

# SPIS TREŚCI

## NUMERU 11 (131)

Historia teleskopu <i>mgr Jadwiga Biała</i>	str. 1
Bardzo trudne zadanie	str. 1
Zadania	str. 4
O ankiecie	str. 5
Mitologia i twierdzenie izoperymetryczne <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Jak wyglądają szybko poruszające się ciała <i>Artur Konrad Ekert</i>	str. 10
Klub 44	str. 13
Patrz w niebo	str. 14
Trzeci problem Hilberta	str. 16

### W następnym numerze: Algorytmy

Przypominamy:  
na okładkach "Delt" od stycznia do grudnia 1985 roku duża MAPA NIEBA zawierająca ponad 2000 gwiazd, tory planet, tor komety Halley'a od 1982 do 1990 roku!

W księgarniach ukazały się pierwsze dwie książki z serii "DELTA PRZEDSTAWIA" wydawanej przez Wydawnictwa "ALFA" są to

Andrzej Szymacha: "Szczególna teoria względności",  
Maciej Bryński: "Elementy teorii Galois".

Warto ponieść zarówno trud zdobycia tych książek, jak i trud przyswojenia sobie tych ważnych dyscyplin współczesnej nauki.

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempala  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
doc. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 6689/12/84. T-70

#### WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
    - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
    - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

#### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—



# Historia teleskopu

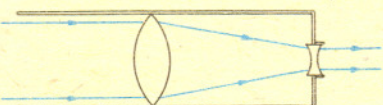
Mgr Jadwiga BIAŁA

Wynalazek teleskopu nazwać możemy wynalazkiem spóźnionym, bowiem już w starożytności znane były metody produkcji szkła, podstawowe prawa optyki oraz własności prostych układów optycznych, a więc wszystkie niezbędne wiadomości, umożliwiające skonstruowanie teleskopu. Przeglądając dzieła Arystotelesa, Euklidesa i Ptolemeusza poświęcone optyce i naturze światła przekonujemy się, że znali oni własności zwierciadeł, prostoliniowe rozchodzenie się światła oraz zjawisko załamania światła na granicy dwóch ośrodków.

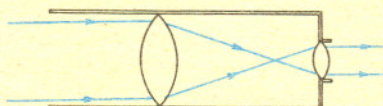
W średniowieczu badania układów optycznych, złożonych z soczewek lub zwierciadeł, kontynuowali uczeni franciszkańscy: Robert Grossetest i jego uczeń Roger Bacon. Jednak nie zajmowali się oni praktycznymi zastosowaniami tych układów. W XII wieku nastąpiło odrodzenie i udoskonalenie wyrobu szkła, co w pośredni sposób przyczyniło się do wynalezienia okularów. Wynalazku tego dokonali włoscy dominikanie z Pizy: Aleksander della Spina i Salvina degl'Armati w ostatnim dziesięcioleciu XIII wieku. Wydawać się może, że od okularów do teleskopu jest już tylko jeden krok, tymczasem upłynąć musiały aż trzy wieki, nim go skonstruowano.

Trudno ustalić, kto pierwszy zbudował teleskop. Wymienia się Włocha Gianbaptistę della Portę, który w 1580 roku w dziele „Magia Naturalis” opisał sposób oglądania odległych przedmiotów za pomocą układu dwóch soczewek: zbierającej i rozpraszającej. Następnie optyków holenderskich: Zachariasza Janssena, Hansa Lippersheya oraz Jakuba Metiusa, konstruujących około roku 1608 lunety służące do oglądania odległych przedmiotów i krajobrazów — najczęściej wybrzeży w czasie żeglugi czy ruchów wojsk nieprzyjacielskich w czasie wojny.

