



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 6 (138)

Gwiazdne wojny <i>dr Tomasz Chlebowski</i>	str. 1
Brachistochrona	str. 4
Zadania	str. 5
Klub 44	str. 6
Mała Delta	str. 8
Jeszcze raz o węzłach i splotach <i>mgr Joanna Kania-Bartoszyńska, dr Józef Przytycki</i>	str. 10
Geometrycznie o szeregu geometrycznym <i>mgr Andrzej Kok</i>	str. 12
Zasada najmniejszego działania <i>dr Adam Bechler</i>	str. 13
Teoria względności (5)	str. 13
Czy stawiać wszystko na jedną kartę?	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Smoki**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempala  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stepien  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

W bieżącym roku nasza Redakcja ma możliwość sprzedaży pewnej liczby zeszytów Deltę z bieżącego roku Czytelnikom pragnącym np. skompletować mapę nieba. Brakujące numery można kupić osobiście w Redakcji codziennie w godz. 10 - 12 /oprócz sobót i świąt/ po zwykłej cenie. Zgłoszenia spoza Warszawy prosimy nadsyłać listownie umieszczając w kopercie banknot 20 zł jako opłatę za sam zeszyt oraz znaczki pocztowe na sumę 15 zł lub drugi banknot 20 zł w celu pokrycia kosztów przesyłki.

#### Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryllowa  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

#### Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

#### Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26  
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 257/85. N-52



Prasa, radio i telewizja ekscytują nas doniesieniami o nowej koncepcji militarnej zwanej gwiazdnymi wojnami. Teoretycznie pomysł ma mieć charakter obronny. Wiemy jednak, że zawsze lepsza obrona wywoływała lepszy atak: kolczugi dały najstraszliwszą broń Średniowiecza — kuszę, sztuka sypania szafców dała artylerię itd. Z drugiej strony trudno odmówić komukolwiek prawa do obrony. I to nie tylko życia, lecz także domu, ojczyzny, wyznawanych poglądów. Nie ma więc możliwości dokonania oceny tych (i w ogóle żadnych) wysiłków zbrojeniowych inaczej niż oceniając istotę konfliktów, które są przyczyną zbrojeń.

A konflikt jest odwiecznie ten sam. Chodzi o to, co ostatnio u nas opisuje termin „opłaca się”, a co oznacza chęć życia na wyższym materialnie poziomie i posiadania więcej niż inni. Tego rodzaju dążenie nie może być przez wszystkich zrealizowane. I dlatego sięga się po wszelkiego rodzaju środki przymusu, wymuszenia, a w ostatecznym rachunku po broń. I dopóki będzie łatwiej zabierać innym ludziom niż przyrodzie, zawsze największy ludzki wysiłek skierowany będzie przeciw ludziom.

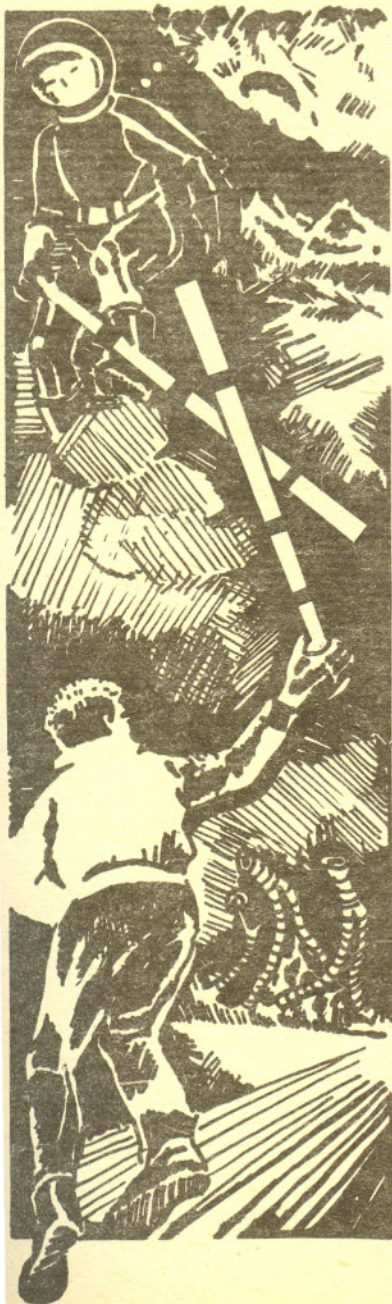
## Gwiazdne wojny

Dr Tomasz CHLEBOWSKI

Ostatnio dużo mówi się i pisze o tzw. wojnach gwiazdnych, to znaczy o przeniesieniu konfliktu nuklearnego w przestrzeń okołozemską. Nie wtajemniczonymu Czytelnikowi terminologia ta kojarzy się przede wszystkim z filmami typu *Star Wars*, których trzeci epizod właśnie możemy oglądać w kinach.

Nie chcemy zajmować się tutaj stroną „moralną”, ani techniczną problemu konfliktu nuklearnego, a jedynie pragniemy przedstawić garść pomysłów spośród tych, które wpadają do głowy naukowcom pragnącym przyczynić się do skutecznego ataku lub efektywniejszej obrony. Aby dokonać tej prezentacji, przyjrzyjmy się, jak wyglądałby dziś, u progu „ery zdolności do wojen gwiazdnych”, totalny konflikt nuklearny. Załóżmy, że w chwili  $t = 0$  supermocarstwo *A* rozpoczyna atak nuklearny na supermocarstwo *B* wystrzelując ponad 1000 międzykontynentalnych rakiet nośnych (ICBM) mających około 8 tysięcy głowic (każda rakietka może wynieść od 1 do 10 głowic nuklearnych). Po dwóch minutach pojawia się na monitorach systemu ostrzegania strony *B* (via satelity) informacja o ataku. Po 7 minutach pierwsze eksplozje nuklearne nad zaatakowanym terytorium paraliżują łączność państwa *B*. Eksplozje te to wybuchy głowic wystrzelonych w pobliżu przeciwnika. W tym momencie pociski międzykontynentalne nie przebywszy jeszcze połowy drogi uwalniają poszczególne głowice. W czasie  $t = 12$  minut głowice te są zarejestrowane (w połowie drogi) przez systemy radarowe. Jest to ostateczna informacja potrzebna do podjęcia decyzji o kontrataku. W sytuacji, gdy uniemożliwiona jest łączność radiowa, przekazanie rozkazu do kontrataku trwa około 10 minut. Po czasie  $t = 21$ — $24$  minut państwo *B* wystrzeluje swoje ICBM. Po następnych 5 minutach państwo *B* przestaje istnieć, a po kolejnej pół godzinie przestaje istnieć państwo *A*.

Nie jest to mądry sposób prowadzenia wojny i nikogo on nie bawi. Nie jest to sposób w ogóle na prowadzenie wojny — tylko na odstraszenie. Przy braku zaufania do drugiej strony i nie kończących się mediacjach rozbrojeniowych trzeba wymyślić lepszy sposób realnej obrony. A więc strona *B* będzie chciała zestrzelić rakiety nośne strony *A* jak najwcześniej — przed wejściem ICBMów w atmosferę, ale oczywiście strona *A* nie „zasypia gruszek w popiele”: przede wszystkim strona *B* ma do zestrzelenia wtedy co najmniej 8 tysięcy głowic. Prawie nic nie kosztuje, aby miała ich ze sto razy więcej. Wystarczy z każdej rakietki po wyjściu z atmosfery wypuścić setki plastikowych balonów o masie około 100 g każdy — w kilku z nich byłyby prawdziwe głowice, w innych fałszywe, reszta byłaby pusta. Wszystkie balony poruszałyby się po prawie identycznych orbitach do momentu powtórnego wejścia w atmosferę. Ten deszcz „wabików” byłby nie do wystrzelania. Trzeba więc przystąpić do obrony jeszcze wcześniej — najlepiej w momencie otwarcia silosów, gdy gorące gazy zaczynają wydobywać się z dysz odpalonych rakiet. Gazy te są silnym źródłem promieniowania podczerwonego, łatwo rejestrowalnym przez satelity obserwujące poczynania strony *A*. Decyzja obrony musi być natychmiastowa, aby móc zestrzelić rakiety, zanim się „rozmnóżą” ponad atmosferę. Najlepiej dokonać takiego ataku z satelity, ale przecież coś łatwiejszego jak zniszczenie satelity. Strona *A* wysłała w pobliże





satelitów strony *B* swoje miny kosmiczne, które czekają spokojnie na rozkaz. W pewnej chwili miny rozrywając się niszczą satelity strony *B* uniemożliwiając im ostrzeżenie o ataku nuklearnym. Nie bardzo więc można liczyć na satelity szpiegowskie oraz takie, które byłyby wyposażone w broń przeciwko ICBM. Pozostaje więc stronie *B* w momencie utraty własnych satelitów wystrzelenie z obszarów jak najbliższych silosów strony *A* rakiet, które w momencie dostrzeżenia silnego promieniowania podczerwonego z dysz rakiet strony *A* będą mogły je zestrzelić. Nie jest to już wcale takie proste. Załóżmy, że strona *B* dysponuje działem laserowym na rakiiecie nośnej umieszczonej na łodzi podwodnej w odległości 4000 km od silosów strony *A*. Strona *A* ma rakiety nośne, które w ciągu 3 minut osiągają wysokość 200 km i wypuszczają już głowice. W tym czasie strona *B* musi: zarejestrować odpalenie rakiet, podjąć decyzję o „ataku obronnym”, odpalić rakiety, rakiety muszą się wznieść na wysokość co najmniej 1000 km, aby dojrzeć nad horyzontem rakiety strony *A* i oddać strzał w ich kierunku. Widać, że rakieta strony *B* musi poruszać się pięć razy szybciej. Ale i to może być wykonalne i teraz do strony *A* należy inicjatywa, jak uchronić swoje rakiety od zestrzelenia. Na przykład może uzbroić swoje rakiety w pancierz, ale to znacznie zwiększa ich ciężar, a co za tym idzie — zmniejsza prędkość. W przypadku spodziewanego ataku w postaci promienia laserowego myśli się o następujących rozwiązaniach: pokrycie korpusu rakiety folią odbijającą, wyposażenie rakiety w ruchomy pierścień o bardzo dużej odporności na temperaturę — pierścień taki na sygnał od czujników nasuwałby się na atakowany fragment korpusu (przepalenie korpusu trwa kilka sekund), system hydraulicznego chłodzenia korpusu, zamontowanie ruchomej koszulki poruszającej się nieregularnie w dół i w górę, kryjącej czasem część płomieni wychodzących z dyszy (działo strzela kilka metrów powyżej widzianych przez nie płomieni, zgodnie z algorytmem zapisanym wcześniej), nieregularne dodawanie do paliwa składników wydłużających płomień, wreszcie rozwinięcie w wysokich warstwach atmosfery (kiedy już działo strony *B* jest na odpowiedniej wysokości gotowe do strzału) dużej osłony z materiału absorbującego i odbijającego (lub załamującego) promienie lasera.

Broń strony *B* musi więc być wyjątkowo efektywna, aby zniszczyć raketę strony *A* w tej fazie. Przedstawiono kilka projektów dział niszczących. Oto ich krótki opis:

— Laser rentgenowski lub gamma. Około pięciu lat temu dokonano pierwszej próby z tą bronią. Mały wybuch jądrowy doprowadził do odwrócenia obsadzeń poziomów i emisji wymuszonej koherentnego promieniowania X, a następnie do zniszczenia aparatury. Wydaje się, że mimo pewnych problemów z realizacją tego projektu na dużą skalę, jest to kosmiczna broń lat dziewięćdziesiątych. Podstawową trudnością jest zbudowanie takiego urządzenia, które mogłoby przy użyciu jednej bomby atomowej „napompować”, powiedzmy, 50 laserów, które z kolei tuż przed zniszczeniem strzelałyby w różnych kierunkach. Działo takie umieszczone byłoby w przestrzeni kosmicznej.

W 1978 roku w Lawrence Livermore National Laboratory (Stany Zjednoczone) dokonano eksperymentu, w którym mały wybuch jądrowy doprowadził do odwrócenia obsadzenia poziomów w jądrach atomowych, co spowodowało rentgenowską akcję laserową. Oczywiście moment później laser i cała aparatura zostały zniszczone przez eksplozję. Szczegóły tego eksperymentu są ciągle tajne, ale myśli się już również o laserach gamma.

— Chemiczne lasery podczerwone. Są już w użyciu zarówno w *A*, jak i w *B*.

— Lasery elektronowe. Działają na zasadzie wymuszania drgań wiązki swobodnych elektronów przechodzących przez pola magnetyczne. Drgające elektrony są źródłem promieniowania laserowego. Jednym z problemów związanych z użyciem laserów jest nieprzezroczystość atmosfery. Wiązka promieni jest pochłaniana przez parę wodną i inne cząstki. Aby zmniejszyć te straty, stosuje się tak zwany przedstrzał. Jest to wiązka o małej mocy, której głównym zadaniem jest zjonizowanie i rozerwanie wszelkich wiązań atomowych na drodze do celu. W ten sposób powstaje jakby przezroczysta ścieżka, po której w mikrosekundę później posyłany jest główny impuls.

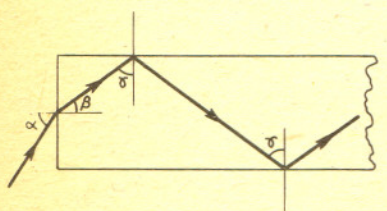
Lasery elektronowe coraz bardziej podniecają specjalistów od kontrolowanej reakcji termojądrowej oraz uzbrojenia. Ostatnio zademonstrowano laser emitujący średnio 1 kilowat w ciągu 100 μs, osiągający moc 700 kW w ciągu 50 ns.



Rozwiązanie zadania F 174. Na początek rozważmy przypadek, gdy promień jest zawarty w jednej z płaszczyzn zawierających oś walca. Wówczas mamy do czynienia z sytuacją z rysunku. Z prawa załamania mamy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

a więc dla szkła, gdzie  $n \approx 1,5$ ,  $\alpha > \beta$  i promień zawsze wchodzi do walca. Pozostanie on w walcu po napotkaniu jego bocznej ściany, gdy  $\gamma \geq \gamma_{gr}$ , gdzie  $\gamma_{gr}$  to minimalny kąt całkowitego wewnętrznego odbicia.



