

SPIS TREŚCI

NUMERU 3 (135)

Kometa Halleya i inne <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 1
Teoria względności (3)	str. 1
Komety	str. 4
Jak zakryć płamę na obrusie <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Nietypowy pojedynek	str. 10
Zadania	str. 10
Rozkład figury zawierającej swój środek <i>Michał Wojciechowski</i>	str. 11
Klub 44	str. 12
Wybuch na orbicie	str. 14
Patrz w niebo	str. 17

W następnym numerze:
Nauka po II wojnie światowej

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 dr Jerzy Brojan
 dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichoński
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
 dr Jan Rempala
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stepień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 dr Michał Szurek
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wolska
 prof. dr Andrzej Woszczyk —
 prof. dr Wojciech Zakowski —
 przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
 — Licosa Comissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. naczk.
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr Marek Kordos — red. naczk.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczk.
 mgr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 mgr Ewa Ryllowa
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska
 mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 7156/12/84. N-49

Kometa Halleya i inne

Dr Tomasz KWAST

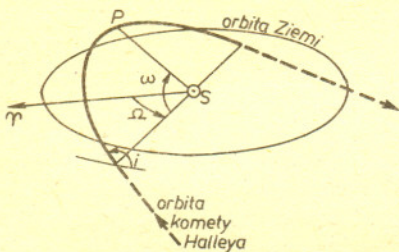


„Kometa Halleya zbliża się” — takie lub podobne nagłówki można było wyczytać chyba już we wszystkich gazetach. Tak więc wszyscy wiedzą, że kometa się zbliża, ale może już nie wszyscy, że zbliża się od dawna i nie po raz pierwszy. Zaczniemy od tego, że ta najstłonnejsza chyba w historii astronomii kometa obserwowana jest lekko licząc od 2000 lat. Ma się rozumieć, w owych czasach nikt nie podejrzewał, że co kilkadziesiąt lat ludzkość widzi ten sam obiekt — w ogóle nie mogło być o tym mowy. Po prostu od czasu do czasu pojawiały się rozmaite komety, ale nie znana była ani ich natura, ani tym bardziej prawa rządzące ich ruchem.

Zasadniczy przełom nastąpił w wyniku powstania nowożytnej mechaniki. Już sam Newton obliczył orbitę komety z 1680 r. stwierdzając, że jest ona paraboliczna ze Słońcem w ognisku. Nie wyjaśniało to oczywiście wszystkich zagadnień związanych z kometami, lecz w każdym razie dowodziło, że są one ciałami niebieskimi podlegającymi tym samym prawom mechaniki co np. planety.

Żmudnej pracy wyznaczenia elementów orbit znanych wtedy komet podjął się uczeń i przyjaciel Newtona, Edmund Halley. Stwierdził on, że pewien zestaw elementów powtarza się z bardzo niewielkimi różnicami u kilku komet obserwowanych w różnym czasie, skąd wynioskował, że musi to być ta sama kometa powracająca okresowo w pobliże Słońca i Ziemi. Halley powiązał w ten sposób pojawienia się pewnej komety z lat 1456, 1531, 1607 i 1682 i, co więcej, zapowiedział jej ponowne pojawienie się na rok 1758. Kometa istotnie pojawiła się pod koniec tego roku (przez perihelium przeszła w marcu 1759) potwierdzając tym samym obliczenia Halleya. W ten sposób kometa nazwana później nazwiskiem badacza została pierwszą, której okresowość ściśle udowodniono.

Kometa Halleya obiega Słońce po elipsie o półosi $a = 17,94$ j.a. (jednostka astronomiczna 1 j.a. = 150 000 000 km) i mimośrodkie $e = 0,967$. Orbita jest bardzo wydłużona i gdyby leżała w płaszczyźnie Układu Słonecznego, sięgałaby poza orbitę Neptuna. W perihelium kometa zbliża się do Słońca na odległość $q = 0,587$ j.a. Kąty określające usytuowanie orbity w przestrzeni wynoszą (rys. 1): nachylenie $i = 162^\circ$, długość ekliptyczna węzła wstępującego $\Omega = 58^\circ$ i argument perihelium $\omega = 112^\circ$. Okres obiegu wynosi średnio $T = a\sqrt{a} \cong 76$ lat, kometa więc zbliża się do nas od 1948 r. Dostrzeżono ją na niebie w październiku 1982 r., kiedy była w odległości ponad 11 j.a. od Słońca (a więc dalej niż Saturn),



Rys. 1. Usytuowanie orbity komety Halleya w przestrzeni. $PS = q = 0,587$ j.a. Wartości kątów podane w tekście.



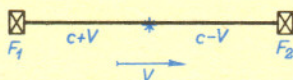
3. Względność równoczesności

Ruch punktu materialnego opisujemy zawsze względem wybranego układu odniesienia. Układ ten może być związany np. z przyrządami pomiarowymi. Wyniki obserwacji zależą od położenia przyrządów (obserwatora), jednak prawa fizyki zależą od układu odniesienia nie powinny. Podobnie — równanie elipsy proste w jednym układzie współrzędnych komplikuje się po przejściu do układu obróconego czy przesuniętego. Parametry elipsy pozostają przy tym nie zmienione.

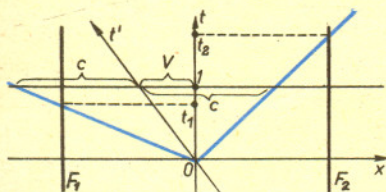
W fizyce, poza przesunięciem i obrotem, jest jeszcze inna możliwość zmiany układu odniesienia; można rozważać układy poruszające się względem siebie. I w tym przypadku prawa mechaniki są w każdym układzie takie same, jeśli tylko ograniczymy się do układów inercjalnych. Jest to tzw. zasada względności Galileusza: za pomocą żadnego doświadczenia mechanicznego nie można wykryć ruchu układu inercjalnego.

Wróćmy do zjawiska Dopplera opisanego w części 2. Łatwo zauważyć, że przy tej samej prędkości względnej źródła dźwięku i obserwatora otrzymuje się różne wyniki, w zależności od tego, czy obserwator, czy źródło spoczywa względem powietrza. Nie przeczy to oczywiście zasadzie względności Galileusza, bo istnienie materialnego nośnika fal dźwiękowych powoduje, że obie sytuacje nie są dokładnie równoważne.

Trudności pojawiają się, gdy chcemy przenieść zasadę względności Galileusza na zjawiska elektromagnetyczne. Fale elektromagnetyczne, a więc i światło, rozchodzą się w próżni. Na pytanie, czy jest do tego potrzebny jakiś „światłonośny” ośrodek (eter), odpowiedź mogą dać tylko doświadczenia.



Rys. 3a

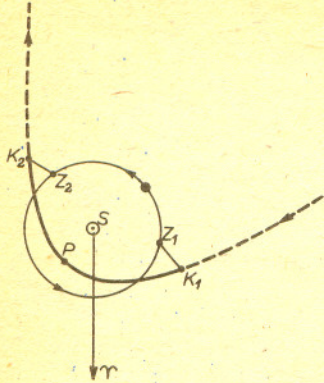


Rys. 3b

za pomocą elektronowych urządzeń światłoczułych współpracujących z pięciometrowym teleskopem Obserwatorium Palomarskiego. Nigdy dotychczas żadnej komety nie znaleziono w takiej odległości; trzeba jednak przyznać, że wiadomo było, gdzie komety Halleya szukać.

Kometa przejdzie przez perihelium 9 lutego 1986 r., do Ziemi zaś zbliży się dwukrotnie (rys. 2); minimalne odległości osiągnie 27 listopada 1985 r. (0,62 j.a.) i 11 kwietnia 1986 r. (0,42 j.a.). Niestety, bardzo niekorzystne będą warunki jej obserwacji w Polsce. Podczas pierwszego zbliżenia kometa będzie wieczorami wprawdzie dość wysoko na niebie, ale niedostrzegalna gołym okiem, zaś gdy pojaśnieje i rozwinie (prawdopodobnie) znaczniejszy warkocz, będzie nisko nad południowo-wschodnim horyzontem. Większą wysokość osiągnie ponownie dopiero podczas oddalania się w kwietniu 1986 r.

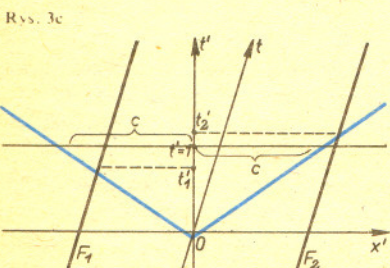
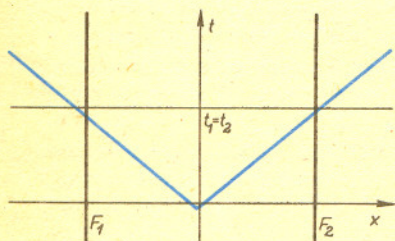
Wielu ludziom nasuwają się zapewne obawy o bezpieczeństwo Ziemi przy takich kosmicznych spotkaniach. Otóż, jak widać z rysunku 1, bezpośrednie zderzenie Ziemi z kometa Halleya jest niemożliwe — orbity obu ciał mijają się i dopóki orbita komety nie ulegnie większej zmianie (co teoretycznie może się stać w wyniku oddziaływania ze strony wielkich planet), to nic nam nie grozi. Przy aktualnej konfiguracji orbit możliwe jest jedynie przejście komety między Ziemią a Słońcem tak, że Ziemia natrafiłaby na jej warkocz. I co wtedy? Ano nic, dokładnie nic — takie przejście Ziemi przez warkocz komety Halleya odbyło się przy jej poprzednim zbliżeniu do Słońca 19 maja 1910 r. Prawdopodobnie to samo było z inną kometa w 1861 r. W obu przypadkach fakt ten w żaden sposób nie dał się nawet zauważyć. Chyba zresztą nic w tym dziwnego. Warkocze komet zbudowane są wszak z gazów parujących z jądra ograniczonego promieniowaniem Słońca i pyłu. Zważywszy, że warkocze rozciągają się nawet na setki milionów kilometrów, można sobie wyobrazić jak rozrzedzone są to obiekty. Można więc obawiać się jedynie bezpośredniego trafienia jądrem komety (ale nie komety Halleya). Skutki takiego spotkania mogłyby być poważne, choć trudno orzec, do jakiego stopnia. Przeciętne jądro komety jest prawdopodobnie kilkukilometrowym zlepkiem wielu kamiennych odłamów zatopionych w lodzie wodno-metanowo-amoniakalnym. Gdyby cała taka bryła zdołała uderzyć w powierzchnię Ziemi, to nasz glob wprawdzie by to wytrzymał, ale dla ludzi byłby to po prostu kataklizm. Zauważmy bowiem, że kamień wrzucony do wody wywołuje falę o wysokości porównywalnej z własnymi rozmiarami. Można zatem oczekiwać, że kometa wpadłszy do oceanu zalałaby lądy falą o wysokości kilku kilometrów. Gdyby stało się to u brzegów Europy, to prawdopodobnie jej większa część znalazłaby się wkrótce pod wodą, a po drugiej stronie Atlantyku fala — niechby nawet o rząd wielkości niższa — zalałaby wybrzeża Ameryki. Albo inaczej — łatwo obliczyć, że uderzenie w Ziemię bryły lodowej o średnicy 5 km z prędkością 50 km/s (a tego rzędu jest prędkość komety Halleya względem Ziemi przy zbliżeniu) powoduje wyzwolenie energii kinetycznej w ilości 5×10^{22} J,



Rys. 2. Zbliżenia komety Halleya do Ziemi: K_1Z_1 — 27 XI 1985, K_2Z_2 — 11 IV 1986. P oznacza perihelium orbity komety, kółko — położenie Ziemi w momencie przejścia komety przez perihelium 9 II 1986.



