

Dnia 17 stycznia 1985 roku
zmarł
prof. dr Stefan PIOTROWSKI
astrofizyk i nauczyciel
założyciel "Postępów astronomii"

SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (134)

Ułamkowy wymiar <i>dr Jerzy Ryll</i>	str. 1
Teoria względności (2)	str. 1
Opadanie materii na gwiazdy <i>mgr Marek J. Sarna</i>	str. 3
Cechy podzielności <i>Bogdan Pelc</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Neutrinografia	str. 10
Zadania	str. 10
Turbulencja i fraktale <i>mgr Piotr Rączka</i>	str. 11
Czytelnicy proponują	str. 13
Klub 44	str. 14
Można inaczej	str. 14
Paradoks Algola	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

W następnym numerze:
Komety

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochowski — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitariski
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska
prof. dr Andrzej Woszczyk —
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
mgr Ewa Ryłłowa
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

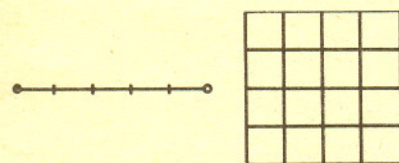
Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 7053/12/84. N-57

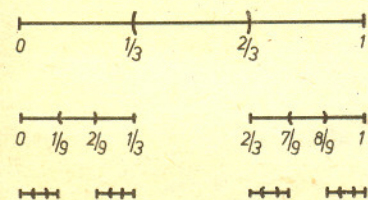
Ułamkowy wymiar

Dr Jerzy RYLL

Odcinkiem jest tu dla nas zbiór liczb spełniających nierówność $a \leq x < b$, kwadratem zbiór takich punktów (x, y) , że $a_1 \leq x < b_1$, $a_2 \leq y < b_2$; analogicznie z sześcianiem. Takie dobieranie punktów brzegowych jest konieczne, aby podział, o którym mowa, był możliwy.



Rys. 1



Rys. 2

Co to znaczy, że wymiar odcinka jest 1, wymiar kwadratu 2, a sześcianu 3? Pisaliśmy w *Delcie* 5/1983 o wymiarze topologicznym. Okazuje się, że na wymiar wyżej wymienionych figur można spojrzeć inaczej i to inne podejście do ich wymiaru ma uogólnienia znajdujące zastosowanie między innymi w fizyce. Otóż odcinek da się podzielić na $n = n^1$ odcinków podobnych do wyjściowego w stosunku $\frac{1}{n}$, kwadrat można podzielić na n^2 części podobnych w stosunku $\frac{1}{n}$ do całego kwadratu. Dla sześcianu otrzymamy n^3 takich części.

Może więc określić wymiar figury jako taką liczbę D , że całą figurę można podzielić na $N = n^D$ części podobnych w stosunku $r = \frac{1}{n}$ do całej figury. (Zauważmy, że jeśli taki podział jest możliwy, to można też podzielić figurę na N^k części podobnych w stosunku r^k). Mamy wtedy $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$. Żądamy tu oczywiście, by liczba N była naturalna, natomiast liczba n może nie być całkowita. Okazuje się, że tak zdefiniowany wymiar (wymiar podobieństwa) ma dobre własności, aczkolwiek jest określony dla wąskiej klasy zbiorów, nazywanych figurami samopodobnymi.

Zobaczmy, jaki wymiar (w powyższym sensie) ma nieco mniej typowa figura, jaką jest zbiór Cantora. Zbiór Cantora otrzymujemy z odcinka $[0, 1]$ wyrzucając z niego środkowy odcinek

o długości $\frac{1}{3}$ (tzn. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$), następnie z każdego z pozostałych odcinków wyrzucamy znów

środkowe trzecie części (tzn. $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$) i kontynuujemy ten proces w nieskończoność

(rys. 2). To, co pozostało po wyrzuceniu wszystkich tych odcinków, jest zbiorem Cantora.

Oczywiście każda „połówka” zbioru Cantora (tzn. jego części zawarte w odcinkach $[0, \frac{1}{2}]$

i $[\frac{1}{2}, 1]$) jest podobna do całego zbioru w stosunku $\frac{1}{3}$. Tak więc wymiar podobieństwa zbioru

Cantora jest równy $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ — nie jest zatem liczbą całkowitą!

Wymiar podobieństwa pozwala więc precyzyjniej rozróżniać figury, niż wymiar topologiczny. Wymiar topologiczny zbioru Cantora jest równy 0 — jest taki sam jak wymiar punktu czy ciągu punktów.

Oto dwie inne figury, dla których można obliczyć wymiar podobieństwa. Ich konstrukcja jest przykładem bardziej ogólnej sytuacji. Otóż, bierzemy łamaną o równych odcinkach i każdy jej odcinek zastępujemy łamaną podobną do danej w ustalonym stosunku. Krok taki powtarzamy nieskończenie wiele razy (stosunek podobieństwa łamanych wstawianych w kolejnych krokach jest stały).

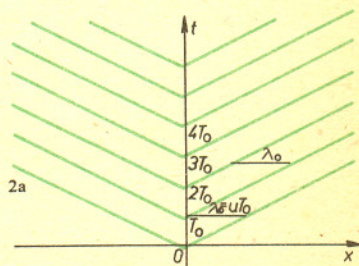
2. Zjawisko Dopplera

Załóżmy, że w jednorodnym ośrodku znajduje się nieruchome względem niego źródło fal (np. źródło dźwięku w powietrzu) o okresie T_0 . Niech ponadto układ odniesienia związany z ośrodkiem będzie inercjalny.

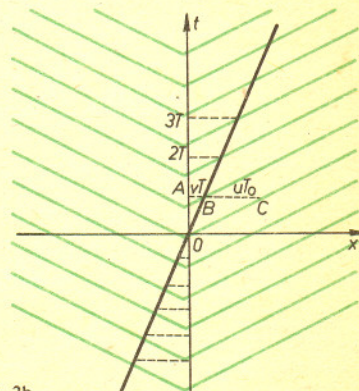
Przedstawmy źródło i fale na dwuwymiarowym diagramie czasoprzestrzennym. Linia świata źródła spoczywającego w $x = 0$ pokrywa się z osią czasu (rys. 2a). Co jeden okres, tj. w punktach $0, T_0, 2T_0 \dots$ opuszcza źródło maksimum fali. Maksima przesuwały się w obu kierunkach naszego jednowymiarowego świata z prędkością u równą prędkości rozchodzenia się fal w ośrodku. Linie świata maksimów są równoległymi półprostymi o kierunku wyznaczonym przez prędkość u (oraz przyjęte jednostki czasu i odległości). Długość fali λ_0 jest równa odległości między maksimami fal, mierzzonej wzdłuż linii $t = \text{const}$.

Niech teraz fale emitowane przez źródło rejestruje obserwator poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością v względem ośrodka (np. pasażer pociągu przejeżdżającego w pobliżu źródła dźwięku).

Jaki okres fali zarejestruje? Załóżmy, że obserwator mijają źródło w chwili $t = 0$. Na rysunku 2b przedstawiona jest cała historia

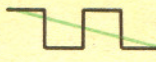
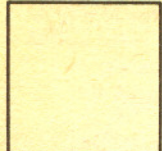


Rys. 2a



Rys. 2b

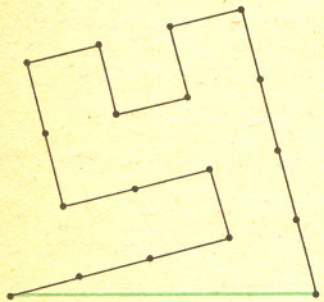




Rys. 3 a)

b)

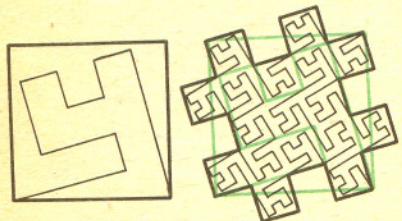
Pierwszą z wyjściowych łamanych będzie brzeg kwadratu (rys. 3a), którego odcinki będą zastępowane przez łamane o 7 odcinkach podobne do łamanych z rys. 3b, a drugą — łamana z rys. 4. Stosunek podobieństwa w obu przypadkach jest równy $\frac{1}{\sqrt{17}}$. Pierwsze dwa kroki przedstawione są na rys. 5 i 6. Kolorem zaznaczono łamaną otrzymaną z kwadratu. Wyraźnie widać, że łamana kolorowa mniej wypełnia płaszczyznę niż ta druga. Oczywiście długość obu łamanych jest nieskończona.



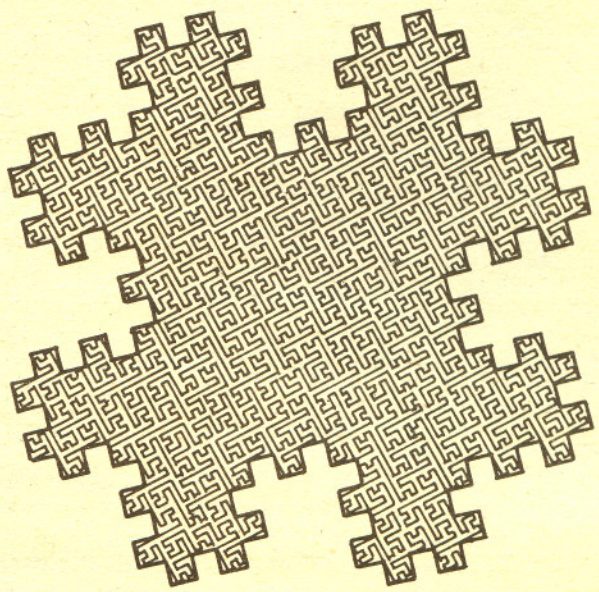
Rys. 4

Wymiar podobieństwa krzywej czarnej, bardziej wygiętej, jest równy 2 — możemy ją podzielić na 17 części podobnych w stosunku $\frac{1}{\sqrt{17}}$. Natomiast krzywa kolorowa ma wymiar podobieństwa $\log 7 / \log \sqrt{17} \approx 1,37$.

Jak już powiedzieliśmy, wymiar podobieństwa da się określić tylko dla figur samopodobnych. Można go nieco uogólnić, jeśli dopuścić podział figury na figury samopodobne (z tym samym N i r) — tak trzeba zrobić z kolorową krzywą z poprzedniego przykładu. Okazuje się, że wymiar podobieństwa jest szczególnym przypadkiem wymiaru Hausdorffa, który daje się określić dla dowolnego zbioru w przestrzeni euklidesowej.



Rys. 5

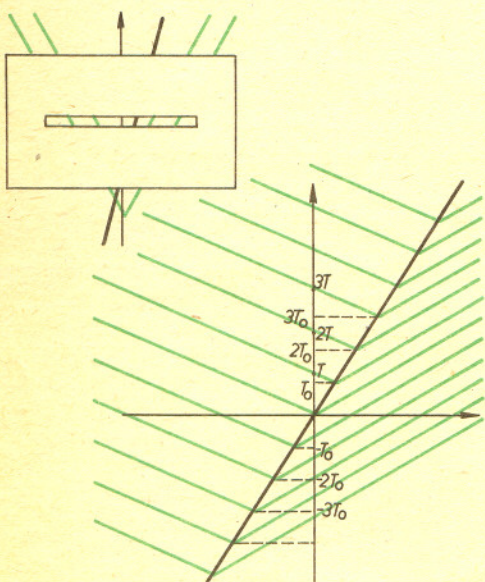


Rys. 6

Wymiar Hausdorffa jest pojęciem metrycznym. Zbiory homeomorficzne mogą mieć różny wymiar Hausdorffa. To samo dotyczy wymiaru podobieństwa.

Wykazać, że dla dowolnej liczby $D \in [0,2]$ istnieje fraktal o wymiarze D (dla $D \in [0,1]$ można zmodyfikować konstrukcję zbioru Cantora).