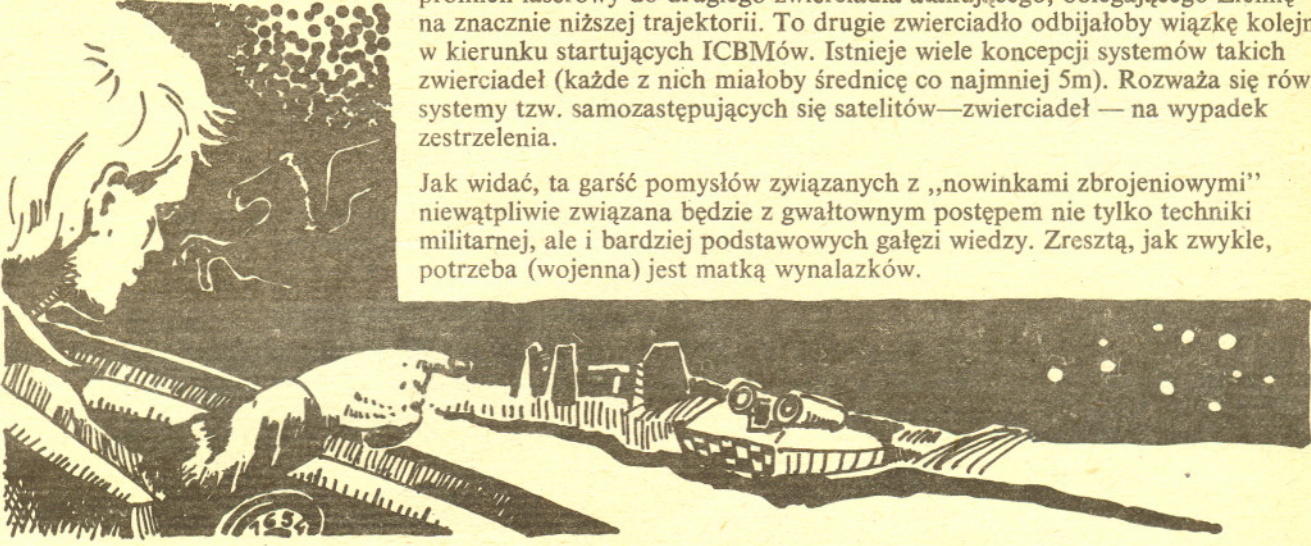
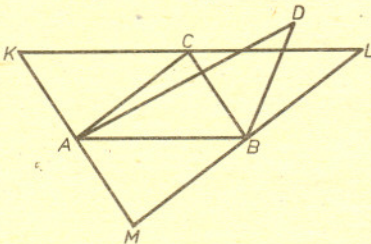
Mamy dla niego  $\sin \gamma_{gr} = \frac{1}{n}$ . Zatem wobec  $\gamma + \beta = 90^\circ$  mamy równość

$$\frac{1}{n} < \sin \gamma = \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}},$$

czyli  $\sin^2 \alpha \leq n^2 - 1$ , a więc dla szkła mamy  $\sin^2 \alpha \leq 1$ . Mają więc miejsce same wewnętrzne odbicia i promień może opuścić walec tylko przez przeciwną podstawę. Teraz wystarczy tylko zauważyć, że promienie nie leżące w płaszczyźnie przekroju osiowego walca tworzą z jego powierzchnią kąty mniejsze niż równoległe do nich promienie zawarte w takiej płaszczyźnie. Zatem i w tym przypadku promień nie może opuścić walca przez jego powierzchnię boczną.



Rozwiązanie zadania M 402. Niech  $ABC$  będzie trójkątem o największej powierzchni spośród trójkątów o wierzchołkach w  $P$ . Rozważmy trójkąt  $KLM$ , dla którego punkty  $A, B, C$  są środkami boków. Mamy  $S_{\triangle KLM} = 4 \cdot S_{\triangle ABC} < 4$  i trójkąt  $KLM$  zawiera  $P$  (gdyby punkt  $D \in P$  leżał poza trójkątem  $KLM$ , np. po przeciwnej stronie prostej  $KL$  niż punkt  $M$ , to wówczas  $S_{\triangle ABD} > S_{\triangle ABC}$  — wbrew wyborowi  $ABC$ ).



— Działa cząstkowe. Są to akceleratory wysyłające strumienie bardzo energetycznych cząstek w kierunku ofiary uniemożliwiając jej działanie przez zniszczenie systemu orientacyjnego.

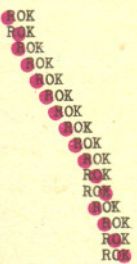
— Działa z elektromagnetyczną szyną. Są czymś podobnym do armaty miotającej pocisk, jednak to, co go napędza, nie jest ciśnieniem gazów, a polem elektromagnetycznym wzdłuż szyny, po której pocisk porusza się.

Pomysł działa — elektromagnetycznej szyny — rozważany był już we wczesnych latach naszego wieku. Napięcia przykładane do kolejnych elektrod wzdłuż przewodzącej szyny powodują powstanie pól magnetycznych wytwarzających siłę przyspieszającą pocisk. Takie naziemne „akceleratory” przyspieszają już niewielkie masy do prędkości wystarczających do osiągnięcia orbity wokółziemskiej. Dotychczas udało się uzyskać prędkość około 15 km/s. Obecnie projektuje się działą (długości 2 km) do wyrzeliwania w kosmos obiektów o wadze do 6,5 tony. Jednym z pokojowych zastosowań takiej armaty byłoby wyrzeliwanie na Słońce odpadów promieniotwórczych.

Oczywiście, im większa moc lasera lub działą, tym większa jego waga. Istnieje więc tendencja do budowania dużych laserów na Ziemi oraz umieszczania na orbicie odpowiednich zwierciadeł. Jedno z nich znajdowałoby się na orbicie geosynchronicznej (ponad 30 tys.km nad powierzchnią Ziemi) i skierowywałoby promień laserowy do drugiego zwierciadła atakującego, obiegającego Ziemię na znacznie niższej trajektorii. To drugie zwierciadło odbijałoby wiązkę kolejno w kierunku startujących ICBMów. Istnieje wiele koncepcji systemów takich zwierciadeł (każde z nich miałoby średnicę co najmniej 5m). Rozważa się również systemy tzw. samozastępujących się satelitów—zwierciadeł — na wypadek zestrzelenia.

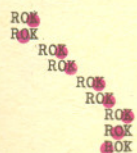
Jak widać, ta garść pomysłów związanych z „nowinkami zbrojeniowymi” niewątpliwie związana będzie z gwałtownym postępem nie tylko techniki militarnej, ale i bardziej podstawowych gałęzi wiedzy. Zresztą, jak zwykle, potrzeba (wojenna) jest matką wynalazków.

RAK TO PROROK



Rys. 1

RAK TO PROROK



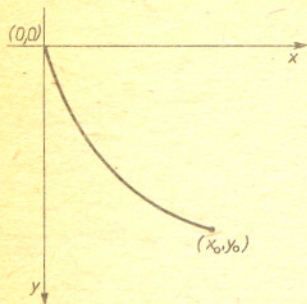
Rys.2

**W jaki sposób** komputer może sprawdzić, czy i gdzie w tekście znajduje się określone słowo. Przyjmujemy, że umie on porównywać pojedyncze litery. Oto najprostszy algorytm. Porównujemy pierwsze litery słowa i tekstu, i jeśli są takie same, to porównujemy drugie, potem ewentualnie trzecie itd., jeśli zaś są różne, to „przesuwamy” słowo o jedną literę w prawo i porównujemy jego pierwszą literę z drugą literą tekstu itd. Za każdym razem, gdy porównywane litery są różne, przesuwamy słowo o jedną literę w prawo i rozpoczynamy porównywanie od pierwszej litery słowa z odpowiadającą jej literą tekstu (rys.1).

W 1976 roku Boyer i Strother wymyślili lepszy algorytm. Tak jak poprzednio, ustawiamy słowo pod początkiem tekstu, ale porównujemy nie pierwsze litery, ale ostatnią literę słowa z odpowiadającą jej literą tekstu. W przypadku zgodności porównujemy następnie przedostatnią literę słowa itd. Gdy porównywane litery są różne, to przesuwamy słowo w prawo. Wielkość przesunięcia zależy od ostatnio porównywanej litery. Jeśli nie występuje ona w badanym słowie, to przesuwamy je tak, by zaczynało się pod następną po niej literą. Jeśli zaś jest w nim, to przesuwamy słowo tak (rys. 2), by ostatnio porównywana litera znalazła się nad taką samą literą w słowie (jeśli występuje ona w słowie kilkakrotnie, to wybieramy jak najmniejsze przesunięcie). Na przedstawionym przykładzie widać, że drugi algorytm jest znacznie szybszy. (Dla niezbyt długich słów mniej więcej tyle razy, ile liter ma słowo.)

J. R.

# Brachistochrona



Rys. 1

W 1696 roku jeden z braci Bernoullich — Jan — opublikował

*Zadanie:* Na płaszczyźnie pionowej dane są dwa punkty. Znaleźć taką łączącą je krzywą w tej płaszczyźnie, po której punkt materialny spada w najkrótszym czasie. Zakładamy, że nieistotny jest wpływ tarcia i oporu powietrza.

Gdy punkty leżą jeden nad drugim, rozwiązanie jest natychmiastowe — odcinek. Przyjmijmy więc dodatkowo, że tak nie jest.

Zadanie to można rozwiązać posługując się metodą rachunku wariacyjnego. Rozważmy krzywe, które mogą być „linią spadku punktu materialnego” i funkcjonal przyporządkowujący każdej krzywej czas spadku po niej. Przyjmijmy, że punkt startuje z początku układu współrzędnych, koniec jego drogi ma współrzędne  $(x_0, y_0)$  i oś  $Oy$  jest skierowana zgodnie z siłą ciężkości (rys. 1).

Z mechaniki wiemy, że szybkość  $\frac{ds}{dt}$  ruchu punktu materialnego spadającego po krzywej

$$\{(x, y(x)): 0 \leq x \leq x_0\} \text{ spełnia równanie } \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy},$$

gdzie  $s$  jest drogą przebytą przez punkt,  $ds$  jest elementem łuku, tzn.  $(ds)^2 = (dy)^2 + (dx)^2$ .

$$\text{Tak więc } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

$$\text{Skoro tak, to podstawiając otrzymujemy } dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

$$\text{Zatem czas spadku jest równy } V(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Problem został więc sformułowany. W zbiorze takich funkcji  $y: [0, x_0] \rightarrow [0, y_0]$ , że  $y(x_0) = y_0$

$$\text{znaleźć tę, dla której funkcjonal } V(y) = \int_0^{x_0} F(y(x), y'(x)) dx$$

przyjmuje najmniejszą wartość. Z ogólnej teorii wiadomo, iż jeśli rozwiązanie to,  $\bar{y}$ , jest dostatecznie wiele razy różniczkowalne, to musi spełniać równanie (jest to tylko warunek konieczny)

$$(1) \quad F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \bar{y}' F'_{x_2}(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = \text{const.}$$

(Dla funkcji  $F$  dwóch zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  symbol  $F'_{x_2}$  oznacza pochodną cząstkową — by ją uzyskać, zmienną  $x_1$  traktujemy jako parametr i tak otrzymaną funkcję zmiennej  $x_2$  różniczkujemy.)

$$\text{W naszym przypadku } F(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{x_1}} \text{ i } F'_{x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1(1 + x_2^2)}}.$$

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy po uporządkowaniu

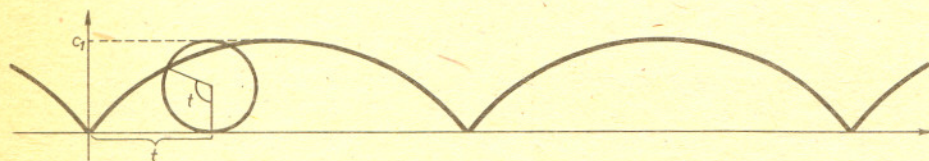
$$(2) \quad y \cdot (1 + (y')^2) = c_1.$$

Równanie to rozwiązujemy za pomocą podstawienia. Przyjmijmy  $y' = \text{ctg } u$ ,

$$\text{wówczas } y = c_1 \cdot \sin^2 u = \frac{c_1}{2} (1 - \cos 2u) \text{ oraz } \frac{dx}{du} = \text{tgu} \cdot \frac{dy}{du} = 2c_1 \sin^2 u = c_1 (1 - \cos 2u),$$

$$\text{czyli } x' = \frac{c_1}{2} (2u - \sin 2u) + c_2 \text{ (ale } c_2 = 0, \text{ gdyż } x(0) = y(0) = 0).$$

$$\text{Po podstawieniu } t = 2u \text{ mamy } x = \frac{c_1}{2} (t - \sin t), \quad y = \frac{c_1}{2} (1 - \cos t).$$

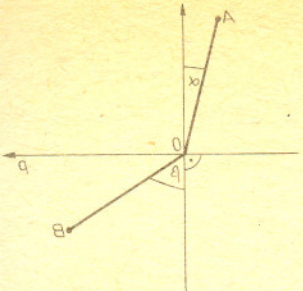


Rys. 2

Znaleziona krzywa nazywa się cykloidą. Ma ona interpretację kinematyczną: punkt okręgu o promieniu  $\frac{c_1}{2}$  tocącego się po osi  $Ox$  zakreśla właśnie cykloidę. Jeśli punkt na okręgu

znajdował się w początku układu, to po obrocie okręgu o  $t$  znajdzie się w punkcie  $\left(\frac{c_1}{2} (t - \sin t),$

$$\frac{c_1}{2} (1 - \cos t)\right).$$



Równanie (2) dla funkcji  $y$  realizującej minimum czasu możemy otrzymać inaczej. Jak wiadomo (można to zresztą łatwo sprawdzić analitycznie), najszybszą drogą z punktu  $A$  do punktu  $B$  (rys. 3) przy założeniu, że prędkości  $V_1$  powyżej i  $V_2$  poniżej prostej  $p$  są stałe, jest łamana  $A O B$ , przy czym zachodzi równość