Następny odcinek „Teorii względności” zamieścimy w numerze 5/1985.



Załóżmy, że Ziemia porusza się w eterze spoczywającym w układzie związanym ze Słońcem. Najprostszy układ eksperymentalny mający wykazać ruch Ziemi względem eteru składa się z dwóch fotokomórek (F_1, F_2) i źródła światła w połowie odległości między nimi (rys. 3a). Całość ustawiona jest równoległe do kierunku prędkości Ziemi. W pewnej chwili ($t = 0$) źródło wysła impuls światła. Przewidywany przebieg doświadczenia pokazuje rysunek 3b (w układzie związanym ze Słońcem) i rysunek 3c (w układzie związanym z Ziemią). Czytelnik łatwo wyznaczy czas, jaki upływa między momentami zarejestrowania impulsu przez F_1 i F_2 .

Wykonanie doświadczenia dokładnie takiego jak opisane nie jest możliwe, ponieważ czasy, które trzeba mierzyć, są niezwykle krótkie. Równoważne doświadczenie Michelsona i Morleya, wykorzystujące interferencję światła, daje wynik całkowicie sprzeczny z oczekiwaniami. Obie fotokomórki zadziałają jednocześnie.

Wynika stąd, że w rzeczywistości przebieg doświadczenia jest nie taki jak na rysunku 3b, ale jak na rysunku 3d. Światło biegnie w obu kierunkach z tą samą prędkością. Ponieważ Ziemia obraca się, można ją traktować jak układ inercjalny-tylko w niewielkich odcinkach czasu. Dlatego powyższy wniosek odnosi się jednocześnie do wielu układów inercjalnych.

Jedną z konsekwencji izotropowości rozchodzenia się światła we wszystkich układach inercjalnych jest względność pojęcia równoczesności. Łatwo to zauważyć w opisanym wyżej eksperymencie. W układzie związanym z Ziemią F_1 i F_2 zadziałają równocześnie. W innych układach inercjalnych nie. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi. (c.d.n.)



co w języku wojskowym odpowiada wybuchowi o mocy 10^7 Mt. Wszelkie porównania ze zjawiskami ziemskimi stają się tu dość absurdalne, gdyż np. ocenia się, że spadek meteorytu tunguskiego, który 30 VI 1908 kompletnie zniszczył tajgę w promieniu 25 km, był równoważny wybuchowi 10 Mt. Spadek jądra komety byłby zatem równoważny spadkowi miliona meteorytów tunguskich jednocześnie. Niewykluczone jednak, że atmosfera ziemska poważnie złagodziłaby skutki takiego zderzenia. Mianowicie jądro komety, być może, zdążyłoby w atmosferze rozpaść się na luźne bryły, a one same nieco wyhamować, dzięki czemu nie byłoby to jedno uderzenie w Ziemię masy 5×10^{13} kg z prędkością 50 km/s, lecz wysypanie się mrowia odłamków kamiennych na spory obszar, ale z prędkościami może dużo mniejszymi.

Krótko mówiąc, obawiać się można tylko bezpośredniego zderzenia z jądrem komety. Szanse takiego spotkania są jednak tak znikome, że spokojnie możemy skupić się na podziwianiu tego niecodziennego zjawiska. A niektóre komety były naprawdę wyjątkowe. Tak np. tzw. Wielka Kometa z 1882 r. była widoczna w pełnym świetle Słońca. Kometa Arenda-Rolanda z 1957 r. miała jeden warkocz normalny skierowany od Słońca i drugi nietypowy, słabszy, skierowany ku Słońcu. Inna jeszcze kometa Brooksa z 1889 r. rozpadła się praktycznie „na oczach” obserwatorów na pięć składników z wolna rozbiegających się w przestrzeni. Ten ostatni przykład wyraźnie dowodzi, że komety ewoluują, co polega na utracie materii przy każdym zbliżeniu do Słońca. Substancje lotne wydmuchiwane przez wiatr słoneczny i ciśnienie światła uciekają tworząc warkocz, a jądro kamienne pozbawione „lepiszczą” może rozpaść się na poszczególne bryły tworząc rój meteoroidów. W wyniku utraty materii zdolnej parować z jądra kometa za każdym powrotem do Słońca powinna być coraz słabsza i chyba właśnie obserwuje się to u komety Halleya. Podczas aktualnego zbliżenia kometa Halleya będzie badana nie tylko metodami astronomicznymi, lecz również wręcz bezpośrednio. Mianowicie, o ile wszystkie plany zostaną zrealizowane, to ku komecie polecą: zachodnioeuropejski próbnik „Giotto”, radziecko-francuski „Wega” i prawdopodobnie japoński „Planeta A”. Znaczenie takiej unikalnej akcji trudno przecenić.

Kometa Halleya poza tym, że jest tak intensywnie „eksploatowana” przez astronomów, została również wykorzystana przez... historyków. Mianowicie, niektóre pojawienia się jej w pobliżu Ziemi zanotowane w kronikach umożliwiły w kilku przypadkach ustalenie historycznej chronologii. Kometa ta zawsze była obiektem okazalym i jej pojawienie się było właściwie niemożliwe do przeoczenia, jeżeli tylko warunki obserwacyjne nie były wiele gorsze, niż w przyszłym roku dla nas. Bo w ogóle rocznie odkrywanych jest po kilka komet, są one jednak widoczne tylko przez teleskopy. Polacy odkryli w sumie 13 komet, ostatnio — Konrad Rudnicki (1966). Skatalogowanych komet, tzn. ze znanymi orbitami, jest obecnie mniej więcej 1000, z czego około 200 to komety zdecydowanie okresowe. O dziwo, właściwie nie ma komet o orbitach zdecydowanie hiperbolicznych — w ramach dokładności obserwacji i obliczeń zazwyczaj nie daje się rozstrzygnąć, czy orbita „paraboliczna” naprawdę jest eliptyczna czy hiperboliczna. Wynikałoby z tego, że wszystkie komety należą do Układu Słonecznego, a więc w nim powstały. Jednak mechanizm powstawania (czy może jednorazowego powstania) komet jest do dziś nieznan. Przypuszczenia, że powstają one w wyniku kondensacji materii międzyplanetarnej, że są pozostałościami z czasów formowania się Układu Słonecznego, albo może są wyrzucane w wybuchach wulkanicznych z wielkich planet, nie wyszły poza stadium hipotez. Najbardziej rozpowszechniona została hipoteza J. H. Oorta, według której Słońce otoczone jest chmurą komet o promieniu rzędu 100 000 j.a., co stanowi około 1/3 odległości do najbliższej gwiazdy. Kometa w takiej odległości od Słońca „wyczuwa” już obecność innych gwiazd i wskutek oddziaływania z ich strony może niekiedy zostać skierowana ku Słońcu. Formalnie jej orbitą jest wtedy bardzo wyciągnięta elipsa, po której obieg trwa dziesiątki milionów lat, a więc kometa taka z punktu widzenia człowieka jest jednopojawieniowa, czyli „paraboliczna”. Jeżeli inne gwiazdy są również otoczone podobnymi chmurami komet, to chmury te mogłyby się przenikać, a same komety zmieniać przynależność do gwiazd. Z kolei statystyka elementów orbit zdaje się sugerować, że komety „paraboliczne” nadchodzą z pewnego wyróżnionego kierunku, a więc byłyby naprawdę pozaukładowe, a przynajmniej ich część. Całe zagadnienie okazuje się mocno skomplikowane i za wcześnie jest jeszcze na wyciąganie ostatecznych wniosków. Może nasza wiedza o kometach z wielokrotni się dzięki nadchodzącemu zbliżeniu się komety Halleya.



Rozwiązanie zadania M 394. Można założyć, że $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{100}$.

Oznaczmy $s = x_1 + x_2 + x_3$, wówczas $s \geq 3x_3$, oraz

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - \\ &- 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - \\ &- 2x_3^2 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_3^2 - 2(x_1 - x_2) \cdot \\ &\cdot (x_2 - x_3) \leq (x_1 + x_2 + x_3 - 2x_3)^2 + x_3^2 = \\ &= (s - 2x_3)^2 + x_3^2 = s^2 - 4sx_3 + 5x_3^2. \end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że $s \leq 100$; korzystając z powyższych nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 &\leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3 \left(\sum_{i=4}^{100} x_i \right) \leq \\ &\leq s^2 - 4sx_3 + 5x_3^2 + x_3(300 - s) = s^2 - \\ &- 2x_3(s - 3x_3) + 3x_3(100 - s) \leq s^2 + \\ &+ 3x_3(100 - s) \leq s^2 + s(100 - s) = 100s \leq 10000. \end{aligned}$$

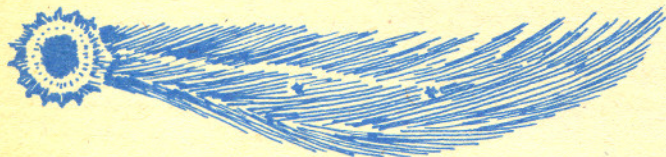




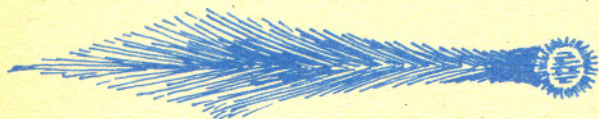
Górne ograniczenia na masy komet pochodzą z ich oddziaływań z planetami. Na przykład kometa P/Lexell zbliżyła się do Ziemi w 1770 r. na tyle, że jej okres skrócił się o $2\frac{1}{2}$ dnia, a Ziemia „ani drgnęła”. Gdyby długość roku ziemskiego zmieniła się o 1 sekundę, można by ocenić masę komety na $1,3 \cdot 10^{-4} M_{\oplus}$ (masy Ziemi). Kometa Brooksa (1889 V) przeszła w 1886 roku między księżycami Jowisza zmieniając swój okres z 29,2 lat do 7,1 roku, po czym rozpadła się. Okres Jowisza — bez zmian, stąd $M_{\text{kom}} \ll 10^{-4} M_{\oplus}$. Kometa Bieli rozpadła się na dwie części. Po pewnym czasie zaobserwowano powrót dwóch fragmentów odległych już od siebie o 2,4 mln. km. Ze wzajemnych oddziaływań tych fragmentów można było oszacować, że $M_{\text{kom}} \ll 4,2 \cdot 10^{-7} M_{\oplus}$. Masy komet są na tyle nieznane, że trudno jest nawet ocenić rząd wielkości. Wystarczy chociażby zacytować masy najbardziej znanej komety Halleya pojawiające się w literaturze naukowej, aby uzmysłowić sobie jak mało wiemy: $8 \cdot 10^{-12}$, $1,1 \cdot 10^{-11}$, $5 \cdot 10^{-11}$, 10^{-11} — 10^{-9} , $4 \cdot 10^{-9} M_{\oplus}$. Ogólnie przyjmuje się, że masy komet leżą w granicach 10^{-12} — $10^{-7} M_{\oplus}$.

Owóż astronomowie planetę, kometę
Uważają tak jak mieszczanie karetę;
Wiedzą, czyli zajeżdża przed króla stolicę,
Czyli z rogatek miejskich rusza za granicę;
Lecz kto w niej jechał? po co? co z królem rozmawiał?
Czy król posła z pokojem, czy z wojną wyprawiał?
O to oni pytają.

