

# delta

nr 133 10/15 1984

## SPIS TREŚCI

NUMERU 1 (133)

Teoria względności 1. Czasoprzestrzeń	str. 1
Węzły i spłoty <i>dr Józef Przytycki</i>	str. 2
Węzły	str. 6
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Beznadziejne marzenie o całej prawdzie	str. 10
Klub 44	str. 12
Patrz w niebo	str. 16

**W następnym numerze:**  
**Fraktale**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Pióchocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stepiński  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wojska  
prof. dr Andrzej Woszczyk —  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryłłowa  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26  
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 6949/12/84. T-76

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
    - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
    - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—



Oglądając mapę jakiegoś dorzecza  
możemy zauważyć i to  
że płynąc z prądem  
obojętnie skąd  
w końcu znajdziemy się wszyscy  
w tym samym miejscu  
płynąc zaś pod prąd  
mamy szansę  
zawędrować w najprzeróżniejsze okolice

I choć przedstawiając Wam  
fragmenty aktualnej wiedzy  
kierujemy Was z prądem  
ku typowemu wspólnemu wykształceniu  
to jednak liczymy na to  
że wielu  
nabytą umiejętność myślenia wykorzysta  
dla samodzielnego wędrowania  
tam, gdzie nikogo jeszcze nie było

Myślenia pod prąd  
w nieznane  
Życzy Wam

*DELTA*

Począwszy od tego numeru *Delty* zamieszczać będziemy kolejne odcinki „serialu” pt. Teoria Względności. Po wycięciu i zszyciu wszystkich odcinków Czytelnik otrzyma niekonwencjonalny wstęp do szczególnej i ogólnej teorii względności.



## 1. Czasoprzestrzeń

Każdy rozciągły w czasie i przestrzeni proces fizyczny możemy podzielić na elementarne zjawiska ograniczone do tak niewielkich obszarów przestrzeni i trwające tak krótko, że ich rozciągłość można zaniedbać. Jeśli abstrahujemy jeszcze od tego „co zaszło” w każdym z tych zjawisk, pozostanie informacja o tym „gdzie” i „kiedy”. Każda taka para (miejsce, czas) określana jest w teorii względności terminem — zdarzenie. Czasoprzestrzeń to zbiór wszystkich zdarzeń.

Ruch punktu materialnego jest reprezentowany w czasoprzestrzeni przez zbiór zdarzeń określających, gdzie znajdował się punkt materialny w każdej chwili. Zbiór ten zwany linią świata punktu materialnego reprezentuje całą jego historię.

Jak wybrać w czasoprzestrzeni układ współrzędnych, tj. jak każdemu zdarzeniu przypisać czwórkę liczb?

Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona istnieje klasa wyróżnionych układów odniesienia (w przestrzeni) zwanych układami inercjalnymi, w których swobodny punkt materialny porusza się zawsze ruchem jednostajnym i prostoliniowym.





Ciekawym przykładem węzła jest sweter zrobiony na drutach. Na rysunku pokazany jest przykładowy wzór swetra.

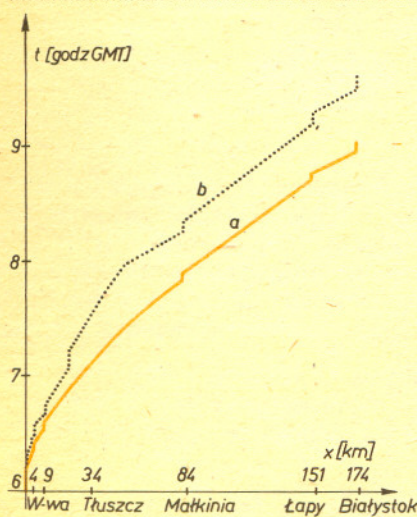
Węzeł jest zazwyczaj utożsamiany z poplątanym sznurkiem, ściśle jest to okrąg,  $S^1$ , zanurzony w trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$ . Węzły, które spotykamy w życiu, w szczególności w żeglarskim i alpinizmie, mają zazwyczaj wolne końce. Aby móc prowadzić ściśle rozważania, łączymy te końce.

Splot składa się, być może, z wielu składowych (sznurków). Dokładniej jest to rodzina rozłącznych okręgów zanurzonych w  $E^3$ . A więc węzeł jest to splot o jednej składowej. Dwa węzły (sploty) nazywamy równoważnymi, jeśli jeden można otrzymać z drugiego przez ruch w przestrzeni bez cięcia i wiązania. Odpowiada to dokładnie intuicji „takich samych węzłów”.

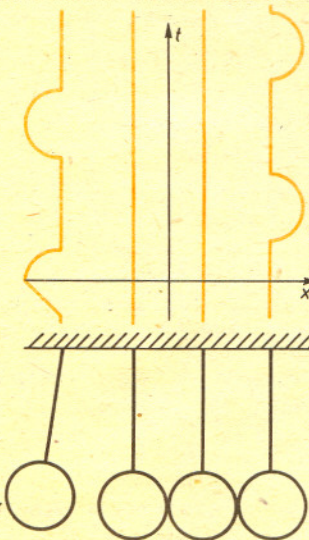
Jednym z kluczowych problemów teorii węzłów jest znalezienie metody, za pomocą której można stwierdzić, czy dane dwa węzły (sploty) są równoważne, czy nie. Problem ten nadal nie jest rozwiązany w pełnej ogólności.

Niezmiennikiem węzła (splotu) nazywamy obiekt algebraiczny (np. liczbę, wielomian, grupę) przypisany każdemu węzłowi (splotowi) w ten sposób, by równoważne węzły (sploty) miały przypisane takie same obiekty. Oczywiście ideałem byłoby, gdyby nierównoważne węzły (sploty) miały przypisane różne obiekty. Niestety, tak dobrych niezmienników nie ma i w teorii węzłów stosuje się wiele różnych niezmienników dostosowując ich użycie do sytuacji.

Jest jeszcze inny problem, prawie wszystkie znane niezmienniki definiuje się zawiłe używając aparatu topologii algebraicznej. Jeśli już zdarzy się niezmiennik o prostej definicji, to jest on mało użyteczny i trudno obliczalny, np. minimalna liczba punktów samoprzecięcia węzła zrutowanego na płaszczyznę (przy uwzględnieniu wszystkich możliwych rzutów).

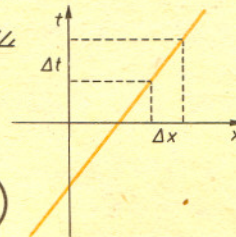


Rysunek przedstawia linie świata pociągu Warszawa-Białystok:  
a) zgodną z rozkładem jazdy i  
b) rzeczywistą. Odcinki równoległe do osi czasu odpowiadają postojom pociągu.



Na rysunku widoczne są linie świata środków mas kul w układzie trzech wahadeł do demonstracji zderzeń sprężystych.

W czasoprzestrzeni takimi wyróżnionymi układami współrzędnych są te, w których linia świata swobodnego punktu materialnego jest linią prostą. W dalszym ciągu ograniczymy się tylko do takich układów. Poza tym zaniedbamy dwa wymiary przestrzenne, co pozwoli zilustrować większość problemów na dwuwymiarowych rysunkach. Na osi pionowej odkładamy czas, na osi poziomej — położenie.

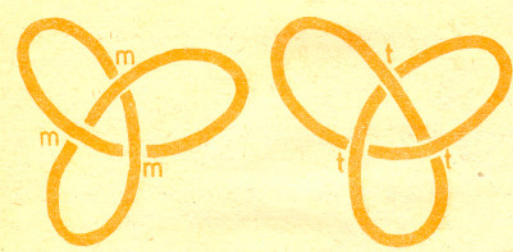


Na rysunku przedstawiona jest linia świata swobodnego punktu materialnego.

Czytelnikowi pozostawiamy naszkicowanie linii świata oscylatora harmonicznego, punktu materialnego przyspieszanego jednostajnie oraz odbijającego się od dwóch równoległych zwierciadeł fotonu. (cdn.)



Węzeł trywialny      Węzeł trywialny o  $k$  składowych



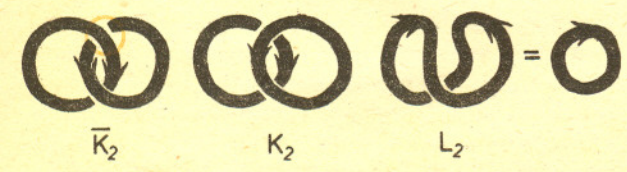
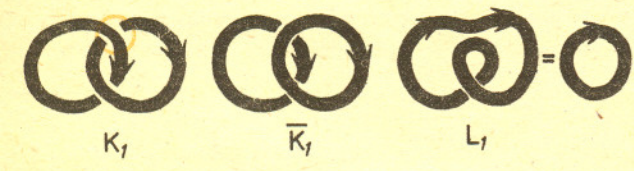
Węzeł trójlistny (trójlistnik) lewo — i prawostronny



Taternicy stosują węzeł trójlistny w formie kluczeki.



Węzeł ósemkowy (ósemka pojedyncza i podwójna) używany w żeglarstwie do pogrubienia końca liny. Podwójna ósemka może też służyć do niewielkiego skrócenia liny.

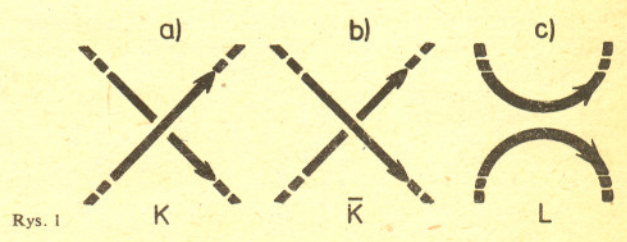


Rys. 2. Mamy:  $\nabla_{L_1} = \nabla_{L_2} = 1$  ( $z$  warunku b);  $\nabla_{K_1} = \nabla_{K_2} = 0$  (będzie pokazane dalej);  $\nabla_{K_1}(z) - \nabla_{K_1}(z) = z \nabla_{L_1}(z)$  i  $\nabla_{K_2}(z) - \nabla_{K_2}(z) = z \nabla_{L_2}(z)$  ( $z$  warunku c): Tak więc  $\nabla_{K_1}(z) = z$ ;  $\nabla_{K_2}(z) = -z$ .

Niezmiennik opisany w dalszej części artykułu jest jedynym, który się łatwo definiuje, prosto oblicza, w dodatku odróżnia on wiele węzłów i splotów (choć nie wszystkie). Obiektami przypisywanymi splotom są wielomiany o współczynnikach całkowitych nazywane wielomianami Conwaya, na cześć ich odkrywcy, angielskiego matematyka J. H. Conwaya.

Niezawężony okrąg nazywamy węzłem trywialnym, ogólnie  $k$  niezawężonych okręgów nazywamy trywialnym splotem o  $k$  składowych. Wiele przykładów nietrywialnych węzłów znanych jest zapewne Czytelnikom uprawiającym żeglarstwo lub alpinizm. Niektóre z nich przedstawiamy na rysunkach. Potem, za pomocą wielomianu Conwaya spróbujemy je rozróżnić. Okazuje się, że większość da się rozróżnić, ale nie wszystkie. Wielomian Conwaya jest za słabym środkiem, by odróżnić np. lewostronny węzeł trójlistny od prawostronnego czy węzeł płaski od babskiego.

Wielomian Conwaya definiujemy dla zorientowanego splotu, tzn. każdy okrąg (sznurek) ma zadany kierunek (na rysunkach zaznaczany strzałką). Okazuje się jednak, że dla węzła orientacja jest nieistotna, węzeł z przeciwną orientacją do danego ma ten sam wielomian Conwaya.



Rys. 1

Skrzyżowania w diagramie zorientowanego splotu dzielą się na dwa rodzaje. Będziemy je nazywać skrzyżowaniami typu most (rys. 1a) i skrzyżowaniami typu tunel (rys. 1b) — zależnie od tego, która z dróg (most czy tunel) ma pierwszeństwo przy przejeździe. Pierwszeństwo ma ta droga, do której druga droga dochodzi z lewej strony. Zauważmy, że jeśli orientacja całego skrzyżowania, tj. obu dróg, zmieni się na przeciwną, to typ skrzyżowania nie ulegnie zmianie. W szczególności typy skrzyżowań węzła nie zależą od jego orientacji. Typy skrzyżowań węzłów trójlistnych podane są na rysunku.