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

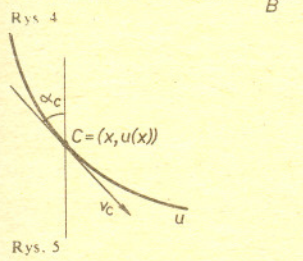
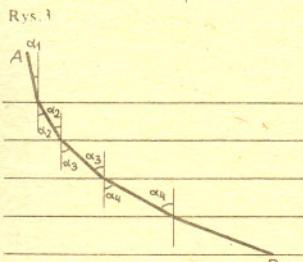
Jeśli między  $A$  i  $B$  mamy pewną liczbę pasów (rys. 4), w których prędkości są stałe, to dla najszybszej drogi muszą zachodzić równości

$$\frac{\sin \alpha_1}{V_1} = \frac{\sin \alpha_2}{V_2} = \dots = \frac{\sin \alpha_n}{V_n}$$

a więc  $\frac{\sin \alpha_k}{V_k} = \text{const.}$

Jeśli liczba pasów będzie wzrastała nieograniczenie, a szerokość dążyła do zera, innymi słowy prędkość poruszającego się ciała będzie zależała tylko od odległości tego ciała od prostej  $p$ , to w każdym punkcie  $C$  najszybszej drogi (rys. 5) powinno być spełnione równanie

$$\frac{\sin \alpha_C}{V_C} = \text{const.}$$

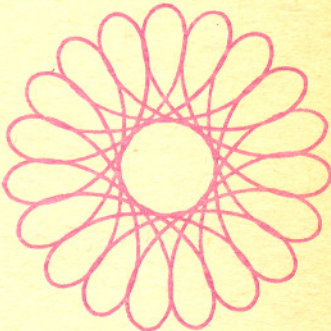
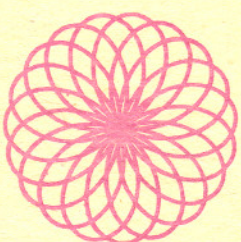
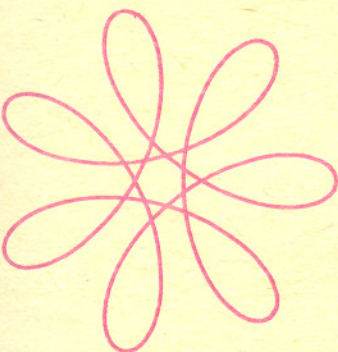


W naszym zadaniu wiemy, że  $V_C = \sqrt{2gu}$ , z drugiej strony  $\text{ctg} \alpha_C = u'(x)$ ,

$$\text{tak więc } \sin \alpha_C = \frac{1}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}$$

i otrzymujemy równanie  $u \cdot (1 + (u')^2) = \text{const.}$

(Zauważmy, że w rozumowaniu powyższym założyliśmy istnienie rozwiązania — co wcale nie musiało być prawdą. Istnienie takiego rozwiązania trzeba by więc udowodnić innymi metodami.)



## Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

**M 401.** Danych jest  $2^n$  skończonych ciągów złożonych z zer i jedynek. Żaden z ciągów nie jest początkiem innego. Dowiedzieć, że suma długości tych ciągów nie jest mniejsza niż  $n \cdot 2^n$ .  
Rozwiązanie na str. 15

**M 402.** Mamy skończony zbiór  $P$  punktów płaszczyzny. Każdy trójkąt o wierzchołkach w  $P$  ma powierzchnię mniejszą niż 1. Wykazać, że pewien trójkąt o powierzchni mniejszej niż 4 zawiera cały zbiór  $P$ .  
Rozwiązanie na str. 3

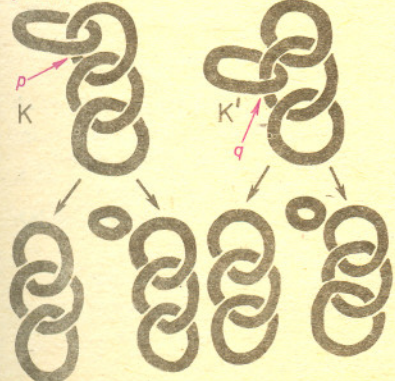
**M 403.** Znaleźć ostatnie 1000 cyfr liczby  $M = 1 + 40 + 40^2 + \dots + 40^{999}$   
Rozwiązanie na str. 14

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

**F 174.** Na podstawę szklanego walca padają pod różnymi kątami promienie świetlne. Które z promieni dotrą do drugiej podstawy?  
Rozwiązanie na str. 2

**F 175.** Obserwując zachowanie rozlanej rtęci stwierdzamy, że niewielkie kropelki zlewają się chętniej niż duże. Jak wyjaśnić to zjawisko?  
Rozwiązanie na str. 16

**Rozwiązanie węzłów**  
Aby pokazać, że  $F_K(x, y) = F_{K'}(x, y)$ , wystarczy zastosować regułę z warunku C do skrzyżowania  $p$  w  $K$  i do skrzyżowania  $q$  w  $K'$ :



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 12/1984

Piotr Figurny	- Lubartów	51,50pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	48,18pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	45,23pkt
Tomasz Komorowski	- Świdnik	41,93pkt
Krystyna Witek	- Ostrów Maz.	41,86pkt
Marian Roman	- Eżk	41,28pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	40,46pkt
Anna Gluza	- Toruń	40,38pkt

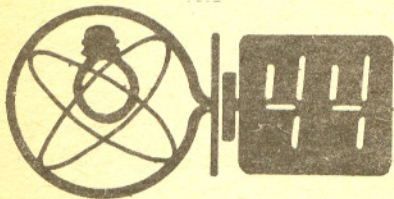
Współczynniki trudności zadań 100, 101, 102:  
2,92    3,24    1,56

Panowie P. Figurny i J. Mikuta - po raz pierwszy, a pan M. Gałecki - już po raz czwarty zaliczają sumę 44.

Na półmetku czwartego sezonu swego istnienia Klub 44 liczy 32 (czyli okrągło  $2^5$ ) członków.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

## Rozwiązania zadań z numeru 2/1985

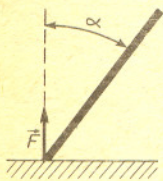
Przypominamy treść zadań:

3. Cienki, sztywny, jednorodny pręt stojący pionowo na idealnie gładkim, poziomym podłożu zostaje minimalnie wychylony z położenia równowagi i puszczony. Obliczyć przyspieszenie kątowe jako funkcję kąta (rys. 1) podczas jego upadku. Czy pręt może ulec złamaniu? Jaki będzie jego ruch po idealnie sprężystym zderzeniu z podłożem?
4. Do wykrywania i lokalizacji okrętów podwodnych używany jest sonar wykorzystujący odbicie fali akustycznej od powierzchni okrętu. Dlaczego w wodach tropikalnych niezależnie od mocy i czułości urządzeń zasięg sonaru ograniczony jest do 1 km?

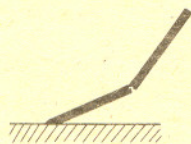
3. Wprowadzamy oznaczenia:  $m$  — masa pręta,  $l$  — długość

pręta,  $I = \frac{1}{12}ml^2$  — moment bezwładności pręta względem jego

środką (środką masy),  $g$  — przyspieszenie ziemskie.



Rys. 1



Rys. 2

Wobec gładkości podłoża pomijamy tarcie pręta o nie. Siła  $F$  działająca na pręt ze strony podłoża (rys. 1) jest zatem skierowana pionowo, podobnie jak i siła ciężkości  $mg$ . Wnioskujemy stąd, że środek masy pręta spada pionowo w dół z przyspieszeniem

$$(1) \quad a = \frac{mg - F}{m}$$

Moment siły  $F$  względem środka pręta, mający wartość

$$(2) \quad M = F \frac{l}{2} \sin \alpha,$$

będzie nadawał prętowi przyspieszenie kątowe

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{6F \sin \alpha}{ml};$$

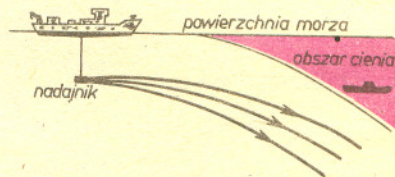
moment ten wywiera na pręt działanie zginające i może doprowadzić do jego złamania (rys. 2). Ponieważ dolny koniec pręta cały czas styka się z podłożem, ślizgając się po nim, między  $a$  i  $\varepsilon$  zachodzi związek

$$(4) \quad a = \frac{l}{2} \varepsilon \sin \alpha.$$

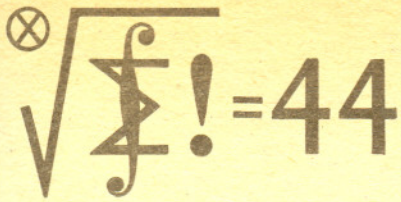
Z równań (1), (3), (4) wyznaczamy  $F = \frac{mg}{1 + 3 \sin^2 \alpha}$ ,

otrzymując następnie  $\varepsilon = \frac{6 \sin \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha} \frac{g}{l}$ .

W procesie zderzenia następuje dla każdego elementu pręta zmiana zwrotu prędkości z zachowaniem jej wartości oraz pionowego kierunku. W rezultacie zarówno pęd pręta, jak i jego moment pędu ulegają zmianie na przeciwnie skierowane, zachowując wartości, jakie miały przed zderzeniem. Ruch pręta po zderzeniu będzie więc symetryczny względem ruchu przed zderzeniem. Ścisły dowód tego jest dość złożony i nie był wymagany od uczestników ligi.



4. Woda morska jest dla fal akustycznych ośrodkiem niejednorodnym: prędkość rozchodzenia się dźwięku zależy m.in. od temperatury. W wodach tropikalnych, gdzie występuje duży gradient pionowy temperatury, prędkość dźwięku maleje ze wzrostem głębokości, co powoduje ugięcie fali akustycznej w dół (efekt analogiczny do załamania światła w ośrodku o monotonicznie zmieniającym się współczynniku załamania). W związku z tym fala emitowana z nadajnika do pewnych miejsc w ogóle nie dociera — są to tzw. obszary cienia akustycznego, niedostępne dla sonaru (rysunek).



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 2/1985

Przypominamy treść zadań:

105. Liczby dodatnie  $x_1, \dots, x_n$  spełniają warunek  $\sum x_k^2 \leq 1/n$ . Dowieść, że  $(\sum kx_k^2)^3 \leq (n+1)^2/4$ .

106. Prostopadłościan o wymiarach całkowitych  $a, b, c$  podzielono na sześciany jednostkowe. Ile spośród tych sześcianów ma wspólnie punkty wewnętrzne z jedną (ustaloną) przekątną prostopadłościanu?

105. Weźmy dowolne liczby dodatnie  $a, b$ . Ponieważ

$$a^2 x_k^2 \cdot bk = (a^3 x_k^3 \cdot a^3 x_k^3 \cdot b^3 k^3)^{1/3} \leq \frac{1}{3} (2a^3 x_k^3 + b^3 k^3),$$

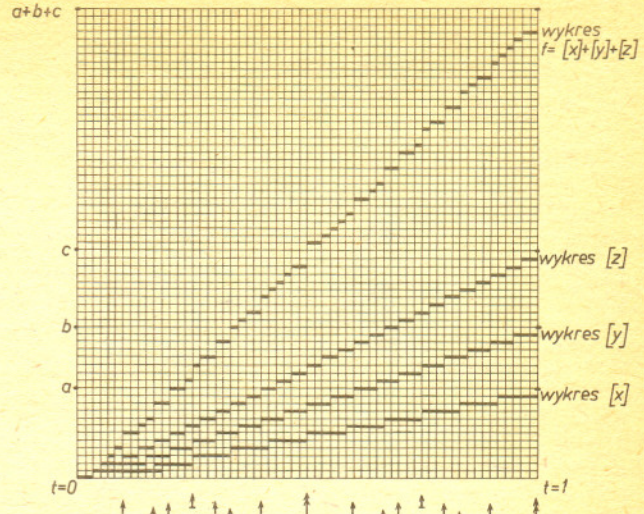
sumując po  $k$  otrzymujemy  $a^2 b \sum kx_k^2 \leq \frac{1}{3} \left( \frac{2a^3}{n} + \frac{n^2(n+1)^2 b^3}{4} \right)$ .

Gdy w szczególności przyjmiemy  $a = n^{1/3}$ ,  $b = (4n^{-2}(n+1)^{-2})^{1/3}$ , to ostatnia nierówność przybierze postać

$$n^{2/3} (4n^{-2}(n+1)^{-2})^{1/3} \sum kx_k^2 \leq 1,$$

co po podniesieniu stronami do trzeciej potęgi daje tezę zadania.