A. Mickiewicz, *Pan Tadeusz*, ks. VIII w. 151—157



Spośród znanych komet najbardziej zbliżyła się do Ziemi kometa Lexella w 1770 r. W 1767 r. Jowisz rzucił tę kometę na nową orbitę i przeleciała ona prawdopodobnie kilka milionów km od Ziemi; ale już w 1779 r. przeleciała znowu blisko Jowisza i ten rzucił ją na taką orbitę, na której już więcej nie mogła być obserwowana z Ziemi. Drugą na liście rekordzistek zbliżenia do Ziemi była kometa IRAS-Araki-Alcock (1983 d), odkryta 25 kwietnia 1983 za pomocą satelity IRAS. 11 maja 1983 zbliżyła się ona do Ziemi na odległość 4,65 mln km (12 razy dalej niż średnia odległość Księżycy).



Prędkość komet zależy, oczywiście, od ich orbit. Czasem poruszają się bardzo wolno, kiedy indziej pędzą z dużą szybkością. Na przykład kometa z 1843 roku zakreśliła w ciągu doby względem Słońca łuk długości 292° , na pokonanie pozostałych 68° będzie potrzebowała ponad 500 lat.



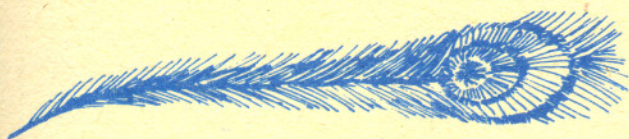
Kometa, która ma perihelium najbardziej oddalone od Słońca, to P/Schwassman-Wachmann (1957 IV). Nie zbliża się ona do Słońca nigdy na odległość mniejszą niż 5,5 j.a.

Dziewięć znanych komet zbliża się do Słońca na odległość mniejszą niż 0,01 j.a. Należą one do klasy tzw. komet muskających Słońce. Rekordzistką (spośród tych, które nie uderzyły w Słońce) była kometa 1882 II, która przeszła w odległości 0,00775 j.a. od centrum Słońca ($\frac{2}{3}$ promienia Słońca od jego powierzchni). I dla niej ta eskapada nie skończyła się pomyślnie — kometa rozpadła się na kilkanaście części.

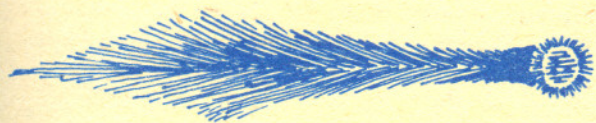


Jednym z pierwszych na świecie, którzy stwierdzili, że komety nie są związane z katastrofami na Ziemi, był polski szlachcic arianin Stanisław Lubieniecki, zajmujący się w Amsterdamie prawdopodobnie handlem towarami orientalnymi. Wydał on w 1667 roku trzypięciotomowe dzieło *Theatrum cometicum*, w którym wykazał, że kometom towarzyszą zarówno wydarzenia „dobre”, jak i „złe” i w związku z tym nie ma powodu obawiać się komet. Ciekawym, późniejszym przykładem tej względności była kometa z 1811 roku niosąca nieszczęścia związane z wojnami napoleońskimi w całej Europie. W Portugalii jednak tego roku wyjątkowo obrodziły winogrona pozwalając na nabijanie kiesy za wspaniałe „wino kometarne”.

Najdawniejszy znany przykład rozerwania się komety zanotowano w roku 371 p.n.e. Opisał ten fakt historyk Eforos z Kyme. Wiemy o tym dzięki Senece, który zbeształ Eforosa jako niesumiennego kronikarza nie wahającego się nawet przed wymyślaniem kłamstw dla uprawdopodobnienia swych opowieści.



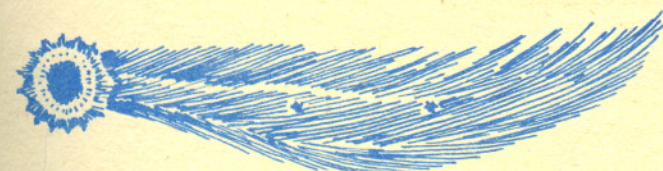
Nazewnictwo komet jest rzeczą dość skomplikowaną. Każda kometa ma co najmniej trzy urzędowe nazwy. Pierwsze dwie dostaje zaraz po odkryciu. Jedną z nich jest nazwisko (nazwiska) odkrywcy z ewentualną liczbą arabską, mówiącą, która to kometa danego odkrywcy, np. Tempel 2. Jednocześnie przyporządkowuje się jej kolejny numer, składający się z roku odkrycia i kolejnej litery alfabetu. (Dotychczas bardzo rzadko zdarzało się, że nie starczało liter.) A więc np. trzecia kometa odkryta w 1985 roku otrzymuje nazwę 1985 c. Po pewnym czasie szereguje się komety zgodnie z kolejnością przejścia przez perihelium w danym roku. Tak więc np. kometa Halleya ponownie odkryta w 1982 roku będzie w swej trzeciej nazwie miała 1986, w tym roku bowiem przejdzie przez perihelium. Kolejność przejścia przez perihelium zaznacza się liczbą rzymską. Dodatkowo, jeśli kometa ma orbitę eliptyczną, poprzedza się jej nazwę literą P (ang. periodic), np. P/Halley. Z tego wynika, że każda kometa okresowa jest „chrzczona” na nowo za każdym pojawieniem się na niebie.



W 1665 roku Giovanni Alfonso Borelli zasugerował, że komety poruszają się po wydłużonych elipsach lub po krzywych zbliżonych do paraboli.



Już w 1538 roku Girolamo Fracastoro zauważył, że warkocze komet skierowane są zawsze od Słońca.



Nie wszystko wiemy nawet o orbitach komet. Przykładowo na podstawie wszystkich obserwacji przed 1982 r., uwzględniając wszystkie znane efekty obliczono, że kometa Halleya powinna przejść przez perihelium 5 lutego 1986 r. Po ponownym odkryciu okazało się, że kometa spóźnia się o całe 4 dni.

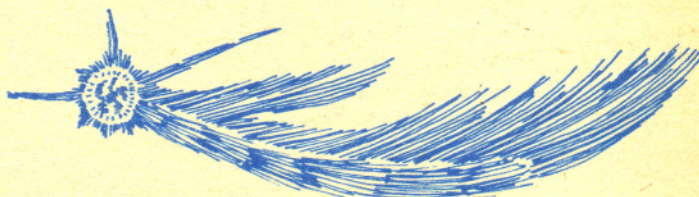
Ciekawą historię ma kometa Wolfa. Przed 1875 rokiem miała ona aphelium w okolicy orbity Jowisza. W tym roku zbliżyła się do wielkiej planety i została rzucona na nową orbitę o znacznie krótszym okresie. Po czterdziestu kilku latach kometa Wolfa znowu zbliżyła się niebezpiecznie do Jowisza i ponownie została rzucona na orbitę o podobnych parametrach jak przed 1875 r. Kometa ta została odkryta w 1884 r., a jej historię sprzed odkrycia znamy dzięki obliczeniom profesora Kamieńskiego z Warszawy (wykonywanym w latach dwudziestych).



W kompletnym katalogu komet obejmującym 946 pojawień komet od roku 87 p.n.e. do sierpnia 1973 zarejestrowano 614 różnych komet, w tym:

- 99 o okresie poniżej 200 lat,
- 145 o okresie większym niż 200 lat ($e > 0,96$), ale o orbitach eliptycznych,
- 302 o orbitach parabolicznych
- i 68 o orbitach hiperbolicznych;

największy obliczony mimośród wynosi $e = 1,006$.



Trudno jest mówić o rozmiarach komet, ponieważ trzeba nie tylko określić, o której komecie mowa, ale jednocześnie — w jakiej odległości od Słońca znajduje się. Centralna kondensacja — jądro ma typowo średnicę około 10 km. W miarę zbliżania się do Słońca rozwija się otoczka gazowo-pyłowa, tzw. głowa. Typowe rozmiary głowy określa tabelka

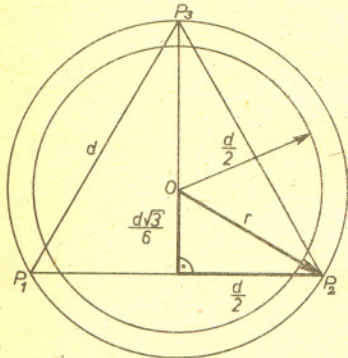
odległość od Słońca	0,3	0,5	1	2	3	jednostki astr.
średnica głowy	20	100	200	100	30	tysiący km

Jednak zdarzają się rekordzistki, jak np. tzw. kometa Napoleona z 1811 r. opisana w *Panu Tadeuszu*, która miała głowę o średnicy półtora miliona kilometrów. Najtrudniej mówić o długości warkocza, który przeważnie zaczyna pojawiać się, gdy kometa jest w odległości ok. 1,7 jednostki astronomicznej i osiąga maksymalną długość 10 milionów kilometrów, jednak czasem obserwuje się warkocze długości nawet 150 milionów kilometrów (= 1 jednostka astronomiczna, średnia odległość Ziemi od Słońca). Warkocz rekordowej długości miała bezimienna kometa z 1843 r., miał on 320 mln km (dla porównania Mars średnio odległy jest od Słońca o 220 mln km). Komety „żyją” typowo 10—100 tysięcy lat. W czasie każdego przejścia w pobliżu Słońca tracą pewną część swojej masy (średnio $\frac{1}{200}$) na rozbudowę głowy i warkocza oraz w czasie wybuchów. M.in. kometa Bennetta z 1970 r. wyrzucała wodór w tempie odpowiadającym rozkładowi 40 ton wody na sekundę.

Jak zakryć plamę na obrusie

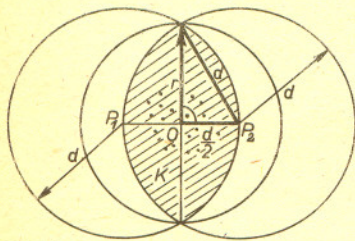
Mgr Jarosław GÓRNICKI

Srednicą figury płaskiej f nazywamy kres górny odległości między punktami f , tzn. liczbę $\sup \{AB: A \in f, B \in f\}$.

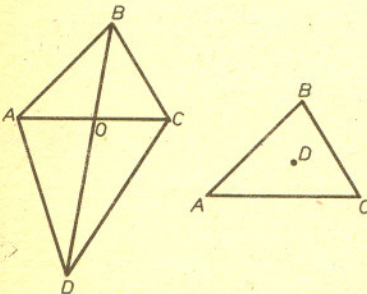


Rys. 1

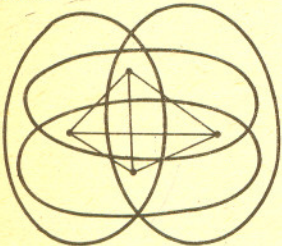
Figurę nazywamy wypukłą, jeśli odcinek łączący dowolne dwa jej punkty jest w niej całkowicie zawarty. W szczególności jeśli do figury wypukłej należą wierzchołki wielokąta, to cały wielokąt jest w niej zawarty.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Oba twierdzenia Helly'ego są prawdziwe w wersji wielowymiarowej. Jeśli rodzina zbiorów wypukłych w przestrzeni k -wymiarowej R^k jest skończona albo składa się ze zbiorów domkniętych i ograniczonych, oraz każde $k+1$ zbiorów z tej rodziny ma punkt wspólny, to istnieje punkt należący do wszystkich zbiorów z tej rodziny.