Powszechnie za twórcę teleskopu uchodzi jednak Galileusz, niezależnie od tego, że pierwszy teleskop skonstruował dopiero w roku 1609, wcześniej słyszał o teleskopach Holendrów, a być może znał również dzieło della Porty. Jego niewątpliwą zasługą było więc nie samo skonstruowanie teleskopu, lecz wykorzystanie go do obserwacji astronomicznych. Pierwszy teleskop Galileusza (rys. 1) składał się z dwuwypukłego obiektywu oraz dwuwklęsłego okularu i dawał trzykrotne powiększenie. Potem powstały kolejne teleskopy o większych powiększeniach. Jeden znajduje się w muzeum we Florencji — średnica obiektywu wynosi 53,5 mm, długość 1245 mm, a powiększenie 30 razy. Dzięki lunecie Galileusz zobaczył góry na Księżycu, odkrył cztery najjaśniejsze księżyce Jowisza i fazy Wenus, ujrzał ogromne ilości gwiazd składających się na Drogę Mleczną oraz plamy na Słońcu. Odkrycia Galileusza, opisywane przez niego w „Gwiezdnym zwiastunie”, wywarły ogromne wrażenie. Stał się on jednym z najbardziej znanych uczonych i otrzymał tytuł pierwszego matematyka księcia Toskanii wraz z dożywotnią pensją. Trzeba było geniuszu Galileusza oraz nowego spojrzenia na rolę doświadczenia i obserwacji w nauce, aby wykorzystać teleskop w astronomii. I trzeba było wybitnej intuicji, aby skierować teleskop w niebo, na którym nie spodziewano się znaleźć niczego, co nie byłoby widoczne nieuzbrojonym okiem.



Rys. 1. Teleskop Galileusza.



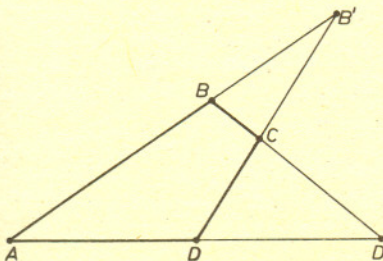
Rys. 2. Teleskop Keplera.

Inny typ lunety opisał w 1611 roku Johann Kepler. Składa się ona z dwóch dwuwypukłych soczewek (rys. 2). Ten typ teleskopu około roku 1640 prawie całkowicie wyparł z użycia teleskop Galileusza.

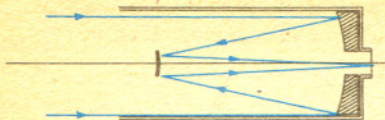
## Bardzo trudne zadanie

Dany jest czworokąt  $ABCD$ , w którym  $AB + BC = AD + DC$ . Proste, na których leżą jego przeciwległe boki, przecinają się odpowiednio w punktach  $B'$  i  $D'$ . Wykazać, że  $AB' + B'C = AD' + D'C$ .

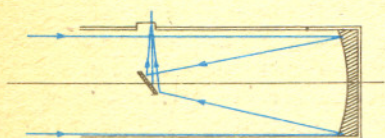
Jak widać, treść zadania jest bardzo prosta. Rozwiązanie jednak może nastreczyć wiele trudności. Proszę spróbować. Gdyby trudności okazały się zbyt wielkie, na stronie 3 można znaleźć wskazówkę. W przeciwnym razie — nowe zadanie na stronie 14.







Rys. 3. Teleskop Cassegraina.



Rys. 4. Teleskop Newtona.



Rozwiązanie zadania M 380. Zauważmy, że

- (1)  $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$  (dodawanie „pisemne”),
- (2)  $S(a_1 + \dots + a_n) \leq S(a_1) + \dots + S(a_n)$  (indukcyjnie z (1)) i
- (3)  $S(k \cdot a) \leq k \cdot S(a)$  ((2), zastosowane dla  $a_1 = \dots = a_n$ ),
- (4)  $S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$  (mnożenie „pisemne”, (3) i (2)).

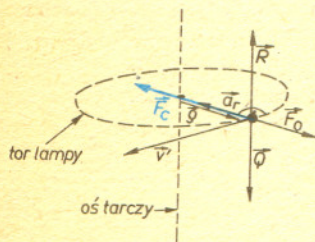
Mamy teraz:

$$S(n) = S(1000 \cdot n) = S(125 \cdot 8n) \leq S(125) \cdot S(8n) = 8 \cdot S(8n),$$

$$\text{czyli } S(8n) \geq \frac{1}{8} S(n).$$



Rozwiązanie zadania F 161. Przedstawiony paradoks pokazuje, że siła odśrodkowa nie może być jedyną siłą bezwładności.



Pozorne siły bezwładności wprowadza się tak, aby II zasada dynamiki Newtona mogła obowiązywać także w układach nieinercjalnych. Lampa, gdy obserwujemy ją z wirującej tarczy, porusza się po okręgu o promieniu  $\rho$  z prędkością kątową  $\omega$ , czyli ma przyspieszenie  $a_r = -\omega^2 \rho$ .