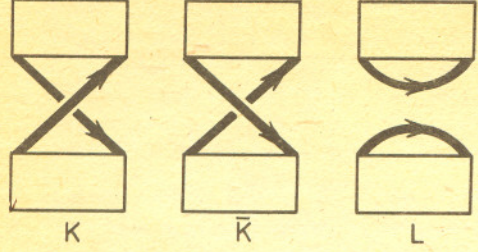
**Twierdzenie.** Każdemu zorientowanemu splotowi  $K$  można przyporządkować wielomian  $\nabla_K$  o współczynnikach całkowitych (zwany wielomianem Conwaya) tak, by były spełnione poniższe warunki:

- (a) Wielomian  $\nabla_K$  jest niezmiennikiem splotu  $K$ .
- (b) Wielomian Conwaya węzła trywialnego jest równy 1.
- (c) Jeśli trzy sploty  $K, \bar{K}, L$  mają identyczne diagramy wszędzie, z wyjątkiem fragmentów przedstawionych na rysunku 1, to

$$\nabla_K(z) - \nabla_{\bar{K}}(z) = z \nabla_L(z).$$

Powyższe warunki wyznaczają wielomian Conwaya jednoznacznie.

Zwróćmy uwagę, że w fragmencie odróżniającym sploty  $K$  i  $\bar{K}$  w splotcie  $K$  występuje skrzyżowanie typu most, a w splotcie  $\bar{K}$  skrzyżowanie typu tunel. Trzeba o tym pamiętać obliczając wielomian Conwaya splotu (rys. 2). Dowód tego, że wielomian Conwaya jest wyznaczony jednoznacznie, wymaga bardziej zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Zainteresowanych Czytelników odesłać mogę do skryptu *Topologia 3-wymiarowych rozmaitości* W. Jakobsche i autora artykułu (będzie wkrótce wydany przez Uniwersytet Warszawski). Tutaj wykażemy jedynie, że można określić wielomian Conwaya dla każdego zorientowanego splotu.

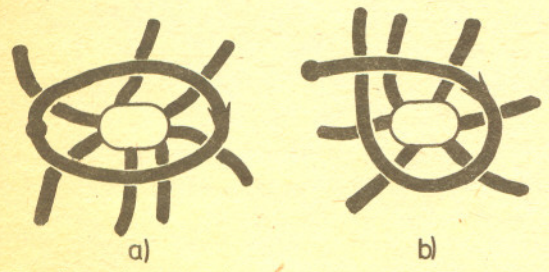


Rys. 3

Dowód rozpoczniemy od obliczenia wielomianu Conwaya splotu rozkładalnego. Splot nazywamy rozkładalnym, jeśli jego diagram da się podzielić na dwa rozłączne kawałki, każdy leżący w swojej skrzynce (tak jak splot  $L$  na rysunku 3). Wykażemy, że wielomian Conwaya splotu rozkładalnego jest równy 0. Zauważmy, że splot  $\bar{K}$  z rysunku 3 możemy otrzymać ze splotu  $K$  przez obrót górnej części o  $360^\circ$ , a więc  $K$  jest równoważny  $\bar{K}$ . Mamy zatem

$$\nabla_K(z) = \nabla_{\bar{K}}(z) \quad \text{i} \quad 0 = \nabla_K(z) - \nabla_{\bar{K}}(z) = z\nabla_L(z),$$

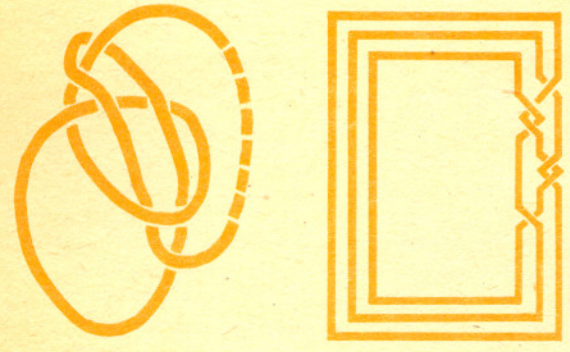
czyli  $\nabla_L(z) = 0$ .



Rys. 4. Startujemy z dowolnego punktu (oznaczonego kropką) i posuwając się zgodnie z orientacją zmieniamy tunel na most lub most na tunel tak, by droga, po której poruszamy się, szła górą. Albo dojdziemy z powrotem do kropki (a), albo do skrzyżowania z już przebytą drogą (b).

Teraz w dowodzie istnienia wielomianu Conwaya dla każdego zorientowanego splotu zastosujemy indukcję względem liczby samoprzecięć (skrzyżowań) w diagramie splotu. Splot, którego diagram nie ma samoprzecięć, jest splotem trywialnym. Jeśli jest on węzłem (ma tylko jedną składową), to jego wielomian jest równy 1. Jeśli ma więcej niż jedną składową, to jest on rozkładalny i jego wielomian jest równy 0.

Załóżmy teraz, że dla splotów, które mają mniej niż  $n$  samoprzecięć, wielomian Conwaya jest już określony. Rozważmy diagram splotu z  $n$  samoprzecięciami. Znajomość wielomianu Conwaya tego splotu jest równoważna znajomości wielomianu splotu otrzymanego z niego przez zamianę pewnej liczby mostów na tunele i tuneli na mosty. (Korzystamy z warunku (c) i z fęgo, że splot  $L$  w tym warunku ma mniej samoprzecięć niż  $K$  i  $\bar{K}$ , a więc jego wielomian jest już określony). Zatem wystarczy znać wielomian Conwaya jednego ze splotów z rysunku 4. Pierwszy z tych splotów jest rozkładalny, a drugi jest równoważny ze splotem, którego diagram ma mniej niż  $n$  samoprzecięć. Kończy to indukcyjny dowód istnienia wielomianu Conwaya.



Węzeł ratowniczy (skrajny tatrzański). W tablicach węzłów oznaczany symbolem  $6_3$  jako trzeci o diagramie z sześcioma punktami samoprzecięcia. (Pozostawiamy Czytelnikom sprawdzenie, że oba rysunki przedstawiają ten sam węzeł). Używany jest przy wyciąganiu z wody człowieka, który nie utracił przytomności. Jedną ręką ratowany może trzymać się liny, a drugą zawiązać węzeł ratowniczy i znaleźć się w niezaciskającej się pętli.



Związek wantowy (przez taterników zwany węzłem rybackim) służy do łączenia dwóch lin.



Węzeł płaski i węzeł babski. Przy wiązaniu węzła płaskiego łatwo się pomylić i zawiązać węzeł babski, mniej pewny, a trudniejszy do rozwiązania.



Rys. 5

A teraz kilka przykładów. Zaczniemy od lewostronnego węzła trójlistnego. Stosując dwukrotnie warunek (c) (patrz rys. 5) otrzymujemy

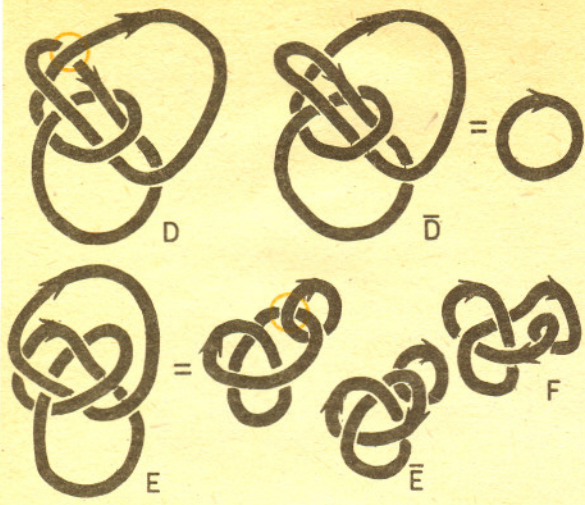
$$\nabla_A(z) = \nabla_{\bar{A}}(z) + z\nabla_B(z) = 1 + z\nabla_B(z)$$

$$\nabla_B(z) = \nabla_{\bar{B}}(z) + z\nabla_C(z) = z.$$

Tak więc  $\nabla_A(z) = 1 + z^2$ . Stąd wnioskujemy, że węzeł trójlistny lewostronny nie jest węzłem trywialnym.

Nie musimy obliczać oddzielnie wielomianu Conwaya prawostronnego węzła trójlistnego. Zauważmy bowiem, że jest on lustrzanym odbiciem węzła lewostronnego (wszystkie mosty zmieniają się w tunele). Prawdziwy jest następujący fakt: Jeśli splot  $l(K)$  jest lustrzanym odbiciem splotu  $K$ , to  $\nabla_{l(K)}(z) = \nabla_K(-z)$ . Wystarczy w tym celu sprawdzić, że wielomian  $\tilde{\nabla}_K$  określony wzorem

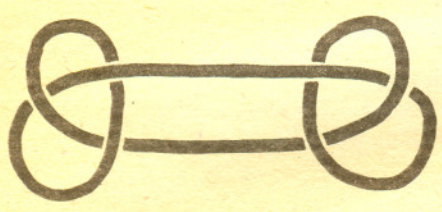
$$\tilde{\nabla}_K(z) = \nabla_{l(K)}(-z)$$



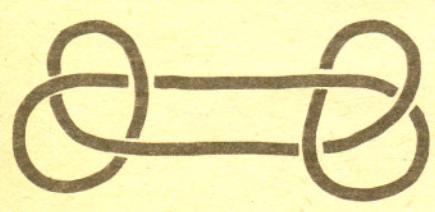
Rys. 6



Wyblinka traktowana jako splot o dwóch składowych: linia i karabinek, do którego przymocowano linę.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10. Oto równie skuteczny jak ratowniczy węzeł niezaciskający się. Czy wielomian Conwaya odróżnia go od węzła ratowniczego?

spełnia warunki (a), (b), (c), a więc z jednoznaczności wielomianu Conwaya mamy  $\tilde{V}_K(z) = V_K(z)$ , czyli to, co trzeba było dowieść. Przy sprawdzaniu warunku (c) należy zauważyć, że tam, gdzie w splotcie  $K$  był most, tam w splotcie  $l(K)$  jest tunel i odwrotnie, a więc z warunku (c)

$$V_{l(K)}(z) - V_{l(\bar{K})}(z) = zV_{l(L)}(z),$$

czyli, zmieniając  $z$  na  $-z$

$$V_{l(K)}(-z) - V_{l(\bar{K})}(-z) = zV_{l(L)}(-z),$$

a zatem

$$\tilde{V}_K(z) - \tilde{V}_{\bar{K}}(z) = z\tilde{V}_L(z).$$

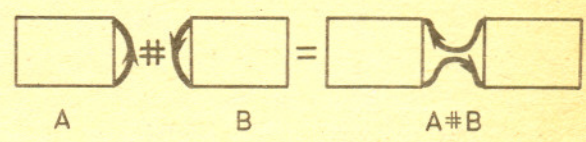
W szczególności wielomian Conwaya prawostronnego węzła trójlistnego jest też równy  $1+z^2$ . Aby odróżnić oba trójlistniki, trzeba użyć bardziej zaawansowanych metod topologii algebraicznej.

Zauważmy jeszcze, że jeśli splot  $-K$  otrzymany jest ze splotu  $K$  przez zmianę orientacji wszystkich składowych, to (jeszcze łatwiej niż poprzednio) można udowodnić, iż  $V_K(z) = V_{-K}(z)$  (jeśli w tożsamości (c) wszystkie sploty zmienimy na przeciwne, to pozostanie ona prawdziwa). W szczególności wielomian węzła nie zależy od orientacji węzła.

Obliczmy jeszcze wielomian Conwaya węzła ratowniczego (rys. 6).  $\bar{D}$  jest węzłem trywialnym,  $\bar{E}$  splotem rozkładalnym, a  $F$  węzłem trójlistnym. Stosując dwukrotnie warunek (c) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V_D(z) &= V_{\bar{D}}(z) + zV_{\bar{E}}(z) = 1 + z(V_{\bar{E}}(z) + zV_F(z)) = \\ &= 1 + z^2 \cdot (1 + z^2) = 1 + z^2 + z^4. \end{aligned}$$

Tak więc węzeł ratowniczy nie jest ani trójlistnikiem, ani węzłem trywialnym.



Rys. 7

Wielomian Conwaya węzła płaskiego i babskiego znajdziemy bez specjalnych obliczeń. Wprowadźmy pojęcie sumy splotów. Suma splotów  $A$  i  $B$  jest pokazana na rysunku 7. W przypadku węzłów jest ona określona jednoznacznie, natomiast dla splotów nie będących węzłami trzeba jeszcze powiedzieć, które składowe łączymy. Prawdziwy jest wzór

$$V_{A \# B}(z) = V_A(z) \cdot V_B(z).$$

Dowodzimy go przez indukcję względem liczby punktów samoprzecięcia w diagramie  $B$ . Szczegóły pozostawiam Czytelnikom.

Zauważmy teraz, że węzeł płaski jest sumą dwóch różnych trójlistników (rys. 8), a węzeł babski sumą dwóch prawostronnych trójlistników (rys. 9). Tak więc ich wielomiany Conwaya są oba równe  $(1+z^2) \cdot (1+z^2) = 1+2z^2+z^4$ . Aby te węzły odróżnić, znów trzeba korzystać z innych metod.