Tytułowe pytanie sformułujemy precyzyjnie. Jaki jest najmniejszy promień koła zakrywającego plamę o średnicy d ? Dla uproszczenia założmy, że plama składa się ze skończonej liczby punktów. Pierwsza, narzucająca się odpowiedź, $\frac{d}{2}$, jest nieprawidłowa. Otóż, wierzchołki trójkąta równobocznego o boku długości d nie mieszczą się w żadnym kole o promieniu $\frac{d}{2}$. Koło, do którego te punkty należą, musi mieć promień co najmniej $\frac{d}{\sqrt{3}} > \frac{d}{2}$ (rys. 1).

Zbiór punktów $\{A_1, \dots, A_n\}$ o średnicy d na pewno możemy przykryć kołem o promieniu d i środku w dowolnym z tych punktów. Możemy też przykryć je mniejszym kołem. Wybierzmy dowolną parę punktów (powiedzmy A_1 i A_2) odległych o d . Wtedy wszystkie punkty A_1, \dots, A_n należą do części wspólnej kół o środkach A_1 i A_2 oraz promieniu d . Ale ta część wspólna jest zawarta w kole o środku O i promieniu $r = \frac{\sqrt{3}}{2}d < d$ (rys. 2).

W znalezieniu odpowiedzi na pytanie z początku artykułu pomocne będą pewne fakty dotyczące figur wypukłych.

Twierdzenie Helly'ego (I wersja). Jeśli każde trzy spośród figur wypukłych f_1, \dots, f_n ($n \geq 3$) mają punkt wspólny, to wszystkie mają punkt wspólny (tzn. $f_1 \cap \dots \cap f_n \neq \emptyset$).

Dowód dla $n = 4$ sprowadza się do rozważenia trójkątów (z brzegiem) o wierzchołkach należących do zbioru czteroelementowego $\{A, B, C, D\}$ — dla dowolnych czterech figur wybieramy po jednym punkcie z czterech przecięć „po trzy figury”. Albo czworokąt $ABCD$ jest wypukły i wtedy punkt O przecięcia przekątnych należy do wszystkich czterech trójkątów, albo nie i wtedy np. D należy do trójkąta ABC , a zatem należy do wszystkich trójkątów (rys. 3).

Każdy z trójkątów będzie teraz zawarty w pewnej z figur i ich część wspólna, niepusta, zawarta będzie w części wspólnej wszystkich czterech figur.

Dalszy dowód twierdzenia jest indukcyjny.

Zastępujemy $n+1$ figur f_1, f_2, \dots, f_{n+1} przez n figur $f_1 \cap f_2, f_3, \dots, f_{n+1}$ o tej samej części wspólnej. To, że dla n figur jest spełnione założenie twierdzenia, wynika albo bezpośrednio z założenia dla figur f_1, \dots, f_{n+1} , albo z udowodnionego przypadku $n = 4$.

Twierdzenie Helly'ego (II wersja). Jeśli każde trzy figury z rodziny \mathcal{F} ograniczonych i domkniętych figur wypukłych mają punkt wspólny, to wszystkie figury z rodziny \mathcal{F} mają punkt wspólny.

Założenie domkniętości i ograniczoności figur jest tu istotne. Jako kontrprzykład można podać ciąg kół otwartych, stycznych do ustalonej prostej w ustalonym punkcie i o promieniach dążących do zera (rys. 5) lub ciąg półpłaszczyzn wyznaczonych przez równoległe proste leżące w równych odległościach.

Ta druga wersja twierdzenia Helly'ego posłuży nam do redukcji naszego problemu.

Wniosek. Jeśli każde trzy punkty figury można przykryć kołem o promieniu r , to i całą figurę też można przykryć takim kołem.

Dowód. Mamy pokazać, że pewien punkt płaszczyzny jest oddalony od dowolnego punktu figury f o nie więcej niż r . Ponieważ każde trzy punkty figury f , np. A, B, C , można przykryć kołem o promieniu r , więc środek X takiego koła należy do trzech kół o promieniach r i środkach w punktach A, B, C (odległość punktu X od każdego z punktów A, B, C nie jest większa niż d) (rys. 6). Tak więc każde trzy koła o promieniach r i środkach należących do figury f mają punkt wspólny. Z twierdzenia Helly'ego wynika istnienie punktu O , który

należy do wszystkich kół o środkach w figurze f i promieniach r , co oznacza, że koło o promieniu d i środku w punkcie O przykrywa całą figurę f .

Wniosek ten pozwala udzielić odpowiedzi na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie (H. W. E. Jung, 1901). Dowolną figurę płaską f o średnicy d można zawrzeć w kole o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Dowód. Obierzmy dowolne trzy punkty figury f , np. A, B, C . Każdy z trzech boków trójkąta ABC ma długość nie przekraczającą d . Jeśli trójkąt ABC jest rozwartokątny lub prostokątny, to zawiera się on w kole, którego brzegiem jest okrąg opisany na jego najdłuższym boku jako na średnicy (rys. 7). Promień takiego koła nie przekracza wartości $\frac{d}{2} < \frac{d}{\sqrt{3}}$. Jeżeli trójkąt ABC jest ostrokątny, to miara przynajmniej jednego z kątów, np. kąta przy wierzchołku A , którą oznaczmy α , mieści się w przedziale $\frac{\pi}{2} > \alpha \geq \frac{\pi}{3}$. Wówczas $\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, a ponieważ długość boku BC leżącego naprzeciw wierzchołka A jest nie większa niż d , więc średnica $2R$ okręgu opisanego na trójkącie ABC , która jest równa $\frac{d}{\sin \alpha}$ nie przewyższa $\frac{2d}{\sqrt{3}}$, czyli $R \leq \frac{d}{\sqrt{3}}$ (rys. 8). Tym samym pokazaliśmy, że dowolne trzy punkty figury f o średnicy d można przykryć kołem o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Zatem na podstawie poprzedniego wniosku całą figurę f można przykryć kołem o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$, co kończy dowód.

Zauważmy, że wyniku tego twierdzenia nie można polepszyć, o czym świadczy podany na początku przykład.

Jung badał również analogiczne zagadnienie w przypadku n -wymiarowym i wykazał, że każdą n -wymiarową bryłę o średnicy d można zawrzeć w n -wymiarowej kuli o promieniu $r = d \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. W przypadku $n = 3$ wyniku tego również nie można polepszyć, bowiem najmniejszym promieniem kuli, w której można zawrzeć czwórkę punktów umieszczonych w wierzchołkach czworoscianu foremnego o krawędzi długości d , jest właśnie $r = d \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$.

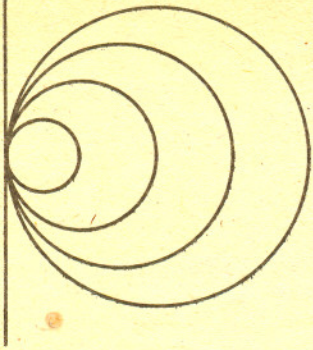
Ściśle z twierdzeniem Junga wiąże się następujący problem, którego rozwiązanie dotychczas nie jest znane: znaleźć figurę o najmniejszym polu, którą można by pokryć każdą figurę płaską o średnicy d . Wykazano tylko istnienie figury o najmniejszym polu, która pokrywa każdą figurę płaską o średnicy d . Z twierdzeń tych nie można wysnuć żadnych wniosków co do kształtu tej figury.

Na przykład koło z twierdzenia Junga ma pole równe $\frac{\pi}{3} d^2$. Nie jest to rozwiązanie przedstawionego wyżej problemu. Świadczy o tym twierdzenie będące wzmocnieniem twierdzenia Junga (dowód można znaleźć np. w książce I. M. Jagłom, W. G. Bołtiański — *Figury wypukłe*):

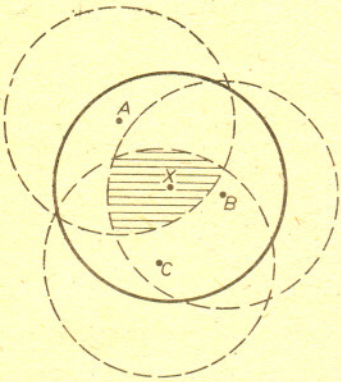
Każdą figurę płaską o średnicy d można pokryć sześciokątem foremnym, którego bok jest równy $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Sześciokąt foremny z tego twierdzenia (rys. 9) ma pole równe $\frac{\sqrt{3}}{2} d^2 < \frac{\pi}{3} d^2$.

Czy jest to ostatnie słowo — nie wiadomo!

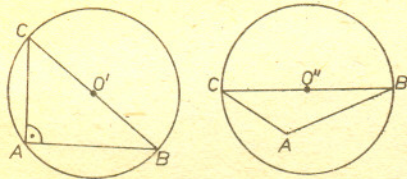


Rys. 5

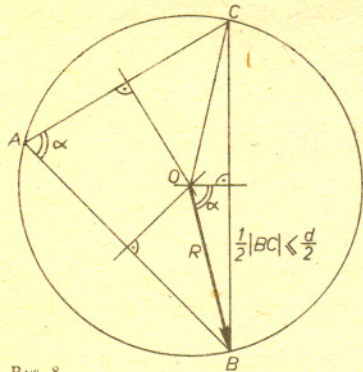


Rys. 6

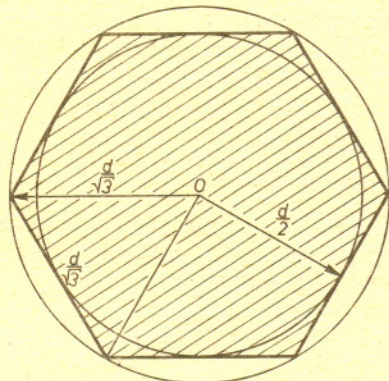
Niektórzy uważają, że zaplamiony obrus najlepiej wyprać.



Rys. 7

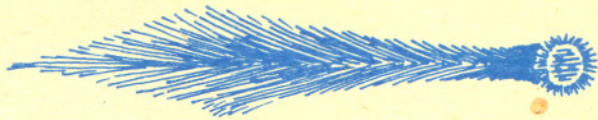


Rys. 8



Rys. 9

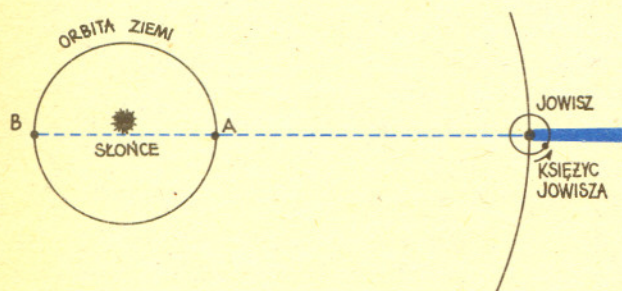
Mała delta



Prędkość światła

Prędkość światła nie jest nieskończona. Czas, w ciągu którego światło przebiega ziemskie odległości, jest jednak tak krótki, że można go zmierzyć tylko za pomocą bardzo precyzyjnych przyrządów. Dlatego też po raz pierwszy wyznaczono prędkość światła wykorzystując odległości astronomiczne, a dokładniej odległość równą średnicy orbity Ziemi.