Aby utrzymać w mocy wzór Newtona  $F = ma$ , trzeba oprócz siły odśrodkowej  $F_0 = m\omega^2 \rho$  wprowadzić dodatkową siłę bezwładności  $F_c$  taką, że

$$F_0 + F_c = -m\omega^2 \rho,$$

stąd

$$F_c = -2m\omega^2 \rho.$$

Jeśli przez  $v'$  oznaczymy prędkość lampy względem wirującego układu odniesienia, to

$$v' = \omega \rho$$

i wartość wprowadzonej siły bezwładności

$$F_c = 2mv'v'.$$

Stosunkowo szybko teleskop dotarł do Polski. W 1613 roku jezuita belgijski Karol Malapert przywiózł teleskop do kolegium w Kaliszu i przez wiele lat obserwował przez niego plamy na Słońcu. Instrumenty konstruował w Kaliszu Polak Aleksy Sylvius. Między innymi zastosował on swobodne zawieszenie z przeciwwagą, co umożliwiło konstruowanie lunet o długich tubusach. W takich długich instrumentach mniejsza była aberracja sferyczna i chromatyczna, które są odwrotnie proporcjonalne do długości ogniskowej podzielonej przez średnicę obiektywu. Przykładem takiej ogromnej lunety był 45-metrowy instrument Jana Heweliusza, który umożliwił wykonanie bardzo dokładnych obserwacji Księżyca zebranych w dziele „Selenografia” (1647).

Teleskopy soczewkowe, zwane refraktorami, miały wady optyczne — aberrację sferyczną i chromatyczną oraz wady technologiczne — złą jakość i niejednorodności szkła oraz niedokładności w szlifowaniu powierzchni soczewek. Znacznie łatwiejsze było wykonywanie zwierciadeł i z czasem teleskopy zwierciadlane — reflektory zaczęły odgrywać decydującą rolę w astronomii. Pierwszy reflektor wykonał w roku 1619 jezuita Zucchius — niestety, nie zachowały się dokładniejsze informacje o tym teleskopie.

W 1663 roku szkocki astronom James Gregory przedstawił projekt teleskopu, w którym główne zwierciadło paraboloidalne kierowało promienie świetlne do zwierciadła elipsoidalnego, a to z kolei do okularu umieszczonego za centralnym otworem w zwierciadle głównym. Pierwszy teleskop według tego projektu wykonał fizyk angielski Robert Hooke. Podobny typ teleskopu przedstawił w 1672 roku we Francji Guillaume Cassegrain. Różnica polegała na tym, że wtórne zwierciadło miało kształt hiperboloidalny (rys. 3). Ten typ teleskopu używany jest do tej pory.

Obecnie używany jest również, szczególnie w instrumentach amatorskich, typ reflektora zaprojektowanego przez Izaaka Newtona w roku 1668. W tym teleskopie na drodze promieni odbitych od głównego zwierciadła wklęsłego ustawione jest pod kątem 45 stopni płaskie zwierciadło odbijające promienie prostopadle do osi teleskopu w kierunku okularu, znajdującego się z boku tubusa (rys. 4). Newton dokonał za pomocą pryzmatu rozszczepienia światła białego na barwną wstęgę widma i wykazał, że promienie światła o różnej długości załamane są pod różnymi kątami. W ten sposób wyjaśnił zjawisko aberracji chromatycznej soczewek. Błędnie jednak sądził, że aberracji tej nie da się usunąć, a jego autorytet spowodował utrzymanie się tego błędnego poglądu przez kilkadziesiąt lat.

Jednym z pierwszych zadań, jakie starano się rozwiązać za pomocą teleskopów, było wyznaczenie dokładnych pozycji gwiazd i planet. W tym celu wprowadzono mikrometry z ruchomą nicią (astronom włoski Gascoigne w 1640 roku oraz astronomowie francuscy, inicjatorzy zbudowania w 1671 roku w Paryżu pierwszego obserwatorium państwowego w Europie: Jean Picard i Adrian Auzout). Następnie zaś skonstruowano specjalistyczne instrumenty służące do wyznaczania dokładnych pozycji gwiazd — instrument przejściowy (1689) oraz koło południkowe (1690). Konstruktorom tych instrumentów był astronom duński Olaf Römer, znany z pierwszego pomiaru prędkości światła na podstawie obserwacji zaćmień w układzie księżyców Jowisza.