106. Odpowiedź:  $a+b+c - \text{NWD}(a, b) - \text{NWD}(b, c) - \text{NWD}(c, a) + \text{NWD}(a, b, c)$ . Dowód. Przyjmijmy układ współrzędnych tak, by trzy krawędzie prostopadłościanu leżały na osiach układu oraz by końcami wyróżnionej przekątnej  $\overline{AZ}$  były punkty  $A = (0, 0, 0)$ ,  $Z = (a, b, c)$ . Wyobraźmy sobie punkt poruszający się ruchem jednostajnym wzdłuż przekątnej  $\overline{AZ}$  i przyjmijmy, że w chwili  $t = 0$  punkt ten jest w położeniu  $A$ , a w chwili  $t = 1$  w położeniu  $Z$ . Określamy funkcję  $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  następująco: jeśli w chwili  $t$  wędrujący punkt ma współrzędne  $(x, y, z)$ , to  $f(t) = [x] + [y] + [z]$ . Jest to funkcja niemalejąca, o wartościach całkowitych,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = a+b+c$ . Liczba sześcianów jednostkowych, których wnętrza przecina przekątna



$a=12 \quad b=20 \quad c=30 \quad n=2 \quad k=4 \quad l=10 \quad m=6$   
 Strzałki wskazują miejsca, gdzie  $f$  ma skok o  $\geq 2$   
 $\uparrow$  jest przyrost  $[x]$  i  $[y]$ , nie ma przyrostu  $[z]$   
 $\uparrow$  —" —  $[y]$  i  $[z]$  —" —  $[x]$   
 $\uparrow$  —" —  $[z]$  i  $[x]$  —" —  $[y]$   
 $\uparrow$  jednoczesny przyrost  $[x], [y]$  i  $[z]$

$\overline{AZ}$ , równa się liczbie przedziałów stałości funkcji  $f$ , czyli liczbie punktów nieciągłości (skoków) tej funkcji w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ . (Rysunek przedstawia przebieg  $f$ , gdy  $a = 12$ ,  $b = 20$ ,  $c = 30$ .) Maksymalny skok  $f$  wynosi 3; skoków tych jest tyle, ile punktów kratowych (tj. o współrzędnych całkowitych), przez które przechodzi przekątna  $\overline{AZ}$  (nie licząc punktu  $A$ ); jest ich więc  $n$ , gdzie  $n = \text{NWD}(a, b, c)$ . Liczymy teraz skoki o 2 pochodzące z przyrostu składników  $[x]$  i  $[y]$ , przy niezmiennym  $[z]$ . Jest ich tyle, ile punktów  $(x, y, z) \in \overline{AZ}$  o współrzędnych  $x$  i  $y$  całkowitych, a  $z$  niecałkowitej, czyli  $k-n$ , gdzie  $k = \text{NWD}(a, b)$ . Analogicznie, skoków o 2 pochodzących, odpowiednio, z przyrostu składników  $[y]$  i  $[z]$  oraz  $[z]$  i  $[x]$  jest  $l-n$  oraz  $m-n$ , gdzie  $l = \text{NWD}(b, c)$ ,  $m = \text{NWD}(c, a)$ . Niech wreszcie  $j$  będzie liczbą skoków o 1. Pełny przyrost wartości  $f$  wynosi  $a+b+c$ , więc  $3n + 2(k-n) + 2(l-n) + 2(m-n) + j = a+b+c$ , skąd  $j = a+b+c - 2(k+l+m) + 3n$ . Szukana liczba skoków  $f$  równa się zatem  $n + (k-n) + (l-n) + (m-n) + j = a+b+c - (k+l+m) + n$ .

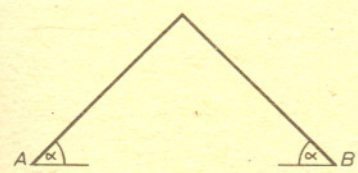
Z prądem pod wiatr

Nie zawsze rozwiązanie problemu wariacyjnego musi istnieć. Rozważmy nawigacyjne zadanie Zermelo. Należy przepłynąć żaglówką pod wiatr z punktu  $A$  do punktu  $B$ , oba punkty leżą w środku nurtu rzeki, punkt  $B$  poniżej punktu  $A$ . Prąd rzeki jest najszybszy w środku. Jeśli pominiemy czas potrzebny na zmianę halsu, to przy braku prądu żeglarz może wybrać jedną z wielu łamanych (rys.2), gdzie  $\alpha$  jest optymalnym dla prędkości wiatru kątem.

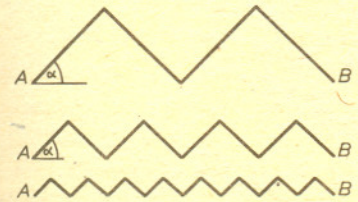
Jeśli jednak uwzględnimy prąd rzeki, to żeglarz powinien trzymać się jak najbliższej jej środka, tak więc im częściej zmienia kierunek, tym szybciej przepłynie swoją trasę.

Podobnie jest, jeśli chcemy znaleźć wśród takich funkcji  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $x(0) = x(1) = 0$  funkcję, dla której całka  $I(x) = \int_0^1 (x(t)^2 + 1)(1 + ((x'(t))^2 - 1)^2) dt$  przyjmuje wartość najmniejszą. (Dla uproszczenia dopuśćmy rozpatrywanie funkcji kawałkami różniczkowalnych.) Dla funkcji z rysunku 3 albo  $x'(t) = 1$ , albo  $x'(t) = -1$ . Zatem funkcja podcałkowa nie jest większa niż  $1 + \epsilon^2$  i  $I(x) \leq 1 + \epsilon^2$ .

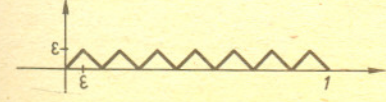
Z drugiej strony funkcja podcałkowa nigdzie nie może być mniejsza niż 1, a równa 1 tylko w punktach, dla których równocześnie  $x(t) = 0$ ,  $|x'(t)| = 1$ . Tak więc kres dolny wartości całki, czyli 1, nigdy nie będzie osiągnięty.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

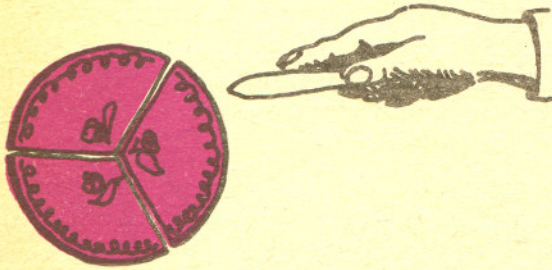


# 5 mała delta

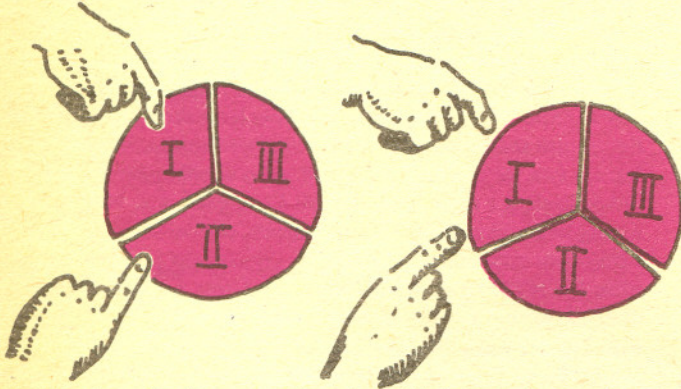
## Podział tortu

Oto najprostszy podział tortu między trzy osoby (*A*, *B*, *C*) tak, by każda z nich otrzymała według własnej oceny — co najmniej  $\frac{1}{3}$  tortu.

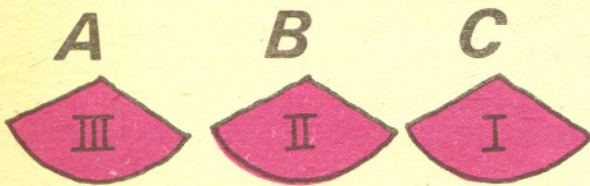
*A* kroi tort na trzy równe — według *A* — części.



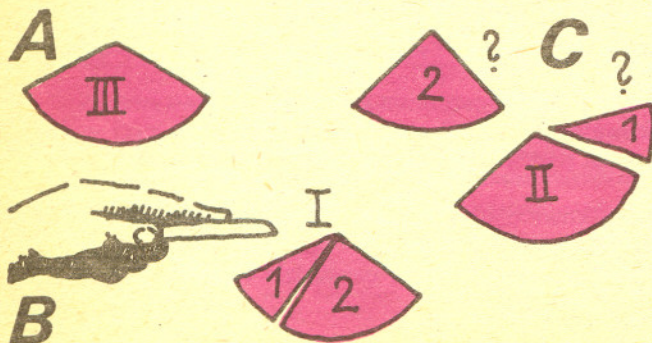
*B* i *C* pokazują największe — ich zdaniem — kawałki.



Jeśli pokazali różne, to biorą je, zaś *A* dostaje trzeci.

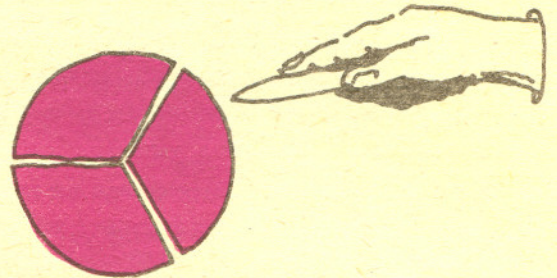


Jeśli pokazali tę samą część, to *A* bierze dowolną z pozostałych (np. III). *B* odkrawa od części I taki kawałek (1), by pozostałość (2) była równa — jego zdaniem — części II z dołączonym kawałkiem (1). *C* wybiera większą — według *C* — porcję.



Sprawdź Czytelniku, że warunki podziału zostały spełnione, a tort rozpadł się na co najwyżej cztery części. Możliwe jest jednak, iż np. *B* będzie zazdrościł *A*, to znaczy zdaniem *B* porcja *A* jest większa niż porcja *B*. Otóż można temu zapobiec i tak podzielić tort, by każdy uważał, że jego część nie jest mniejsza niż inne. Tort rozpadnie się na co najwyżej sześć części.

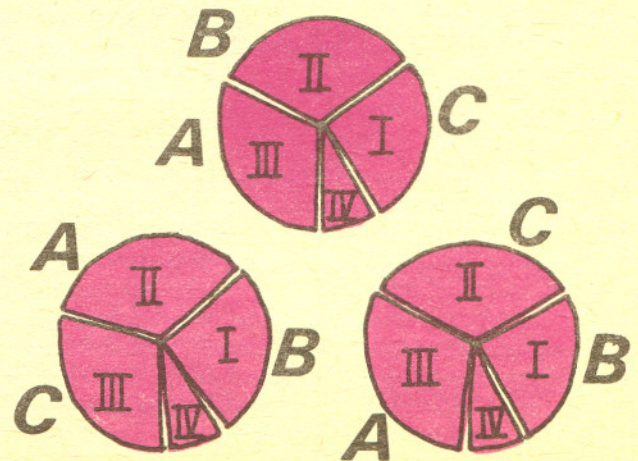
*A* kroi tort na trzy równe — według *A* — części.



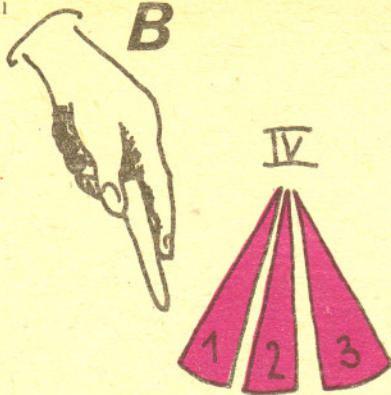
*B* odkrawa od największej — jego zdaniem — części taki kawałek (IV), by pozostałość (I) była równa drugiej co do wielkości części (II).



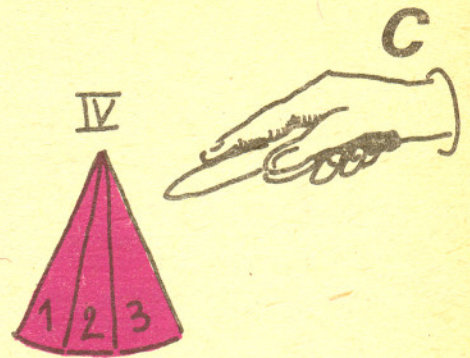
Podział części I, II, III: *C* wybiera — jego zdaniem — największą, *A* i *B* biorą po jednej z pozostałych tak, by każdy wziął — według niego — większą. Oto możliwe przypadki.



*B* kroi część IV na trzy — jego zdaniem — równe kawałki



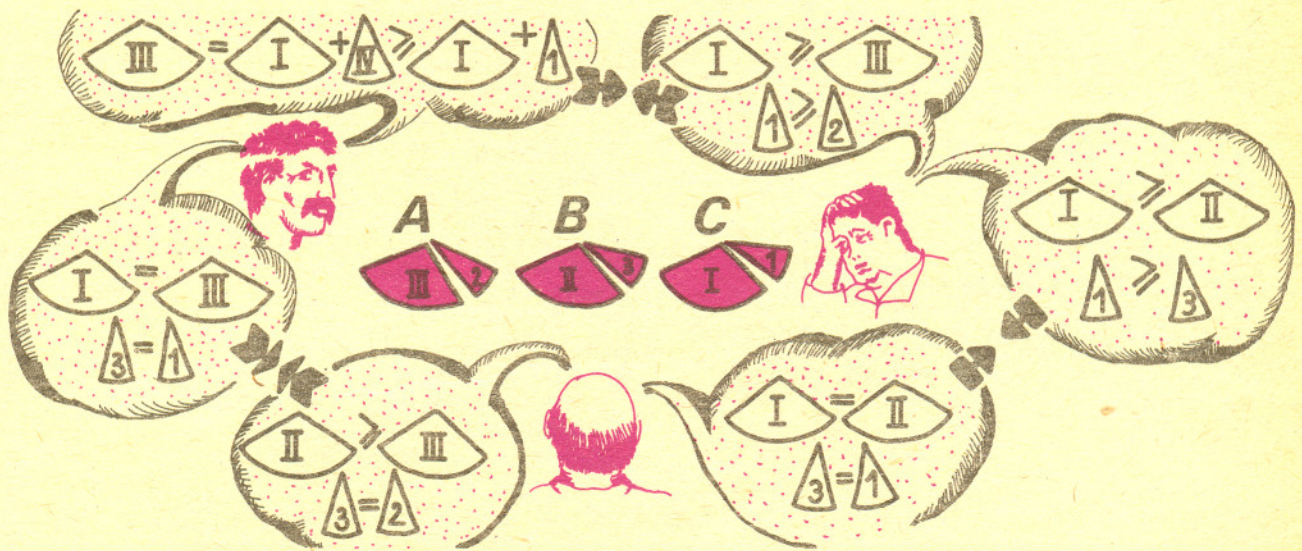
*C* kroi część IV na trzy — jego zdaniem — równe kawałki



i *C* wybiera — według *C* — największy (powiedzmy 1). *A* wybiera większy — według *A* — z pozostałych (powiedzmy 2). *B* bierze ostatni (3).

i *B* wybiera — według *B* — największy (powiedzmy 1). *A* wybiera większy — według *A* — z pozostałych (powiedzmy 2). *C* bierze ostatni (3).

Oto ostateczny podział.



Tak oceniają podział poszczególne osoby — podajemy tylko jeden przypadek. Sprawdź Czytelniku, że wszyscy są zadowoleni również w pozostałych przypadkach.

Nie umiemy, unikając zazdrości, podzielić tortu między więcej niż trzy osoby.