W drugiej połowie XVII wieku duński astronom Olaf Römer obserwował zaćmienie księżyców Jowisza. Na podstawie wieloletnich pomiarów czasu, jaki upływał od zniknięcia księżyca w cieniu Jowisza do ponownego pojawienia się, wyznaczył on średni okres obiegu każdego z księżyców. Zauważył przy tym, że gdy odległość Ziemi i Jowisza jest najmniejsza, zaćmienia następują 8 minut przed terminem wyznaczonym na podstawie średnich. Przy największej odległości planet zaćmienie spóźniało się — również o 8 minut. Za przyczynę tego zjawiska Römer przyjął skończoną prędkość światła.



W punkcie A (rysunek) światło ma do przebycia krótszą drogę i dlatego obserwujemy zaćmienie wcześniej. Spóźnienie w B spowodowane jest wydłużeniem drogi światła o średnicę orbity Ziemi, czyli o około 300 milionów kilometrów. Światło przebywa tę drogę w ciągu $2 \times 8 \times 60s \approx 1000s$, a więc jego prędkość jest w przybliżeniu równa 300 tysięcy kilometrów na sekundę.

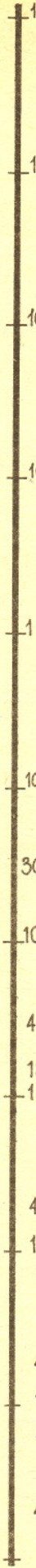
Nie jest to zwykła prędkość i to nie tylko ze względu na swoją wartość. Kiedy gonimy odjeżdżający pociąg, jego prędkość względem nas jest mniejsza niż względem peronu. Pogoń za światłem nic nie daje — prędkość światła względem dowolnie szybko poruszającego się obserwatora jest zawsze taka sama. Poza tym jest to największa prędkość, jaką zaobserwowano w Przyrodzie.

Prędkość światła to jednocześnie prędkość wszystkich fal elektromagnetycznych — fal radiowych, promieni X, promieniowania cieplnego itd. Prędkość ta jest tak duża, że do wielu słuchaczy transmisji koncertu dźwięk dociera szybciej niż do ostatnich rzędów w sali koncertowej. Transmisja z Księżyca osiąga Ziemię z półtorasekundowym opóźnieniem, co nie utrudnia specjalnie dialogu z centrum sterowania lotem. Jednak rozmowa z kosmonautami przebywającymi w okolicy Proxima Centauri z pewnością by się „nie kleiła”. Po zadaniu pytania musielibyśmy czekać na odpowiedź przeszło 8 lat. Z tego powodu nie będzie również możliwe prowadzenie gwiazdnych wojen za pomocą zdalnie sterowanych rakiet. Ponieważ światło biegnie ze skończoną prędkością, więc obserwacje astronomiczne obiektów na niebie dają nam informację nie o tym, jak te obiekty wyglądają w chwili obecnej, lecz jak wyglądały, gdy opuszczało je obserwowane przez nas światło. Stwarza to, zdawałoby się, możliwość oglądania całej historii Wszechświata. W istocie jednak jest trochę gorzej. Różnice wieku gwiazd czy galaktyk są tak duże, że różnice czasu (= odległości) są porównywalne z nimi. Dlatego obserwowane przez nas gwiazdy naszej Galaktyki należy traktować jako obraz Drogi Mlecznej dziś, a obrazy innych galaktyk jako obraz ich zaledwie wczoraj.

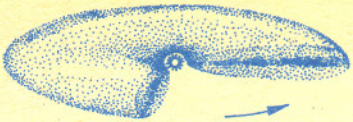
Dopiero światło kwazarów można uważać za doniesienie historyczne.

Można sobie jednak wyobrazić, co mogliby obserwować hipotetyczni mieszkańcy Wszechświata, gdyby umieli dokładnie obejrzeć Ziemię. Okazuje się, że każdy widziałby co innego, a co — przedstawiamy na rysunkach.

Małą Deltę przygotował Maciej JĘDRZEJCZAK

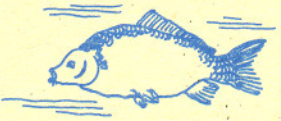


10 mld
KWAZARY



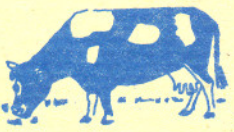
powstaje Układ Słoneczny

1 mld



Krygowce

100 mln



ODLEGŁE GALAKTYKI

ssaki

CENTRUM NASZEJ SUPER-GROMADY GALAKTYK



naozelne

10 mln



ortekoksztatine

MGLAWICA ANDROMEDY

1 mln



Homo erectus



KRAWĘDŹ GALAKTYKI

Homo sapiens

100 tys.



epoka kamienna

30 tys. CENTRUM GALAKTYKI



GROMADY KULISTE M 22

zasiedlenie Australii

10 tys.



piramidy

4200 MGLAWICA KRAB

MGLAWICA W ORIONIE

1300
1000



Mahomet



Warszawa stolica



400 POLARNA

100

90



wieża Eiffla

α UMa

45 CAPELLA

10



wrzesień 39

9



Mata Delta

SYRIUSZ

4.3 PROXIMA

Trzej panowie, nazwijmy ich A , B i C , postanowili stoczyć pojedynek. Ustalono broń — pistolety i reguły walki. Zawodnicy stojąc w wierzchołkach trójkąta mieli w ustalonej losowo kolejności oddawać strzał. Cel mogli wybierać dowolnie.

A był mistrzem, jego kule nigdy nie chybiały; B strzelał nieco gorzej, raz na 10 strzałów pułdował; natomiast tylko połowa strzałów C była celna. Przypuśćmy, że każdy będzie przestrzegał optymalnej dla siebie strategii — tak dobierał cel, by niezależnie od poczyną przeciwników mieć jak największą szansę przeżycia. Czytelniku, czy potrafisz powiedzieć, zwycięstwo którego z panów jest najbardziej prawdopodobne?

Otóż wcale nie A czy B . Najłatwiej zwyciężyć słabeuszowi C . Co więcej, jego szanse na to zwycięstwo są większe niż $\frac{1}{2}$. Musi on tylko właściwie wybierać cel — dopóki żyją obaj przeciwnicy, strzelać w ... powietrze.

Jeżeli kolejność strzelania dochodzi do B , musi on próbować zabić A — inaczej zginie z jego ręki. Tak samo A musi wybierać B jako swój cel. Jeśli więc A strzela przed B

(a prawdopodobieństwo tego jest równe $\frac{1}{2}$), to zabija B i wtedy C zwycięża

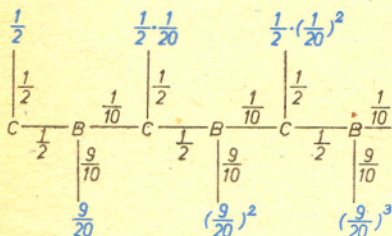
z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (gdy nie spuści). Sytuacja nieco się komplikuje, gdy B strzela

przed A . Pułduje wtedy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$ i mamy sytuację poprzednią. Jeśli zaś

zabije A , to szansa zwycięstwa C jest równa $\frac{10}{19}$ (patrz rysunek). Tak więc

prawdopodobieństwo tego, że zwycięży C , jest równe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{19} = \frac{1}{2} + \frac{9}{760}.$$



Kreski pionowe oznaczają strzał celny, poziome chybioty. Liczby po strzałach celnych podają prawdopodobieństwo takiego zakończenia pojedynku. Prawdopodobieństwo zwycięstwa C jest w tej sytuacji równe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \dots = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{10}{19}. \end{aligned}$$



Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 392. Udowodnić, że prosta przechodząca przez wierzchołek A trójkąta ABC i dzieląca na połowy środkową opuszczoną z wierzchołka C dzieli bok BC w stosunku 1:2.

Rozwiązanie na str. 12

M 393. Dany jest skończony zbiór kwadratów o sumie pól równej 1. Wykazać, że można je tak ułożyć w kwadracie o boku $\sqrt{2}$, by nie zachodziły na siebie (dla mniejszego kwadratu może to nie być prawdą).

Rozwiązanie na str. 12

M 394. Sto dodatnich liczb x_1, x_2, \dots, x_{100} spełnia warunki:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 > 10\,000,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} < 300.$$

Wykazać, że wśród tych liczb znajdują się trzy, których suma jest większa od 100.

Rozwiązanie na str. 3

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 168. W silniku fotonowym, opisywanym w literaturze science-fiction, zasób paliwa przetwarzany jest na ukierunkowaną wiązkę światła. Przypuśćmy, że w ciągu 20 lat czasu własnego rakiety chcemy dotrzeć do odległego od Ziemi o 30 tysięcy lat świetlnych centrum Galaktyki. Jaka powinna być minimalna masa paliwa, jeśli końcowa masa rakiety ma być równa 100 ton? Zakładamy, że czas przyspieszania i hamowania rakiety jest dużo krótszy od czasu trwania całego lotu.

Rozwiązanie na str. 13

F 169. Ciśnienie promieniowania można zaobserwować w radiometrze Crooke'a — przyrządzie składającym się z czterech skrzydełek zamocowanych na pionowej osi. Całość zamknięta jest w bańce próżniowej. Jedna strona każdego skrzydełka jest posrebrzona, a druga zaczerniona. Gdy na skrzydełka pada światło, zaczynają się one obracać. Dlaczego kierunek obrotu zależy od tego, czy w bańce jest próżnia, czy też pozostały w niej resztki gazu?

Rozwiązanie na str. 13

Rozkład figury zawierającej swój środek symetrii

Michał WOJCIECHOWSKI

Wiadomości Matematyczne wydawane są przez Polskie Towarzystwo Matematyczne dla członków Towarzystwa i bibliotek.

Bodźcem do napisania tej pracy było zadanie z *Wiadomości Matematycznych* t. XXIII.I: „Udowodnić, że jeżeli F jest figurą ograniczoną, zawartą w płaszczyźnie, mającą środek symetrii należący do tej figury, to F nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające”, podane z adnotacją, iż rozwiązanie nie jest znane redakcji.

Ponieważ dla figur o skończonej liczbie elementów udowodnić to jest bardzo łatwo, gdyż taka figura musiałaby mieć nieparzystą, a jednocześnie parzystą liczbę elementów, wydawać by się mogło, że dowód dla dowolnych figur nie będzie dużo trudniejszy. Intuicja ta okazała się złudna. Poświęciwszy dużo czasu na bezowocne próby udowodnienia powyższego twierdzenia zająłem się szukaniem przykładu, który by je obalił.

Na początek zbadalem, jaka może być izometria przekształcająca jedną z części podziału na drugą. Okazało się, że takim przekształceniem może być jedynie obrót wokół punktu różnego od środka symetrii figury F . Założenie, że jest to inna izometria, prowadzi do sprzeczności. Wykorzystując tę informację pokusiłem się o próbę skonstruowania takiej figury, która to próba zakończyła się powodzeniem.

Oto krótki opis konstrukcji.

Oberzmy dwa różne punkty o i a . Pierwszy z nich to środek symetrii budowanej figury, drugi zaś to środek obrotu realizującego przystawanie figur rozkładu.

Konstrukcja jest rekurencyjna. Punkt o należy do F_1 (jedna z figur podziału), $R_\varphi^o(o)$ należy do F_2 (R_φ^o jest obrotem wokół punktu o o kąt φ niewspółmierny z π), $S_o R_\varphi^o(o)$ należy do F_1 (S_o jest symetrią względem punktu o), $R_\varphi^o S_o R_\varphi^o(o)$ należy do F_2 i tak dalej — składamy na przemian R_φ^o i S_o , a kolejne obrazy punktu o należą raz do F_1 , a raz do F_2 . Konstrukcja ta jest poprawna: żadne dwa tak skonstruowane punkty nie pokrywają się (temu służyło założenie niewspółmierności φ z π), a zatem figury F_1 i F_2 są rozłączne. Ponadto o jest środkiem symetrii $F_1 \cup F_2$ i należy do $F_1 \cup F_2$ oraz $R_\varphi^o(F_1) = F_2$.