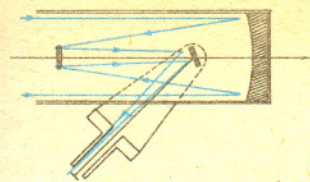
Poważny postęp w optyce teleskopowej nastąpił po wynalezieniu obiektywu wolnego od aberracji chromatycznej, złożonego z soczewek wykonanych z różnych gatunków szkła: flintu i kronu. Pierwszy obiektyw achromatyczny zbudował adwokat angielski Chester Moor Hall w roku 1729. Niestety, nie ogłosił on swego wynalazku i za konstruktora obiektywu achromatycznego uważa się powszechnie angielskiego optyka Johna Dollonda, który wykonał swój obiektyw w roku 1757.

Kolejne instrumenty astrometryczne — heliometr i koło wertykalne wprowadzono w XIX wieku. W 1826 roku Joseph von Fraunhofer, twórca spektroskopii i odkrywca linii w widmie Słońca, zbudował heliometr — lunetę o przepołowionym obiektywie soczewkowym. Instrument ten służył do precyzyjnego mierzenia odległości między gwiazdami. Za jego pomocą Friedrich Bessel wyznaczył w 1838 roku paralaksę gwiazdy 61 Cygni. Koło wertykalne skonstruował w 1839 roku Wasyl Struwe. W odróżnieniu od koła południkowego koło wertykalne ma pionową oś obrotu oraz pionowe koło z podziałką i służy jedynie do wyznaczania deklinacji gwiazd.

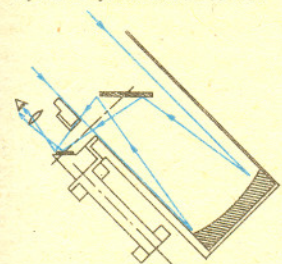
Do połowy XIX wieku zwierciadła do teleskopów wykonywane były ze stopów metali, najczęściej z brązu. Zaletą tych stopów było to, że można je było łatwo polerować. Niestety, zwierciadła metalowe miały poważne wady: ogromną wagę i wysoką cenę. Największy teleskop z metalowym zwierciadłem wykonał astronom irlandzki William Parsons (Lord Rosse) w roku 1845. Zwierciadło miało średnicę 182 cm, a ogniskową 17 m. Teleskop ten był największy na świecie aż do roku 1917, kiedy ustawiono teleskop ze zwierciadłem szklanym o średnicy 254 cm w Obserwatorium Mount Wilson w Stanach Zjednoczonych.

W 1856 roku fizyk francuski Jean Foucault (znany z eksperymentu z wahadłem, który potwierdził ruch wirowy Ziemi) zastosował metodę osadzenia cienkiej warstwy srebra na szkło, wynalezioną przez Justusa Liebiga, do wykonywania zwierciadeł szklanych powlekanych srebrem.

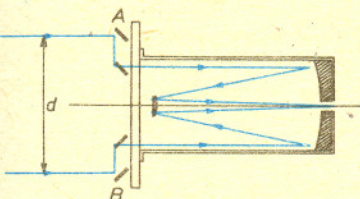




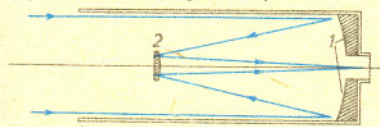
Rys. 5. Przykład układu coudé.



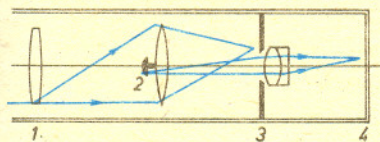
Rys. 6. Przykład układu coudé.



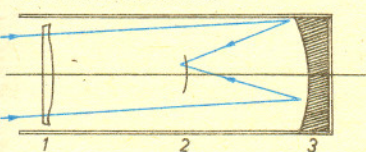
Rys. 7. Interferometr gwiazdowy.



Rys. 8. Teleskop Ritchey-Chrétiens  
1. hiperboloidalne zwierciadło główne,  
2. hiperboloidalne zwierciadło wtórne.



Rys. 9. Koronograf  
1. obiektyw,  
2. sztuczny księżyc,  
3. przesłona,  
4. płaszczyzna ogniskowa.