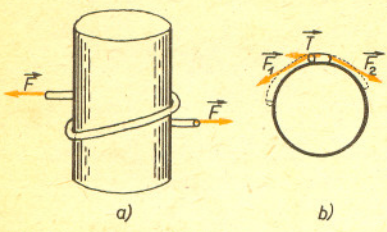
Nie powinno jednak nikomu pozostać wrażenie, iż są jakieś niezmienniki węzłów znacznie lepsze niż wielomian Conwaya, a tylko niedostępne dla niezawansowanego Czytelnika: Jest wręcz przeciwnie — wielomian Conwaya to najlepszy znany pojedynczy niezmiennik.

Proponuję teraz Czytelnikom obliczenie wielomianu Conwaya innych węzłów i splotów opisanych w artykule (przy wyblince należy zwrócić uwagę, że wynik może zależeć od orientacji składowych).

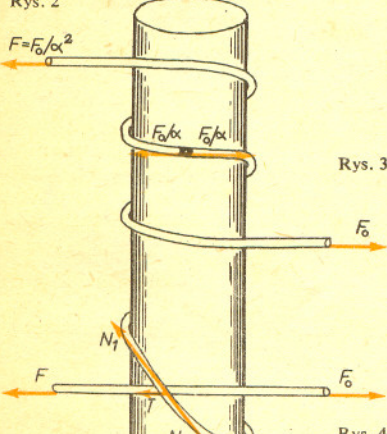
# Węzły



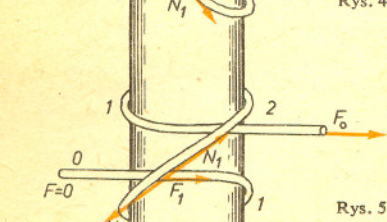
Rys. 1



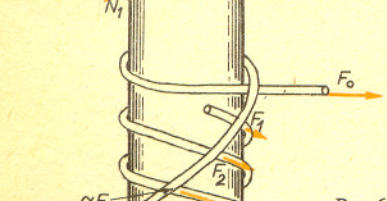
Rys. 2



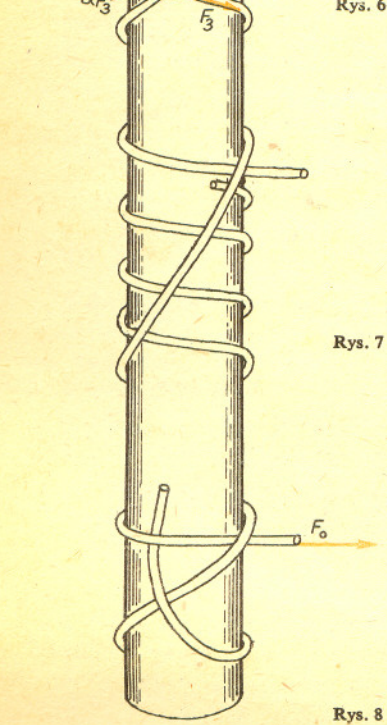
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rys. 7

Rys. 8

Jakie węzły są izomorficzne? — to ciekawy problem dla matematyka (por. artykuł J. Przytyckiego). Fizyka, i nie tylko, interesuje przede wszystkim to, aby węzeł dobrze trzymał. W ocenie jakości węzłów oraz projektowaniu węzłów o zadanych własnościach pomoże Czytelnikowi opis działania węzłów, który przedstawimy w dalszym ciągu.

Na początek zajmiemy się węzłami wiązanymi na walcu (kołku, pachółku, polerze) o średnicy istotnie większej od średnicy liny. Idealny węzeł to taki, który wytrzyma dowolne obciążenie, aż do zerwania liny. Obciążenie to może być skierowane, w zależności od przeznaczenia węzła, wzdłuż walca lub prostopadle do niego.

Lina bez węzłów jest w równowadze tylko wtedy, gdy na oba jej końce działają siły o równych wartościach. Identyczne siły działają wtedy również na każdy fragment liny (rys. 1).

W dowolnym węźle można wyróżnić owinięcia i przecięcia.

Na rysunku 2a przedstawione jest jednokrotne owinięcie. Siła  $F$  potrzebna do zrównoważenia obciążenia  $F_0$  jest teraz mniejsza od  $F_0$ , bo na każdy fragment liny stykający się z walcem działa dodatkowo siła tarcia (rys. 2b). Załóżmy, że jedno owinięcie  $\alpha$  razy zmniejsza siłę  $F$ . Gdy są dwa owinięcia (rys. 3), na drugi koniec liny ciągnąc siłą  $F_0/\alpha$  i aby ją zrównoważyć, wystarczy wolny koniec liny ciągnąć siłą  $F_0/\alpha^2$ . Dla  $n$  owinięć  $F = F_0/\alpha^n$ . Parametr  $\alpha$  zależy tylko od współczynnika tarcia liny o walec. Przykładowo dla liny konopnej i drewna  $\alpha = 23$ , a dla liny nylonowej i gładkiej stali  $\alpha = 4$ .

Warto w tym miejscu zauważyć, że trzykrotne owinięcie konopnej liny na drewnianym kołku zmniejsza siłę konieczną do zrównoważenia obciążenia ok. 12 000 razy, tj. do utrzymania w równowadze 12-tonowego ciężaru wystarczy siła 1 kG.

Na rysunku 4 przedstawione jest przecięcie. Fragment liny o naprężeniu  $N_1$  dociska do walca liną leżącą pod nim. Im większe jest naprężenie w górnym odcinku, tym większy jest nacisk, a więc i siła tarcia. Załóżmy, że przy naprężeniu  $N_1$  siła tarcia  $T = \beta N_1$ . Równowagę zapewnia wtedy siła

$$F = F_0 - \beta N_1.$$

Parametr  $\beta$  zależy od współczynnika tarcia liny o linę oraz liny o walec, a także od średnicy walca i liny. Dla nylonowej linki na stalowym walcu  $\beta \approx 0,2$ .

Ustalimy teraz warunki, jakie muszą spełniać parametry  $\alpha$  i  $\beta$ , aby wyblinka (rys. 5) wytrzymała dowolne obciążenie  $F_0$ .

Teraz na swobodny koniec liny nie działa żadna siła, a więc naprężenie  $F_1$  za pierwszym przecięciem nie może przekraczać  $\beta N_1$ :

$$F_1 \leq \beta N_1.$$

Jedno owinięcie zmniejsza naprężenie  $\alpha$  razy, z czego wynika, że

$$N_1 = \alpha F_1.$$

Obie zależności spełnione są dla dowolnej siły  $F_1$ , jeśli tylko

$$\beta \geq 1/\alpha.$$

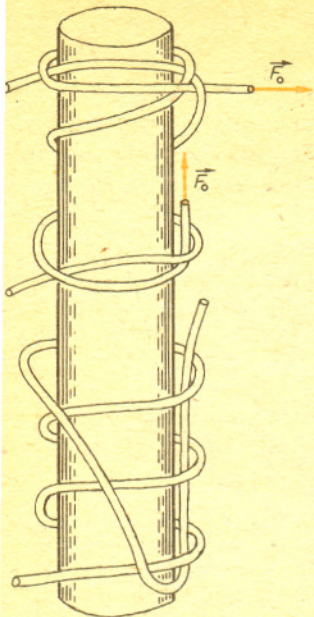
Ze wzrostem siły  $F_1$  rośnie także nacisk  $N_1$  i węzeł zaciska się.

Potrójna wyblinka z rysunku 6 zaciśnie się, jeśli

$$\begin{aligned} \alpha \beta F_3 &\geq F_1, \\ \alpha F_1 + \alpha \beta F_3 &= F_2, \\ \alpha F_2 + \alpha \beta F_3 &= F_3. \end{aligned}$$

Po podstawieniu pierwszej zależności do drugiej i drugiej do trzeciej dostajemy warunek

$$\beta \geq \frac{1}{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha}.$$



Rys. 9

Dodatkowe owinięcia w potrójnej wyblince osłabiają ograniczenia na parametr  $\beta$ . Może się zdarzyć, że węzeł taki zaciśnie się tam, gdzie wyblinka nie wystarczy.

Łatwo też zauważyć, że jeśli

$$\beta \geq \frac{1}{\alpha^2 + \alpha},$$

to trzecie owinięcie nie jest potrzebne.

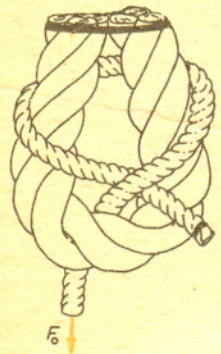
Rys. 10

Pozostawiamy do sprawdzenia Czytelnikowi, że:

- a) modyfikacja wyblinki z rysunku 7 nie zwiększa uniwersalności węzła,
- b) węzeł wieszakowy (rys. 8) jest lepszy niż wyblinka; swobodny koniec jest w tym węźle dociskany siłą bliższą pełnemu obciążeniu niż w wyblince,
- c) jeszcze lepszy (teoretycznie) jest węzeł z rysunku 9,
- d) węzły do wiązania haczyków wędkarskich (rys. 10 i 12) wymagają takich samych wartości  $\alpha$  i  $\beta$  jak wyblinka i potrójna wyblinka,
- e) węzeł szotowy wiązany na grubej linii (rys. 12) ma własności podobne do wyblinki.

Wiążąc opisane węzły łatwo się przekonać, że przedstawiona teoria pozostawia wiele do życzenia. Nie uwzględnia m. in. tego, że nie wszystkie przecięcia pracują tak samo, szczególnie w przypadkach, gdy lina przecina wiele owinięć. Poza tym nie daje się prosto uogólnić na węzły łączące liny o tej samej grubości. Zachęcamy Czytelników do prób jej udoskonalenia.

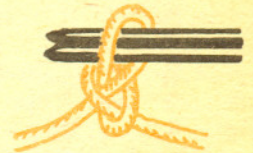
(na podstawie *Am. Journal of Physics* 45 (1977)185)



Rys. 12



## Zadania



Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 386. Udowodnić, że dla dowolnego trójkąta  $ABC$  promień okręgu wpisanego jest nie większy niż połowa promienia okręgu opisanego.

Rozwiązanie na str. 10

M 387. Znaleźć pierwiastek kwadratowy z liczby  $\underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-razy}} \underbrace{22 \dots 25}_{(n+1)\text{-razy}}$ .

Rozwiązanie na str. 10

M 388. Czy można podzielić szachownicę  $8 \times 8$  trzynastoma prostymi tak, aby każda z uzyskanych części zawierała najwyżej jeden środek pola szachownicy?

Rozwiązanie na str. 11

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 164. Kolorowe szkło po roztarciu staje się białym proszkiem. Jak odkryć jego pierwotną barwę?

Rozwiązanie na str. 10

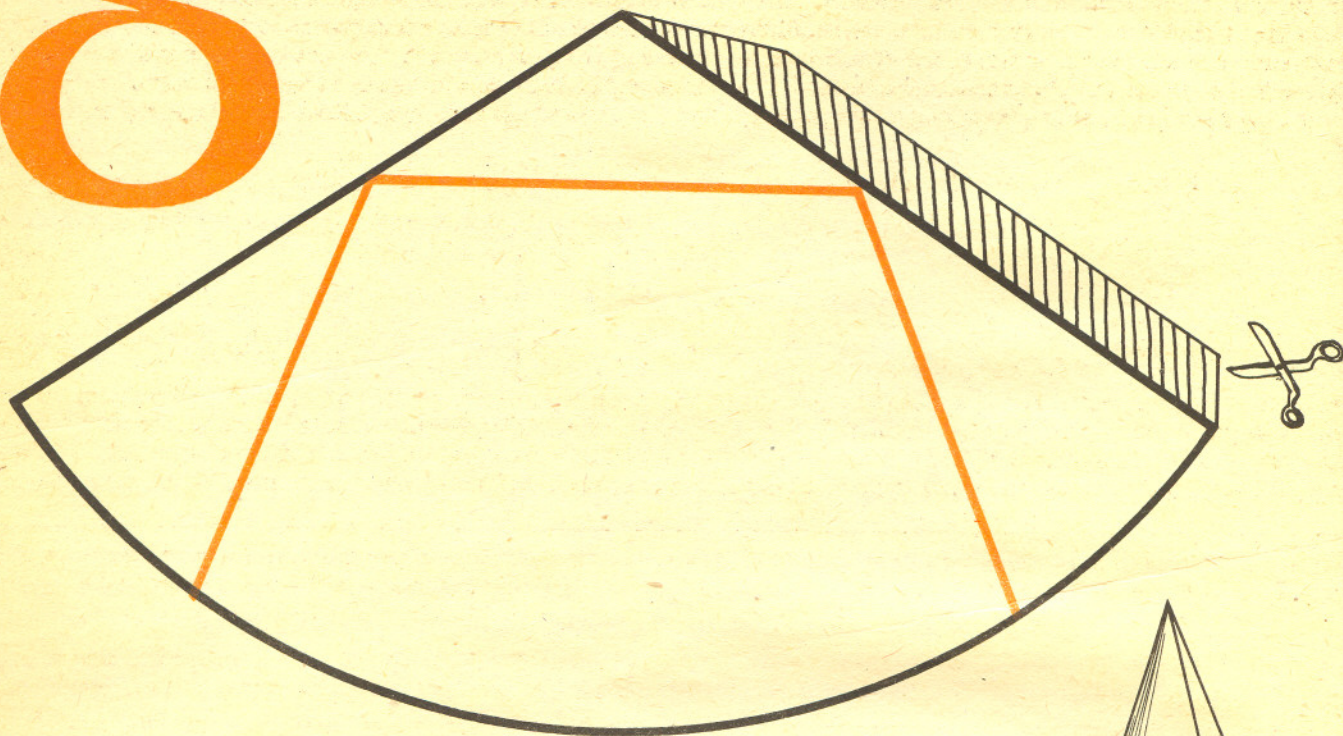
F 165. Schodząc do lądowania samolot wynurza się z chmury i trafia w padający z niej deszcz. Jak wyjaśnić radykalną poprawę widoczności (z kilkudziesięciu na kilkaset metrów)?