Zbiór F „wygląda” następująco:

Figura F_1 jest zawarta w okręgu O_1 , a figura F_2 w okręgu O_2 . Uzupełniając figurę F_1 kołem otwartym okręgu O_1 , a figurę F_2 kołem otwartym okręgu O_2 , uzyskamy figurę spójną spełniającą warunki zadania.

Zauważmy, że jeśli $N_1 = O_1 \setminus F_1$ i $N_2 = O_2 \setminus F_2$, to N_1 i N_2 spełniają warunki zadania i różnią się od swoich domknięć o przeliczalną liczbę punktów.

Nie był to koniec moich rozważań na temat tego zadania. Powodowany ciekawością zamieniłem w jego treści słowa „figury przystające” na „figury środkowo symetryczne”. Okazało się, że i w tym przypadku istnieje kontrprzykład.

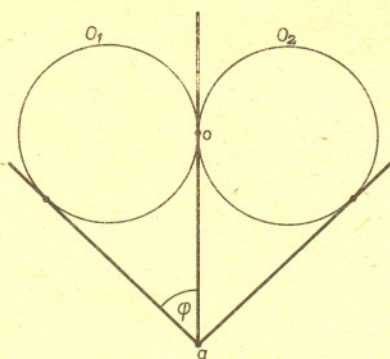
W tym momencie zupełnie naturalne staje się pytanie, które sobie postawiłem (poświęcając na odpowiedź drugą część pracy): czy figury podziału mogą być jednocześnie przystające i środkowo symetryczne. Problem ten okazał się trudniejszy od poprzednich. Znalezione przeze mnie rozwiązanie składa się z następujących kroków:

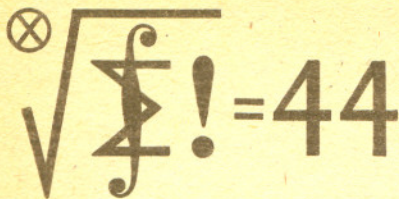
1° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami rozłącznymi, a $F_1, F_2, F_1 \cup F_2$ są figurami ograniczonymi i środkowo symetrycznymi, to ich środki symetrii są współliniowe.

2° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami ograniczonymi, przystającymi, rozłącznymi i środkowo symetrycznymi, a $F_1 \cup F_2$ jest figurą środkowo symetryczną, to środek symetrii $F_1 \cup F_2$ jest środkiem odcinka o końcach będących środkami symetrii odpowiednio F_1 i F_2 .

3° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami ograniczonymi, przystającymi, rozłącznymi i środkowo symetrycznymi, a $F_1 \cup F_2$ jest figurą środkowo symetryczną, to albo środki symetrii F_1 i F_2 pokrywają się, albo $S_o(F_1) = F_2$ (gdzie o jest środkiem symetrii $F_1 \cup F_2$).

Stąd już prosto wynika odpowiedź: nie istnieje figura ograniczona i mająca środek symetrii należący do niej, którą można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające i środkowo symetryczne.

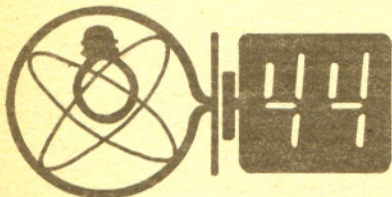




Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1985

Zadania z matematyki nr 107, 108

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

107. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na kole. K, L, M, N są odpowiednio punktami styczności boków AB, BC, CD, DA z kołem. Udowodnić, że proste KL, MN i AC przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

108. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c . Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu, którego pierwszymi trzema wyrazami są liczby a, b, c , a dalej każdy wyraz jest średnią arytmetyczną trzech wyrazów poprzedzających.

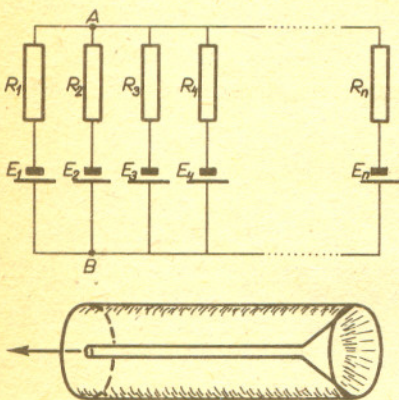
Zadanie 108 nadesłał pan Andrzej Pawłowski z Zabrze.

Zadania z fizyki nr 5, 6

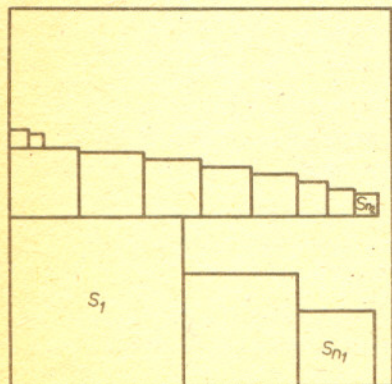
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

5. Obliczyć napięcie panujące między punktami A i B układu złożonego z n gałęzi, zawierających dowolne oporności R_i i źródła siły elektromotorycznej $E_i, (i = 1, \dots, n)$ — jak na rysunku.

6. Dany jest walec wydrążony w taki sposób, że wzdłuż całej jego osi biegnie kanał, który rozszerza się stożkowo z jednego końca (patrz rysunek). Podczas poruszania tego walca w kierunku oznaczonym strzałką do kanału od jego wąskiej strony wpada powietrze. Po przepłynięciu powietrza do części stożkowej kanału jego ciśnienie — zgodnie z prawem Bernoulliego — wzrasta. Ciśnienie to, działając na ścianki stożkowego kanału, wywiera na walec pewną siłę nadając mu napęd w kierunku ruchu. Mamy więc perpetuum mobile. Wykazać błąd w powyższym rozumowaniu.



Rozwiązanie zadania M 393. Ustawiamy boki kwadratów w ciąg malejący $s_1 \geq s_2 \geq \dots$. W lewym dolnym rogu dużego kwadratu umieszczamy kwadrat o boku s_1 , obok niego kwadrat o boku s_2 i tak dalej, dopóki jest to możliwe; następny kwadrat o boku s_{n+1} umieszczamy nad pierwszym kwadratem i znów posuwamy się w prawo, dopóki jest to możliwe; kwadrat o boku s_{n+1} umieszczamy w trzecim rzędzie poczynając od lewej strony i tak dalej (patrz rysunek).



Tak więc zachodzą nierówności

$$(1) \quad \sqrt{2} - s_{n+1} < s_1 + \dots + s_n \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - s_{n+2} < s_1 + \dots + s_{n+1} \leq \sqrt{2}.$$

Z pierwszej z nierówności (1) mamy

$$(\sqrt{2} - s_1)s_{n+1} < (s_2 + \dots + s_{n+1})s_{n+1} \leq s_2^2 + \dots + s_{n+1}^2,$$

analogicznie z następnej nierówności mamy

$$(\sqrt{2} - s_1)s_{n+2} \leq (\sqrt{2} - s_{n+2})s_{n+2} < s_{n+2}^2 + \dots + s_{n+2}^2 \text{ itd.}$$

Dodając powyższe nierówności otrzymujemy

$$(\sqrt{2} - s_1)(s_{n+1} + s_{n+2} + \dots + s_{n+k}) \leq s_2^2 + \dots + s_{n+k}^2 \leq 1 - s_1^2,$$

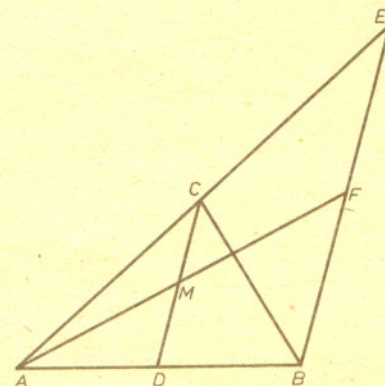
skąd

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{n+k} \leq s_1 + \frac{1 - s_1^2}{\sqrt{2} - s_1} = \sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}s_1)^2}{2 - s_1} < \sqrt{2},$$

a więc wszystkie rzędy się zmieszczą.



Rozwiązanie zadania M 392. Niech E będzie punktem przecięcia prostej AC z prostą równoległą do środkowej CD i przechodzącą przez wierzchołek B , M będzie środkiem odcinka CD , a F punktem przecięcia prostych AM i BE . Wówczas F jest środkiem odcinka BE , a C środkiem odcinka AE , a więc AF i BC są środkowymi trójkąta ABE , czyli dzielą się w stosunku 1:2.



Przypominamy treść zadań:

97. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że każda liczba $x \in (0,1)$ ma wielokrotność kx spełniającą warunek $n^2(n+1)^{-1} \leq kx < n$.

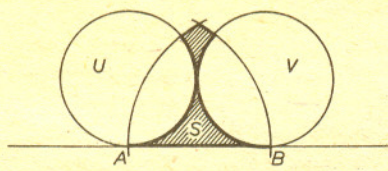
98. Uzasadnić istnienie i znaleźć wartości granicy $\lim 2^n x_n$, gdzie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (\sqrt{1+x_n^2}-1)/x_n$.

99. Na płaszczyźnie dany jest odcinek \overline{AB} o długości c . Wyznaczyć wszystkie położenia punktu C , przy których \overline{AB} jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC oraz $h_a \leq a$, $h_b \leq b$, $h_c \leq c$.

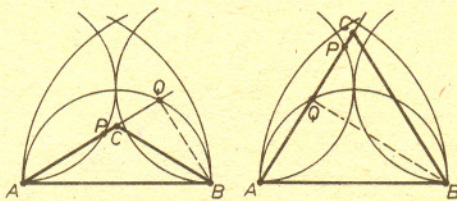
97. Przedział $I = \langle n^2(n+1)^{-1}, n \rangle$ ma długość $d = n(n+1)^{-1}$. Jeśli więc $x < d$, to $kx \in I$ dla pewnego k . Jeśli zaś $d \leq x < 1$, to $nx \in I$.

98. Niech W_n będzie 2^{n+1} -kątem foremnym opisanym na kole o promieniu jednostkowym i niech a_n oznacza połowę długości boku W_n . Wówczas $a_n = \operatorname{tg} \varphi_n$, gdzie $\varphi_n = \pi/2^{n+1}$. Zatem $\varphi_n = 2\varphi_{n+1}$, skąd $a_n = 2a_{n+1}/(1-a_{n+1}^2)$ i w konsekwencji $a_{n+1} = (\sqrt{1+a_n^2}-1)/a_n$. Otrzymana formuła rekurencyjna jest identyczna z tą, która definiuje ciąg (x_n) ; ponadto $a_1 = 1$, bo W_1 jest kwadratem o boku 2. Wobec tego $x_n = a_n$ dla wszystkich n . Długość obwodu W_n wynosi $2^{n+1} \cdot 2a_n$ i dąży (przy $n \rightarrow \infty$) do długości okręgu jednostkowego, czyli do 2π . Stąd $\lim 2^n x_n = \pi/2$.