Gdy zamiast tortu dzielone jest jądro atomowe, to przeważnie suma mas powstałych części jest różna od masy dzielonego jądra. Na przykład masa dwóch protonów i dwóch neutronów jest większa (o około 0,03 masy neutronu) od masy jądra helu. Rozbicie jądra helu na oddzielne neutrony i protony wymaga rozerwania istniejących między nimi wiązań, a więc wykonania pracy. Ta praca „zamieniana” jest na nadwyżkę masy produktów. Składanie helu z protonów i neutronów powoduje, odwrotnie, wydzielanie się dużych ilości energii. Niestety, dotychczas potrafimy przeprowadzić ten proces tylko w sposób niekontrolowany jako wybuch termojądrowy (bomba wodorowa).

Może się również zdarzyć, że masa części jest mniejsza niż masa dzielonej całości — tak jest na przykład przy

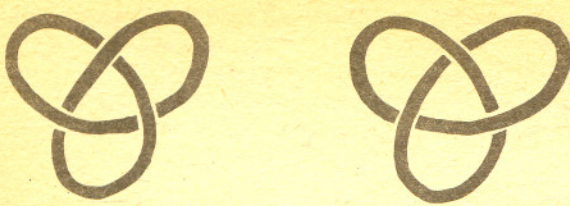
podziale jądra uranu lub plutonu. Oczywiście, musi się wówczas wydzielać energia, a w powstałych jądrach neutrony i protony są silniej związane niż w jądrze wyjściowym. Proces ten zachodzi wewnątrz reaktora atomowego.

Foton, cząstka nie posiadająca masy spoczynkowej, o ile ma wystarczającą energię, może przelatując obok atomu (lub jonu) „rozpaść się” na elektron i pozyton — dwie cząstki o masach równych około 1/2000 masy neutronu i przeciwnych ładunkach. W tym przypadku cała energia zamienia się na masę powstających cząstek.

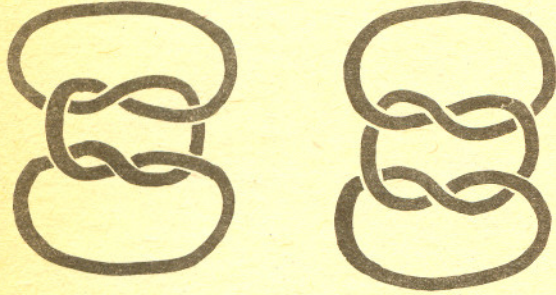
Małą Deltę przygotowali Andrzej MAJHOFER i Jerzy RYLL

# Jeszcze raz o węzłach i splotach

Mgr Joanna KANIA-BARTOSZYŃSKA,  
dr Józef PRZYTYCKI

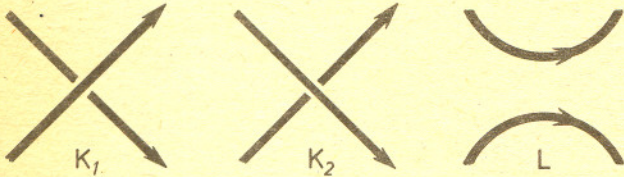


Rys. 1. Węzeł trójlistny lewostronny — Węzeł trójlistny prawostronny



Rys. 2 Węzeł płaski Węzeł babski

Funkcja  $F_K$  nie jest wielomianem, ale w topologii algebraicznej przyjęło się używać tego terminu.

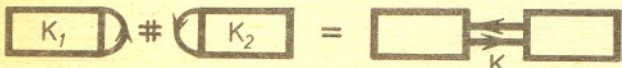


Rys. 3

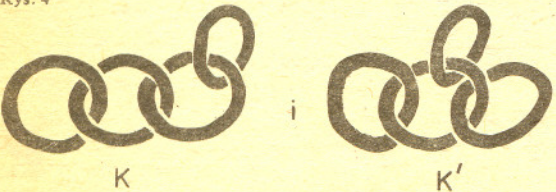
Latem 1984 roku sensację wzbudziło odkrycie przez Vaughana Jonesa nowego niezmiennika splotów. Był on zdefiniowany bardzo zawiłe, przy użyciu pewnych skończonych algebr von Neumanna. W kilka miesięcy później Jones zauważył, że jego niezmiennik można zdefiniować za pomocą rysunku 3. Niezmiennik Jonesa jest szczególnym przypadkiem wielomianu  $F_K$ .

Otrzymuje się go przez podstawienie  $x = \frac{1}{t(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})}$ ,

$$y = -\frac{t}{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}}$$

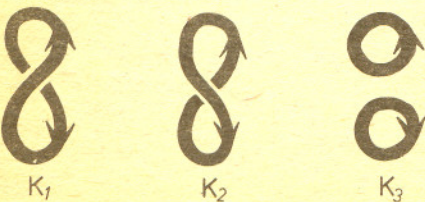


Rys. 4



Rys. 5. Sploty  $K$  i  $K'$  nie są równoważne, ale ich wielomiany są równe (dowód w numerze).

**Zadanie:** Pokazać, że jeśli  $K$  jest splotem trywialnym o  $n$  składowych, to  $F_K(x, y) = (x + y)^{n-1}$  (można skorzystać z poniższego rysunku).  
Przypomnijmy, że wielomian Conway dowolnego splotu trywialnego był równy 0.



W *Delcie* 1/1985 pisaliśmy o wielomianie Conwaya, niezmienniku węzłów i splotów. Przypomnijmy, że splot jest to rodzina parami rozłącznych okręgów zanurzonych w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ . Splotom możemy przypisywać orientację. Splot o jednej składowej nazywamy węzłem. Dwa sploty są równoważne, jeśli jeden można otrzymać z drugiego przez ruch w przestrzeni bez cięcia i wiązania. Aby stwierdzić, czy sploty są równoważne, wygodnie jest przypisywać im obiekty algebraiczne (np. wielomiany). Niezmiennikiem splotów nazywamy obiekt algebraiczny przyporządkowany każdemu splotowi, jednakowy dla równoważnych splotów. Takim niezmiennikiem był wielomian Conwaya, który odróżniał wiele węzłów i splotów znanych na przykład z żeglarstwa i alpinizmu. Nie odróżniał on jednak węzła trójlistnego lewostronnego od prawostronnego (rys. 1) ani węzła płaskiego od babskiego (rys. 2). Pisaliśmy w poprzednim artykule, że aby odróżnić te węzły, trzeba użyć zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Ostatnio okazało się jednak, że wystarczy uogólnić metodę Conwaya.

**Twierdzenie.** Każdemu zorientowanemu splotowi  $K$  można przyporządkować wielomian  $F_K$  dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  (występujących z dodatnimi lub ujemnymi potęgami) o współczynnikach całkowitych spełniający:

- A.  $F_K$  jest niezmiennikiem  $K$ .
- B. Jeśli  $K$  jest węzłem trywialnym, to  $F_K(x, y) = 1$ .
- C. Jeśli trzy zorientowane sploty mają identyczne diagramy wszędzie z wyjątkiem części przedstawionych na rysunku 3, to

$$xF_{K_1}(x, y) + yF_{K_2}(x, y) = F_L(x, y).$$

Wielomian Conwaya otrzymamy, jeśli podstawimy

$$x = \frac{1}{z} \text{ i } y = -\frac{1}{z}.$$

Wielomian  $F_K$  ma wszystkie zalety wielomianu Conwaya:

- 1. Jeśli  $\bar{K}$  jest lustrzanym odbiciem splotu  $K$ , to

$$F_{\bar{K}}(x, y) = F_K(y, x),$$

- tzn. wielomiany różnią się zamianą miejscami  $x$  z  $y$ .
  - 2. Jeśli  $-K$  jest splotem otrzymanym z  $K$  przez zmianę orientacji wszystkich składowych, to  $F_{-K}(x, y) = F_K(x, y)$ .
  - 3. Jeśli  $K$  jest sumą splotów  $K_1$  i  $K_2$  (rys. 4), co zapisujemy  $K = K_1 \# K_2$ , to  $F_{K_1 \# K_2}(x, y) = F_{K_1}(x, y) \cdot F_{K_2}(x, y)$ .
- Ponadto wielomian  $F_K$  odróżnia znacznie więcej węzłów i splotów niż wielomian Conwaya (np. lewostronny trójlistnik od prawostronnego, węzeł płaski od babskiego). Są jednak węzły, których nie rozróżnia (rys. 5).

W *Delcie* 1/1985 pisaliśmy, że dowód tego, iż wielomian Conwaya jest wyznaczony jednoznacznie, wymaga

Znajdziemy wielomiany obu trójlitnikow. Dla lewostronnego mamy (patrz zadanie):

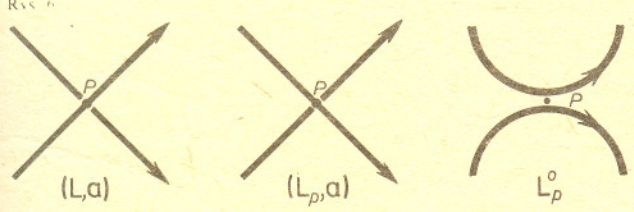
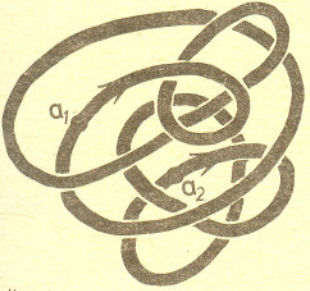
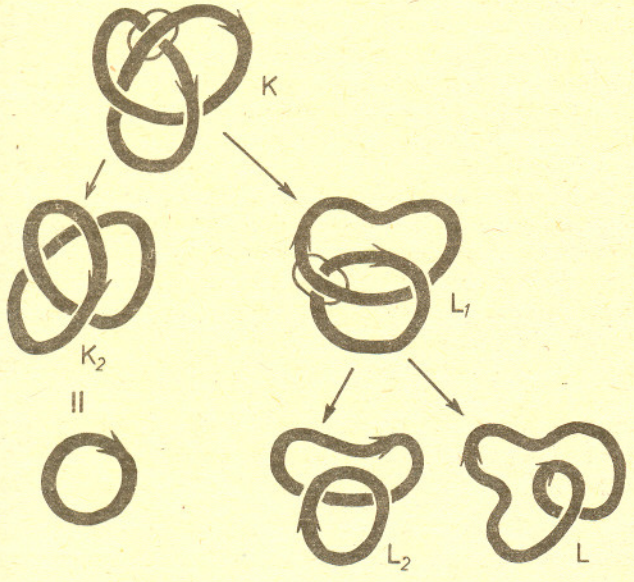
$$F_{L_2}(x, y) = x + y; F_L(x, y) = F_{K_2}(x, y) = 1.$$

Z warunku C:  $F_{L_1}(x, y) = \frac{1}{x}(F_L(x, y) - yF_{L_2}(x, y)) = \frac{1}{x}(1 - y(x + y)) = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - y.$

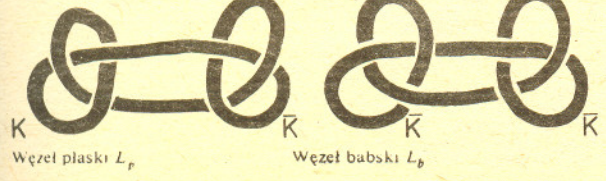
I ostatecznie (znów z warunku C):  $F_K(x, y) = \frac{1}{x}(F_{L_1}(x, y) - yF_{K_2}(x, y)) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - y - y\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x}.$

Prawostronny trójlitnik  $\bar{K}$  jest lustrzanym odbiciem lewostronnego.

Tak więc  $F_{\bar{K}}(x, y) = F_K(y, x) = \frac{1}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{y}$ , czyli  $F_{\bar{K}} \neq F_K$ .



Do znalezienia wielomianu  $F$  dla węzła babskiego i płaskiego nie musimy wykonywać żadnych rachunków. Wystarczy skorzystać z tego, iż węzeł płaski  $L_p$  jest sumą dwóch różnych trójlitnikow, a węzeł babski  $L_b$  sumą dwóch prawostronnych trójlitnikow. Mamy  $F_{L_p}(x, y) = F_{K \# \bar{K}}(x, y) = F_K(x, y) \cdot F_{\bar{K}}(x, y)$ ,  $F_{L_b}(x, y) = F_{\bar{K} \# K}(x, y) = F_{\bar{K}}(x, y) \cdot F_K(x, y)$  i ponieważ  $F_K \neq F_{\bar{K}}$ , więc  $F_{L_p} \neq F_{L_b}$ .



zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Jednak ostatnio Paweł Traczyk i Józef Przytycki znaleźli elementarny dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności nie tylko wielomianu Conwaya, ale także wielomianu  $F_K$ . Jest on na tyle prosty, że warto przedstawić tutaj jego zarys.

Rozpatrujemy zorientowane sploty przedstawione (niejednoznacznie) za pomocą diagramu na płaszczyźnie. Wielomian  $F_K$  będziemy definiować indukcyjnie względem liczby skrzyżowań w diagramie dbając, by cały czas dla już określonych wielomianow był spełniony warunek C. Zwróćmy też uwagę, że za każdym razem, gdy definiujemy wielomian dla nowego splotu, jest on wyznaczony jednoznacznie przez warunek C.

Niech  $(L, a)$ , gdzie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , będzie zorientowanym splotem  $L$  o  $n$  składowych z  $n$  wyróżnionymi punktami  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; po jednym punkcie w każdej składowej (rys. 6). Mówimy, że diagram  $(L, a)$  jest rozwiązany, gdy obchodząc go zgodnie z orientacją i rozpoczynając od punktu  $a_1$ , następnie  $a_2$  itd. aż do punktu  $a_n$ , każde pierwsze raz napotkane skrzyżowanie pokonujemy górą (tak naprawdę oznacza to, że splot jest trywialny).

Dla rozwiązanego diagramu o  $n$  składowych definiujemy  $F_{(L, a)}(x, y) = (x + y)^{n-1}$  (warunek C jest spełniony, porównaj zadanie).

W szczególności zdefiniowaliśmy w ten sposób nasz wielomian dla diagramow bez skrzyżowań (nie zależy on od punktow wyróżnionych).