Rys. 10. Teleskop Schmidta  
1. płyta korekcyjna,  
2. „płaszczyzna” ogniskowa,  
3. sferoida.

Zwierzciadła posrebrzane znacznie lepiej odbijały światło niż zwierciadła metalowe. Miały jednak tę wadę, że warstwa srebra była nietrwała i posrebrzanie należało powtarzać nawet dwa razy w roku.

Istotnym postępowaniem w konstrukcji teleskopów było zbudowanie teleskopu o stałym położeniu ogniska. Od francuskiego słowa *coudé*, co znaczy zgięcie, nazwano ten typ konstrukcji układem *coudé*. Jako twórców układu wymienia się Francuza Ranyarda oraz Niemców: Forstera i Fritscha, którzy swoją konstrukcję przedstawili w 1876 roku. Układ *coudé* przypomina układ Cassegraina, z tym że światło odbite od zwierciadła wtórnego jest odprowadzone przez układ zwierciadeł płaskich do ogniska znajdującego się na osi biegunowej teleskopu. W ten sposób, niezależnie od ustawienia teleskopu, ognisko jest w stałym miejscu i jest nieruchome (rys. 5 i 6). Układ *coudé* stosowany jest w spektroskopii i fotometrii, gdzie ciężkie spektrografy, fotometry i inne urządzenia można zamontować na stałe nie obciążając tubusa teleskopu.

Znany amerykański fizyk, laureat nagrody Nobla, Albert Abraham Michelson, razem ze swym rodakiem Francisem Pease, wykonał w roku 1919 interferometr gwiazdowy (rys. 7), który zainstalowano na 2,5-metrowym teleskopie na Mount Wilson w Kalifornii. Interferometr ten zbudowano w celu wyznaczenia średnic największych i stosunkowo bliskich gwiazd.

W przyrządzie interferują promienie, odbite od dwóch zwierciadeł A i B, znajdujących się w odległości  $d$ . Odległość  $d$  zmienia się, aż do zaobserwowania maksimum interferencji w płaszczyźnie ogniskowej. Mierząc odległość  $d$  oraz odległość prążków interferencyjnych można wyliczyć średnicę gwiazdy. Pierwszymi gwiazdami, którym zmierzono średnicę, były: Betelgeuse z Oriona — średnica 0,045 sekundy łuku i Antares ze Skorpiona — 0,04 sekundy łuku.

W latach 1922—1924 amerykański astronom i konstruktor teleskopów Georg Ritchey oraz francuski matematyk i astronom Andre Chrétien opracowali nowe rozwiązanie teleskopu o dużym powiększeniu i dużym polu użytecznym, nie obciążonym aberracjami. Układ Ritchey-Chrétiens jest modyfikacją układu Cassegraina (rys. 8). Zwierciadła główne i wtórne są hiperboloidalne.

Koronograf, czyli teleskop do obserwacji protuberancji i korony słonecznej poza całkowitymi zaćmieniami Słońca, skonstruował w 1930 roku astronom francuski Bernard Lyot.

Koronograf jest teleskopem soczewkowym (rys. 9), wewnątrz którego umieszczona jest przesłona (sztuczny Księżyc) przmocowana do soczewki polowej oraz przesłona irysowa i obiektyw obrazowy. Sztuczny Księżyc przesłania tarczę Słońca, a przesłona irysowa i soczewka polowa usuwają rozproszenie światła słonecznego wewnątrz teleskopu.

W roku 1932 doszło do kolejnego ulepszenia technologii wykonywania zwierciadeł. Zamiast nietrwałego posrebrzania Strong wprowadził powlekanie powierzchni szklanej cienką warstwą aluminium przez rozpylanie aluminium w próżni. Powłoka aluminiowa nie ulega zniszczeniu przez około 5 lat.

Dużym osiągnięciem optyki teleskopowej było skonstruowanie w 1930 roku przez Bernharda Schmidta, optyka w obserwatorium w Hamburgu, teleskopu zwierciadlanego z płytą korekcyjną, charakteryzującego się dużą światłością oraz dużym polem widzenia (rys. 10). Teleskop ten wolny jest od wszystkich aberracji z wyjątkiem krzywizny pola. W teleskopie Schmidta zwierciadło jest sferyczne i w celu skompensowania aberracji wprowadza się płytę korekcyjną o bardzo skomplikowanym kształcie oraz średnicy mniejszej od średnicy zwierciadła. Ponieważ powierzchnia ogniskowa nie jest płaska, do fotografowania używa się klisz odpowiednio wygiętych.