Wymiar Hausdorffa zbioru nigdy nie jest mniejszy od wymiaru topologicznego tego zbioru. Jeśli nie jest mu równy, to zbiór nazywamy fraktalem (od łacińskiego fractus — złamany). Fizycy próbują stosować fraktale do opisu turbulencji.



Rys. 2c

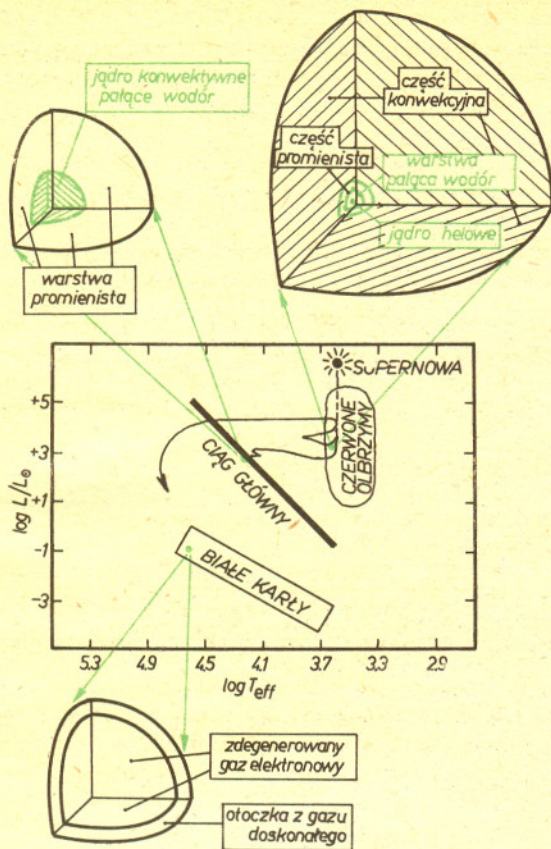
obserwatora i maksimum fal. Natychmiast można zauważyć, że obserwator zbliżający się do źródła ($t < 0$) zarejestruje falę o okresie T krótszym od T_0 , natomiast obserwator oddalający się ($t > 0$) zarejestruje falę o okresie dłuższym od T_0 . Okres T jest równy współrzędnej czasowej punktu B (rys. 2b). Łatwo zauważyć, że: $AB = vT$, $BC = \lambda_0 = uT_0$ i $AC = uT$, a stąd $vT + uT_0 = uT$, czyli $T = T_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{u}}$.

Na diagramie 2c obserwator spoczywa względem ośrodka, a źródło porusza się ze stałą prędkością w . Prędkość rozchodzenia się fal jest taka sama jak w poprzednim przypadku. Okres fali zarejestrowanej przez obserwatora (dla $t > 0$) jest teraz równy:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{w}{u} \right)$$

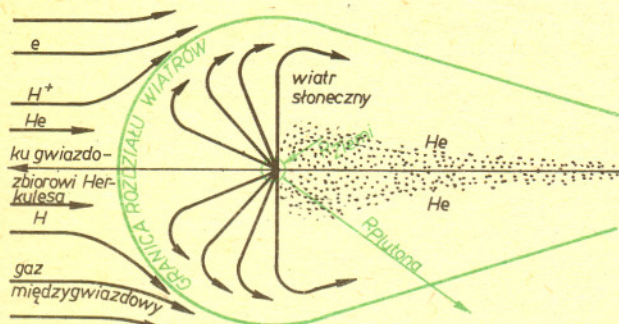
Czytelnikowi pozostawiamy do rozważenia trudniejsze przypadki: (1) źródło i obserwator poruszają się względem ośrodka, (2) obserwator porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, (3) prędkość obserwatora jest większa od prędkości fali, obserwator i źródło spoczywają, a fala odbija się od zwierciadła poruszającego się z prędkością równoległą do prędkości fali.

Czytanie diagramu czasoprzestrzennego może ułatwić kartonik z wąskim wycięciem. Przesuwając wycięcie prostopadle do osi czasu oglądamy swego rodzaju jednowymiarowy film animowany: maksima fal opuszczają źródło, dochodzą do obserwatora i mijają go.



Rys. 1

W gwiazdach za transport energii odpowiedzialne są:
 — promieniowanie przenoszące energię promienistą między warstwami,
 — konwekcja będąca procesem przenoszenia ciepła razem z materią.



Rys. 2

Kontrakcja to proces swobodnego grawitacyjnego zapadania się materii przebiegający np. w obłokach materii międzygwiazdowej czy gwiazdach. Mówimy, że ośrodek jest optycznie gruby, gdy niemożliwe jest bezpośrednie wypromieniowanie ciepła na zewnątrz obiektu astronomicznego. Proces wypromieniowywania odbywa się w tym przypadku przez szereg aktów absorpcji i emisji.

Wstęp

Gwiazdy to kule zbudowane z plazmy bądź materii jądrowej, wywołujące energię promienistą z zasobów swej energii wewnętrznej. Energia wewnętrzna może być wyzwolana na skutek: reakcji termojądrowej, kurczenia grawitacyjnego, przemian fazowych, eksplozji lub implozji. Taka definicja włącza do klasy gwiazd szereg obiektów o drastycznie różnych własnościach astrofizycznych. Charakterystyki czysto zewnętrzne mówią, że zakres temperatur powierzchniowych będzie od około 2 do 100 tys. K, zaś jasność od dziesięciotysięcznej do miliona jasności Słońca (L_{\odot}). Równie wielkie różnice występują w promieniach: od gwiazdy neutronowej, której jedną półkulę można by skryć w Rowie Filipińskim (druga udawałaby Mt. Everest wystając z morza), poprzez białe karły o rozmiarach naszej Ziemi, do najrozleglejszych czerwonych olbrzymów z fotosferą kończącą się w okolicy Saturna. Są dwie przyczyny takiego zróżnicowania wśród gwiazd: masa (od 0,01- do 100 mas Słońca (M_{\odot})) oraz stan zaawansowania ewolucyjnego.

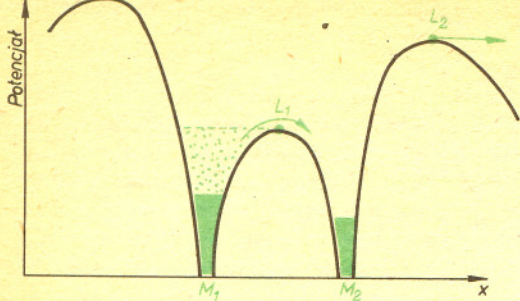
Opadająca materia to plazma, czyli zjonizowany gaz o odpowiednio dużej koncentracji cząstek naładowanych, zawierający jednakowe ilości ładunków dodatnich i ujemnych, bądź materia międzygwiazdowa rozumiana jako mieszanina plazmy i ziaren pyłu. W przeważającej jednak liczbie wypadków to „coś”, co osiada na gwiazdzie, pochodzi od towarzysza wspólnej doły, bo gwiazdy tak jak ludzie często występują parami. W astrofizyce opadanie materii określa się terminem akrecji. Powyżej wspomniałem o zaawansowaniu ewolucyjnym. Uszeregujmy obiekty gwiazdowe w ten sposób. Na początku cyklu rozwojowego będzie gwiazda ciągu głównego. Po wypaleniu wodoru w jądrze gwiazda rozszerza się rozbudowując rozległą otoczkę konwektywną (czerwony olbrzym), aby następnie w zależności od masy początkowej stać się białym karłem lub gwiazdą neutronową.

Opadanie materii na gwiazdy pojedyncze

Poszukajmy najpierw śladów akrecji lub procesów podobnych w najbliższej okolicy Ziemi. Pierwszą gwiazdą, którą napotykamy, jest nasze Słońce — typowy małowasywny przedstawiciel gwiazd ciągu głównego. Czy i jak zachodzi tu interesujące nas zjawisko? Słońce przemieszcza się w rzadkim obłoku materii międzygwiazdowej z prędkością 20 km/s w kierunku gwiazdozbioru Herkulesa. Poszczególne jony, elektrony, atomy neutralne gazu międzygwiazdowego powinny więc w jakiś sposób oddziaływać wzajemnie ze Słońcem. Wiemy, że na skutek swej aktywności najbliższą nam gwiazda emituje wiatr o dość znacznej prędkości, która w okolicy Ziemi osiąga wartość 400 km/s. W rozważanym przypadku „opadanie” gazu międzygwiazdowego (opadanie to jest względne, bo faktycznie to Słońce przechodzi przez gaz) polega na wzajemnym oddziaływaniu z wiatrem słonecznym.

Drugim przykładem akrecji na gwiazdy pojedyncze może być sytuacja istniejąca podczas kontrakcji protogwiazd w optycznie grubym ośrodku otulającym. Jak wykazały obliczenia modelowe, centrum takiego obłoku ewoluuje szybciej niż obszary zewnętrzne, tworząc zagęszczenie. Zgęstek ten otoczony jest sferycznie symetryczną falą uderzeniową powstającą na skutek opadania materii obłoku. Tam też wydzielane są znaczne ilości energii, która reemitowana jest następnie w podczerwonym zakresie widma. Możliwe jest jednak istnienie i takich obiektów, których nie da się zaobserwować na tym etapie ewolucyjnym, gdyż cała energia jest absorbowana wewnątrz.

Gwiazdy podwójne a akrecja



Rys. 3. Schematyczny przebieg potencjału grawitacyjnego w otoczeniu dwóch mas M_1 i M_2 .

W gwiazdach podwójnych możliwość realizacji akrecji jest o wiele szersza i zależy od wielu czynników. Wiemy, że dwie związane ze sobą masy oddziałują grawitacyjnie jedna na drugą. Linie stałego potencjału dla takiego układu tworzą pewną strukturę: z powierzchnią Roche'a i punktami Lagrange'a L_1 i L_2 , w których siły znoszą się (przez punkty te może następować bądź przepływ (L_1), bądź wypływ (L_2) materii).

Nas interesuje przepływ przez L_1 i to, jak może realizować się opadanie materii na składnik drugi. Pierwszy wypełniwszy swoją powierzchnię Roche'a inicjuje przepływ i akrecja może następować jako:

- dyskowa, gdy materia obdarzona jest dostatecznie dużym momentem pędu (J),
- sferycznie symetryczna, gdy J jest małe,
- kolumnowa, gdy obiekt, na który zachodzi akrecja, ma silne pole magnetyczne,
- wiatrowa, gdy wiatr gwiazdowy z pierwszego składnika oddziałuje na drugą gwiazdę.

Teraz szerzej omówię tylko ostatnie trzy zjawiska, pomijając akrecję dyskową, której opis można znaleźć w szeregu opracowań popularno-naukowych.

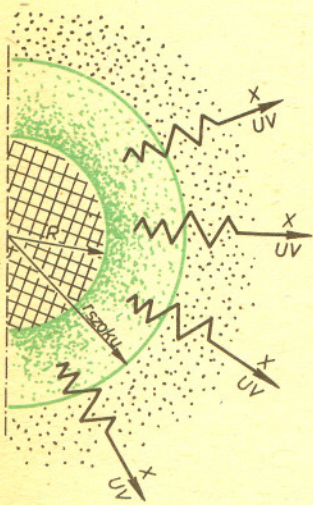
Akrecja sferycznie symetryczna

Podczas spadania materii w polu grawitacyjnym gwiazd pewne wielkości: prędkość, gęstość i temperatura zmieniają się w sposób skokowy, inne zaś, jak strumień materii, energii i pędu pozostają ciągłe. Skokowa zmiana powyższych parametrów następuje wzdłuż pewnej powierzchni i prowadzi do powstania fali uderzeniowej. Usytuowanie tego sferycznie symetrycznego szoku (fali) zależy od promienia gwiazdy (R) i tempa opadania materii ($\dot{M} = dM/dt$). W szoku i w warstwach pod nim położonych następuje zamiana energii grawitacyjnej swobodnego spadku na promienistą. Opadanie może zachodzić na kilka rodzajów obiektów będących składnikami układów podwójnych: gwiazdy ciągu głównego, białe karły (BK) i gwiazdy neutronowe (GN).