Rozwiązanie na str. 11





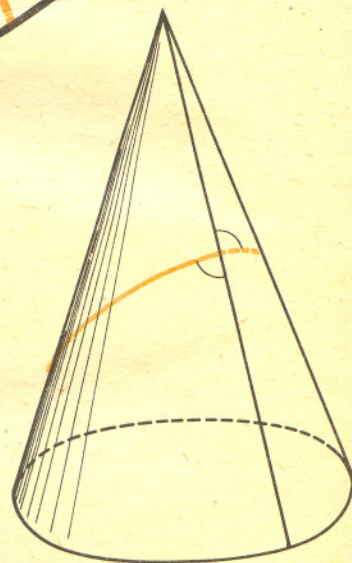
# 5 mata delta



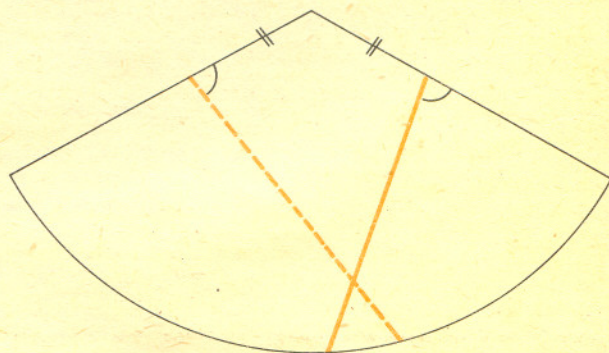
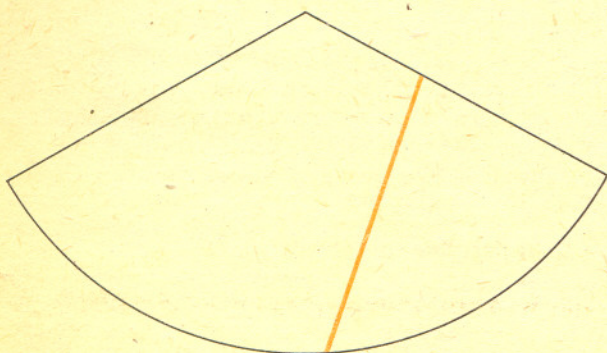
## Lokalne minimum długości, czyli geodezyjne

Czy uwierzycie, że jeśli sklei się narysowany obok stożek, to łamana na nim okaże się gładką linią? Zresztą, nie musicie wierzyć — przerysujcie go dokładnie, wyciąć i sklejcie.

Jednak pozostaje pytanie, czy można to było sprawdzić bez wycinania i klejenia. Oczywiście, że tak. Żeby wpaść na pomysł, jak to zrobić, spróbujmy rozwiązać problem, przed którym stał niejednokrotnie nasz kartograf rysujący mapę nieba zamieszczoną na okładce. Są tam tory planet — jak zapewnić to, by rysując kawałki torów na poszczególnych częściach zrobić to tak, by po ich sklejeniu tory były gładkimi liniami, bez „dziobków”?



Wyobraźmy sobie ten stożek już po sklejeniu. Teraz już łatwo odpowiedzieć na pytanie.

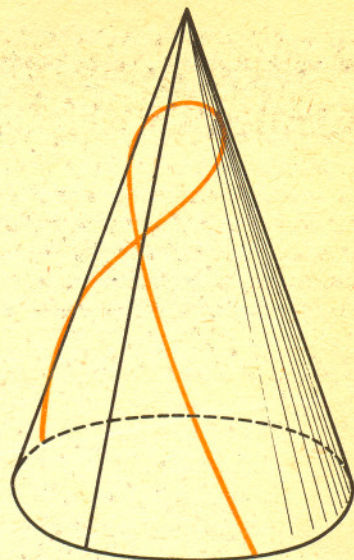
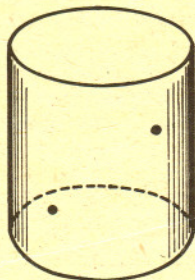


Rozwiążmy więc zadanie: jak gładko przedłużyć narysowaną na rozklejonym stożku linię?

Po „przeciwej stronie” rozklejonego stożka trzeba znaleźć punkt tak samo odległy od wierzchołka i odłożyć tam taki sam kąt. Po sklejeniu musi się zgodzić!

Teraz już na pewno wiecie, jak sprawdzić, że linia na pierwszym rysunku po sklejeniu wygląda tak.

Narysowane przez nas na stożku linie mają tę własność, że jeśli wzdłuż nich ułożyć na stożku nitkę i naciągnąć ją, to... nitka się nie poruszy, nie przesunie. Znaczący to, że realizuje ona lokalne minimum długości, że nie można od niej przejść do krótszej linii łączącej dowolne dwa leżące na niej punkty nie przechodząc „po drodze” przez dłuższe linie ani nie przerywając jej. Taką linię nazywa się geodezyjną.



Aby zapoznać się z tym trudnym pojęciem bliżej, spróbujmy wyrysować kilka różnych geodezyjnych łączących dwa punkty na walcu (wykorzystując oczywiście spostrzeżenia, jakie poczyniliśmy rysując linie na stożku).

Uwaga pierwsza: narysowana przez nas linia musi po rozcięciu walca składać się z kawałków prostych — inaczej łatwo byłoby ją skrócić.

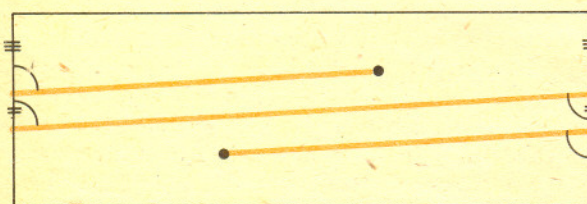
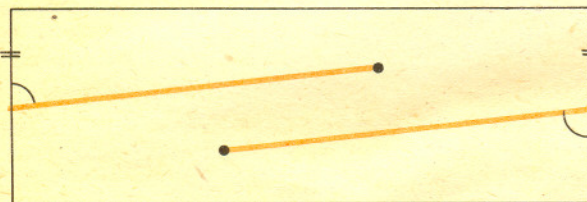
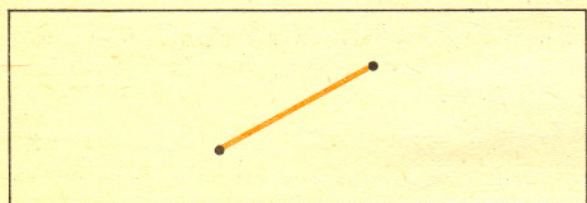
Uwaga druga: te kawałki prostej muszą być sklezione gładko — „dziobek” też łatwo przez naciągnięcie nitki skrócić.

Po tych uwagach łatwo już narysować kilka geodezyjnych na walcu. My narysowaliśmy trzy. Spróbujcie narysować ich więcej. Sklejcie narysowane przez siebie walce z geodezyjnymi. Sprawdźcie nitką, że dobrze narysowaliście. Teraz już chyba jasno widać, dlaczego mówiliśmy o lokalnym minimum długości, a nie po prostu o linii najkrótszej.

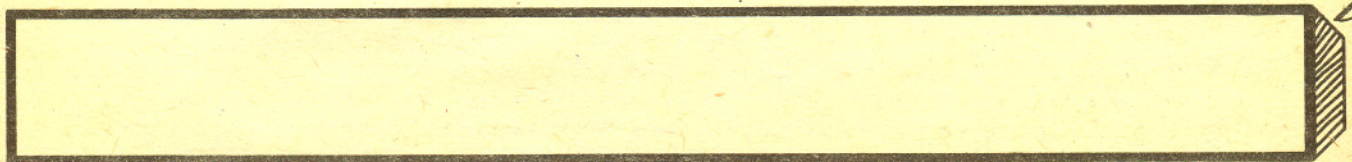
Dla tych, których zainteresowały geodezyjne — ciąg dalszy. Najpierw uwaga raczej smutna: mogliśmy rysować geodezyjne na stożku i walcu, bo powierzchnie te (po rozcięciu) dają się rozpląszyć (naukowo: są rozwijalne), a na płaszczyźnie geodezyjne to proste (patrz uwaga pierwsza). Do znajdowania geodezyjnych na dowolnej powierzchni trzeba posłużyć się zaawansowaną gałęzią matematyki — geometrią różniczkową. Czasami tylko można geodezyjne „zgadnąć” bez jej użycia — potraficie chyba wskazać geodezyjną na sferze (czyli powierzchni kuli).

Nie znaczy to jednak, że nie możemy wykorzystać zdobytych przed chwilą informacji do rozwiązania bardzo trudnego zadania. Będzie ono dotyczyło oczywiście powierzchni rozwijalnej. Chodzi o narysowanie geodezyjnych na wstędze Möbiusa. Powodzenia!

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*



tak się klei wstęga Möbiusa



## Beznadziejne marzenie o całej prawdzie

Jeśli nie czepiać się sformułowań, to bodajże pierwszym, który zdał sobie sprawę z faktu, że

pełna teoria Wszechświata nie może być mniej skomplikowana niż sam Wszechświat,

był Tales. Stanowisko takie nazywane bywa pesymizmem poznawczym. Warto zwrócić uwagę, że nie ma ono (właściwie) nic wspólnego z agnostycyzmem (programową niepoznawalnością). Tutaj, owszem, poznajemy, ale zawsze tylko częściowo.

Wiedza pewna

choćby częściowa, też jest przecież coś warta. Tales, fundator greckiego modelu nauki, uczynił wiele dla sformułowania warunków prowadzących do uzyskiwania twierdzeń — taką nazwę nadano „atomom” wiedzy pewnej.

Pierwsza zasada (w późniejszej, np. pitagorejskiej terminologii) orzeka, że twierdzenie musi dotyczyć abstraktów, a nie konkretnych realnych obiektów. Można to dobrze zaobserwować w zdaniu

pies ma cztery nogi,

które nie musi być prawdziwe w odniesieniu do konkretnego Azora czy Burka, będąc jednak niewątpliwie twierdzeniem zoologii, gdzie nazwa „pies” oznacza pewien abstrakt, pewien gatunek czworonogów.

Druga zasada (znacznie później jawnie sformułowana, choć mocno zakorzeniona od czasów Euklidesa) to konieczność formalnego wyrażania twierdzeń. W istocie poszerza ona pierwszą zasadę dotyczącą (mówiąc gramatycznie) rzeczowników na czasowniki i inne formy językowe. Zdanie

punktów na odcinku jest tyle samo, co na prostej

jest twierdzeniem dopiero po przyjęciu pewnego specyficznego rozumienia zwrotu „jest tyle samo”, a więc i wyrażeniu zgody na szereg intuicyjnie paradoksalnych, później odkrytych, konsekwencji tej formalnej umowy.

Trzecia wreszcie zasada każe każde twierdzenie formułować jako zdanie warunkowe. Zdanie

woda płynie z góry na dół

jest łatwe do sfalsyfikowania przez odkręcenie kranu, choć jakąś prawdę przecież wyraża. Często założenia nie są wpisane w samo twierdzenie, a czyni się je wszystkie na początku, przed przystąpieniem do formułowania większej liczby twierdzeń — w takim przypadku nazywa się je aksjomatyką. Dopiero w kontekście owych założeń (aksjomatów) można ocenić, czy zdanie jest twierdzeniem, czy też nie. Stwierdzenie, że

suma kątów trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych

nie jest twierdzeniem geometrii euklidesowej i jest twierdzeniem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego.