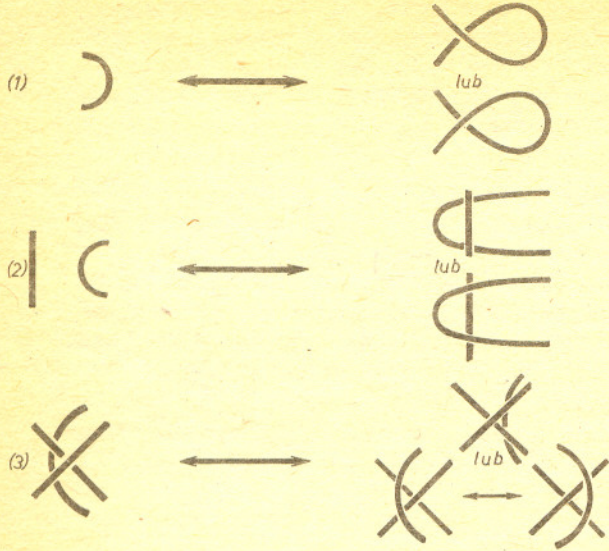
Załóżmy teraz, że  $F_L$  jest zdefiniowany dla diagramow  $L$  z mniej niż  $k$  skrzyżowaniami (i warunek C jest dla nich spełniony). Rozważmy teraz diagram  $L$  z  $k$  ( $k > 0$ ) skrzyżowaniami. Wielomian  $F_L$  zdefiniujemy w kilku krokach.

**Krok 1.** Wybieramy po jednym punkcie  $a_i$  w każdej składowej i definiujemy  $F_{(L, a)}$  indukcyjnie względem liczby skrzyżowań, które trzeba poprawić (zamienić most na tunel), by otrzymać diagram rozwiązany (tę liczbę „złych” skrzyżowań oznaczmy przez  $s(L, a)$ ). Jeśli  $s(L, a) = 0$ , to diagram jest rozwiązany i  $F_{(L, a)}$  został już określony. Załóżmy, że  $m \geq 1$  i że jeśli  $s(K, a) < m$ , to  $F_{(K, a)}$  jest już zdefiniowany. Jeśli  $s(L, a) = m$ , to wybieramy w  $L$  pierwsze „złe” skrzyżowanie  $p$ . Oznaczmy przez  $(L_p, a)$  diagram, który otrzymamy z  $(L, a)$  zmieniając w skrzyżowaniu  $p$  most na tunel, a przez  $L_p^0$  diagram otrzymany z  $L$  przez likwidację skrzyżowania  $p$  (rys.7). Wielomiany  $F_{(L_p, a)}$  i  $F_{L_p^0}$  są już określone ( $L_p^0$  ma mniej skrzyżowań niż  $L$ ;  $s(L_p, a) = s(L, a) - 1 < m$ ).  $F_{(L, a)}$  określamy tak, by był spełniony warunek C, tzn.

$$F_{(L, a)}(x, y) = \frac{1}{x}(F_{L_p^0}(x, y) - yF_{(L_p, a)}(x, y)).$$

**Krok 2.** Pokazujemy, że  $F_L$  nie zależy od wyboru punktu wyróżnionego. Jest to część dość żmudna, ale całkowicie elementarna.

**Krok 3.** Pokazujemy, że warunek C jest nadal spełniony. Dowód jest natychmiastowy i polega na odpowiednim wyborze punktow wyróżnionych. Nie ma w tym nic nadzwyczajnego, bo warunek C był użyty w kroku 1 do definicji.



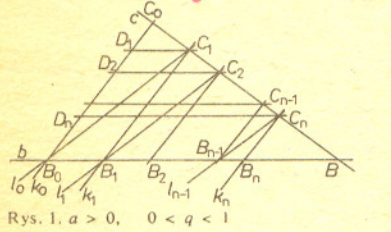
Rys. 8

Pozostaje jeszcze wykazać, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splót, to przypisany im jest ten sam wielomian. Trzeba się tu odwołać do twierdzenia Reidemeistera mówiącego, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splót, to od jednego do drugiego da się przejść za pomocą opisanych obok (rys.8) kroków (tzw. ruchy Reidemeistera). Trzeba jeszcze wykazać, że te ruchy nie zmieniają wielomianu diagramu. Można to zrobić przez indukcję względem liczby skrzyżowań odpowiednio wybierając punkty wyróżnione.

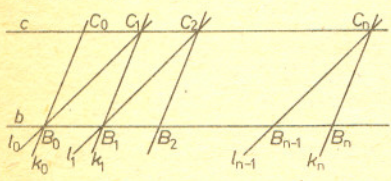
Dowód ten pozwala dalej modyfikować i uogólnić niezmienniki splótów. Można zmieniać równanie w warunku C lub wartość niezmiennika dla węzła trywialnego (dowód nie zmieni się). Jest nadzieja, że odpowiednio dobierając to równanie otrzymamy niezmiennik, który rozróżni jeszcze więcej splótów. Wiadomo jednak, że żaden wielomian tego typu nie rozróżni splótów z rysunku 5.

## Geometrycznie o szeregu geometrycznym

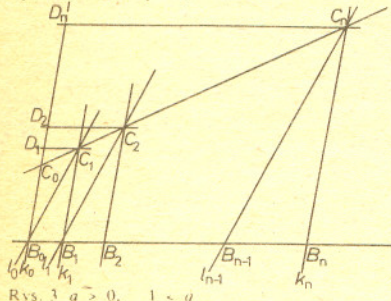
Mgr Andrzej KOK



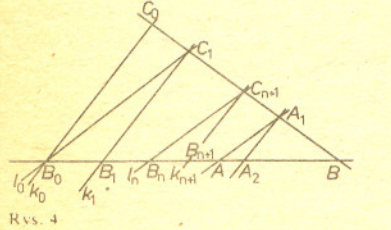
Rys. 1.  $a > 0, 0 < q < 1$



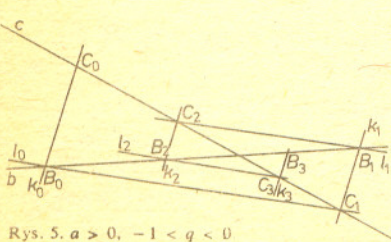
Rys. 2.  $a > 0, q = 1$



Rys. 3.  $a > 0, 1 < q$



Rys. 4



Rys. 5.  $a > 0, -1 < q < 0$

Znane wzory na sumę skończonego i nieskończonego szeregu geometrycznego można znaleźć metodami geometrii.

Weźmy dwie, na razie dodatnie, liczby  $a$  i  $q$ . Na ustalonej prostej  $b$  odkładamy odcinek  $B_0B_1$  o długości  $a$  i przez punkty  $B_0$  i  $B_1$  prowadzimy równoległe proste  $k_0$  i  $k_1$ . Na prostej  $k_0$  wybieramy punkt  $C_0$ , a na prostej  $k_1$  punkt  $C_1$  tak, by  $B_0C_0 = 1, B_1C_1 = q$  oraz punkty  $C_0$  i  $C_1$  leżały po tej samej stronie prostej  $b$ . Prowadzimy teraz prostą  $c$  przez punkty  $C_0$  i  $C_1$  oraz prostą  $l_0$  przez  $B_0$  i  $C_1$ .

Konstruujemy teraz ciągi  $(B_n)$  i  $(C_n)$  punktów należących do prostych  $b$  i  $c$ . Przypuścimy, że mamy już punkt  $B_{n-1}$ . Prowadzimy przez  $B_{n-1}$  prostą  $l_{n-1} || l_0 - C_n$  jest punktem przecięcia  $l_{n-1}$  z  $c$  — oraz przez  $C_n$  prostą  $k_n || k_0 - B_n$  jest punktem przecięcia  $k_n$  z  $b$ . Ponadto na prostej  $k_0$  wybieramy punkty  $D_1, D_2, \dots$  tak, by proste  $C_nD_n$  były równoległe do  $b$ .

Zauważmy, że punkt  $B_n$  zawsze leży między  $B_0$  i  $B_{n+1}$ , a ponadto dla  $q < 1$  (rys. 1) leży między  $B_0$  i  $B$  — punktem przecięcia prostych  $b$  i  $c$  (wynika to z aksjomatu Pascha).

Trójkąty  $\triangle B_0B_1C_1, \triangle B_1B_2C_2, \dots, \triangle B_{n-1}B_nC_n$  są podobne, również trójkąty  $\triangle B_0C_0C_1, \dots, \triangle B_{n-1}C_{n-1}C_n$  są podobne, tak więc łatwo otrzymujemy  $B_2C_2 = q^2, \dots, B_nC_n = q^n; B_1B_2 = aq, \dots, B_{n-1}B_n = aq^{n-1}$ .

Suma  $a + aq + \dots + aq^{n-1}$  jest zatem długością odcinka  $B_0B_n$ .

Z podobieństwa trójkątów  $\triangle D_1C_1C_0$  i  $\triangle D_nC_nC_0$  mamy  $\frac{C_nD_n}{C_1D_1} = \frac{C_0D_n}{C_0D_1}$ .

Mamy też  $C_nD_n = B_0B_n, C_1D_1 = a$ . Ponadto dla  $0 < q < 1: C_0D_n = C_0B_0 - B_0D_n = 1 - q^n$  i  $C_0D_1 = 1 - q$  (rys. 1), natomiast dla  $q > 1: C_0D_n = q^n - 1, C_0D_1 = q - 1$  (rys. 3).

W obu przypadkach mamy więc  $B_0B_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

Dla  $q \geq 1$  długości odcinków  $B_0B_n$  rosną nieograniczenie.

Istotnie,  $B_0B_n = B_0B_1 + \dots + B_{n-1}B_n \geq n \cdot a$ . Natomiast dla  $0 < q < 1$  ciąg  $(B_n)$  jest zbieżny do punktu  $B$ .

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego punktu  $A \neq B$  z odcinka  $B_0B$  do odcinka  $B_0A$  należy tylko skończenie wiele punktów  $B_n$  (pamiętajmy, że wszystkie należą do odcinka  $B_0B$ ). Jeśli  $B_n \in B_0A$ , to długość  $B_nB_{n+1}$  jest równa co najmniej długości  $AA_2$  (rys. 4), gdzie  $AA_1 || l_0, A_1A_2 || k_0, A_1 \in c, A_2 \in b$ . Tak więc jeśli  $B_n \in B_0A$ , to  $B_0B_n = B_0B_1 + \dots + B_{n-1}B_n \geq n \cdot AA_2$ . Otrzymujemy stąd, że liczba  $n$  musi być mniejsza niż  $\frac{B_0B_n}{AA_2}$ .

Łatwo obliczyć, że  $B_0B = \frac{a}{1 - q}$  (z podobieństwa  $\triangle C_0C_1D_1$  i  $\triangle C_0BB_0$ ).

Tak więc  $a + aq + \dots + aq^n + \dots = \frac{a}{1 - q}$  dla  $0 < q < 1$ .

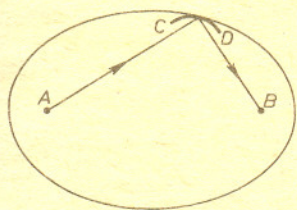
No dobrze, ale jak pozbyć się założenia o dodatniości  $a$  i  $q$ ?

Po prostu należy rozpatrywać odcinki skierowane. Odcinki ujemne równoległe do  $k_0$  odkładamy w dół, a równoległe do  $b$  w lewo (rys. 5).

Pozostawiamy Czytelnikowi wyprowadzenie wzorów na sumy dla  $q < 0$ .

# Zasada najmniejszego działania

Dr Adam BECHLER



Przykładem, gdy promieniom świetlnym biegnącym po różnych torach między punktami  $A$  i  $B$  odpowiadają takie same drogi optyczne, jest sytuacja, gdy  $B$  jest obrazem  $A$  utworzonym za pomocą soczewki skupiającej. Podobnie, gdy  $A$  i  $B$  są dwoma ogniskami elipsy, wszystkie promienie docierające z  $A$  do  $B$  po odbiciu od elipsy przebywają tę samą drogę. Jeżeli część łuku elipsy zastąpimy łukiem o większej krzywiznie (na rysunku łuk  $CD$ ), to rzeczywisty tor będzie odpowiadał lokalnemu maksimum drogi optycznej (gdy krzywizna jest mniejsza — realizowane jest minimum).

Aby określić ruch ciała materialnego, musimy wiedzieć, jakie siły działają na to ciało oraz jakie są tak zwane warunki początkowe, czyli położenie i prędkość ciała w pewnej początkowej chwili czasu  $t_0$  (np. dla  $t_0 = 0$ ). Ciało swobodnie porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej przechodzącej przez punkt określający początkowe położenie ciała i równoległej do kierunku prędkości początkowej. W przypadku rzutu ukośnego w polu grawitacyjnym paraboliczny tor tego ruchu określony jest jednoznacznie przez punkt, z którego ciało zostało wyrzucone i przez kierunek oraz długość wektora prędkości w tym punkcie.

W mechanice spotykamy się jednak często z zagadnieniami innego typu, gdy zamiast warunków początkowych mamy określone tak zwane warunki brzegowe, czyli znamy położenie ciała na początku i końcu ruchu. Dobrym przykładem takiego zagadnienia jest podróż z Ziemi na Księżyc. Punkt początkowy toru statku kosmicznego znajduje się na powierzchni Ziemi, a końcowy na powierzchni Księżyca. Aby trafić w Księżyc (zapomnijmy na moment o poprawkach toru dokonywanych w trakcie lotu), musimy odpowiednio dobrać położenie i prędkość rakiety w chwili startu, a więc warunki brzegowe musimy przetłumaczyć na warunki początkowe. Można jednak problem postawić w inny sposób: jak znaleźć tor (lub równanie różniczkowe określające tor) ciała poruszającego się w danym polu sił między punktami  $A$  (początkowym) i  $B$  (końcowym)? Lub ogólniej: czy istnieje jakaś zasada, za pomocą której można otrzymać równania ruchu w mechanice?