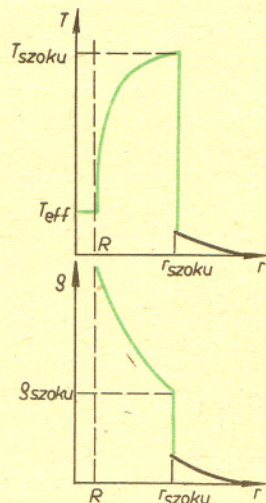
Gwiazdy ciągu głównego absorbują część energii wydzielanej w szoku i reagują bardzo gwałtownie na akrecję zwiększając promień i jasność nawet kilkaset razy. Proces ten przebiega do momentu, gdy albo gwiazda przyjmująca materię wypełni swoją powierzchnię Roche'a (układ kontaktowy), albo pierwszy składnik odda tyle materii, że aby utrzymać równowagę, będzie musiał skurczyć się i przepływ przez L_1 ulegnie przerwaniu. BK i GN podobnie reagują na akrecję. W następstwie chłodzenia gorącej plazmy w obszarze fali uderzeniowej emitowane jest promieniowanie X i ultrafioletowe (UV). Produkcja kwantów zachodzi w dwóch charakterystycznych procesach: promieniowanie hamowania, czyli rozpraszanie elektronów na jonach z jednoczesną emisją kwantów γ i chłodzenie Comptona, czyli rozpraszanie niskoenergetycznych fotonów na wysokoenergetycznych elektronach. Modelując odpowiednio obszar emisyjny można w sposób teoretyczny odtworzyć widmo obserwowane i rozstrzygnąć czy mamy do czynienia z GN, czy z BK. BK są bardzo silnymi źródłami promieniowania UV, co może stanowić wygodne kryterium odróżniania ich od GN.

Akrecja kolumnowa

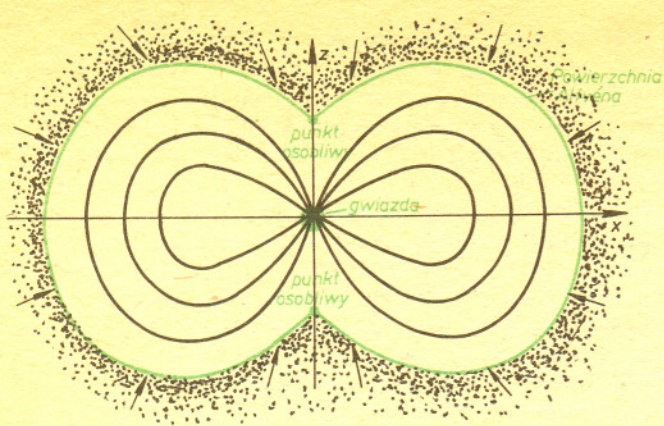
Ten rodzaj akrecji zachodzi na gwiazdy (BK, GN) z silnym polem magnetycznym. W przypadku silnych pól magnetycznych (np. dla BK zmierzona wartość indukcji wynosi 10^6 – 10^8 gausów) opadająca materia zostaje powstrzymana wysoko nad powierzchnią gwiazdy przez ciśnienie magnetyczne. Gwiazda znajduje się wewnątrz kokonu (powierzchnia Alfvéna) podpieranego przez linie sił pola. Przenikanie materii na



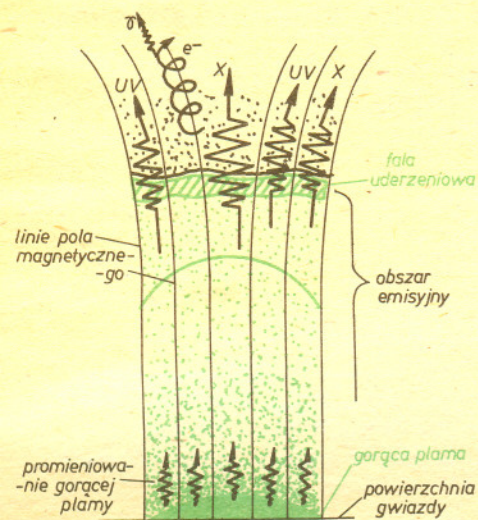
Rys. 4



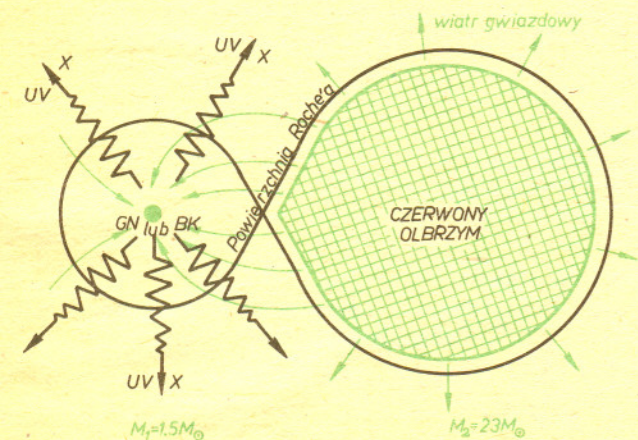
Powierzchnię, na której energia kinetyczna spadającej materii jest równa energii pola magnetycznego, nazywamy powierzchnią Alfvéna. Dla tej powierzchni prawdziwy jest związek: $\frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{H^2}{8\pi}$, gdzie lewa strona opisuje ciśnienie opadającej plazmy (ρ — gęstość, V — prędkość spadku), wielkość zaś po prawej stronie nosi nazwę ciśnienia magnetycznego (H — natężenie pola magnetycznego).



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

— powierzchnię gwiazdy może zachodzić w dwojaki sposób:

- prostopadle „przebijanie” linii pola na skutek niestabilności,
- sływanie wzdłuż linii pola na bieguny magnetyczne — akrecja kolumnowa.

Dla przypadku pola dipolowego powierzchnia Alfvéna ma dwa punkty osobliwe w okolicach biegunów, przez które materia nie może przenikać, a jedynie gromadzi się w ich okolicy. Odległość tych punktów od powierzchni gwiazdy zależy od ciśnienia materii, czyli od tempa akrecji \dot{M} . Im większe \dot{M} , tym punkty osobliwe bardziej zbliżają się do powierzchni, aż dla pewnej granicznej wartości ją osiągają. Tworzy się wtedy kolumna akrecyjna. Podobnie, jak w przypadku sferycznie symetrycznym, w kolumnie powstaje fala uderzeniowa i kształtuje się obszar emisyjny. Różnica polega na tym, że część energii ($\approx 1/2$) wydzielonej w szoku ogrzewa podstawę kolumny tworząc gorącą plamę. Inne są także mechanizmy promieniowania odpowiedzialne za kształt widma obiektu.

Nowym procesem jest emisja cyklotronowa polegająca na wytwarzaniu kwantów energii przez elektrony poruszające się po linii śrubowej wzdłuż linii pola magnetycznego. Promieniowanie hamowania i gorąca plama dają podobny wkład do widma jak w przypadku sferycznie symetrycznym. Modele teoretyczne widm i przewidywania dotyczące pulsacyjnego zachowania niektórych obiektów w pełni zostały potwierdzone przez obserwacje. Jednocześnie skala czasowa pulsów (GN rotuje znacznie szybciej niż BK), jak również numeryczne symulacje widma emisyjnego kolumny pozwoliły dla niektórych przypadków ustalić, czy badanym składnikiem układu podwójnego jest BK, czy GN.

Silny wiatr gwiazdowy z towarzysza

W sytuacji ewolucyjnej, gdy jeden składnik układu podwójnego jest BK lub GN, a drugi, bardziej masywny, znajduje się w fazie czerwonego olbrzyma i prawie wypełnia swoją powierzchnię Roche'a, następuje częściowa utrata masy z olbrzyma. Z teoretycznych modeli i obserwacji wiemy, że w tym przypadku utrata masy zachodzi w postaci wiatru gwiazdowego. W sytuacji, gdy wiatr gwiazdowy jest dość efektywny, by utrzymać czerwonego olbrzyma wewnątrz jego powierzchni Roche'a, pole magnetyczne BK czy GN oddziałując na ten wiatr wywołuje silną emisję rentgenowską (emisja cyklotronowa, promieniowanie hamowania). Układy podwójne, w których jedna gwiazda jest olbrzymem, a druga BK lub GN i w których wymiana masy zachodzi w postaci wiatru gwiazdowego, nazywane są masywnymi układami rentgenowskimi.

Co mówią obserwacje?

Ostatnie dwudziestolecie przyniosło zmianę jakościową w technikach obserwacyjnych. Zaczęto wykorzystywać możliwości, jakie dają obserwacje satelitarne, nie obciążone wszystkimi ziemskimi mankamentami. Z obserwacji pozaatmosferycznych uzyskano potwierdzenie rentgenowskiego i ultrafioletowego promieniowania układów z akrecyjnym BK (niektóre polary, np. AM Her), jak również pulsacyjnego charakteru niektórych zwartych źródeł (Her X-1, Cen X-3). Układ AM Her obserwowano w dziedzinie rentgenowskiej, a z obserwacji polarymetrycznych w widzialnej części widma oszacowano indukcję pola magnetycznego na 10^8 gausów. Wreszcie, gdy chodzi o akrecyjne gwiazdy ciągu głównego, to w układach typu Algol (np: SV Cen, β Lyr) w szybkiej fazie wymiany masy (\dot{M} od 10^{-4} do $10^{-5} M_{\odot}/\text{rok}$) mamy prawdopodobnie do czynienia z przypadkiem akrecji sferycznie symetrycznej. Podsumowując — trzeba podkreślić, że przedstawione w artykule zjawiska akrecyjne są tylko wąskim pasmem całej szerokiej klasy — bo materia ciągle płynie: w ramionach spiralnych i na jądra galaktyk, na czarne dziury i kwazary.

Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału. Oto regulamin:

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki na posiedzeniu dn. 25.08.1984 we Wrocławiu, obradując w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, prof. dr Wojciech Żakowski, dr Alicja Derkowska, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, dr Marek Kordos, dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel MOiW, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. Złoty medal i nagrodę w wysokości zł 7.000,— Michałowi Wojciechowskiemu z XIV LO w Warszawie za pracę „O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych”.
2. Srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 4.500,— Bogdanowi Pelcowi z LO w Mikołowie za pracę „Zastosowanie kongruencji do znajdowania cech podzielności w dowolnym układzie liczbowym”.
3. Brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 4.500,— Joannie Karmowskiej z XX LO w Krakowie za pracę „Potęgowanie macierzy czwórników”.
4. Dyplom uczestnictwa w finale Markowi Strzempowiczowi z II LO w Dąbrowie Górniczej.
5. Nagrody w wysokości zł 3.000,— każda, opiekunom prac zakwalifikowanych do finału: dr Jerzemu Bednarczukowi, mgr Józefowi Siwemu, mgr Wojciechowi Karmowskiemu i mgr Marii Mizgale.

Za co przyznany został srebrny medal w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki

Cechami podzielności nazwijmy twierdzenia postaci:

Dana jest liczba naturalna $L = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$, gdzie a_n, \dots, a_0 to cyfry z danego układu pozycyjnego. Liczba p dzieli liczbę L wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli liczbę

$$Z = l_0 \cdot a_0 + l_1 \cdot a_1 + \dots + l_{n-1} \cdot a_{n-1} + l_n \cdot a_n,$$

gdzie l_0, \dots, l_n są ustalonymi liczbami całkowitymi.