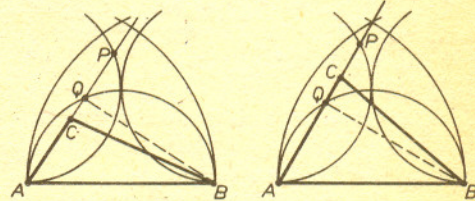
99. Rozważania ograniczymy do jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą AB (po drugiej stronie sytuacja jest symetryczna). Punkt C musi leżeć w soczewce S utworzonej przez łuki okręgów o środkach A, B i promieniu c (w przeciwnym razie $a > c$ lub $b > c$). Niech U i V będą kołami o promieniu $c/2$ st stycznymi do prostej AB w punktach A i B . Pokażemy, że dopuszczalne położenia punktu C (w górnej półpłaszczyźnie) wypełniają obszar $S - (U \cup V)$ wraz z brzegiem (rys. 1). Dla dowodu zbudujemy jeszcze półkole W na średnicy \overline{AB} i oznaczymy przez P i Q punkty, w których półprosta AC przecina obwody U i V (odpowiednio). Wówczas $AP = BQ = h_b$. Przy położeniach punktu C jak na rysunku 2 mamy $AP < AC$, czyli $h_b < b$, a przy położeniach jak na rysunku 3 zachodzi nierówność przeciwna. Dyskusja nierówności $h_a < a$ jest analogiczna. Natomiast $h_c < c$ zawsze, bo \overline{AB} jest najdłuższym bokiem.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania F 168. Rozważmy ruch rakiety względem Układu Słonecznego.

Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd rakiety jest równy co do wartości pędowi wyemitowanych fotonów. Przez p, M, v oznaczymy odpowiednio pęd, masę i prędkość rakiety po wyłączeniu silnika. Jeśli założymy, że fotony powstają na drodze anihilacji materii, to z zasady zachowania energii

$$(1) \quad M_0 c^2 = p \cdot c + M c^2,$$

gdzie M_0 — początkowa masa rakiety, a pc — energia fotonów o pędzie p . Jednocześnie pęd rakiety po wyłączeniu silnika

$$p = M \cdot v,$$

co po podstawieniu do (1) daje

$$(2) \quad p = \frac{v}{c+v} M_0 c.$$

Taki sam pęd trzeba przekazać rakiecie podczas hamowania.

Końcową masę rakiety M_k obliczamy z zasady zachowania energii:

$$M_0 c^2 = 2pc + M_k c^2.$$

Stąd i z (2)

$$(3) \quad M_k = \frac{c-v}{c+v} M_0.$$

Zjawisko dylatacji czasu powoduje, że ziemski czas trwania podróży $t = R/v$ (R — odległość Ziemia — centrum Galaktyki) jest w układzie rakiety równy

$$\tau = t \sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Stąd prędkość rakiety: $v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\tau}{R}\right)^2}}$

Ponieważ dla danych w zadaniu $c\tau \ll R$,

możemy skorzystać z przybliżenia $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}x \text{ — co daje } v \approx c \left(1 - \frac{c^2 \tau^2}{2R^2}\right).$$

Po podstawieniu do (3) otrzymujemy

$$M_0 \approx \left(\frac{2R}{c\tau}\right)^2 M_k \approx 9 \times 10^8 \text{ ton.}$$

Paliwo powinno więc stanowić prawie całą masę rakiety.



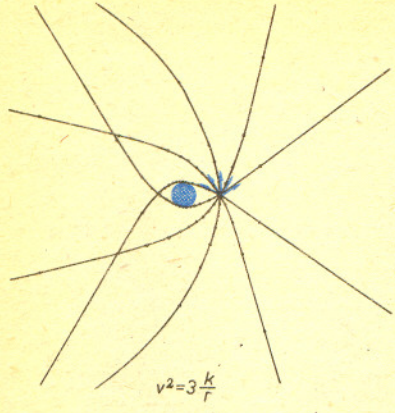
Rozwiązanie zadania F 169. Foton padając na powierzchnię skrzydełka przekazuje mu pewien pęd. Ciśnienie jest równe całkowitej zmianie pędu fotonów uderzających w jednostkową powierzchnię w jednostce czasu.

Średnio zmiana pędu fotonu odbijającego się od powierzchni jest dwukrotnie większa niż zmiana pędu przy absorpcji. Dlatego też ciśnienie światła na ściankę posrebrzoną jest większe niż na poczerńioną.

Gdy w bańce są resztki gazu, efekt jest na ogół przeciwny. Wiąże się to z faktem, iż powierzchnia zaczerńiona absorbuje więcej energii i jest cieplejsza niż posrebrzona.

Cieplejszy jest również gaz przy tej powierzchni: cząsteczki gazu mają większą średnią prędkość i przy zderzeniach przekazują powierzchni większy pęd.

Doświadczenie pokazuje, że wystarczy niewielka ilość gazu, aby efekt ten był dominujący. Dlatego też większość radiometrów Crooke'a obraca się w kierunku przeciwnym do spodziewanego.



Zbliża się kometa Halleya. Dokładność, z jaką astronomowie przewidzieli ponowne jej pojawienie się, pozwala wierzyć również w ich zapewnienia, że tym razem na pewno nie nastąpi zderzenie jej jądra z Ziemią. Co by się jednak stało, gdyby w pobliżu Ziemi jądro komety rozpadło się na wiele części? Jak wyglądałby ich ruch i czy spadłyby na Ziemię? Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba umieć znajdować tor ruchu ciała w polu grawitacyjnym Ziemi przy zadanym punkcie startu i prędkości początkowej oraz wiedzieć, jak może rozpaść się kometa. Rozpadnięcie się jądra komety było co prawda obserwowane (por. artykuł T. Kwasta), ale na razie za mało wiemy o kometach, aby dokładnie opisać taki proces. Dobrze umiemy natomiast znajdować tory ruchu ciał w polu grawitacyjnym. W najprostszym przypadku ruchu dwóch ciał problem można rozwiązać bez całkowania równania ruchu

$$(1) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

wykorzystując tylko prawa zachowania. W równaniu (1) m oznacza masę ciała, M masę Ziemi, G stałą grawitacji, a \mathbf{r} położenie ciała względem środka Ziemi — zakładamy, że $m \ll M$ i Ziemia praktycznie spoczywa, a środek masy układu pokrywa się z jej środkiem. Mnożąc obie strony równania (1) przez $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ i korzystając z faktu, że

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

otrzymujemy prawo zachowania całkowitej energii układu

$$(2) \quad E = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{k}{r} = \text{constans}$$

(w równaniu (2) oznaczyliśmy iloczyn GMm jako k). Łatwo sprawdzić, że moment pędu $L = m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ również nie zmienia się w czasie ruchu zgodnego z równaniem

$$(1), \text{ gdyż } \frac{dL}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + m\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r} \times \left(- \frac{k}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0.$$

Trochę więcej obliczeń wymaga sprawdzenie, że wektor

$$\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{L} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

zachowuje stałą wartość i kierunek. Trzy wielkości E , L i C wystarczają do wyznaczenia równania toru. Mamy bowiem

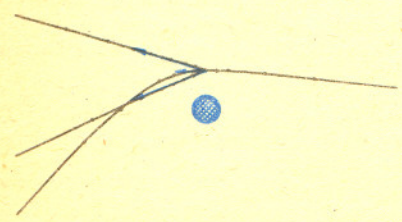
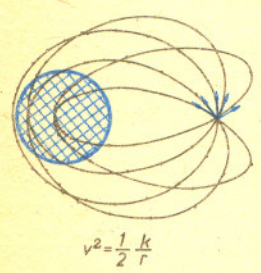
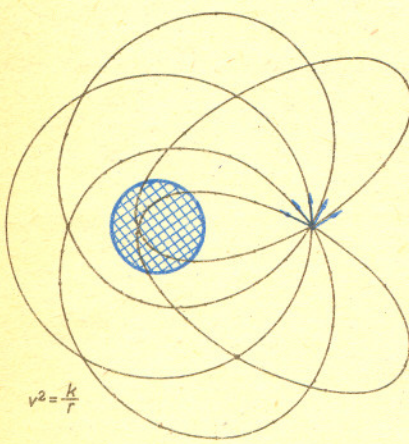
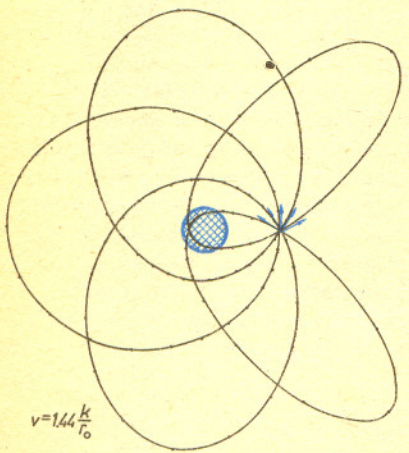
$$L^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = \mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{C} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{r} + kr,$$

$$\text{a stąd } r = \frac{L^2/k}{1 + \mathbf{C} \cdot \cos \varphi / k},$$

gdzie φ oznacza kąt między wektorami \mathbf{C} i \mathbf{r} , a jak łatwo sprawdzić

$$C = |\mathbf{C}| = (k^2 + 2L^2 E/m)^{1/2}.$$

Wszystkie występujące wielkości można wyznaczyć za pomocą warunków początkowych — prędkości i położenia, możemy więc już znając te warunki wyznaczyć orbite, po jakiej porusza się ciało. Przekonanie się, że ruch odbywa się po elipsie, gdy $C < k$, po paraboli, gdy $C = k$ lub po hiperboli, gdy $C > k$, jest prostym zadaniem z geometrii analitycznej. O tym, czy ciało porusza się po torze zamkniętym (elipsa), czy też „ucieka” do nieskończoności, decyduje wartość jego energii E . Jeśli $E < 0$, to $C < k$ i ruch odbywa się po elipsie, $E = 0$ odpowiada ruchowi po paraboli, $E > 0$ po hiperboli (ujemna wartość energii oznacza, że układ ciała — Ziemia jest związany i rozerwanie go wymaga wykonania pracy równej przynajmniej $|E|$) — ciała rozbiegające się z jednego punktu z prędkościami o tych samych wartościach, ale różnych kierunkach poruszają się więc po orbitach tego samego typu. Zamieszczone obok rysunki przedstawiają kształty orbit ciał poruszających się w różnych kierunkach z tego samego punktu, odległego o r_0 od środka Ziemi z tą samą prędkością początkową





dla różnych wartości tej prędkości (rysunki wykonane są z zachowaniem skali). Na Ziemi spadną te ciała, których tory zbliżą się do Ziemi na odległość mniejszą od jej promienia oraz te spośród pozostałych, które po wejściu w atmosferę stracą tyle energii (opór powietrza), że już nie będą mogły uciec. Minimalną odległość, na jaką zbliży się ciało do środka Ziemi, można wyznaczyć znając tylko energię E i wartość momentu pędu L (oczywiście nie uwzględniając oporu atmosfery). Rozkładając bowiem prędkość chwilową ruchu na składową w kierunku środka Ziemi (równoległą do r) i prostopadłą $v = v_r + v_\perp$ mamy

$$L = mrv_\perp \text{ i otrzymujemy, że } E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \text{ skąd}$$

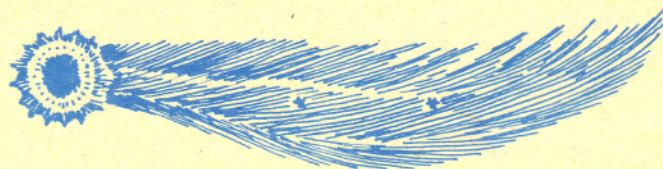
dla małych wartości r mamy $\frac{L^2}{2mr^2} > \frac{k}{r}$. Gdy $r \rightarrow 0$, $\frac{L^2}{2mr^2}$ rośnie

nieograniczenie, czyli ciało jest odpychane od centrum przyciągającego. Minimalną odległość otrzymamy kładąc $v_r = 0$ i rozwiązując równanie $E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$

(dla orbit zamkniętych otrzymamy w ten sposób również maksymalną odległość toru od centrum). Na naszych rysunkach widać, że wraz ze zwiększeniem prędkości początkowej coraz mniej torów przecina powierzchnię Ziemi. Ostatni z rysunków przedstawia sytuację, w której ciało przybliżające się do Ziemi po orbicie hiperbolicznej rozpada się na trzy równe części poruszające się względem ich wspólnego środka masy z prędkościami równymi połowie prędkości początkowej całego ciała (rozlatują się względem środka masy z kątem między prędkościami każdego dwóch równym 120° , a jedna z części porusza się „do tyłu”) — w przypadku rozpadu komety byłyby to prędkości rzędu dziesiątków kilometrów na sekundę. Jak widać, nawet przy tak potężnym wybuchu jądra komety tory ruchu jego części odchylają się nieznacznie od toru początkowego i prawdopodobieństwo ich spadku na Ziemię jest nieduże.