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a zasada tego typu pojawiła się najpierw w optyce geometrycznej, gdzie znana jest obecnie pod nazwą zasady Fermata. Określa ona tor promienia świetlnego w ośrodku, w którym współczynnik załamania zależy od położenia. Zgodnie z tą zasadą promień świetlny biegnie między dwoma punktami  $A$  i  $B$  po takim torze, wzdłuż którego droga optyczna ma wartość ekstremalną (w większości przypadków jest to minimum). Gdy współczynnik załamania jest stały,  $n = \text{const}$ , drogą optyczną nazywamy iloczyn  $n$  i długości toru promienia świetlnego, gdy natomiast  $n$  zmienia się od punktu do punktu, to dzielimy tor na odcinki na tyle krótkie, że na każdym z nich współczynnik załamania można uważać za stały. Droga optyczna jest wtedy zdefiniowana jako:

$$(1) \quad \text{droga optyczna} = \sum_i n_i \Delta s_i,$$

gdzie  $n_i$  jest wartością współczynnika załamania na  $i$ -tym odcinku, a  $\Delta s_i$  długością tego odcinka. W granicy, gdy  $\Delta s_i$  dąży do zera i jednocześnie liczba punktów podziału dąży do nieskończoności, otrzymujemy

$$(2) \quad \text{droga optyczna} = \int_A^B n(s) ds.$$

Przez dwa punkty  $A$  i  $B$  można przeprowadzić dowolnie wiele hipotetycznych torów promienia świetlnego i dla każdego z nich obliczyć drogę optyczną. Wzdłuż jednego z nich droga optyczna

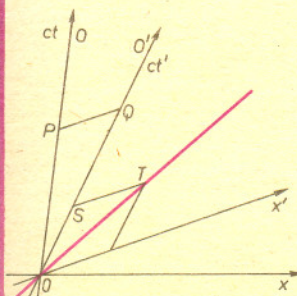


## 5. Dwaj obserwatorzy

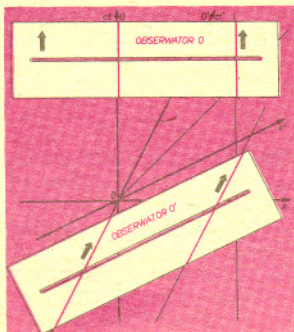
Linie świata pierwszego mieszkańca naszego jednowymiarowego świata mogliśmy wybrać dowolnie. Dla następnych nie mamy już tej swobody wyboru, bo poruszają się względem pierwszego w określony sposób.

Załóżmy, że linie świata dwóch obserwatorów inercjalnych  $0$  i  $0'$  przecinają się w punkcie  $O$  i w tym punkcie synchronizują oni swoje zegary (rys. 5a). Według  $0$  w czasie  $OP$  obserwator

$0'$  oddalił się od niego na odległość  $PQ$ , czyli prędkość  $0'$  względem  $0$  jest równa  $V = \frac{PQ}{OP}$ .



Rys. 5a



Rys. 5b

Obserwator  $0'$  może, podobnie jak to zrobił  $0$  w części 4, wprowadzić swoją oś odległości tak, by mierzona przez niego prędkość światła  $\frac{ST}{OS}$  była równa jedności. Na razie nie znamy związku między skalami czasu i odległości obu obserwatorów, a więc nie potrafimy przetłumaczyć wyników pomiarów jednego na wyniki drugiego. Możliwe jest jednak jakościowe porównanie obserwacji. W tym celu najlepiej posłużyć się opisanym wcześniej kartonikiem z wycięciem. Kartonik trzeba teraz przesunąć tak, aby wycięcie było równoległe do osi odległości, a linia świata obserwatora była widoczna zawsze w tym samym punkcie szczeliny (rys. 5b). Prowadzenie kartonika mogą ułatwić dodatkowe linie (na rysunku zaznaczone kolorem). W szczeliny widoczne są zdarzenia zachodzące równocześnie z punktu widzenia danego obserwatora.



będzie miała wartość minimalną i to jest właśnie tor, który zostaje „wybrany” przez promień świetlny w ośrodku. Jeżeli współczynnik załamania jest stały, można go wynieść przed całkę we wzorze (2) i zasada Fermata mówi, że

$$(3) \quad nl = \text{minimum}$$

( $l$  jest długością toru promienia świetlnego). Światło rozchodzi się więc wtedy wzdłuż linii prostej. Ciekawszy przykład stanowi prawo załamania światła, które wynika także z zasady Fermata: promień świetlny przechodzi przez granicę dwóch ośrodków w taki sposób, że droga optyczna jest minimalna (patrz np. Grzegorz BIAŁKOWSKI, *Biblioteczka Delt* t. 4, str. 4).

Zasada Fermata w optyce geometrycznej stanowiła inspirację dla sformułowania analogicznych zasad w mechanice. Spróbujmy potraktować obszar, w którym na ciało działają siły, podobnie jak ośrodek optyczny o zmiennym współczynniku załamania; odpowiednikiem toru promienia świetlnego będzie wtedy tor ciała. Nie należy stąd oczywiście wnioskować, że ruch mechaniczny i rozchodzenie się światła w optyce geometrycznej to jedno i to samo. Chcemy się tu posłużyć jedynie pewną analogią, która może być pomocna przy znajdowaniu toru ciała materialnego poruszającego się w polu sił. Jeżeli siły działające na ciało są zachowawcze (czyli że można wprowadzić energię potencjalną  $V(r)$ ), to okazuje się, że rolę współczynnika załamania odgrywa następująca wielkość:

$$(4) \quad \text{„współczynnik załamania”} = \sqrt{E - V(r)},$$

gdzie  $E$  jest całkowitą energią ciała (stałą w czasie ruchu). Ruch między punktami  $A$  i  $B$  odbywa się po takim torze, że

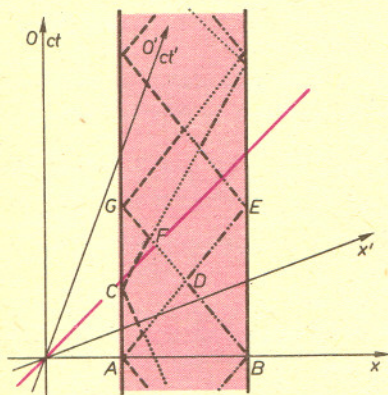
$$(5) \quad \int_A^B \sqrt{E - V(r)} ds = \text{ekstremum.}$$

Równanie (5) nosi nazwę zasady Jacobiego; pozwala ona określić kształt toru, nie możemy jednak za jej pomocą wyznaczyć zależności położenia ciała od czasu. (Polecamy Czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja podcałkowa we wzorze (5) jest proporcjonalna do prędkości. Jak zależy od prędkości światła w ośrodku funkcja podcałkowa w zasadzie Fermata?)

Głównym problemem, który chcemy rozwiązać w mechanice, jest jednak nie tyle sam kształt toru, co zależność położenia ciała od czasu (wynika z niej zresztą także kształt toru). Ogólną zasadą pozwalającą określić ewolucję czasową jest tak zwana zasada najmniejszego działania Hamiltona. Zgodnie z nią ruch ciała materialnego odbywa się w taki sposób, że pewna wielkość zwana działaniem ma wartość minimalną, a ściślej mówiąc ekstremalną, z tym że w większości przypadków jest to minimum. Działanie zdefiniowane jest w następujący sposób:

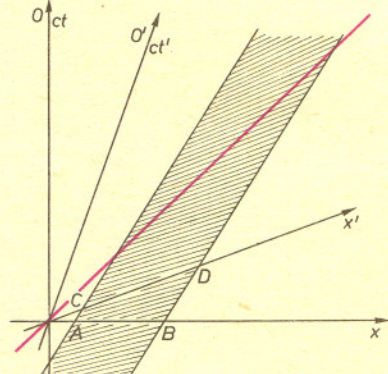
$$(6) \quad \text{działanie} = \int_{t_A}^{t_B} L dt,$$

Rozwiązanie zadania M 403. Mamy  
 $N = 1 + 40 + 40^2 + \dots + 40^{999} = \frac{40^{1000} - 1}{40 - 1} =$   
 $= \frac{40^{1000} - 1}{39}$   
 Bezpośrednio można sprawdzić, że rozwinięcie dziesiętne  $\frac{1}{39}$  jest ułamkiem okresowym 0, (025641). Oznaczmy okres tego ułamka przez  $PP$  (ma 6 cyfr). Mamy  $1002 = 167 \cdot 6$ , a stąd  
 $\frac{10^{1002}}{39} = \underbrace{PP \dots P}_{167 \text{ razy}}, PP \dots$ , a więc  
 $M = \frac{10^{1002} - 1}{39} = \underbrace{PP \dots P}_{167 \text{ razy}}$ . Zauważmy, że  
 $N - M = \frac{4^{1000} \cdot 10^{1000} - 1}{39} - \frac{10^{1002} - 1}{39} =$   
 $= \frac{4^{1000} - 10^2}{39} \cdot 10^{1000}$   
 jest liczbą całkowitą, a ponieważ 39 i  $10^{1000}$  są względnie pierwsze, więc  $K = \frac{4^{1000} - 10^2}{39}$  jest również całkowite.  $N - M = 10^{1000} \cdot K$ , czyli  $M$  i  $N$  mają takie same ostatnie 1000 cyfr, a mianowicie 5641PP...P.  
 166 razy



Rys. 5c

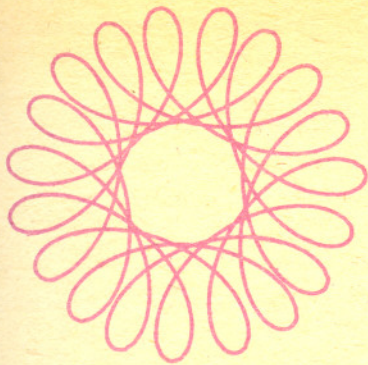
Na rysunku 5c przedstawiona jest historia jednowymiarowego „gazu” złożonego z trzech jednakowych cząstek. Gaz zamknięty jest w naczyniu. Przy każdym zderzeniu cząstki wymieniają się prędkościami, bo zderzenia są sprężyste. Warto przenieść rys. 5c na większą kartkę i obejrzyć za pomocą kartonika. Przebieg zdarzeń dla obserwatora  $\theta$ , dla którego naczynie spoczywa, jest inny niż dla poruszającego się obserwatora  $\theta'$ . Dla  $\theta$  zdarzenia  $A$  i  $B$  oraz  $C$  i  $D$  są równoczesne, a dla  $\theta'$  równoczesne są zdarzenia  $C$  i  $E$ . Dla jakiego obserwatora równocześnie nastąpią odbicia  $B$  i  $C$ ?



Rys. 5d

Względność równoczesności ma także wpływ na pomiar odległości. Długość pręta mierzy się wyznaczając w tej samej chwili współrzędne jego końców. Ponieważ zdarzenia równoczesne w jednym układzie inercyjnym nie są równoczesne w innym, wynik pomiaru zależy od układu odniesienia. Czytelnikowi pozostawiamy prześledzenie pomiarów na podstawie rysunku 5d. Jednak dopiero znalezienie związku między skalami odległości i czasu w  $\theta$  i  $\theta'$  pozwoli na ilościowe porównanie wyników.

(cdn.)



gdzie funkcja  $L$ , zwana funkcją Lagrange'a, równa jest różnicy energii kinetycznej i potencjalnej:  $L = E_{kin} - V$ ,  $t_A$  jest chwilą czasu, gdy ciało znajdowało się w punkcie  $A$ , a  $t_B$  — chwilą, w której osiągnęło końcowy punkt  $B$ . Zauważmy, że całkujemy teraz nie względem przebytej drogi, lecz względem czasu.

Czy zasada Hamiltona i „zwykłe” równanie mechaniki:  $F = ma$ , są sobie równoważne? Oczywiście, tak; w przeciwnym razie nie doszłoby w ogóle do jej sformułowania. Praktyczne znaczenie zasady najmniejszego działania polega na tym, że pozwala ona określić ruch bardziej skomplikowanych układów mechanicznych w sposób dużo prostszy niż równanie  $F = ma$ . Główną jednak zaletą zasady Hamiltona jest to, że „ignoruje” ona siły reakcji więzów; chcąc natomiast napisać równanie Newtona, musimy uwzględnić wszystkie siły.

Zasada najmniejszego działania ma także pewne znaczenie uniwersalne — za jej pomocą można sformułować nie tylko równania mechaniki, lecz także, na przykład, równania pola grawitacyjnego czy równania pola elektromagnetycznego. Może ona też stanowić dogodny punkt wyjścia przy przejściu od teorii klasycznych do teorii kwantowych i to nie tylko mechaniki, lecz także teorii znacznie bardziej skomplikowanych, jak na przykład elektrodynamika.

Rozpatrzmy na zakończenie prosty przykład ilustrujący zasadę Hamiltona. Jak wiemy, droga przebyta w czasie  $t$  przez ciało rzucone pionowo w polu grawitacyjnym wyraża się wzorem

$$(7) \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + bt + c,$$

przy czym oś  $z$  skierowaliśmy pionowo do góry, a wartości  $b$  i  $c$  zależą od warunków początkowych bądź brzegowych. Jeżeli rzut nastąpił z wysokości  $h$  i ciało po czasie  $t_0$  spadło na powierzchnię Ziemi, to

$$(8) \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{h - \frac{1}{2}gt_0^2}{t_0}t + h,$$

Czyli  $z(0) = h$ ,  $z(t_0) = 0$ . Kształt funkcji  $z(t)$  przedstawiony jest na rysunku grubą linią. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy o zasadzie najmniejszego działania, spośród wszystkich możliwych funkcji  $z(t)$ , takich że  $z(0) = h$  i  $z(t_0) = 0$  (tak zwanych funkcji porównawczych zaznaczonych na rysunku cienkimi liniami) rzucone pionowo ciało „wybierze” taką zależność  $z(t)$ , dla której działanie będzie miało wartość minimalną. Aby przekonać się, że tak jest istotnie, rozpatrzmy funkcje porównawcze postaci:

$$(9) \quad z\eta(t) = \left(-\frac{g}{2} + \eta\right)t^2 - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}t + h.$$

Zauważmy, że wszystkie one spełniają nasz warunek brzegowy ( $z\eta(0) = h$ ,  $z\eta(t_0) = 0$ ) i dla  $\eta = 0$  otrzymujemy rzeczywistą zależność drogi od czasu (7). Jeżeli teraz obliczymy działanie przyjmując, że zależność  $z$  od czasu dana jest wzorem (9), to działanie to powinno mieć minimum dla  $\eta = 0$ . Znajdźmy najpierw funkcję Lagrange'a:

$$L = E_{kin} - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz\eta}{dt}\right)^2 - mgz\eta,$$

a więc

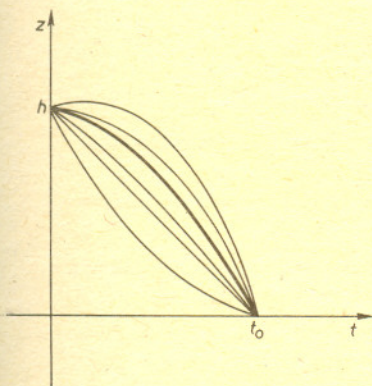
$$(10) \quad L = \frac{1}{2}m\left[(-g + 2\eta)t - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}\right]^2 - mg\left[\left(-\frac{g}{2} + \eta\right)t^2 - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}t + h\right].$$

Podstawiając (10) do (6) i wykonując proste całkowanie otrzymujemy

$$(11) \quad S = \int_0^{t_0} L dt = \frac{1}{6}mt_0^3\left(\eta^2 - \frac{g^2}{4}\right) + \frac{hm}{2t_0}(h - gt_0^2),$$

a więc działanie  $S$  traktowane jako funkcja  $\eta$  ma postać  $S = A\eta^2 + B$ , przy czym  $A > 0$ . Widzimy stąd, że istotnie dla  $\eta = 0$  działanie ma minimum.