Zatem znalezienie konkretnej cechy podzielności polega na znalezieniu współczynników l_0, \dots, l_n . Cecha jest tym lepsza, im mniejsze są te współczynniki.





Rozwiązanie zadania M 389. Przyjmijmy, że punkty $A, B, C \in M$, nie są współliniowe. Jeśli $D \in M$, to odległości DA, DB, DC są całkowite; z nierówności trójkąta wynika, że $|DA - DB| \leq AB$, a więc $|DA - DB|$ może przyjmować tylko skończony wiele wartości $(0, 1, \dots, AB)$. Punkt D leży więc na jednej z hiperbol o ogniskach A i B i długości osi rzeczywistej $0, 1, \dots, AB - 1$, lub na prostej przechodzącej przez A i B . Analogicznie, D leży na jednej z hiperbol o ogniskach A i C i długości osi rzeczywistej $0, 1, \dots, AC - 1$, lub na prostej AC . Ponieważ dwie różne hiperbole lub prosta i hiperbola mają najwyżej 4 punkty wspólne, wynika stąd, że zbiór M jest skończony.



Rozwiązanie zadania M 390. Niech $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_k = n$ będą wszystkimi dzielnikami liczby n . Wówczas $a_1 a_k = a_2 a_{k-1} = \dots = a_i a_{k-i+1} = \dots = n$ (n jest iloczynem pewnych dwóch swoich dzielników). Wynika stąd, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = \sqrt{(a_1 \cdot a_k) \cdot (a_2 \cdot a_{k-1}) \cdot \dots \cdot (a_i \cdot a_{k-i+1})} = \sqrt{n^k}$, a więc $\sqrt[n]{n}$ jest równy średniej geometrycznej wszystkich dzielników n , a średnia geometryczna jest nie większa od ich średniej arytmetycznej. Rozważmy teraz różnicę $n+1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = a_1 a_{k-i+1} + 1 - a_1 - a_{k-i+1} = a_1(a_{k-i+1} - 1) - (a_{k-i+1} - 1) = (a_1 - 1)(a_{k-i+1} - 1) \geq 0$,
stad $2 \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k (a_i + a_{k-i+1}) \leq k(n+1)$,
czyli $\frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k} \leq \frac{n+1}{2}$.



Rozwiązanie zadania M 391. Wybierzmy spośród danych kół koło o największym promieniu r_1 i wszystkie koła przecinające je. Ponieważ promienie tych wszystkich kół nie przekraczają r_1 , zawierają się one w koło o promieniu $3r_1$. Pole S_1 obszaru zajmowanego przez wybrane koła wynosi najwyżej $\pi(3r_1)^2 = 9\pi r_1^2$, a więc pole pierwszego wybranego koła jest nie mniejsze niż $\frac{1}{9} S_1$.
Odrzućmy teraz wybrane koła i spośród pozostałych wybierzmy znów koło o największym promieniu r_2 i wszystkie koła przecinające je. Pole S_2 obszaru zajętego przez te koła jest nie większe od $9\pi r_2^2$. Kontynuując ten proces, aż do wyczerpania wszystkich kół, wybierzemy parami rozłączne koła o promieniach r_1, r_2, \dots, r_k i sumie pól $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \dots + \pi r_k^2 \geq \frac{1}{9} (S_1 + S_2 + \dots + S_k) \geq \frac{1}{9} S$.

Na przykład w układzie dziesiętnym cecha podzielności przez 3 (i przez 9) dana jest przez $l_0 = l_1 = \dots = l_{n-1} = l_n = 1$, a powiedzmy przez 10 — przez $l_0 = 1, l_1 = l_2 = \dots = l_n = 0$.

Zdobywca srebrnego medalu, Bogdan Pelc z Mikołowa, podał w swojej pracy twierdzenie wyznaczające wszystkie cechy podzielności, w dowolnym układzie pozycyjnym i przez dowolną liczbę. Oto jego wynik:

Oznaczmy przez $L_A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$ liczbę zapisaną w układzie pozycyjnym o podstawie A . Niech ponadto

k_i oznacza resztę z dzielenia A^i przez p ,

k_r — resztę, która się pierwsza powtórzy w ciągu (k_i) , lub pierwszą resztę równą zero.

Zauważmy, że elementy ciągu (k_i) są liczbami mniejszymi od p , a więc powtórzenie bądź pojawienie się zera wystąpi najpóźniej dla k_p .

Utwórzmy teraz liczbę Z_{L_A} . Niech

$$Z_{L_A} = a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{r-1} a_{r-1} + k_r a_r + k_{r+1} a_{r+1} + \dots + k_{r-1} a_{2r-2} + k_1 a_{2r-1} + \dots + k_m a_n$$

(liczba m powstanie z liczb r i n) w przypadku, gdy $k_r \neq 0$ lub

$$Z_{L_A} = a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{r-1} a_{r-1}$$

w przeciwnym przypadku.

Twierdzenie. Liczba L_A dzieli się przez p wtedy i tylko wtedy, gdy Z_{L_A} dzieli się przez p .

Przykład (proszę pamiętać, że liczbę p , jak też liczbę Z_{L_A} przedstawia się zawsze w systemie dziesiętnym): szukamy cechy podzielności przez 3 liczb zapisanych w układzie piątkowym.

Liczmy

$$k_1 = \text{reszta z dzielenia } 5^1 \text{ przez } 3 = 2,$$

$$k_2 = \text{reszta z dzielenia } 5^2 \text{ przez } 3 = 1,$$

$$k_3 = \text{reszta z dzielenia } 5^3 \text{ przez } 3 = 2,$$

a więc $r = 3$ i

$$Z_{L_5} = a_0 + 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4 + 2 \cdot a_5 + 1 \cdot a_6 + 2 \cdot a_7 \text{ itd.},$$

aż wyczerpiemy wszystkie cyfry L_5 . Np. $L_5 = (121212)_5$, dzieli się przez 3, bo $Z_{L_5} = 12$ ($L_{10} = 4557$).

Na obronie pracy w finale Konkursu pan Pelc przedstawił rozwiązanie swoją metodą zadania z naszej ligi:

Liczby całkowite z przedziału $\langle 0, 999 \rangle$ zapisano jako liczby trzycyfrowe (liczbom mniejszym od stu dopisując na początku zero lub zera; np. siedem = 007, dwanaście = 012, zero = 000). Wszystkie te liczby napisano jedna za drugą w dowolnej kolejności. Powstała liczba N mająca 3000 cyfr (być może zaczynająca się od zera). Udowodnić, że N dzieli się przez 37.

Szukamy cechy podzielności przez 37 w układzie dziesiętnym. Mamy

$$k_1 = 10, \quad k_2 = 26, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 10.$$

Zatem $r = 4$ i $Z_{N_{10}} = a_0 + 10a_1 + 26a_2 + a_3 + 10a_4 + 26a_5 + a_6 + \dots + a_{2997} + 10a_{2998} + 26a_{2999}$, ponieważ rozpatrywana liczba ma 3000 cyfr ($n = 2999$).

Zmieniając kolejność składników otrzymujemy

$$Z_{N_{10}} = \sum_{i=0}^{999} a_{3i} + 10 \sum_{i=0}^{999} a_{3i+1} + 26 \sum_{i=0}^{999} a_{3i+2},$$

ale wszystkie sumy są równe, ponieważ w każdej z tych sum występują tyle samo razy cyfry od 0 do 9 (wynika to z konstrukcji liczby N). Tak więc

$$Z_{N_{10}} = (1 + 10 + 26) \sum_{i=0}^{999} a_{3i} = 37 \sum_{i=0}^{999} a_{3i},$$

co na mocy twierdzenia kończy dowód.

Jeszcze jedna uwaga: twierdzenie pana Pelca można sformułować inaczej:

Cecha podzielności przez dowolną liczbę w dowolnym systemie pozycyjnym dana jest przez

$$l_0 = 1, \quad l_i = k_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

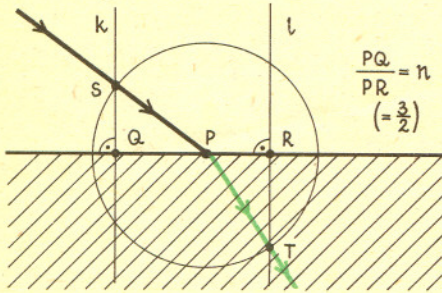
Nie widać jednak wtedy, że k_i się powtarzają.

delta mata delta

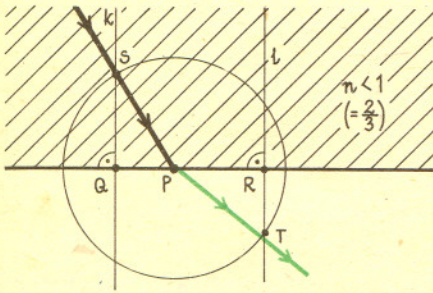
Niewidzialne punkty

Załamanie

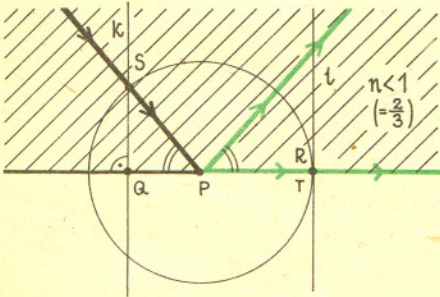
Światło przechodząc z jednego ośrodka do drugiego załamuje się. Wielkość załamania charakteryzuje liczba n zwana współczynnikiem załamania.



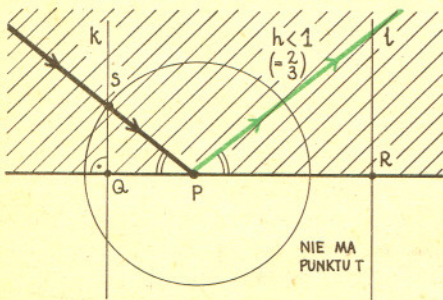
Konstrukcja promienia załamane: rysujemy dowolny okrąg o środku w punkcie P padania promienia, następnie kolejno znajdujemy punkt S , prostą k , punkty Q i R , prostą l i punkt T .



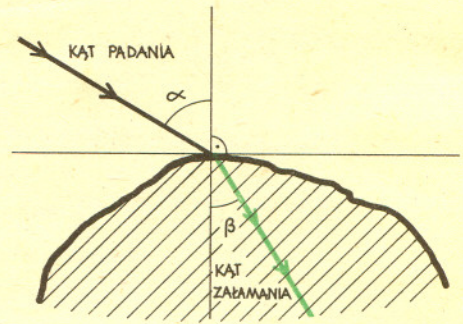
Gdy $n < 1$, konstrukcja też może się udać.



Może się jednak zdarzyć, że punkty R i T pokrywają się. Wówczas promień załamany biegnie po granicy ośrodków i równocześnie widać promień odbity. Takie położenie promienia padającego nazywa się graniczne.



Dla promieni bardziej nachylonych do granicy niż graniczny promienia załamane nie ma. Jest tylko promień odbity.



Stwierdzono zależność

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

gdzie α to kąt padania promienia na granicę ośrodków, a β — kąt załamania.