Rozpadnięcie się komety Halleya raczej nam nie grozi, ale otrzymane równania z powodzeniem opisują również ruch meteoroidów w obszarze oddziaływania Ziemi (to znaczy w obszarze, gdzie wpływ innych planet można pominąć) oraz ruch planet w polu grawitacyjnym Słońca. Zasada zachowania energii i momentu pędu jest spełniona w każdym ruchu w polu sił centralnych (zależnych tylko od odległości), natomiast istnienie wektora C (wektor Rungego — Lenza) jest szczególną własnością ruchu w potencjale typu $\pm k/r$, a więc w polu grawitacyjnym i elektrostatycznym. W świecie atomowym (elektrony i protony oddziałują głównie elektrostatycznie) istnienie dodatkowej symetrii oddziaływania (istnienie stałego wektora C) powoduje występowanie „przypadkowych” degeneracji poziomów o różnych momentach pędu w widmie energetycznym atomu wodoru.

A. M.



Rozwiąż to w pamięci!

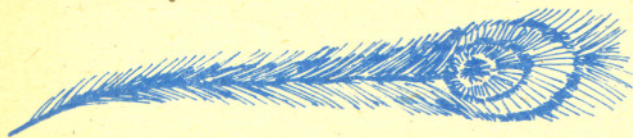
Przecinamy sześcián czterema płaskimi cięciami: dwoma — wzdłuż obu przekątnych jednej ze ścian, prostopadle do tej ściany, oraz analogicznie wzdłuż przekątnych ściany sąsiedniej. Na ile części został pocięty sześcián?

Proof

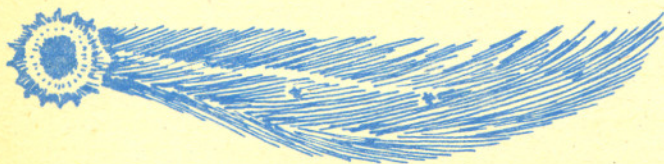
Postawmy sześcián na stole. Niech dwa pierwsze cięcia przebiegają wzdłuż przekątnych ścian bocznej. Otrzymamy cztery części: „dolną”, „górną” i dwie „boczne”. Dwa następne cięcia niech będą poprowadzone wzdłuż przekątnych górnej ściany sześciánu. Podzieli one zarówno część „dolną”, jak i „górną” na cztery części, natomiast każdą z części „bocznych” na trzy części. Wobec tego sześcián podzielony zostanie na 14 części.



Szacuje się, że w każdej chwili w obrębie Układu Słonecznego (w kuli o promieniu równym średniej odległości Neptuna od Słońca) znajduje się jednocześnie kilka tysięcy komet. Liczba wszystkich komet jest trudna do oszacowania. Padają tu liczby od kilkudziesięciu milionów do 200 miliardów.



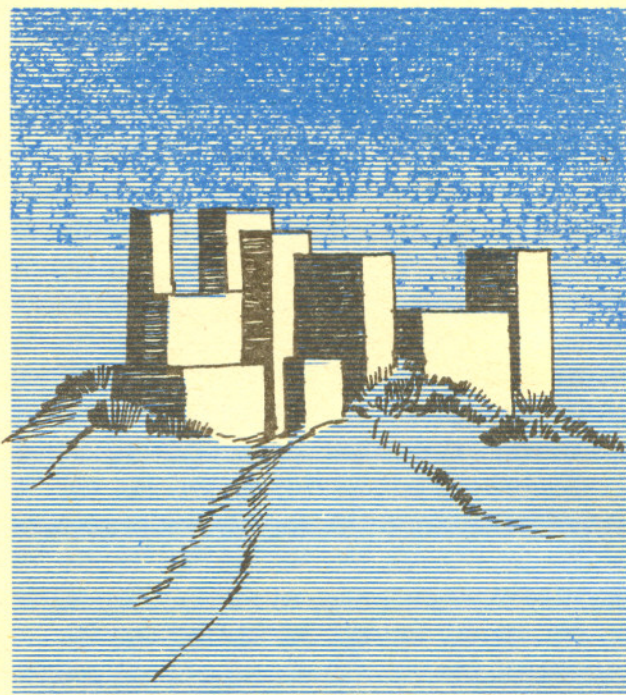
Niewiele wiemy o średnicach jąder komet. Rozmiary jądra komety Enckego oceniane są na 0,4–4 km. Średnica jądra komety Halleya szacowana jest na 6–13 km. Bardzo trudno ocenić jest konsekwencje ewentualnego uderzenia takiej komety w Ziemię, aczkolwiek wydaje się, że Ziemi zdarza się taka katastrofa raz na 50–100 milionów lat. Jeśli ciało o średnicy 10 km uderzyłoby w suchą część powierzchni Ziemi, jednym z efektów byłoby wzbicie do stratosfery takiej ilości pyłu, że temperatura powierzchni Ziemi obniżyłaby się na kilka miesięcy o kilkadziesiąt kelwinów. W przypadku uderzenia w wodę wzbita zostałaby para wodna prowadząc w konsekwencji do efektu cieplarnianego, który przyczyniłby się do podniesienia temperatury powierzchni Ziemi o 10 kelwinów na przeciąg wielu lat. Przypuszcza się, że tego typu katastrofa spowodowała kiedyś wyginięcie prawie całego planktonu morskiego na Ziemi.



Jednego z najciekawszych odkryć komet dokonał w 1896 r. Charles D. Perrine pracujący w Obserwatorium Licka w Stanach Zjednoczonych. Otrzymał on telegram, że odkryto nową kometa. W telegramie była pomyłka we współrzędnych. Nie wiedząc o tym Perrine skierował teleskop w podane miejsce i przez niewiarygodny przypadek również zobaczył zupełnie inną kometa dokładnie w środku pola widzenia.

Dziś oczy i myśl wszystkich pociąga do siebie Nowy gość, dostrzeżony niedawno na niebie; Był to kometa pierwszej wielkości i mocy, Zjawił się na zachodzie, leciał ku północy; Krwawym okiem z ukosa na rydwan spoziera, Jakby chciał zająć puste miejsce Lucypera, Warkocz długi w tył rzucił i część nieba trzecią Obwinął nim, gwiazd krocie zagarnął jak siecią I ciągnie je za sobą a sam wyżej głową Mierzy, na północ, prosto w gwiazdę biegunową

A. Mickiewicz, *Pan Tadeusz*, ks. VIII w. 107–116



Niektóre z ciekawostek zaczerpnęliśmy z książki Willy Leya „W niebo wpatrzeni”, PIW, 1984 i z majowego (1984) numeru *Uranii*, miesięcznika Polskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii.

Czy brać byka za rogi?

Oto dylemat zapaśnika: żeby awansować do następnej rundy, musi stoczyć 3 walki i wygrać dwie kolejne. Ma dwie możliwości wyboru przeciwników — mistrz, słabeusz, mistrz lub słabeusz, mistrz, słabeusz.

Kiedy szansa sukcesu jest większa?

Niech p oznacza prawdopodobieństwo pokonania mistrza, r — słabszego przeciwnika. Oczywiście $p < r$. Jeśli wyniki kolejnych walk są niezależne, pierwsza możliwość daje prawdopodobieństwo sukcesu

$$prp + pr(1-p) + (1-p)rp = pr(2-p).$$

W takim razie druga możliwość daje $pr(2-r)$. Ale $p < r$, więc $pr(2-r) < pr(2-p)$. Dziwne — jednak lepiej walczyć dwa razy z mistrzem.

R. S.



W pobliżu ekliptyki białymi ciągłymi liniami zaznaczone są tory pięciu najjaśniejszych planet — Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza i Saturna. Tory te są oczywiście co roku inne i daty umieszczone na naszej mapie odnoszą się do 1986 roku, kiedy będziemy już dysponować kompletną mapą nieba. Na dotychczas opublikowanych sektorach widoczne są jedynie części trajektorii Merkurego i Wenus — czyli obu tzw. planet dolnych. Planety te nigdy nie oddalają się zbyt od Słońca i dlatego wraz z nim „obiegają” dookoła ekliptykę. Już w tym roku możemy podziwiać Wenus (26 lutego osiągnęła maksymalny blask -4^m6) na wieczornym niebie i starać się odszukać Merkurego tuż po zachodzie Słońca. Maksymalna w tym obiegu odległość katowa tej planety od Słońca następuje 17 marca. Planety górne pojawiają się na kolejnych sektorach: Mars w czerwcu, Saturn w lipcu, Jowisz we wrześniu.

Prędkość przesuwania się różnych planet po sferze niebieskiej zależy oczywiście od względnego położenia danej planety i Słońca. Merkury i Wenus „ścigają się” ze Słońcem raz je wyprzedzając, kiedy są bliżej Ziemi, raz dając się wyprzedzić, wykonując czasem pętle, jak to widać w przypadku Merkurego na złączeniu lutowego i marcowego sektora. Linią przerywaną zaznaczono części torów planet, kiedy mijają one Słońce i nie mogą być obserwowane. Odstęp między kolejnymi pętlami nazywa się okresem synodycznym. Okres ten łatwo obliczyć posługując się wzorem

$$P_s^{-1} = |P_z^{-1} - P_p^{-1}|,$$

gdzie P_s jest okresem synodycznym, P_z i P_p są okresami obiegu Ziemi i danej planety wokół Słońca. I tak okres synodyczny Merkurego wynosi 115,9 dnia ($P_p = 87,97$ dnia), dla Wenus odpowiednio 583,9 dnia ($P_p = 224,7$ dnia), dla Marsa 779,9 dnia ($P_p = 686,98$ dnia) dla Jowisza 398,9 dnia ($P_p = 11,86$ lat), dla Saturna 378,1 dnia ($P_p = 29,46$ lat), dla Plutona 366,7 dnia ($P_p = 247,7$ lat).

Jak widać, im dłuższy okres obiegu planety, tym okres synodyczny jest bliższy długości roku ziemskiego. Jest to oczywiste, bo np. Pluton widziany ze Słońca przesuwa się jedynie o około $14''$ na dobę, a więc tor tej planety obserwowany z Ziemi jest przede wszystkim odbiciem ruchu orbitalnego Ziemi wokół Słońca i stąd te (i wszystkie inne) pętle — udowodnił to właśnie Kopernik.