Przedstawiony tu przykład stanowi tylko ilustrację zasady najmniejszego działania w przypadku rzutu pionowego, a nie jej dowód, bowiem ze zbioru wszystkich możliwych funkcji porównawczych wybraliśmy tylko pewną ich klasę określoną wzorem (9). Istnieje oczywiście ogólny dowód równoważności zasady Hamiltona i równania Newtona przeprowadzony za pomocą metod rachunku wariacyjnego.



Rozwiązanie zadania M 401. Niech  $a_i$  oznacza liczbę ciągów danych w zadaniu o długości  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Dla każdego  $i \leq n$  oraz ustalonego ciągu zero-jedynkowego długości  $i$  mamy  $2^{n-i}$  ciągów długości  $n$ , których jest on początkiem. Stąd

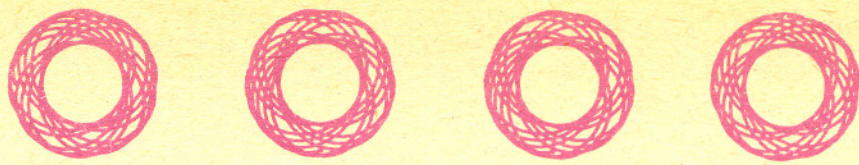
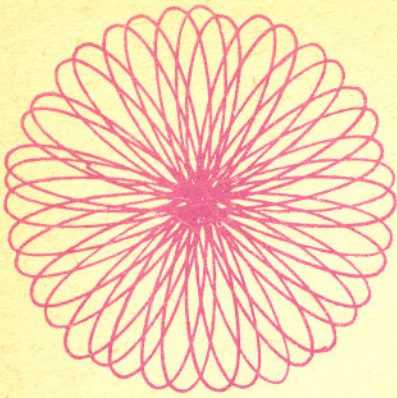
$$a_n \leq 2^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i} \text{ oraz } \sum_{i=n+1}^k a_i = (2^n - a_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (2^{n-i} - 1).$$

Sumę długości wszystkich ciągów można więc oszacować następująco

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i \cdot i &\geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot i + n(2^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i) - \sum_{i=n+1}^k a_i + (n+1) \sum_{i=n+1}^k a_i = \\ &= n \cdot 2^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(i-n) + \sum_{i=n+1}^k a_i \geq \\ &\geq n \cdot 2^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(i-n-1+2^{n-i}) \geq n \cdot 2^n \end{aligned}$$

(korzystamy z nierówności  $2^m \geq m+1$  dla  $m \geq 1$ ).





## Czy stawiać wszystko na jedną kartę?

Rozsądna odpowiedź to: czasem tak, czasem nie. A oto problem, z którym mają do czynienia bywalcy kasyn gry: w kieszeni zostało 20 dolarów, bilet do domu kosztuje dwa razy więcej. Można postawić całe 20 dolarów na czerwone w ruletce: wtedy z prawdopodobieństwem  $18/37$  wygrywamy ile trzeba. (W ruletce mamy 37 liczb od 0 do 36; jeśli wypadnie 0, to kasyno zabiera stawki.) A może warto stawiać po dolarze i powoli ciałuła potrzebną sumę?

Warto rozwiązać ogólniejsze „zadanie o ruinie gracza”:

Gracze  $A$  i  $B$  mają łączny kapitał  $s$  dolarów, w jednej partii  $A$  wygrywa od  $B$  dolara z prawdopodobieństwem  $p$  i przegrywa do  $B$  dolara z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$ . Gdy  $A$  ma  $k$  dolarów, jakie są szanse, że zostanie zrujnowany?

Niech  $p_k$  oznacza szukane prawdopodobieństwo. Jasne, że  $p_0 = 1$ , z drugiej strony  $p_s = 0$ . Jeśli  $A$  ma  $k$  dolarów, to po jednej partii będzie miał  $k+1$  dolarów z prawdopodobieństwem  $p$  i  $k-1$  dolarów z prawdopodobieństwem  $q$ . Dlatego

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

Powyższy układ równań (z „warunkami brzegowymi”  $p_0 = 1$ ,  $p_s = 0$ ) łatwo rozwiązać, gdy

$$p = q = \frac{1}{2}. \text{ Wtedy po prostu } p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1} \text{ i widać, że } (p_k)_{k=0}^s \text{ jest ciągiem}$$

arytmetycznym. W takim razie  $p_k = 1 - \frac{k}{s}$ . Gdyby ruletka była grą sprawiedliwą i szansa

wygrania podwójnej stawki wynosiła  $\frac{1}{2}$ , dla  $s = 40$  i  $k = 20$  mielibyśmy  $p_{20} = \frac{1}{2}$ . Strategia ryzykanta i strategia ciałuła byłyby równie dobre.

Rozwiążemy teraz nasz układ równań dla  $p \neq \frac{1}{2}$  i  $p > 0$ . Jeśli odrzucić warunki brzegowe,

rozwiązaniem może być dowolna stała, tj.  $p_k = A$ ,  $k = 1, 2, \dots, s-1$ . Czy istnieją inne? Poszukamy rozwiązania w postaci ciągu geometrycznego.

Jeśli więc  $p_k = z^k$ , to  $z^k = p \cdot z^{k+1} + q \cdot z^{k-1}$ , skąd

$$pz^2 - z + q = 0. \text{ Mamy więc } z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p}.$$

Po odrzuceniu przypadku, gdy  $z = 1$ , pozostaje  $z = \frac{q}{p}$ , czyli  $p_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$ . Zauważmy jeszcze,

że  $p_k = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^k$  jest też rozwiązaniem; dopasujemy je do warunków brzegowych.

$$\begin{aligned} A + B\left(\frac{q}{p}\right)^0 &= 1 & A + B &= 1 \\ A + B\left(\frac{q}{p}\right)^s &= 0 & A + B\left(\frac{q}{p}\right)^s &= 0. \end{aligned} \quad \text{czyli}$$

$$\text{Stąd } A = \frac{-(q/p)^s}{1 - (q/p)^s}, \quad B = \frac{1}{1 - (q/p)^s}. \text{ Ostatecznie } p_k = \frac{(q/p)^k - (q/p)^s}{1 - (q/p)^s}.$$

W naszym przykładzie  $s = 40$ ,  $k = 20$ ,  $p = \frac{18}{37}$ .

$$p_{20} = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{20} - \left(\frac{19}{18}\right)^{40}}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{40}} > 0,74.$$

Widać, że prawdopodobieństwo ruiny jest dużo większe niż  $\frac{19}{37}$ .

Morał — im dłużej gra się w grę niesprawiedliwą, tym gorzej się na tym wychodzi.



**Rozwiązanie zadania F 175.** Duża kropka utworzona przez zlanie się mniejszych kropek jest trwała, jeśli jej energia potencjalna jest mniejsza niż suma energii kropek, z których powstała. Na energię kropki składa się energia potencjalna w polu sił ciężkości (proporcjonalna do  $r$ ) i energia związana z napięciem powierzchniowym (proporcjonalna do  $r^2$ ). Całkowita energia może więc dla pewnych promieni maleć.

Dla oceny ilościowej rozważmy równoczesne zetknięcie  $N$  sferycznych kropek o promieniu  $r$ . Wskutek ich adiabaticznego zlania się odpowiednie zmiany energii potencjalnych wynoszą:

(a) Ciężkości

$$\Delta E_g = mg \cdot \Delta r = N \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g (R - r),$$

$\rho$  — gęstość rtęci,  $g$  — przyspieszenie swobodnego spadania,  $R$  — promień dużej kropki. Ponieważ  $R = \sqrt[3]{N}r$ , zatem

$$\Delta E_g = \frac{4}{3} \pi (\sqrt[3]{N} - 1) N \rho g r^4.$$

(b) Powierzchniowej

$$\Delta E_s = \sigma \Delta s = \sigma (4\pi R^2 - 4\pi N r^2).$$

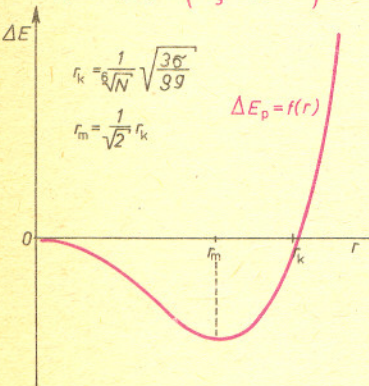
Po przekształceniach  $\Delta E_s =$   
 $= -4\pi (\sqrt[3]{N} - 1)^3 \sqrt[3]{N}^2 r^2 \sigma.$

(c) Całkowitej

$$\Delta E = \Delta E_g + \Delta E_s.$$

Po prostych rachunkach  $\Delta E =$

$$= 4\pi (\sqrt[3]{N} - 1) (N)^{2/3} \left( \frac{\sqrt[3]{N}}{3} \rho g r^2 - \sigma \right) r^2.$$

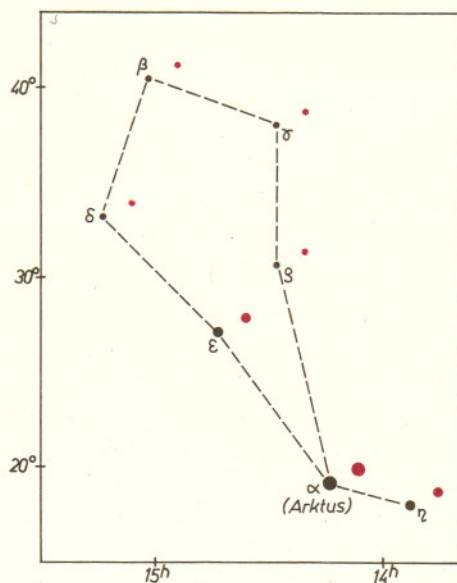


Z wykresu funkcji  $\Delta E = f(r)$  wynika, że stabilne są kropki o  $r < r_k$ .

Dla  $N = 2$  mamy  $r_k =$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{3 \cdot 465 \text{ dyn/cm}}{13,6 \text{ g/cm}^3 \cdot 981 \text{ cm/s}^2}} \approx 2,9 \text{ mm}.$$

W rzeczywistości promień krytyczny jest mniejszy (dlaczego?). Wszelkie zanieczyszczenia znacznie obniżają wartość napięcia powierzchniowego, nie więc dziwnego, że prowadzi to do drastycznego malenia  $r_k$ .



W opisie naszej mapki wspomnieliśmy, że położenia gwiazd odpowiadają tzw. epoce 1950,0, to znaczy, że właśnie na początku 1950 roku gwiazdy naszej mapki leżały tam, gdzie je narysowano. Czy to oznacza, że mapa ta jest przestarzała? Albo że niebo naprawdę wygląda już inaczej niż wtedy? Otóż odpowiedź nie może być natychmiastowa. Epoka 1950,0 jest tu tylko datą umowną. Nasza mapa nie jest przestarzała. Niebo rzeczywiście wygląda już nieco inaczej, ale tego nie da się zauważyć instrumentami amatorskimi, mimo że gwiazdy poruszają się w różnych kierunkach po sferze niebieskiej. Zmiana współrzędnych gwiazd spowodowana jest przede wszystkim dwoma czynnikami: ruchem precesyjnym Ziemi oraz ruchami własnymi gwiazd.

Często podaje się, że stała precesji (a więc ruch roczny gwiazdy leżącej w pobliżu ekliptyki) wynosi 50,2564 sekundy łuku. Czy to dużo, czy mało? Znowu zależy od punktu widzenia. W ciągu wielu lat może to być wystarczająco dużo, aby zauważyć przesunięcie, jeśli tylko wiedzielibyśmy, względem czego je mierzyć. Otóż, skutkiem precesji przesuwa się wśród gwiazd tzw. punkt Barana: miejsce, w którym równik niebieski przecina ekliptykę. Jest to umowny punkt (podobnie jak południk Greenwich), który służy nam jako punkt zerowy ogólnie stosowanego układu współrzędnych na sferze niebieskiej.

Na rysunku znajduje się charakterystyczna część gwiazdozbioru Wolarza, który łatwo odnajdziecie na mapce na odwrocie oraz na czerwcowym niebie. Najjaśniejszą gwiazdą Wolarza jest Arktur, jasno świecący w pobliżu zenitu. Na rysunku zaznaczono kolorem współrzędne siedmiu najjaśniejszych gwiazd tej konstelacji w roku 1900, a na czarno położenia w roku 2000. Widać, że gwiazdy przesunęły się o praktycznie ten sam wektor. Ponieważ wraz z nimi przesuwają się granice gwiazdozbiorów, więc możemy tu raczej mówić o ruchu układu odniesienia, niż o ruchu gwiazd.