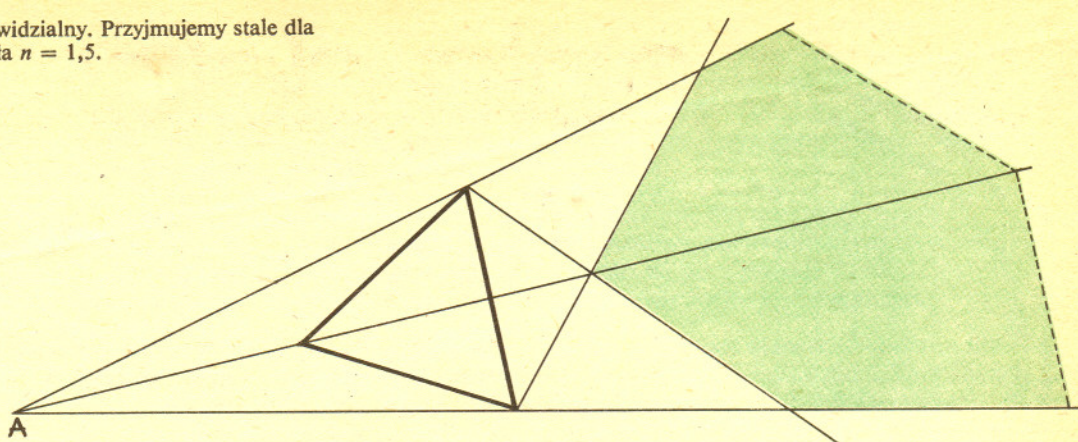
Kąt padania i kąt załamania mierzymy od tzw. normalnej — prostej prostopadłej do płaszczyzny stycznej do granicy ośrodków. Dalej zakładamy, że granica ta jest płaska.

Kolejne rysunki pokazują, że gdy $n > 1$, zawsze można znaleźć promień załamany, oraz że gdy $n < 1$, promień załamany nie zawsze istnieje. Tę ostatnią sytuację nazywamy wewnętrznym odbiciem; granica ośrodków zachowuje się wtedy jak lustro i odbija promień zgodnie z zasadą: kąt padania równa się kątowi odbicia.

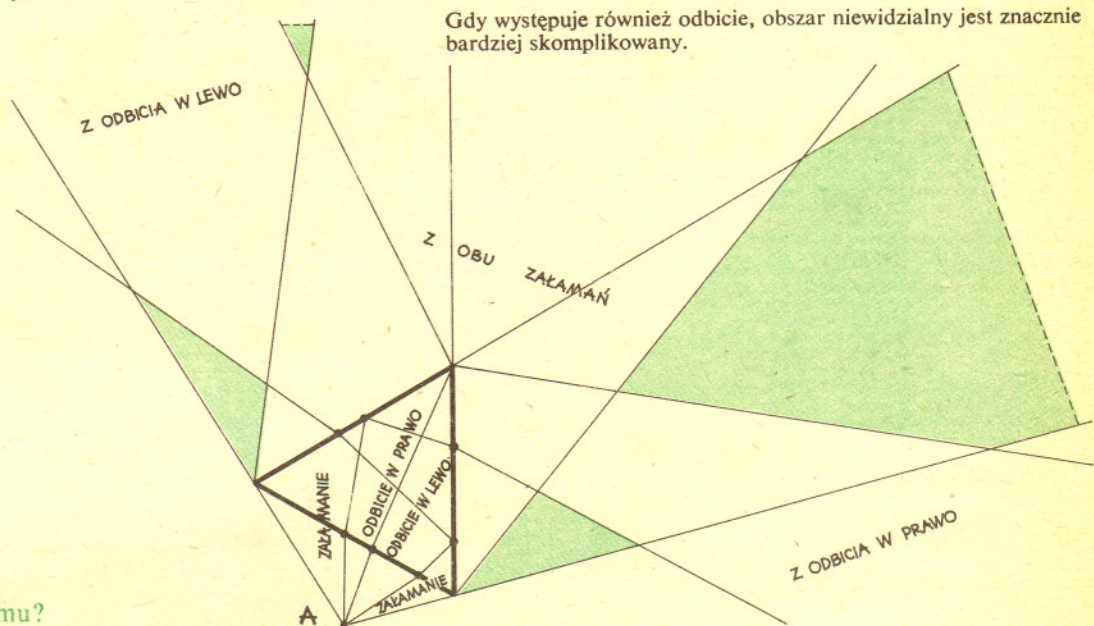
Zaślaniające szkło

Nie ma nic nadzwyczajnego w stwierdzeniu, że leżącą na stole latarką o choćby najwęższym strumieniu światła można oświetlić ustawiony dowolnie na tym stole przedmiot. Zaskakujące jest dopiero to, że gdy postawimy na stole pryzmat szklany, nie wszystkie punkty będzie można w ten sposób oświetlić.

Obszar zakreskowany jest niewidzialny. Przyjmujemy stałe dla załamania z powietrza do szkła $n = 1,5$.



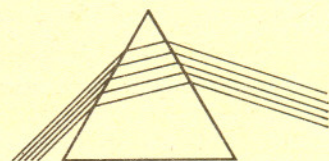
Rysunki pokazują obszary niewidzialne z dwóch wybranych przez nas punktów.



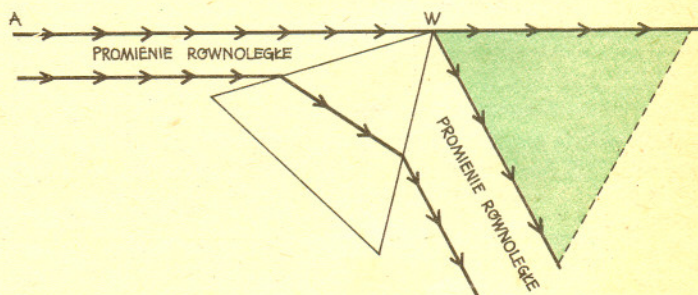
Gdy występuje również odbicie, obszar niewidzialny jest znacznie bardziej skomplikowany.

Jak to narysować samemu?

W istocie, wobec możliwości rysowania załamania promieni świetlnych wystarczy tylko jedno oczywiste spostrzeżenie: Promienie równoległe przechodzą przez pryzmat „tak samo”, to znaczy oba razy dochodząc do granicy pryzmatu tak samo zmieniają kierunek. Z tą informacją można narysować dla dowolnego punktu obszary dla niego widzialne i niewidzialne.



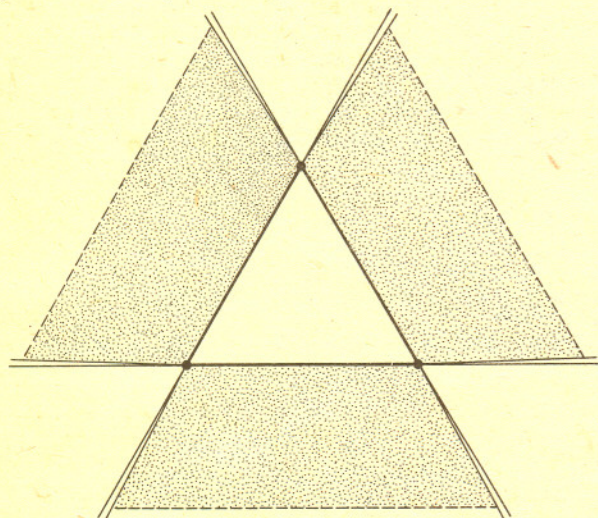
Wystarczy (stosując podaną na początku metodę dwukrotnie) wykreślić drogę jednego z promieni. Pozostałe uzyskamy przesuwając promienie równoległe.



Tak znajdujemy obszar niewidzialności dla punktu A przy wierzchołku W . Dla tego punktu A wewnętrzne odbicie nie może wystąpić.

Na zakończenie uwagi techniczne: przy eksperymentalnym sprawdzaniu wyników należy w miarę możliwości używać światła jednobarwnego i zaczernić kanty pryzmatu.

Małą Deltę przygotowali: **Maciej JĘDRZEJCZAK** i **Marek KORDOS**.



Dla promieni wychodzących z punktów tych obszarów może wystąpić wewnętrzne odbicie. Jak wyznacza się te obszary?

Neutrinografia — Pierwsze w świecie prześwietlenie przy użyciu wiązki neutrin

W doświadczeniu oznaczonym symbolem WA1 prowadzonym w Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych CERN pod Genewą oddziaływania neutrin są rejestrowane w detektorze o długości 20 m, w którym tarczą jest 1500 ton żelaza.

Badania mają na celu poznanie rozkładu kwarków w nukleonie. Pierwsze wyniki wskazywały, że rozkład ten zależy od tego, w skład jakiego jądra wchodzi badany nukleon, czyli innymi słowy — z jakiego pierwiastka zrobiona jest tarcza.

W celu sprawdzenia tego wyniku uzupełniono aparaturę o sześciometrowy zbiornik zawierający 35 m^3 ciekłego wodoru. Pozwala to porównywać w tym samym doświadczeniu oddziaływania neutrin z tarczą żelazną i wodorową.

W wyniku oddziaływań neutrin powstają cząstki naładowane, które umożliwiają odtworzenie punktu oddziaływania.

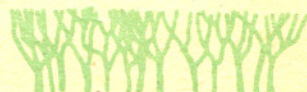
Załączone zdjęcie przedstawia rozkład punktów oddziaływania w wybranym przekroju aparatury. Stalowe ścianki zbiornika są znacznie mniej przezroczyste od wodoru, co widać po częstszym oddziaływaniu neutrin. Kontury zbiornika są dzięki temu dobrze widoczne.

Jest to pierwszy przypadek neutrinografii jakiegoś obiektu. Warto wspomnieć, że istnieją pomysły prześwietlania Ziemi w celu zbadania jej struktury wewnętrznej korzystając z neutrin wysyłanych przez Słońce. Neutrino oddziałują z materią niezwykle słabo i Ziemia jest dla nich prawie przezroczysta. W eksperymentach laboratoryjnych udaje się obserwować oddziaływanie neutrin dzięki niezwykle dużym strumieniom tych cząstek padających na detektor. Badanie neutrin pochodzących ze Słońca jest trudne i czasochłonne ze względu na małą intensywność wiązki.

T.H.



Zadania



Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 389. Na płaszczyźnie dany jest nieskończony zbiór M o tej własności, że odległość między dowolnymi dwoma punktami M jest liczbą całkowitą. Wykazać, że zbiór M leży na jednej prostej.

Rozwiązanie na str. 7

M 390. Udowodnić, że średnia arytmetyczna wszystkich dzielników liczby naturalnej n zawiera się między \sqrt{n} i $\frac{1+n}{2}$.

Rozwiązanie na str. 7

M 391. Skończony zbiór kół na płaszczyźnie zajmuje obszar o polu równym 1. Udowodnić, że można wybrać spośród nich pewną liczbę kół parami rozłącznych, o łącznym polu nie mniejszym niż $\frac{1}{9}$.

Rozwiązanie na str. 7

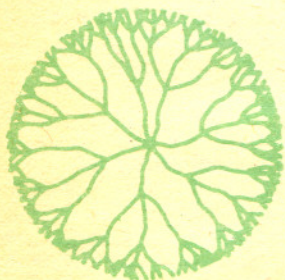
Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 166. Śmigłowiec i jego model w skali 1:10 wykonane są z tych samych materiałów. Model utrzymuje w powietrzu silnik o mocy 30 W. Jakiej mocy silnik utrzyma w powietrzu śmigłowiec?

Rozwiązanie na str. 14

F 167. Jak zmieni się chód zegarka kieszonkowego, jeżeli położyć go na gładkim, poziomym stole? Oś wahadła skrętnego (balansu) przechodzi przez środek masy zegarka. Moment bezwładności zegarka wynosi I_0 , a wahadła I_1 ($I_0 \gg I_1$).

Rozwiązanie na str. 16

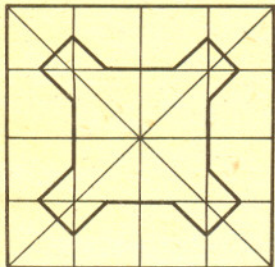


Turbulencja i fraktale

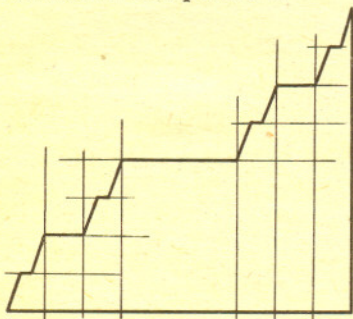
Mgr

Piotr RĄCZKA

Krzywe fraktalne w tym numerze *Delta* pochodzą ze znakomitej książki Benoita B. Mandelbrota *Fractals* (W. H. Freeman and Company, 1977).



