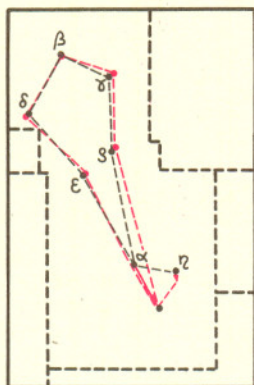


W opisie na odwrocie poprzedniego sektora wspomnieliśmy o zmianach współrzędnych gwiazd na skutek ruchu precesyjnego Ziemi. Teraz chcemy omówić ruchy własne gwiazd. Nie będziemy tu wspominać o małych okresowych zmianach położenia wywołanych paralaksą i aberracją światła czy ewentualnymi ruchami składników układów wielokrotnych. Chcemy mówić o zmianach wywołanych przemieszczeniem gwiazd względem Słońca. Są to oczywiście zmiany bardzo powolne, jednak potrafimy je mierzyć i wyznaczać kierunek ruchu gwiazd.

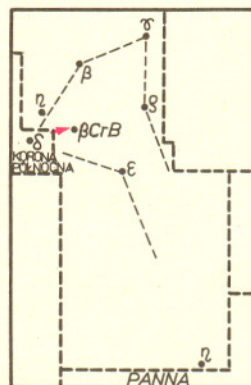
Spójrzmy na rysunek 1. Przedstawia on znany z poprzedniego sektora gwiazdozbiór Wolarza. Czarno zaznaczono położenia gwiazd w roku 1985. Kolorem zaznaczono jednocześnie, jak zmieniają się te położenia do roku 11985, to znaczy w ciągu najbliższych 10 tysięcy lat. Jak widać, wszystkie (oprócz Arktura) gwiazdy poruszają się bardzo powoli. Arktur jest jakby gwiazdą włączoną, która szybko przemierza okolice Układu Słonecznego; pisaliśmy o niej kilka lat temu w *Patrz w niebo*.

Na drugim rysunku widzimy wygląd nieba w roku 101985, czyli za 100 tysięcy lat. Tu już wiele się zmieniło. Arktur uciekł już dawno z Wolarza i po przebyciu gwiazdozbiorów Panny, Kruka i Węża Wodnego świeci jasno w Centaurze. Ale i inne gwiazdy też znacznie zmieniły swoje położenia:  $\eta$  „zaraz” wskoczy do Panny,  $\delta$  jest już w Koronie Północnej. Ponadto do centrum pięciokąta ( $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \rho$ ) zbliża się  $\beta$  Korony Północnej.

Wszystko się wymieszało. Ciekawe, jak poradzą sobie z tymi problemami wysokie komisje Międzynarodowej Unii Astronomicznej zajmujące się wyznaczaniem granic gwiazdozbiorów i przynależnością gwiazd do poszczególnych konstelacji.



Rys. 1. Wygląd współczesny gwiazdozbioru Wolarza oraz za 10 tysięcy lat.



Rys. 2. Co pozostanie z gwiazdozbioru Wolarza za 100 tysięcy lat.