Ostatecznie więc kształt twierdzeń, elementów wiedzy pewnej ma być następujący

jeśli zachodzą następujące warunki...  
i jeśli nic innego nie ma wpływu na wynik,  
to na pewno będzie tak...

Modele, czyli manekiny rzeczywistości

Pitagorejczycy, którzy pierwsi skodyfikowali sposób budowania twierdzeń, orzekli, że jedyną dyscypliną umożliwiającą naprawdę poprawne ich formułowanie jest geometria. Opinię tę, rozciągniętą na całą matematykę, podziela i dziś wielu. Można np. znaleźć ją w pracach Levi-Straussa, który ubolewa nad aktualną niemożnością pełnego zmatematyzowania antropologii. Matematyzuje się zresztą (właśnie w poszukiwaniu wiedzy pewnej) prawie wszystkie gałęzie poznania, w tym wszystkie gałęzie przyrodznawstwa. A taka fizyka została zmatematyzowana właściwie w całości.

Za luksus posiadania wiedzy pewnej płaci się jednak bardzo konkretną cenę. W akcie dostosowywania obiektu badanego do możliwości wypowiedzania o nim



**Rozwiązanie zadania F 164.** Na powierzchni każdego ziarenka szkła promienie światła ulegają załamaniu i odbiciu. W bezbarwnej cieczy o współczynniku załamania takim samym jak w szkłe ziarenka przestają odbijać światło, stają się więc przezroczyste i zabarwione na swój pierwotny kolor. Dla szkła trudno jest dobrać ciecz o równym mu współczynniku załamania, ale podobne doświadczenie można wykonać z kolorowym, przezroczystym plastykiem używając jako cieczy roztworu soli. Zmiany stężenia roztworu powodują zmianę współczynnika załamania — można w ten sposób dobrać odpowiednią jego wartość, by proszek początkowo biały stał się kolorowy.

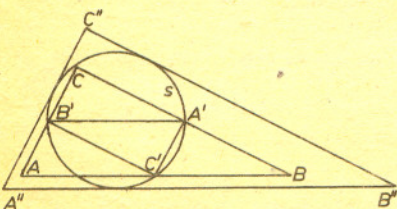


**Rozwiązanie zadania M 387.** Mamy

$$\frac{11 \dots 1}{n\text{-razy}} \cdot \frac{22 \dots 25}{(n+1)\text{-razy}} = \\ = (10^{2n+1} + \dots + 10^{n+2}) + 2 \cdot (10^{n+1} + \dots + 10) + 5 = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n+2} - 10^{n+2}) + \\ + 2 \cdot \frac{1}{9} (10^{n+2} - 10) + \frac{45}{9} = \frac{1}{9} (10^{2n+2} + \\ + 2 \cdot 5 \cdot 10^{n+1} + 25) = \left[ \frac{1}{3} \cdot (10^{n+1} + 5) \right]^2, \text{ czyli} \\ \sqrt{\frac{11 \dots 1}{n\text{-razy}} \cdot \frac{22 \dots 25}{(n+1)\text{-razy}}} = \frac{33 \dots 35}{(n+1)\text{-razy}}$$



**Rozwiązanie zadania M 386.** Rozważmy okrąg  $s$  opisany na trójkącie  $A'B'C'$ , gdzie  $A', B', C'$  są środkami boków  $BC, AC, AB$ . Niech  $A'' B'' C''$  będzie trójkątem, którego boki są równoległe do boków trójkąta  $ABC$  i styczne do okręgu  $s$ . Promień okręgu  $s$ , jako okręgu wpisanego w trójkąt  $A'' B'' C''$  jest nie mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , równocześnie jest on równy połowie promienia okręgu opisanego na  $ABC$ .





**Rozwiązanie zadania M 388.** Niech  $A$  będzie zbiorem środków skrajnych pół szachownicy. Aby wykazać, że żądany podział nie jest możliwy, zauważmy, że 13 prostymi nie można oddzielić wszystkich punktów zbioru  $A$ . Jeśli  $n$  prostych dzieli zbiór  $A$  na  $k$  części, to dodając  $n+1$ -szą prostą możemy podzielić najwyżej dwie spośród tych części, a więc podzielić zbiór  $A$  na  $k+2$  części. Przez indukcję wynika stąd, że zbiór  $A$  trzynastoma prostymi można podzielić na najwyżej 26 części,  $A$  zaś zawiera 28 punktów.



**Rozwiązanie zadania F 165.** Pogorszenie widoczności w deszczu i we mgle powodowane jest rozpraszaniem światła na kropelkach wody. Na jaką głębokość wnika światło w zawieszoną kropel wody w powietrzu? Dla grubego oszacowania przyjmijmy, że całe światło padające na kropkę jest rozpraszane. Koncentracja  $n$  zawiesziny wynosi:

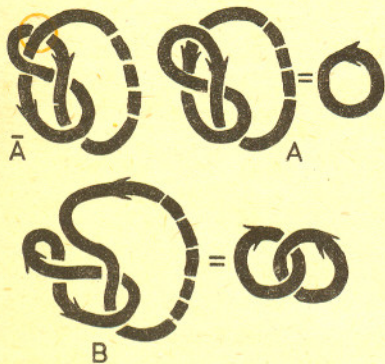
$$n = \frac{3}{4\pi} \frac{V}{r^3},$$

gdzie  $V$  — objętość wody w jednostce objętości powietrza,  $r$  — promień kropki. W wału o przekroju  $S$  i długości  $L$  wyciętym wzdłuż kierunku promienia świetlnego znajduje się  $N = L \cdot S \cdot n$  kropelek zawiesziny, przesłaniają one więc powierzchnię  $\sigma = N \cdot \pi \cdot r^2$ . Gdy  $\sigma = S$ , to  $L = H$  — zasięg widzenia; skąd otrzymujemy

$$H = \frac{4r}{3V}.$$

Dla chmury i deszczu  $V$  jest prawie identyczne (kropelki deszczu powstają w wyniku przyłączania małych kropelek przez duże w atmosferze pary nasyconej), ale kropelki deszczu są większe i stąd dalsza w nim widoczność (typowe promienie kropelek mają rozmiary rzędu  $10^{-2}$  cm dla deszczu i  $10^{-3}$  cm dla mgły).

Rozwiązanie zadań z artykułu *Węzły i sploty*



$\nabla \bar{A}(z) = \nabla A(z) - z \nabla B(z)$  (minus, bo w węźle  $\bar{A}$  jest tunel, a w węźle  $A$  most),  $B = \bar{K}_2$  (rys. 2). Tak więc wielomian Conwaya ósemki pojedynczej jest równy  $1 - z^2$ . Wielomian Conwaya węzła z rysunku 10 jest równy  $1 - z^2 - z^6$ , a więc to inny węzeł niż ratowniczy. Wielomiany Conwaya ósemki podwójnej, wyblinki (niezależnie od orientacji) i związku wantowego są równe odpowiednio:  $1 + 2z^2, z^6, 1 + 4z^2 + 5z^4 + z^6$ .

niewątpliwych twierdzeń zastępuje się ten obiekt (zgodnie z przytoczonymi zasadami) jego abstrakcyjnym substytutem zwanym modelem (najczęściej jest to model matematyczny). I choć z realiów ów model tworzyliśmy, sam on jest już tylko owych realiów atrapą.

Pierwszą ze specyficznych własności modeli, na którą warto zwrócić uwagę, jest ich wyizolowanie. Jest w nich to i tylko to, co z rzeczywistości w danej chwili chcieliśmy wydzielić. „Reszta” rzeczywistości ulega pełnemu unicestwieniu. Doskonale widać to przy rozważaniu np. ruchu dwóch (czy wielu) punktów materialnych, który rozważamy w próżni daleko doskonalszej niż jakkolwiek dająca się realnie pomyśleć. Mimo to jednak w ten właśnie sposób stworzono mechanikę nieba.

Drugą z cech modeli jest ich regularność. Poza niewielką liczbą założonych specjalnych własności ich elementów modele są wszędzie i zawsze jednakowe. Tak np. gaz doskonały (czyli model gazu) spełnia w całym zakresie ciśnień i temperatur prawo Clapeyrona, prawo rozkładu ciśnień Daltona itd., itp.

Z tych właśnie cech wywodzi się zaleta, dla której modele się buduje — ich całkowita i pełna poznawalność. One też stanowią o niemożności potraktowania ich jako tożsamyh z rzeczywistością.

### Tak zwane poprawki

Model oczywiście można doskonalić. Mianowicie — likwidować kolejno różnice, jakie dostrzeżemy między nim a realiami. Dopasowywać model do rezultatów naszych kontaktów z rzeczywistością, czyli zarówno programowych, jak i przypadkowych doświadczeń.

Najpowszechniej stosowana metoda to ograniczenie stosowalności modelu. I tak mówimy, że mechanika klasyczna jest dobrym modelem dla niewielkich prędkości, gaz doskonały sprawdza się w średnich temperaturach i dla dużych rozrzedzeń itd. W ten sposób nasza wiedza pewna staje się coraz bardziej fragmentaryczna. W granicy wiemy wszystko o niczym.

Następna z metod komplikuje model. Dołącza się do wzorów kolejne człony, coraz dłuższe i coraz bardziej złożone. Równania zaczynają powoli wykraczać poza nasze możliwości ich rozwiązania, a potrzebnych do nich danych zaczyna być więcej, niż jesteśmy w stanie zgromadzić. W granicy nie wiemy nic o wszystkim.

Wreszcie możemy modelom nadać charakter statystyczny zastępując ich kategoryczne orzeczenia stwierdzeniami o wystąpieniu takich czy innych zjawisk z określonym prawdopodobieństwem. W konsekwencji wiemy wszystko o wszystkim, ale nie na pewno.

Tak czy inaczej owo poprawianie w znacznej mierze likwiduje cel, dla którego w ogóle modele zaczęto budować.

### Nie jedna wiedza, a wiele

Łatwo zrozumieć poprawianie (czy psucie, jak kto woli) pięknych, prostych, zrozumiałych modeli rzeczywistości. Istotnie, jeśli wynik uzyskany w praktyce odbiega od modelowego przewidywania, coś trzeba zmienić. Stary dowcip mówi, że są jednak trzy możliwości. Albo zmienić model, albo zmienić rzeczywistość, albo zmienić, że odbiega. Dowcip zaleca zastosowanie trzeciego wyjścia. Sądzę, że w omawianej sprawie owo zalecenie też jest właściwe.

Te zbyt może piękne i zbyt może proste modele w okresie swojego rozkwitu od XVII po XX wiek sprawdziły się przecież dając ludziom przemysł, energię pary i elektryczność, ba, nawet nauczyły nas latać. Nie sposób więc uznać je za błędne. Z drugiej strony odstępstwa przewidywań modeli od wyników doświadczeń też nie są urojeniem, a rzeczywistości zmienić się nie da. Da się natomiast zmienić nasz pogląd na to, jakie teorie rzeczywistości (czyli opisy modeli) są dobre. Opowiadałbym się za tym, by uznać za dobre zarówno te proste, jak też i ich skomplikowane, ale wierniejsze wersje. Każdemu zjawisku odpowiadałby w ten sposób cały szereg teorii relacjonujących stosunki rzeczywiste na różnych poziomach głębokości oglądu. I każdy miałby możliwość zstępować po nich, jak po schodach, tak głęboko, jak on sam i potrzeby wynikające z jego pracy i aspiracji by mu kazały. I na taki model wiedzy, jak sądzą, można się zgodzić. Jeśli tylko zrezygnować z beznadziejnego marzenia o nieosiągalnej całej prawdzie.

Marek KORDOS

## Spełniamy życzenie wielu naszych Czytelników i poczynając od

niniejszego numeru rozszerzamy zmagania ligowe Klubu 44 również na fizykę. Odtąd więc będziemy mieli dwie „konkurencje” — matematyczną i fizyczną. Punktacja ligowa w każdej z nich będzie obliczana oddzielnie.

Szczupłość miejsca nie pozwala na zamieszczanie w każdym numerze trzech zadań w każdej z dwóch konkurencji — jak to było do tej pory w lidze matematycznej. Będą więc co miesiąc dwa zadania z matematyki i dwa z fizyki. Innych istotnych zmian w regulaminie nie ma. Udział w lidze jest otwarty dla każdego, choć nadal najbardziej liczymy na młodzież szkolną i studencką. Przewidujemy dużą różnorodność zadań i zróżnicowanie stopnia ich trudności. Do ich rozwiązania będzie jednak zasadniczo wystarczał zasób wiadomości szkolnych z matematyki i fizyki.