Rys. 1. Kolejne przybliżenia dywanu Sierpińskiego — struktura samopodobna.



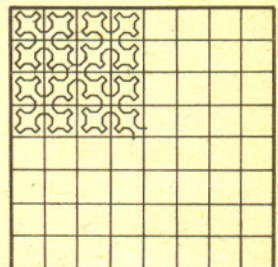
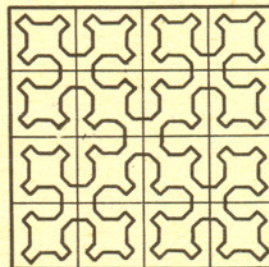
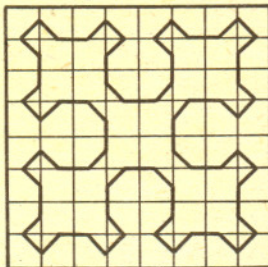
Rys. 2. Wykres funkcji, która jest nieciągła w punktach należących do zbioru Cantora i stała poza nim (tzw. Diabelskie Schody).

Rys. 3. Wytwarzanie turbulencji w tunelu aerodynamicznym za pomocą kraty.

Terminem turbulencja określa się gwałtowne, burzliwe zachowanie się płynów. Przykładów turbulencji nie trzeba szukać daleko — przypuszczam, że każdy z Czytelników miał okazję widzieć załamywanie się fal, wzburzony ślad za statkiem albo intensywny strumień wody z ogrodowego węża. Praktycznie wszystkie przepływy spotykane w przyrodzie są, przynajmniej częściowo, turbulentne.

Mimo swej powszechności turbulencja wciąż jest dla uczonych zagadką, a teoria turbulencji po stu latach różnych prób nie może pochwalić się znaczącymi rezultatami. W szczególności nie znamy do tej pory przyczyn powstawania turbulencji i nie umiemy przewidywać ewolucji ruchu turbulentnego.

Turbulencja obfituje w różnego rodzaju zaskakujące zjawiska. Ciekawa jest już sama geometria przepływów turbulentnych. Okazuje się bowiem, że w takich przepływach obszar turbulentny (tzn. obszar, w którym prędkość płynu gwałtownie się zmienia na krótkich odcinkach) zajmuje tylko część przestrzeni, w której zachodzi przepływ. Łatwo jest zauważyć, że nawet w najbardziej burzliwych przepływach istnieją obszary „spokojne”, występujące w charakterystyczny sposób — im dokładniej analizujemy rozkład prędkości, tym więcej takich obszarów widzimy. Inaczej mówiąc, struktura obszaru turbulentnego przypomina trochę ser szwajcarski — obszar ten składa się prawie wyłącznie z dziur! Ma on również własności „jakościowego samopodobieństwa”. Oznacza to, że w wielu przypadkach nie potrafilibyśmy odróżnić zdjęcia przepływu turbulentnego w skali 1:1 od zdjęcia zrobionego w wielokrotnym powiększeniu (podobne własności ma np. tzw. Dywan Sierpińskiego, rys. 1).



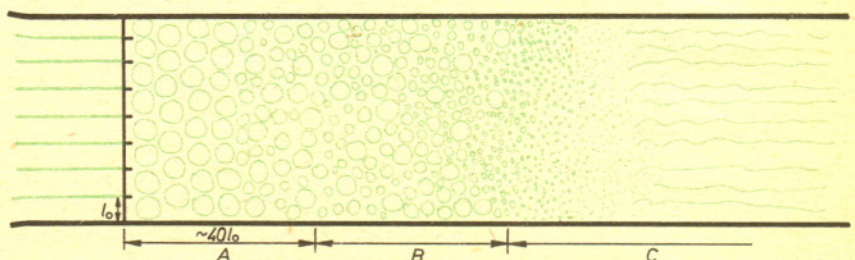
Są to własności charakterystyczne dla obiektów o ułamkowym wymiarze (patrz artykuł J. Rylla w tym numerze), co skłoniło Benoita Mandelbrota, wielkiego ich entuzjastę, do wysunięcia hipotezy, że obszar, na którym skupiona jest turbulencja, jest fraktalem. Zgodnie z tą hipotezą rozkład prędkości płynu powinien przypominać wykres funkcji przedstawionej na rysunku 2.

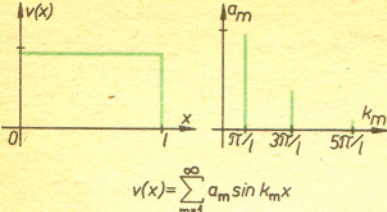
W dalszej części artykułu pokażę, jak można zweryfikować hipotezę Mandelbrota dla najprostszego przypadku turbulencji, tzw. turbulencji izotropowej.

Zanim sprzeczujemy znaczenie terminu „turbulencja izotropowa”, przyjrzyjmy się pewnej szczególnej realizacji przepływu turbulentnego. Rysunek 3 przedstawia schematycznie zachowanie się turbulencji wytworzonej w tunelu aerodynamicznym za pomocą kraty wstawionej prostopadle do jednorodnego strumienia. Krata powoduje powstanie w strumieniu wirów, których typowe rozmiary są rzędu wielkości „oczka” w kratce. Wiry te rozpadają się następnie na mniejsze, te zaś na jeszcze mniejsze itd. (obszar A).

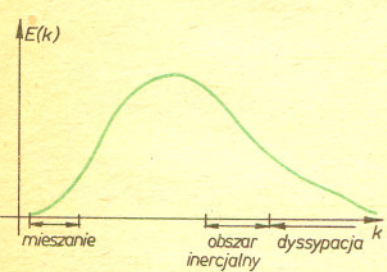
W obszarze B najmniejsze wiry są już kilka rzędów wielkości mniejsze od wirów powstałych na kratce. Jest to obszar, gdzie ewolucja wirów trwała na tyle długo, że zdążyła się wykształcić „struktura drobnoziarnista”, a przy tym na tyle krótko, że straty energii ze względu na lepkość płynu jeszcze nie są istotne.

W obszarze C następuje zanik turbulencji na skutek spowodowanej lepkością płynu dyssypacji energii kinetycznej na ciepło.





Rys. 4. Rozkład prostego pola prędkości na składowe harmoniczne.



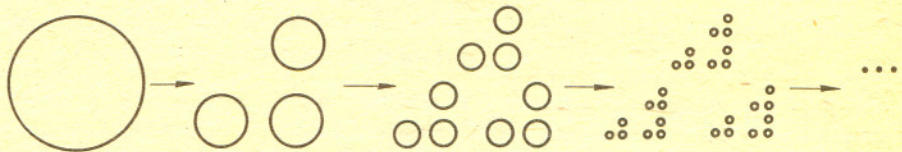
Rys. 5. Typowy kształt widma energii.

Kształt widma (rys. 5) odzwierciedla sposób, w jaki energia przepływa przez układ. Energia jest wprowadzana przez mieszanie, czyli tworzenie największych wirów (małe k). Dyssypacja energii na ciepło zachodzi głównie przez małe wiry (duże k). W stanie równowagi dynamicznej prędkość dyssypacji jest równa prędkości, z jaką energia jest dostarczana do układu przez mieszanie.

• Jeśli mieszanie jest wystarczająco intensywne, w pewnym zakresie widma (w tzw. obszarze inercyjnym) przepływ energii jest niezależny zarówno od mieszania, jak i od lepkości.

Dla zweryfikowania hipotezy Mandelbrota wyprowadzimy, za pomocą uproszczonego modelu przepływu energii, postać widma energii w obszarze inercyjnym. Zakładać będziemy, że obszar turbulentny ma wymiar D . Porównanie rezultatu naszych rozważań z wynikami doświadczeń pozwoli otrzymać liczbową wartość D .

Przyjmijmy, że wiry o rozmiarach l_0 rozpadają się na wiry o rozmiarach $l_1 = \frac{1}{2} l_0$, te zaś na wiry o rozmiarach $l_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_0$ itd. Wiry n -tego rzędu będą miały rozmiary $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n l_0$. Jeśli obszar, w którym skupiona jest turbulencja, jest fraktalem, to wiry nie będą wypełniały całej przestrzeni. Przyjmijmy więc, że wir n -tego rzędu rozpada się na N wirów rzędu $n+1$, przy czym $N < 2^3$ (rys. 6).



Rys. 6. Schematyczne przedstawienie rozpadania się wirów.

W ten sposób wiry rzędu $n+1$ będą zajmować ułamek $\beta = \frac{N}{2^3}$ przestrzeni zajmowanej przez wiry rzędu n , a wiry rzędu n ułamek β^n przestrzeni zajmowanej przez wiry zerowego rzędu. Zbiór, na którym skupione będą najmniejsze wiry, będzie w przybliżeniu fraktalem o wymiarze podobieństwa $D = \frac{\log N}{\log 2}$. Proste rozważania przedstawione obok pozwalają wyprowadzić w powyższym modelu kształt widma energii w obszarze inercyjnym:

$$E(k) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-5/3} (kl_0)^{-(1/3)\mu}$$

gdzie $\mu = 3 - D$, ε — szybkość wprowadzania energii do układu. Można łatwo sprawdzić, że wynik ten jest rozsądny. Jeśli przyjmiemy $\beta = 1$, tzn. że wiry każdego rzędu wypełniają całą przestrzeń, to $D = 3$ i otrzymamy widmo



Niech v_n będzie charakterystyczną prędkością cząstek płynu w wirach rzędu n (w układzie odniesienia, w których wir spoczywa). Energia kinetyczna na jednostkę objętości niesiona przez te wiry ma postać

$$(1) \quad E_n \sim \beta^n v_n^2.$$

Założmy, że w czasie jednego „obrotu” wiru rzędu n przekazuje on znaczną część swojej energii wirom rzędu $n+1$.

„Okres obrotu” wiru $t_n \sim \frac{l_n}{v_n}$, a więc szybkość przepływu energii od wirów rzędu n do wirów rzędu $n+1$ będzie

określona przez $\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$. Z definicji obszaru inercyjnego wynika, że szybkość przepływu energii ε_n jest

równa szybkości ε , z jaką energia jest wprowadzana do układu. Mamy więc $\varepsilon_n \sim \varepsilon \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$, a stąd $v_n \sim \varepsilon^{1/3} l_n^{1/3} \beta^{-n/3}$.

Po podstawieniu do (1)

$$(2) \quad E_n \sim \varepsilon^{2/3} l_n^{2/3} \beta^{n/3} \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} \beta^{n/3}.$$

Ale $\beta = \frac{N}{2^3}$, $N = 2^D$, więc $\beta = 2^{D-3}$ i $\beta^{n/3} = (2^n)^{\frac{D-3}{3}} = \left(\frac{2^n}{l_0}\right)^{\frac{D-3}{3}} = (k_n l_0)^{\frac{D-3}{3}}$.

Po podstawieniu do (2) otrzymujemy: $E_n \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} (k_n l_0)^{-1/3(3-D)}$.

E_n wiąże się z widmem energii $E(k)$ zależnością $E_n = \int_{k_n} E(k) dk$, czyli $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (k l_0)^{-1/3(3-D)}$.

Taką postać widma dla turbulencji jednorodnej w całej przestrzeni można otrzymać posługując się wyłącznie argumentami wymiarowymi — jedyną funkcją ε i k , która ma wymiar $E(k)$, jest $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Okazuje się, że przy odpowiednio intensywnym mieszaniu w widmach otrzymanych z doświadczeń rzeczywiście występuje obszar potęgowej zależności od k (co potwierdza słuszność przyjętego modelu przepływu energii) z wykładnikiem mniejszym od $-5/3$ (co potwierdza hipotezę Mandelbrota). Dane doświadczalne dają $\mu \simeq 0,5$, czyli wymiar fraktala $D \simeq 2,5$.

Jak widać, poprawka do rezultatu Kołmogorowa nie jest duża. Na szczęście współczynnik μ pojawia się również w innych charakterystykach turbulencji, które znacznie lepiej rozróżniają turbulencję wypełniającą całą przestrzeń od turbulencji na fraktalu. Pomiary i tym razem potwierdzają niesprzeczność hipotezy Mandelbrota. Zgodność wyników otrzymanych w różnych sytuacjach eksperymentalnych pokazuje również, że wymiar fraktala nie zależy od sposobu, w jaki został wygenerowany (np. nie zależy od intensywności mieszania), tzn. jest uniwersalną wielkością charakteryzującą turbulencję izotropową.

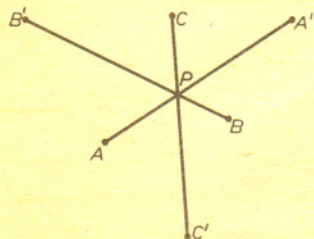
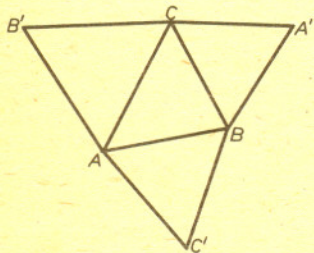
Czytelnicy proponują

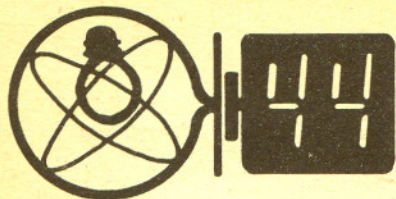
Nasz Czytelnik Zbigniew Czesak z Krakowa zadał nam następujące pytanie:

Do trójkąta ABC dopisano trzy trójkąty równoboczne ABC' , $AB'C$ i $A'BC$ jak na rysunku. Czy znając tylko punkty A' , B' , C' , można znaleźć punkty A , B , C ?

Można. Najpierw znajdujemy punkt P , z którego widać każdy z odcinków $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ pod kątem 120° , a następnie na każdej z półprostych $A'P$, $B'P$ i $C'P$ odłożyć odcinek o długości $\frac{1}{2}(A'P + B'P + C'P)$. Końce tych odcinków to szukane punkty A , B i C .

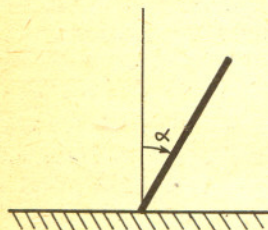
Powstają dwa pytania. Po pierwsze — jak znaleźć punkt P (i kiedy go znaleźć można)? Tu należy posłużyć się łukami Talesa (piszemy o nich w numerze). Po drugie — skąd wiadomo, że proponowana konstrukcja jest poprawna? W tym pomaga rozwiązanie problemu Fermata (też podane w numerze).





Zadania z fizyki nr 3, 4

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



3. Cienki, sztywny, jednorodny pręt, stojący pionowo na idealnie gładkim, poziomym podłożu, zostaje minimalnie wychylony z położenia równowagi i puszczony. Obliczyć przyspieszenie kątowe pręta jako funkcję kąta α (rysunek) podczas jego upadku. Jaki tor zakreśli środek masy pręta? Czy pręt, jeśli będzie dostatecznie kruchy, może ulec złamaniu, zanim upadnie na podłoże? Jaki będzie ruch pręta po idealnie sprężystym zderzeniu z podłożem?

4. Do wykrywania i lokalizacji zanurzonych okrętów podwodnych używany jest sonar, w którym wykorzystuje się odbicie fali akustycznej od powierzchni okrętu. Okazuje się, że w wodach tropikalnych zasięg sonaru, niezależnie od mocy i czułości urządzeń, jest często ograniczony do odległości zaledwie 1 km. Wyjaśnić to zjawisko.

Można inaczej

Oto inny niż można znaleźć w podręcznikach sposób obliczenia $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$. Korzysta się z tego, iż ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny oraz z tego, iż podciąg ciągu zbieżnego ma tę samą granicę co cały ciąg.

Ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest ograniczony z dołu (oczywiste) i malejący (dowód indukcyjny poniżej), a więc zbieżny do pewnej liczby g .

Podciąg wyrazów o parzystych indeksach $(\sqrt[2n]{2n})_{n=2}^{\infty}$ ma tę samą granicę g . Ale

$$\sqrt[2n]{2n} = \sqrt{\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}$$

Ciąg po prawej stronie ma granicę g , ciąg po lewej granicę $\sqrt{1 \cdot g}$ (tu trzeba wiedzieć dodatkowo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, można to też uprzednio udowodnić powyższą metodą). Tak więc

$$g = \sqrt{g},$$

czyli $g = 0$ lub $g = 1$. Wszystkie wyrazy naszego ciągu są jednak większe niż 1, a więc pozostaje tylko możliwość $g = 1$.

Mamy pokazać jeszcze, że ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest monotoniczny. Nierówność $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ jest równoważna nierówności $n^{n+1} > (n+1)^n$.

a ta z kolei $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Dla $n = 3$ mamy oczywiście $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$.

Jeśli teraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, to

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n+1,$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego, a zarazem monotoniczności naszego ciągu.



Rozwiązanie zadania F 166. Śmigłowiec utrzymuje się nad ziemią dzięki odrzucanemu w dół strumieniowi powietrza. W czasie Δt śmigło odrzuca w dół powietrze zawarte w objętości $Sv\Delta t$, gdzie S — powierzchnia zakreślana przez śmigło, a v — prędkość strumienia powietrza. Zmiana pędu powietrza o gęstości d wynosi $\Delta p = d \cdot S \cdot v^2 \cdot \Delta t$. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na śmigłowiec działa więc siła

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = dSv^2.$$

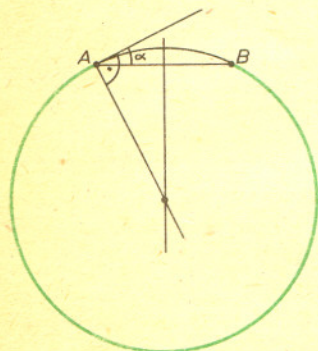
Siła F musi równoważyć siłę ciężkości Mg (M — masa śmigłowca), a więc $Mg = dSv^2$, otrzymujemy stąd:

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{S \cdot d}}$$

Możemy teraz obliczyć moc P silnika: $P = Fv = dSv^3$. Zwiększenie rozmiarów L razy zwiększa masę L^3 razy, a powierzchnię L^2 razy. Stosunek mocy silnika modelu P_m i śmigłowca P wynosi

$$\frac{P}{P_m} = \frac{S}{S_m} \left(\frac{MS_m}{M_m S}\right)^{3/2} = \left(\frac{L}{L_m}\right)^{7/2}$$

(indeks m oznacza wielkości charakteryzujące model). Dla wartości podanych w zadaniu $P = 30 \text{ W} \cdot 10^{7/2} \approx 9,5 \cdot 10^4 \text{ W}$.



Łuki Talesa

jest to miejsce geometryczne punktów, z których widać dany odcinek pod danym kątem. Są to dwa łuki okręgów symetryczne względem danego odcinka. Jeden z nich znajduje się tak:

Odkładamy dany kąt α tak, by jednym z jego ramion był dany odcinek AB . Przez wierzchołek kąta prowadzimy prostopadłą do drugiego ramienia. Z punktu przecięcia tej prostopadłej z symetralną odcinka AB zakreślamy okrąg przechodzący przez A . Gdy $\alpha < 90^\circ$, rozwiązaniem jest większy z łuków, na jakie punkty A, B dzielą okrąg, gdy $\alpha > 90^\circ$ — mniejszy.

Chyba każdy z Czytelników z łatwością uzasadni poprawność tej konstrukcji.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
 zadań z numeru 8/1984

Piotr Figurny	- Lubartów	43,78pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	42,10pkt
Marian Roman	- Żłk	41,28pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	40,48pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia G.	38,92pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	38,22pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	37,50pkt

Współczynniki trudności zadań 88, 89, 90:
 2,56 3,67 2,30

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Zadania z matematyki nr 105, 106

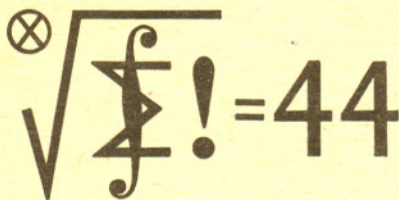
Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1985

105. Liczby dodatnie x_1, \dots, x_n spełniają warunek $x_1^3 + \dots + x_n^3 \leq 1/n$. Dowieść, że zachodzi nierówność $(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \dots + nx_n^2)^3 \leq (n+1)^2/4$.

106. Prostopadłościan o wymiarach całkowitych a, b, c podzielono na sześciany jednostkowe. Ile spośród tych sześciątów ma wspólne punkty wewnętrzne z jedną (ustaloną) przekątną prostopadłościanu?

Zadanie 106 przysłał pan Werner Mnich z Opola.



Rozwiązania zadań z numeru 10/1984

Przypominamy treść zadań:

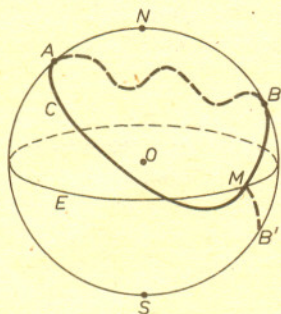
94. W przestrzeni dane są półproste OP_i^+ , $i = 1, \dots, n$, $\sum \angle P_i OP_{i+1} < 360^\circ$ ($P_{n+1} = P_1$). Dowieść, że istnieje półprzestrzeń zawierająca te półproste.

95. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań: $x_i x_{i+1} = 2^i$ ($i = 1, \dots, n$; $x_{n+1} = x_1$).

96. Czy istnieje ciąg liczb naturalnych (a_n) taki, że:

a) $\lims(a_n)/s(2a_n) = \infty$, b) $\lims(a_n)/s(3a_n) = \infty$? ($s(k)$ oznacza sumę cyfr liczby k).

94. Można założyć, że P_i są punktami leżącymi w odległości 1 od punktu O . Łącząc każdy punkt P_i z punktem P_{i+1} łukiem koła wielkiego otrzymujemy krzywą zamkniętą na sferze o środku O i promieniu 1. Zgodnie z warunkiem zadania krzywa ta ma długość mniejszą od 2π . Pokażemy, że każda krzywa zamknięta C na sferze jednostkowej (niekoniecznie złożona z łuków okręgów), o długości $< 2\pi$, jest zawarta w pewnej półsferze. Stąd już wynika teza zadania. Niech A, B będą punktami połowiącymi długość krzywej C . Środek krótszego z dwóch łuków koła wielkiego przechodzącego przez A i B oznaczmy przez N , a środek dłuższego z tych łuków przez S . Niech E będzie okręgiem wielkim w płaszczyźnie prostopadłej do średnicy NS (rysunek). Przypuśćmy, że krzywa C ma punkt M wspólny z E . Część krzywej C zawartą między M i B odbijamy



symetrycznie względem płaszczyzny okręgu E ; obraz B' punktu B jest punktem antypodycznym do A . Droga z A do M wzdłuż C i dalej z M do B' wzdłuż obrazu symetrycznego C ma długość równą połowie długości C , jest więc krótsza od π , a to jest niemożliwe, bo $\overline{AB'}$ jest średnicą. Przypuszczenie, że C przecina E , okazuje się fałszywe. Zatem krzywa C leży w całości po jednej stronie koła wielkiego E .