Każda z tych dwóch konkurencji będzie żyła własnym życiem. Rozwiązania zadań fizycznych i matematycznych będą czytane i oceniane, rzecz jasna, przez inne osoby. Dlatego bardzo jest dla nas ważne, by rozwiązania te nadchodziły w oddzielnych kopertach (por. punkt 7 regulaminu).

Za to przewidziany w punkcie 13 naszczytły (choć, jak pisze jeden z naszych Czytelników: beznadziejny) tytuł Weterana, będzie można zdobyć w „dwuboju” uzyskując sumę 44 punktów np. dwa razy w jednej konkurencji i raz w drugiej.

Nadal aktualny jest apel o przysyłanie propozycji zadań. Gdy autor wykorzystanego przez nas zadania jest jednocześnie uczestnikiem konkursu ligowego, a zadanie dostarczył wraz z rozwiązaniem (choćby szkieletowym), otrzymuje w punktacji ocenę maksymalną.

Liga matematyczna kończy przeszło trzyletni okres samotnej egzystencji. Chwila jest więc sposobna do pewnych podsumowań. Podamy trochę informacji, uwzględniając w naszych danych historię ligi od jej utworzenia do przerwy wakacyjnej 1984.

W konkursie brało udział 270 uczestników, w tym 17 pań i dziewcząt. Najwięcej uczestników, bo 37, dostarczyła Warszawa, dalej Kraków i Wrocław — zresztą proponujemy rzut oka na mapę.

Nie zmieścili się na niej trzej uczestnicy spoza kraju: Polacy z Pragi i z Perugii oraz Węgier z Budapesztu. Blisko połowa ogólnej liczby uczestników to „meteory” — osoby, które przysłały rozwiązania zadań raz jeden, no, może dwa razy, i umilkły. (Namawiamy serdecznie do kontynuowania zabawy.) Na miano wytrwałych zasługuje może setka osób. Najwytrwalszym jest bez wątpienia pan Jerzy Janowicz, który nie opuścił ani jednej kolejki ligowej, od samego startu ligi.

Kim są uczestnicy? Nasze dane są niekompletne, bowiem bardzo wielu uczestników nie pisze nic o sobie. Wśród tych, którzy się przedstawili dokładniej niż tylko imieniem i nazwiskiem, grupę najliczniejszą stanowią studenci, dalej nauczyciele matematyki i uczniowie, wreszcie przedstawiciele innych zawodów. Rozkład ten znalazł także odzwierciedlenie w maleńkiej dziewięćosobowej próbie złożonej z członków Klubu 44, którzy przybyli na spotkanie Klubu w dniach 17 i 18 lutego 1984 (na 12 zaproszonych). W tej dziewiątce znaleźli się: uczeń liceum, student uniwersytetu, trzech studentów uczelni technicznych, nauczyciel szkoły podstawowej, dwóch nauczycieli szkół średnich oraz pianista.

To teraz garść refleksji z samego zjazdu. Z przybyłymi gośćmi spotkał się Dziekan Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, doc. dr hab. Henryk Woźniakowski. Profesor tegoż wydziału, dr hab. Andrzej Białynicki-Birula, poprowadził pogadankę pod hasłem *Czym się różni twórca pracy zawodowego matematyka od rozwiązywania zadań?* Matematycy, informatycy, fizycy i astronomowie UW zaprezentowali wyposażenie swoich pracowni (kreda i tablica, komputery, lasery, refraktory...). W gronie zespołu redakcyjnego *Delty* porozmawialiśmy sobie o *Delcie*. Resztę czasu wypełniły dyskusje o zadaniach i ich rozwiązaniach, kryteriach ocen, współczynnikach trudności itp., itd. Ta „reszta czasu” okazała się dalece niewystarczająca. Goście żegnali się z nami z poczuciem niedosytu; tak nam się wydaje...

W bieżącym roku szkolnym planujemy kolejne spotkanie Klubu 44, w liczniejszym już gronie. Gdy piszemy te słowa, Klub liczy 24 członków, w tym czterech „trzykrotnych” (czyli Weteranów) i dwóch „dwukrotnych”. Wybiegając myślą naprzód już się cieszymy na dalsze jeszcze spotkania, w których zapewne wezmą udział adepti, a później weterani bojów ligowych również w fizyce.

Od ostatniego omówienia zadań ligowych (*Delta* 1/1984) mija rok. Pora na kolejne omówienie. Znajdą się w nim te zadania, które przez nielicznych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi lukami) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z naszym.

**Zadanie 56** [Zbiór wierzchołków wielokąta ma środek (oś) symetrii  $\Rightarrow$  wielokąt też ma; dodać założenie tak, by twierdzenie stało się prawdziwe] (WT = 2,46). Dziewięciu uczestników udowodniło twierdzenie pod założeniem wypukłości. Dwóch uczestników (M. Prauza, J. Szweda) proponują założenie istnienia środka (osi) symetrii również dla zbioru środków boków wielokąta, ale nie dowodzi twierdzenia przy tym założeniu; nie wiemy, czy takie twierdzenie jest prawdziwe.

### Lista uczestników ligi zadaniowej „Klub 44”

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 5/1984

Andrzej Pawłowski	- Zabrze	47,09	D
Adam Wyrwa	- N. Wiśnicz	45,76	K
Stawomir Solecki	- Ostrów Wkp.	44,03	K
Piotr Figurny	- Lubartów	43,78	
Marian Roman	- Błk	38,72	K
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	37,74	
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	37,24	K
Grzegorz Kuś	- Kraków	36,57	
Zbigniew Bartold	- Gdynia	36,22	K
Kazimierz Serbin	- Sanok	36,15	
Anna Gluza	- Toruń	35,28	
Ryszard Mazurek	- Wrocław	34,49	
Wojciech Krzyżański	- Żywiec	34,45	
Zbigniew Kozła	- Jelenia Góra	34,30	
Krystyna Witk	- Ostrów Maz.	33,40	
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	33,35	
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	32,10	W
Jan Ciach	- Ostrowiec Św	30,56	
Jerzy Tyszkiewicz	- Warszawa	30,34	
Krzysztof Jakubczak	- Kuzowa Zd.	29,11	
Jerzy Mikuta	- Zielona Góra	28,94	
Władysław Wasiak	- Toruń	28,92	
Tomasz Rawlik	- Gliwice	28,62	K
Jack Uryga	- Bytom	27,93	W
Maciej Gruszek	- Wrocław	27,85	
Janusz Prajs	- Opole	27,57	
Jack Mańdziuk	- Lublin	25,37	
Zygmunt Bartkowski	- Warszawa	25,16	
Krzysztof Zygan	- Lubin	24,98	
Adam Stadler	- Rzeszów	24,94	
Tomasz Maśkowski	- Toruń	24,40	
Marek Prauza	- Poraj	23,20	K
Krzysztof Trautman	- Warszawa	22,75	K
Tomasz Szymczyk	- Bielsko-B.	21,54	
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	21,53	K
Zbigniew Kryżow	- Sopot	21,49	
Małgorzata Czerniakowska	- Gdańsk	20,54	K
Zbigniew Zaus	- Kraków	20,53	
Marcin Mazur	- Białystok	20,46	
Mariusz Łopusiewicz	- Legnica	19,63	
Dezso Gross	- Budapeszt	17,12	
Stanisław Dorosz	- Kraków	16,52	
Jack Jakubiak	- Żódz	16,30	
Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	15,69	
Andrzej Lenarcik	- Kielce	15,38	
Dariusz Łydzba	- Bierutów	14,38	
Mirosław Mikucki	- Augustów	14,21	
Jarosław Kulpa	- Praha	14,20	
Mirosław Matłega	- Skoczów	14,00	
Karol Jachacy	- Tuszcz	13,86	
Tomasz Komorowski	- Świdnik	13,79	K
Krzysztof Bartniczek	- Bytom	13,65	
Marek Gałeczki	- Milanówek	13,38	W
Jerzy Grzywocz	- Ruda Śl.	13,29	
Stanisław Wrzós	- Lubin	13,22	
Tomasz Biegański	- Lublin	13,13	K
Michał Marczak	- Radom	13,01	
Paweł Bujak	- Warszawa	12,85	
Krzysztof Zapisek	- Warszawa	12,85	
Jarosław Kaczyński	- Starogard Gd	12,82	
Radosław Zapert	- Kielce	12,53	
Paweł Kamiński	- Warszawa	12,44	W
Stanisław Zygmanowski	- Ostrobrudki	11,89	
Lech Bartłomiejczyk	- Gliwice	11,64	
Cezary Suski	- Włocławek	11,47	
Zbigniew Maj	- Zabrze	11,41	
Andrzej Burliga	- Świebodzice	11,23	
Włodzimierz Zwonek	- Kraków	10,88	
Jack Simsak	- Kraków	10,63	
Waldemar Oleśniewicz	- Drezdenko	10,56	
-	-	0	
Wojciech Olszewski	- Brwinów	9,19	K
Jerzy Małopolski	- Kraków	8,85	K
Mariusz Fiszler	- Duszynki Zd.	8,09	K
Jerzy Milczarek	- Gorzów Wkp.	7,76	K
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	7,00	D
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	5,61	K
Edward Orzechowski	- Warszawa	5,17	D
Józef Siwy	- Żązska G.	3,96	K
Włodzimierz Szymczyk	- Zielonka	1,60	K

Zestawienie obejmuje nazwiska wszystkich uczestników, którzy w klasyfikacji ligowej zebrali co najmniej 10 punktów, a także członków Klubu 44 mających aktualnie na koncie mniej niż 10 punktów, ale wykonujących już drugą lub trzecią rundę. Literki K, D, W przy stanie konta oznaczają członków Klubu 44 jednokrotnych, dwukrotnych i trzykrotnych /Weteranów/.

Współczynniki trudności zadań 85, 86, 87:  
1,83      3,01      2,86



Rozmieszczenie uczestników ligi zadaniowej.  
Kolorowe punkty to członkowie Klubu 44.

**Zadanie 60** [Na ile co najwyżej sposobów można przedstawić liczbę naturalną jako sumę czterech różnych dzielników?] (WT = 2,14). Dużo poprawnych rozwiązań. D. Sowizdrzał pisze (bez szczegółów), że numerycznie rozwiązał analogiczne zadanie dla pięciu i sześciu dzielników; wyniki: 71 i 2237.

**Zadanie 62** Znak wyrażenia  $w = 2R + r - p$  w trójkącie ostro-, prosto- i rozwartokątym] (WT = 2,86). Czternaście dobrych rozwiązań. Elegancki wzór na  $w$  (w postaciach nieznacznie różniących się między sobą) uzyskali J. Uryga, K. Jedziniak, T. Komorowski:  $w = 2Ru_1u_2u_3$ , gdzie  $u_i = \sin(x_i/2) - \cos(x_i/2)$ ,  $x_i$  — kąty trójkąta.

**Zadanie 63** [Łamigłówka literowa — zaszyfrowane dodawanie z warunkami dodatkowymi] (WT = 1,84). J. Depta przysłał program komputerowy generujący wszystkie rozwiązania (bez warunków dodatkowych) wraz z wydrukiem wyników (40 rozwiązań).

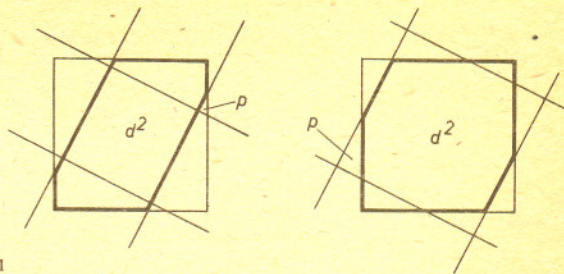
**Zadanie 64** [Przedstawić  $10^6$  jako sumę  $\sum x_i$ ,  $x_i > 0$ , tak, by  $\prod x_i = \max$ ] (WT = 3,15). Cała trudność polegała na rozstrzygnięciu, czy należy wziąć  $m = 367879$ , czy  $m+1$  równych składników. Sprowadzało się to do ustalenia, co większe:  $f(m)$  czy  $f(m+1)$ , gdzie  $f(x) = (10^6 x^{-1})^x$ . Bezblednie lub z drobnymi usterkami rozwiązały to zadanie P. Figurny, J. Ciach, M. Gałecki, G. Kuś, M. Czerniakowska, P. Kamiński. Nasze rozwiązanie wydrukowane w numerze 2/1984 zawiera istotny błąd! (w zwrocie jednej nierówności). Bezspornie najbardziej elegancko w tym fragmencie jest rozwiązanie pani Czerniakowskiej ciąg  $a_n = (1 + 1/n)^{n+1/2}$  jest malejący (dowód np. przez różniczkowanie funkcji  $(1+x)^{1/x+1/2}$ ) i zbieżny do  $e$ , więc  $a_n > e$  dla wszystkich  $n$ ; stąd  $f(m)/f(m+1) = 10^{-6} m^{-m} (m+1)^{m+1} = 10^{-6} a_m (m(m+1))^{1/2} > 10^{-6} e \sqrt{367879 \cdot 367880} > 1$ .

**Zadanie 65** [Czy można podzielić sześcian na skończoną liczbę sześcianów różnej wielkości?] (WT = 3,65). Że nie można, pokazali P. Figurny, M. Gałecki, G. Kuś, R. Pagacz, J. Uryga, J. Janowicz oraz (z zastrzeżeniami) J. Milczarek.

**Zadanie 71** [Czworokąt  $ABCD$  wpisany w koło  $\Rightarrow$  środki kół wpisanych w trójkąty  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  są wierzchołkami prostokąta] (WT = 3,15). Dziewiętnaście dobrych rozwiązań, w większości identycznych z naszym. Zgrabniejsze rozwiązanie, które przedstawili L. Bartłomiejczyk, W. CERCZYŃSKI, J. Janowicz, Z. Koza, R. Pagacz (oraz podobnie T. Komorowski i M. Gałecki) opiera się na spostrzeżeniu, że odcinki  $\overline{O_i O_{i+1}}$  (gdzie  $O_i$  — środki rozważanych kół) są parami równoległe do odcinków łączących środki łuków  $AB$  i  $CD$  oraz  $BC$  i  $DA$ , a te ostatnie dwa odcinki są prostopadłe.

**Zadanie 74** [13-elementowe podzbiory zbioru 52-elementowego można ustawić w cykl, w którym każde dwa sąsiednie różnią się dokładnie jednym elementem] (WT = 3,69). Twierdzenia dowodzi się biorąc zamiast liczb 13 i 52 dowolne liczby  $k$  i  $n$ ,  $k \leq n$ , i stosując indukcję: albo względem  $n$  przy dowolnym  $k$

(jak w naszym rozwiązaniu), albo odwrotnie. Dobre rozwiązania: P. Kamiński, J. Kulpa, J. Prajs, J. Uryga, P. Figurny, M. Gałecki, Z. Koza, G. Kuś, W. Krzyżański.

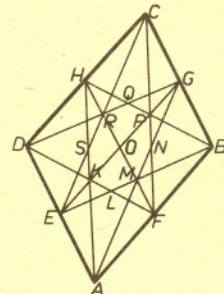


Rys. 1

**Zadanie 76** [Z kwadratu o boku  $a$  wyciąć dwiema prostymi równoległymi w odstępnie  $d \leq a$  figurę o maksymalnym polu] (WT = 3,62). Większość rozwiązań, jak i nasze, opiera się na dość uciążliwych rachunkach; tak to robią P. Figurny, M. Gałecki, T. Józefczyk, J. Kulpa, M. Łopusiewicz, T. Rawlik, J. Uryga oraz (z usterkami) T. Komorowski, M. Marczak, K. Jedziniak, D. Sowizdrzał. Na tym tle uznanie zyskuje piękne rozwiązanie Wojciecha Krzyżańskiego: Wystarczy ograniczyć uwagę do par prostych przecinających wszystkie boki kwadratu i położonych symetrycznie względem jego środka. Weźmy taką parę prostych i poprowadźmy prostopadłe do nich drugą parę prostych, też w odstępnie  $d$  i symetrycznie względem środka kwadratu. Powstanie kwadrat o polu  $d^2$  i cztery trójkątki o równym polu  $p$ , leżące albo wewnątrz, albo na zewnątrz danego kwadratu o polu  $a^2$  (rys. 1). Pole rozważanej figury (o pogrubionym brzegu) równa się  $(a^2 + d^2 - 4p)/2$  (w obu przypadkach!). Trzeba więc zminimalizować  $p$ ; gdy  $d \geq a/\sqrt{2}$ , należy ustawić proste pod takim kątem, by  $p = 0$  (trójkątki redukują się wtedy do punktów, mały kwadrat jest wpisany w duży); gdy  $d < a/\sqrt{2}$ , minimalne  $p$  uzyskuje się ustawiając proste równoległe do przekątnych dużego kwadratu. To samo rozwiązanie, ale tylko dla  $d \geq a/\sqrt{2}$ , podał też P. Kamiński.

**Zadanie 77** [Na ile co najwyżej części 20 okręgów może podzielić sferę?] (WT = 3,06). Dość dużo rozwiązań dobrych (lub prawie). M. Jagielka podaje (bez dowodu) wzór na maksymalną liczbę „elementów”  $k$ -wymiarowych powstałych w wyniku podziału sfery  $p$ -wymiarowej przez  $n$  sfer  $(p-1)$ -wymiarowych.

**Zadanie 80** [Czy istnieje parkietaż płaszczyzny z przystających  $n$ -kątnych wypukłych,  $n = 5,7,8$ ?] (WT = 3,54). Istnieje tylko dla  $n \leq 6$ . Pokazali to bezblednie (lub odesłali do literatury) J. Janowicz, P. Kamiński, T. Komorowski, J. Uryga, a z usterkami W. Krzyżański, S. Solecki, M. Gałecki.



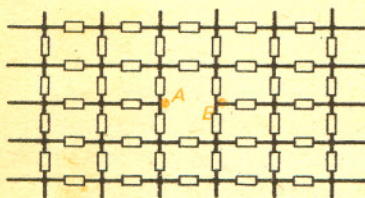
Rys. 2

**Zadanie 83** [Równoległobok  $ABCD$  ma pole  $S$ , obliczyć pole ośmiokąta  $KLMNPQRS$  (rys. 2)] (WT = 1,80). Dużo dobrych rozwiązań, najczęściej przez pracowite rozpatrywanie licznych proporcji (jak i w naszym rozwiązaniu). Znacznie zgrabniej robią to P. Kamiński i A. Wyrwa (a dość podobnie J. Mikuta i G. Pacyna):  $\overline{EM}$  i  $\overline{FK}$  to środkowe w trójkącie  $OEF$ , więc pole czworokąta  $OKLM$  równa się  $1/3$  pola  $OEF$ , czyli  $1/24$  pola  $ABCD$ ; podobnie z czworokątami  $OMNP$ ,  $OPQR$ ,  $ORSK$ .

Za rok — kolejne omówienie i obszerna czołówka ligi.

## Zadania z fizyki nr 1, 2

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



1. Znaleźć opór między punktami  $A$  i  $B$  nieskończonej płaskiej sieci o kwadratowych oczkach — jak na rysunku, złożonej z jednakowych oporników  $r = 100 \Omega$ , która została przerwana między tymi punktami.

2. Wyjaśnić mechanizm powstawania dźwięku podczas wirowania trzymanej za jeden koniec plastikowej, karbowanej rury (popularna zabawka — „grająca rura”). Jak to się dzieje, że w zależności od prędkości wirowania uzyskiwane są tony o różnej wysokości?

## Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą Klub 44.

2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań Redakcji *Delta*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru  $n$  należy nadsyłać do końca miesiąca  $n+2$  (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1985 upływa 31 stycznia 1986). W numerze  $n+4$  podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie:

Klub 44 M lub Klub 44 F.

8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustalaną według następującej zasady: jeżeli  $N$  oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a  $S$  oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności  $WT = 4 - 3S/N$ . Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem Klubu 44.

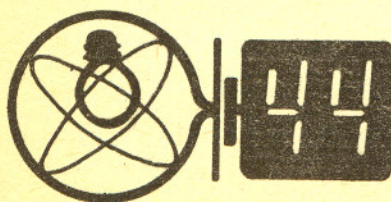
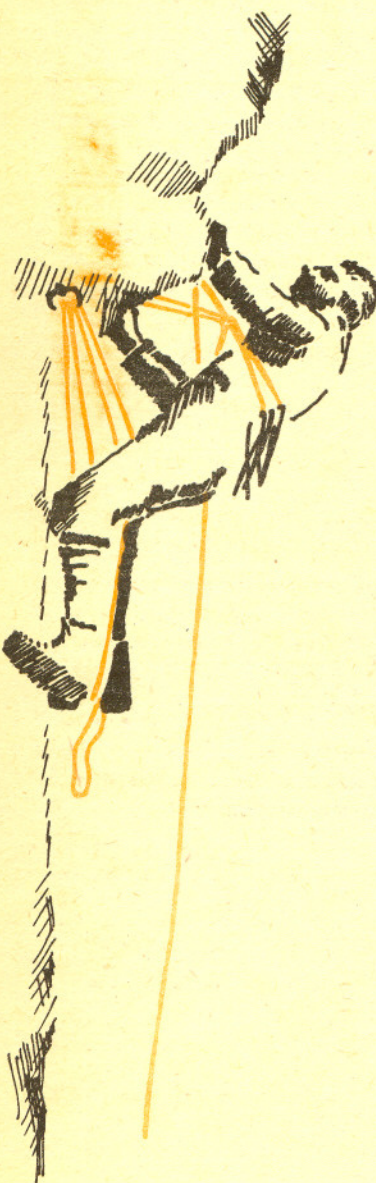
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.

14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.

15. Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.

16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian Regulaminu.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

103. Wielokąt foremny  $W$  o nieparzystej liczbie boków jest wpisany w okrąg, a punkt  $P$  jest dowolnym punktem tego okręgu. Dowiść, że można podzielić zbiór wierzchołków wielokąta  $W$  na dwa rozłączne podzbiory  $A$  i  $B$  tak, by suma odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $A$  była równa sumie odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $B$ .

104. Wyznaczyć część całkowitą liczby

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Zadanie 104 przysłał pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z numeru 9/1984

Przypominamy treść zadań:

91. Łącząc odcinkami środki kolejnych boków danej łamanej zamkniętej otrzymujemy nową łamaną zamkniętą. Powtarzając tę operację dostajemy ciąg łamanych zamkniętych. Dowiść, że ciąg ich długości dąży do zera.

92. Czy trzema kwadratami o boku 5 można pokryć kwadrat o boku  $2\pi$ ?

93. Każdą liczbę  $x = m/n \in (0,1)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , można przedstawić jako sumę odwrotności co najwyżej  $n-1$  różnych liczb naturalnych.

91. Oznaczmy daną łamaną przez  $L_0$ , zaś łamaną otrzymaną w  $n$ -tym kroku przez  $L_n$ . Wybierzmy dowolnie pewien punkt płaszczyzny  $O$  i oznaczmy przez  $c_n$  sumę kwadratów odległości wierzchołków  $L_n$  od  $O$ , a przez  $d_n$  sumę kwadratów długości boków  $L_n$ . Ustalmy  $n$ . Niech  $P_1, \dots, P_m$  będą kolejnymi wierzchołkami  $L_n$  i niech  $Q_i$  będzie środkiem odcinka  $P_i P_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $P_{m+1} = P_1$ . Punkty  $Q_1, \dots, Q_m$  są kolejnymi wierzchołkami  $L_{n+1}$ . Zachodzą następujące równości (kropki oznaczają iloczyn skalarny wektorów):

$$P_i P_{i+1}^2 = P_i P_{i+1} \cdot P_i P_{i+1} = (OP_{i+1} - OP_i) \cdot (OP_{i+1} - OP_i) = OP_{i+1}^2 + OP_i^2 - 2OP_i \cdot OP_{i+1},$$

$$OQ_i^2 = OQ_i \cdot OQ_i = \frac{1}{2}(OP_i + OP_{i+1}) \cdot \frac{1}{2}(OP_i + OP_{i+1}) = \frac{1}{4}(OP_i^2 + OP_{i+1}^2 + 2OP_i \cdot OP_{i+1}),$$

skąd  $P_i P_{i+1}^2 + 4OQ_i^2 = 2OP_i^2 + 2OP_{i+1}^2$ .

Sumując po  $i = 1, \dots, m$  dostajemy  $d_n + 4c_{n+1} = 2c_n + 2c_n$ . Zatem  $c_{n+1} = c_n - d_n/4$ , ciąg  $(c_n)$  jest malejący, więc zbieżny. Stąd  $\lim d_n = \lim(4c_{n+1} - 4c_n) = 0$ , co jest równoważne tezie zadania.

92. Można. Rysunek przedstawia metodę pokrycia większego kwadratu trzema mniejszymi. Niech bok większego kwadratu ma długość  $x$ , a mniejszego 5, jak w zadaniu. Z podobieństwa uwidocznionych na rysunku trójkątów prostokątnych oraz z twierdzenia Pitagorasa, zastosowanego do jednego z nich, wynika układ równań  $(5-z)/5 = (x-5)/x$ ,  $5^2 + z^2 = x^2$ , mający w liczbach dodatnich  $x$  rozwiązanie  $x = 5\sqrt{(1+\sqrt{5})/2} = 6,36 \dots > 2\pi$ .