95. Mnożymy wszystkie równania stronami. Dostajemy: $p^2 = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}$, gdzie $p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$. Następnie mnożymy stronami równania $x_i x_{i+1} = 2^i$ dla $i = 2, 4, 6, \dots, 2k$, gdzie $k = [n/2]$. Dostajemy: $(x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_{2k} x_{2k+1}) = 2^2 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^{2k} = 2^{k(k+1)}$. Gdy n jest parzyste, $n = 2k$, lewa strona otrzymanego równania (oznaczmy ją przez L) równa się p , więc $p^2 = 2^{2k(k+1)}$, co jest sprzeczne z wcześniej otrzymanym wzorem na p^2 . Układ nie ma rozwiązań. Gdy n jest nieparzyste, $n = 2k+1$, wówczas $L = p/x_1$, dostajemy więc $p^2 = (2^{k(k+1)} x_1)^2$, co po porównaniu z wcześniejszym wzorem $p^2 = 2^{n(n+1)/2} = 2^{(k+1)(2k+1)}$ daje $x_1 = 2^{(k+1)/2}$. Wartość pozostałych x_i wyznaczamy z kolejnych równań układu: $x_{2j+1} = 2^{(2j+k+1)/2}$, $x_{2j} = 2^{(2j-k-1)/2}$, $j = 1, \dots, k$, i sprawdzamy, że te liczby istotnie spełniają dany układ równań.

96. a) Przypuśćmy, że zapis dziesiętny liczby k składa się z i_0 zer, i_1 jedynek, i_2 dwójek, ..., i_9 dziewiątek. W liczbie $2k$ w miejscu cyfr 0, 1, 2, 3, 4, a także w miejscu cyfr 5, 6, 7, 8, 9, pojawiają się odpowiednio cyfry 0, 2, 4, 6, 8, ewentualnie zwiększone o 1 z przeniesienia dziesiętnego przy mnożeniu poprzedniej cyfry, gdy jest ona ≥ 5 . Zatem dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} s(2k) &= (i_0 + i_5) \cdot 0 + (i_1 + i_6) \cdot 2 + (i_2 + i_7) \cdot 4 + (i_3 + i_8) \cdot 6 + \\ &\quad + (i_4 + i_9) \cdot 8 + (i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9) \geq \\ &\geq (i_1 + 2i_2 + \dots + 5i_5 + \dots + 9i_9)/5 = s(k)/5, \end{aligned}$$

więc ciąg spełniający warunek a) nie istnieje.

b) Warunek ten spełnia na przykład ciąg $a_n = (10^n + 2)/3$, bo $s(a_n) = 3n + 1$, $s(3a_n) = 3$.



Paradoks Algola

Rozwiązanie zadania F 167. Położony na gładkim stole zegarek zacznie wykonywać drgania przeciwne w fazie do drgań wahadła. W przypadku, gdy zegarek jest unieruchomiony i porusza się tylko wahadło, moment siły działający na wahadło proporcjonalny jest do kąta φ_1 opisującego jego wychylenie z położenia równowagi. Równanie ruchu ma postać

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -\alpha \varphi_1.$$

Rozwiązaniem są drgania o okresie

$$T = 2\pi \left(\frac{I_1}{\alpha} \right)^{1/2}.$$

Gdy zegarek może również wykonywać drgania (niech kąt, o jaki odchylił się od położenia równowagi, wynosi φ_0), moment siły proporcjonalny jest do różnicy kątów wychyleń zegarka i wahadła. Odpowiednie równania ruchu mają postać

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -\alpha(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$$I_0 \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} = -\alpha(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Okres drgań wynosi teraz

$$\tilde{T} = 2\pi \left(\frac{I_1 I_0}{\alpha(I_0 + I_1)} \right)^{1/2}.$$

Względna zmiana okresu wynosi

$$\frac{\tilde{T} - T}{T} = \left(1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^{-1/2} - 1 \approx -\frac{I_1}{2I_0},$$

a więc zegarek zacznie się spieszyć



Teoria ewolucji gwiazd przewiduje, że obiekty bardziej masywne starzeją się szybciej, rozrzutniej gospodarując swymi zasobami energetycznymi. Fakt ten potwierdzają obserwacje. Na znanym zapewne Czytelnikom *Delty* diagramie H-R gwiazdy bardziej masywne prędzej „odchodzą” od obszaru zwanego ciągiem głównym do obszaru zajmowanego przez olbrzymy. Obserwacje gromad gwiazdowych są jednym z najprostszych dowodów tego teoretycznego wniosku. Zakłada się, że wszystkie gwiazdy gromady powstały w tym samym czasie i rzeczywiście okazuje się, że te najbardziej masywne są już olbrzymami, podczas gdy małowasywne przeżywają ciągle jeszcze spokojną fazę spalania wodoru w centrum (ciąg główny).

Paradoksalny wydaje się więc fakt, że w wielu układach podwójnych składnik mniej masywny „puchnie” szybciej niż jego masywniejszy towarzysz. Układy te zwane są algolami, a nazwa ta pochodzi od najbardziej znanej gwiazdy tego typu — Algola (β Perseusza).

W algolach gwiazdy mniej masywne są zwykle podolbrzymami, co oznacza, że są one jaśniejsze i większe od gwiazd ciągu głównego o tej samej masie. Jeśli więc obydwaj składniki powstały w tym samym czasie (przyjęcie takiego założenia wydaje się być naturalne w przypadku układu podwójnego), stan, w jakim znajdują się aktualnie, przeczy przewidywaniom teoretycznym.

Dla wyjaśnienia sprzeczności między teorią i obserwacjami Crawford w 1955 roku zaproponował następujący scenariusz ewolucji takiego układu podwójnego:

Jedna z gwiazd — zwana składnikiem pierwotnym układu — była początkowo bardziej masywna, a więc zgodnie z teorią jej ewolucja przebiegała w szybszym tempie. W szczególności jej promień wzrastał prędzej niż promień drugiej gwiazdy, tak, że jako pierwsza wypełniła ona swoją powierzchnię Roche’a, po czym rozpoczął się przepływ masy na towarzysza. Z biegiem czasu masa składnika zmniejszała się przy jednoczesnym wzroście masy drugiej gwiazdy, aż w końcu doszło do odwrócenia stosunku mas — gwiazda początkowo bardziej masywna stała się obiektem o mniejszej masie. W takim stanie, tj. po odwróceniu stosunku mas obserwujemy większość algoli.

Wyjaśnienie paradoksu Algola podane przez Crawforda jest w pełni akceptowane przez astronomów. Obserwacje zmian okresów układów podwójnych dostarczają informacji na temat aktualnego tempa wymiany masy między składnikami i są bardzo dobrym potwierdzeniem koncepcji Crawforda.

mgr Joanna UDALSKA

Problem Fermata

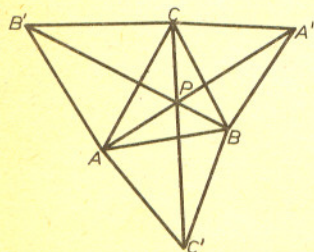
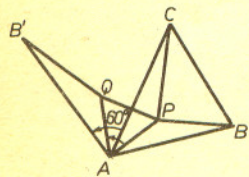
polega na znalezieniu punktu P , którego suma odległości od wierzchołków trójkąta ABC jest najmniejsza.

Biorąc pod uwagę dowolny punkt P obracamy trójkąt APC o kąt 60° otrzymując trójkąt AQB' . Zauważamy, że trójkąt APQ jest równoboczny. Wobec tego $AP + BP + CP = PQ + BP + QB' = BP + PQ + QB' \geq BB'$. Widać więc, że suma odległości punktu P od wierzchołków trójkąta będzie najmniejsza dla takiego punktu P , że punkty B, P, Q i B' będą leżały na jednej linii prostej. Punkt taki bywa nazywany punktem Fermata bądź punktem Torricellego.

Łatwo zauważyć, że dla takiego punktu P mamy $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$. Zauważając, że na poprzednim rysunku również trójkąt $AB'C$ był równoboczny, otrzymujemy ciekawy sposób znalezienia tego punktu: Do trójkąta ABC dopisujemy trzy trójkąty równoboczne ABC' , $AB'C$ i $A'BC$ — odcinki AA' , BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie P takim, że

$$AA' = BB' = CC' = AP + BP + CP$$

i jest to właśnie punkt Fermata-Torricellego.



Niebieską linią oznaczono na mapie nieba ekliptykę. Jest to koło wielkie na sferze niebieskiej, po którym „porusza się” Słońce w swym rocznym ruchu. Biegun ekliptyki (punkt, w którym prosta prostopadła do koła wielkiego, przechodząca przez jego środek przecina sferę niebieską) jest również zaznaczony na naszej mapie i ma współrzędne 18^h (rektascensja zaznaczona na obrzeżu mapy) i $66^{\circ}5'$ (deklinacja naniesiona na centralnym południku każdego sektora). Stąd widać, że nachylenie ekliptyki do równika wynosi $23^{\circ}5'$. Jak łatwo obliczyć, Słońce w ciągu doby przesuwa się średnio po ekliptyce o kąt $360^{\circ}/365,2422 \approx 59'8''$, czyli prawie o stopień na dobę w kierunku wschodnim. Około 21 marca i 22 września Słońce przecina równik niebieski; są to tzw. punkty Barana i Wagi (punkty równonocy). Poza tymi momentami wędruje raz wyżej (w lecie), raz niżej (w zimie). To jest właśnie główna przyczyna pór roku. Paradoksalny może wydawać się fakt, że Ziemia znajduje się najbliżej Słońca w styczniu, a najdalej w lipcu; dzięki temu lato na półkuli południowej jest cieplejsze niż na północnej.

Sfera niebieska w swym ruchu dobowym obraca się (na zachód) znacznie szybciej, niż wędruje po niej Słońce. Przyjmijmy, że chwilowo Słońce stoi. Najlepiej wyciąć mały krążek z papieru i przytwierdzić go szpilką w odpowiednim miejscu ekliptyki, pomocne tu będą daty podane na ekliptyce. Obracając parasol wokół jego osi (udajemy ruch dobowy sfery niebieskiej) widzimy, że Słońce wschodzi, góruje i zachodzi wędrując po kole równoległym do równika niebieskiego. 21 czerwca (tzw. przesilenie letnie) zawędrowuje bardzo wysoko (na wysokość $90^{\circ} - \varphi + 23^{\circ}5' = 61^{\circ}5'$, φ jest szerokością geograficzną, tu — Warszawy), a 22 grudnia osiąga jedynie $14^{\circ}5'$ (sprawdźcie). Dlatego w zimie jest zimno. Zaniedbując absorpcję w atmosferze stwierdzamy, że w grudniu ilość światła i ciepła, jaką otrzymuje jednostka powierzchni Ziemi w Warszawie, jest $\sin 14^{\circ}5' / \sin 61^{\circ}5'$ (a więc 3,5-krotnie) mniejsza.

Na ekliptyce zaznaczono również znaki Zodiaku. Jeśli mówimy, że ktoś urodził się pod znakiem np. Raka, to znaczy, że w tym czasie Słońce znajdowało się w tym znaku. Warto zwrócić uwagę, że znaki nie odpowiadają położeniem gwiazdozbiorom o tych samych nazwach. Jest to spowodowane precesją, czyli powolnym obrotem osi Ziemi wokół bieguna ekliptyki. Kiedy ustalano znaki Zodiaku około 2 tysięcy lat temu, jeszcze nic nie wiedzano o precesji i znaki te odpowiadały gwiazdozbiorom. Jednak z czasem wszystko się przesunęło (z szybkością około $50''$ na rok), i do dziś zwichrowało się już prawie o 30° . Jest to przyczyną kłótni między astrologami, którzy nie mogą się zdecydować, czy trzymać się gwiazd, czy swoich znaków.