93. Określamy indukcyjnie dwa ciągi,  $(k_i)$  oraz  $(x_i)$ , przyjmując  $k_1 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $k_i = [i!(x - x_{i-1})]$ ,  $x_i = x_{i-1} + k_i/i!$  dla  $i \geq 2$ ; nawiasy kwadratowe oznaczają bieranie części całkowitej. Tak więc  $k_i \leq i!(x - x_{i-1}) < k_i + 1$ , skąd po prostym przekształceniu i uwzględnieniu określenia  $x$  dostajemy

$$(1) \quad 0 \leq i!(x - x_i) < 1.$$

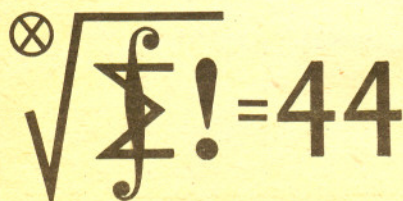
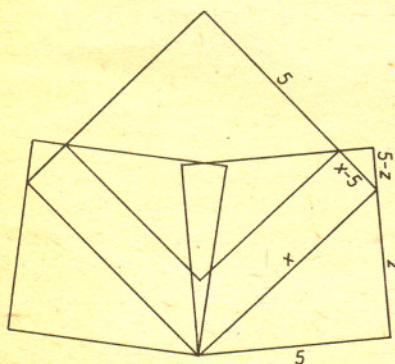
Mnożąc (1) przez  $i+1$  otrzymujemy nierówność podwójną, której środkowy człon ma część całkowitą równą  $k_{i+1}$ . Stąd  $0 \leq k_{i+1} < i+1$  dla  $i \geq 2$ , czyli  $0 \leq k_i < i$  dla  $i \geq 2$  (dla  $i = 2$  banalne sprawdzenie). Z indukcyjnej definicji ciągu  $(x_i)$  wynika, że

$$(2) \quad x_n = \frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \dots + \frac{k_n}{n!}.$$

Zatem dla  $i = n$  środkowy człon nierówności (1) jest liczbą całkowitą, a wobec tego  $x = x_n$  i wzór (2) przedstawia liczbę  $x$  jako sumę  $n-1$  składników, z których pewne mogą być zerami. Z oszacowania  $k_i < i$  wynika, że niezerowe składniki są odwrotnościami liczb naturalnych, i to różnych, bowiem jeśli  $i < j$ ,  $k_i > 0$ ,  $k_j > 0$ , to

$$\frac{k_j}{j!} < \frac{j}{j!} = \frac{1}{(j-1)!} \leq \frac{1}{i!} \leq \frac{k_i}{i!}.$$

Uwaga. Począwszy od  $i = n$  ciąg  $(x_i)$  jest już oczywiście stały. Gdy natomiast  $x \in (0, 1)$  jest liczbą niewymierną, opisana procedura daje przedstawienie  $x$  w postaci sumy szeregu nieskończonego  $\sum k_i/i!$ , o sumach częściowych postaci (2). Nierówność (1) daje oszacowanie szybkości zbieżności tego szeregu, a także pozwala udowodnić jednoznaczność doboru liczników  $k_i$ .

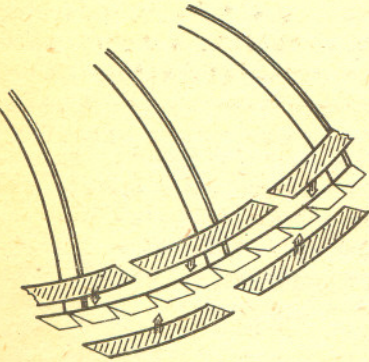




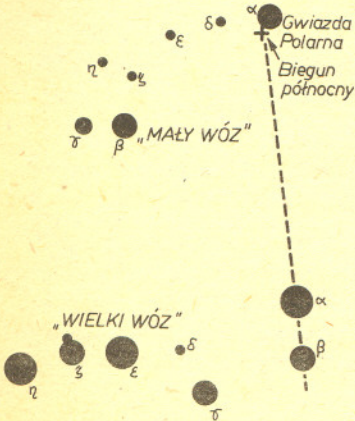
Zamierzamy w tym roku podarować Czytelnikom mapę nieba w odcinkach. Przypuszczamy, że znajomość gwiazdzistego nieba nie jest powszechna i dlatego mamy nadzieję, że mapa zostanie chętnie przyjęta przez Czytelników *Delfy*.

Mapa będzie składała się z 12 sektorów i jednego koła obejmującego gwiazdy okołobiegunowe. Z tych 13 części można będzie po roku skleić fragment czaszy niemal kulistej, która trzymana w odpowiedni sposób nad głową będzie swego rodzaju odwzorowaniem gwiazdzistego nieba. Montaż czaszy dobrze jest przeprowadzić w następującej kolejności. Najpierw skleamy 12 sektorów, a dopiero na końcu wklejamy kołowy fragment mapy. Sektory skleamy za pomocą ząbków wzdłuż dłuższych krawędzi, aby ząbki sterczały na zewnątrz czaszy (obraz nieba ma się znajdować; rzecz jasna, po jej wewnętrznej stronie). Na sklejone już ząbki naklejamy z obu stron wycięte z kartonu łuki (rys. 1), które wzmacniają złącze i zarazem nadają czaszy niezbędną sztywność. Inne łuki naklejamy od góry i od dołu na ząbki na obrzeżu czaszy. Dolne i górne łuki powinny być przesunięte względem siebie (jak na rys. 2). Kontury łuków w skali 1:1 przedstawione są na rysunku pod tekstem. Potrzebne będą po 24 łuki każdego rodzaju. Na końcu w miejscu wklejenia kołowego fragmentu naklejamy usztywniający kartonowy krążek. Gotową mapę można teraz osadzić na równo obciążonym kijku otrzymując coś w rodzaju parasola. Cały parasol jest odwzorowaniem części sfery niebieskiej od bieguna północnego do deklinacji  $-30^\circ$  (a więc o rozwarości  $240^\circ$ ) na wycinek sfery o rozwarości  $96^\circ$ . Zatem wzdłuż południków skala została ściśnięta ok. 2,5 raza, czyli wszystkie gwiazdy oglądane ze środka czaszy znajdują się 2,5 raza bliżej bieguna niż w rzeczywistości. Granica mapy, czyli deklinacja  $-30^\circ$ , została wybrana dlatego, że gwiazdy o tej deklinacji widoczne są w Polsce kilka stopni ponad południowym horyzontem. Północny biegun nieba znajduje się na wysokości równej szerokości geograficznej miejsca obserwacji (czy potraficie wykazać, dlaczego?), dokładnie nad tzw. punktem północy, tj. punktem horyzontu wskazywanym w przybliżeniu przez strzałkę kompasu. Biegun północny można też znaleźć „po gwiazdach”. Każdy pewnie umie znaleźć w północnej części nieba (jesienią nisko nad horyzontem, wiosną — wysoko nad głowami) tzw. Wielki Wóz — charakterystyczny układ siedmiu jasnych gwiazd należących do gwiazdozbioru Wielkiej Niedźwiedzicy. Prosta przechodząca przez dwie z tych gwiazd trafia w przybliżeniu w Gwiazdę Polarną leżącą blisko północnego bieguna nieba (rys. 3).

Rys. 1



Rys. 2

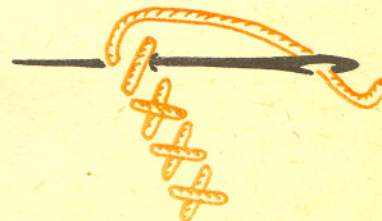


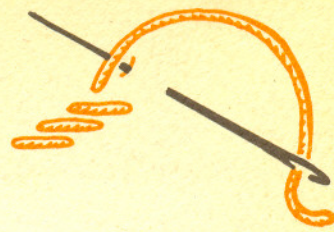
Rys. 3

Mapa trzymana nad głową z osią (kijkiem) skierowaną ku północnemu biegunowi nieba pokaże najlepiej obraz nieba, jeżeli obrócimy ją tak, by nazwa miesiąca na obrzeżu czaszy zajęła najwyższe położenie (a tym samym wskazywała kierunek południowy). Będzie to odpowiadać wyglądowi nieba o godz. 21 czasu środkowoeuropejskiego (czyli tzw. zimowego) lub 20 czasu letniego. Ponieważ latem o tej porze jest jeszcze widno, położenie parasola należy dostosować do innej godziny pamiętając, że niebo obraca się w kierunku zachodnim w tempie 1 sektor na 2 godziny.

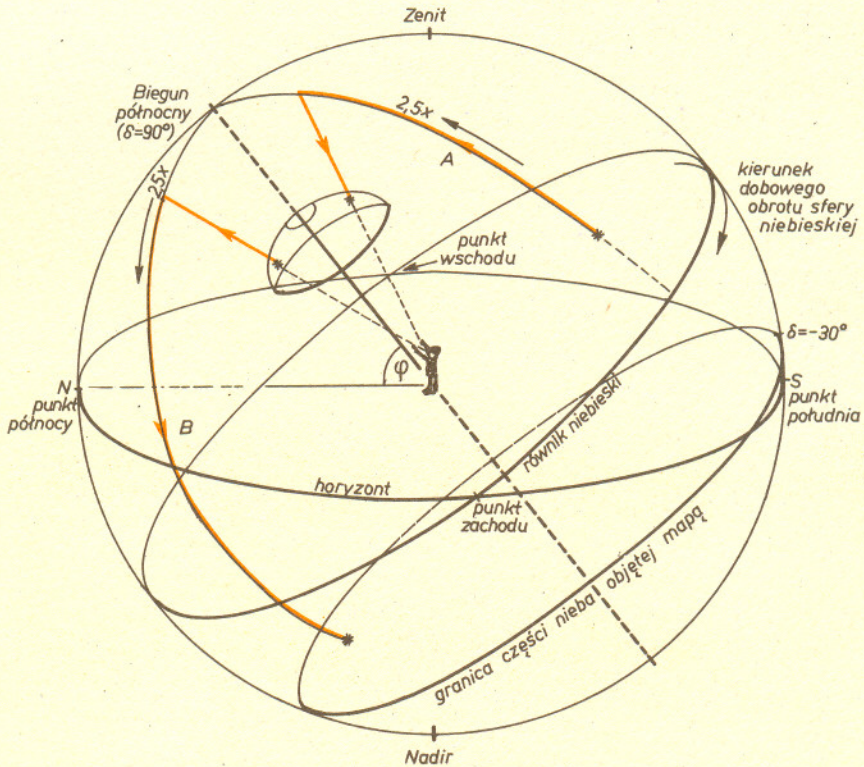
Nasza mapa obejmuje 3/4 całego nieba i zawiera ok. 2100 gwiazd jaśniejszych od 5,5 wielkości gwiazdowej. Można je wszystkie zobaczyć gołym okiem, oczywiście w sprzyjających warunkach (odpowiednia pora roku, godzina, dobra pogoda, czyste powietrze, brak Księżyca). Rozmiary żółtych kropek odpowiadają jasnością gwiazd zgodnie ze schematem zamieszczonym obok. Niebieska linia oznacza ekliptykę, tj. tor Słońca w jego ruchu rocznym. Na ekliptyce zaznaczone są znaki zodiaku. Białe linie to tory pięciu planet widocznych gołym okiem. Symbole planet wyjaśnione są również obok. I wreszcie linia czerwona przedstawia tor „obiekta stulecia” — komety Halleya, która w lutym 1986 r. osiągnie największe zbliżenie do Słońca po 76 latach wędrówki po peryferiach Układu Słonecznego. Tor ten obejmuje okres około 8 lat, od momentu pierwszego dostrzeżenia powracającej komety (1982), poprzez okres najlepszej widzialności (linia pogrubiona) aż do 1990 r., kiedy prawdopodobnie przestanie znowu być widoczna nawet przez duże teleskopy.

Chcielibyśmy, żebyście dzięki naszemu parasolowi zaprzyjaźnili się z niebem i częściej na nie spoglądali. Życzymy wielu pogodnych nocy.





○	gwiazdy jaśniejsze niż 1 <sup>m</sup>		
○	1 <sup>m</sup> -2 <sup>m</sup>		
○	2 <sup>m</sup> -3 <sup>m</sup>		
○	3 <sup>m</sup> -4 <sup>m</sup>		
○	4 <sup>m</sup> -5.5 <sup>m</sup>		
☿	Merkury		
+○	Wenus		
♂	Mars		
♃	Jowisz		
♄	Saturn		
α	gwiazdy połączone w charakterystyczne gwiazdozbiory	■	Droga Mleczna
---	granice gwiazdozbiorów	◉	gwiazdy wyraźnie zmienne
♁	Wielka Mgławica Andromedy		



Odszukiwanie obserwowanej gwiazdy na mapie (A) i znajdowanie na niebie gwiazdy zadanej na mapie (B) - w przypadku B gwiazda okazała się być pod horyzontem