Światłota jest stosunkiem średnicy obiektywu do efektywnej długości ogniskowej.

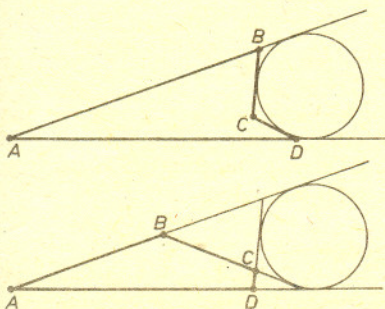


## Zupełnie inny, ale równoważny problem

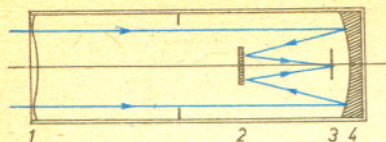
Mówimy, że okrąg jest dopisany do czworokąta, gdy jest styczny do wszystkich prostych zawierających boki czworokąta i nie jest wpisany w czworokąt. Na rysunku są dwa przykłady. Można udowodnić, że okrąg dopisany do czworokąta  $ABCD$  wewnątrz kąta  $BAD$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $AB + BC = AD + DC$ .

Gdyby się to udało udowodnić i nam, mielibyśmy rozwiązanie zadania ze strony 1, bo z założenia istniałby okrąg dopisany do czworokąta  $ABCD$ , który byłby również dopisany do czworokąta  $AB'CD'$ , a więc mielibyśmy  $AB' + B'C' = AD' + D'C'$ .

Gdyby się komuś to nie udało, może znaleźć na stronach 5, 7, 11 pewne informacje przydatne do przeprowadzonego na stronie 12 dowodu.

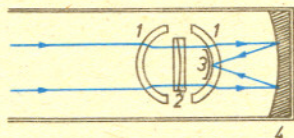






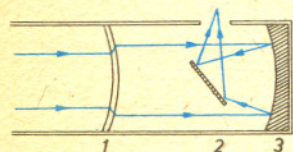
Rys. 11. Teleskop Bakera-Schmidta  
1. płyta korekcyjna,  
2. zwierciadło pomocnicze,  
3. płaszczyzna ogniskowa,  
4. zwierciadło główne.

Modyfikacje systemu Schmidta zmierzały do uzyskania płaskiej płaszczyzny ogniskowej, aby nie trzeba było deformować klisz fotograficznych. W teleskopie Jamesa Gilberta Bakera, skonstruowanym w 1940 roku, wyprostowanie płaszczyzny ogniskowej uzyskuje się przez wprowadzenie między płytę korekcyjną i zwierciadło główne dodatkowego zwierciadła wypukłego (rys. 11). Baker skonstruował też układ zwany Super-Schmidtem, służący do obserwacji meteorów i sztucznych satelitów, o polu widzenia ponad 50 stopni (rys. 12). Zwierciadło główne jest w tym układzie sferyczne, a układ kompensujący składa się z dwóch menisków i płyty korekcyjnej między nimi.

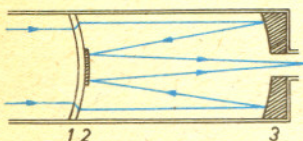


Rys. 12. Teleskop Super-Schmidt  
1. warstwy sferyczne — meniski,  
2. płyta korekcyjna,  
3. „płaszczyzna” ogniskowa,  
4. zwierciadło sferyczne.

Wprowadzenie układów meniskowych wiązało się z trudnościami w wykonywaniu płyt korekcyjnych o skomplikowanej powierzchni w układach Schmidta. Układy meniskowe były zaprojektowane i zbudowane w 1941 roku niezależnie przez astronoma radzieckiego Maksutowa, Holendra Bouwersa, Niemca Penninga i Anglika Gabora. Teleskopy meniskowe mają dwa razy mniejszą długość niż teleskopy Schmidta, o porównywalnych parametrach, a dodatkowo łatwiej jest wykonać menisk (płytę szklaną o obu powierzchniach sferycznych) niż płytę korekcyjną. Teleskopy meniskowe mogą być realizowane w różnych układach, np. Newtona, Cassegraina (rys. 13 i 14).



Rys. 13. Meniskowy teleskop Newtona  
1. zwierciadło główne,  
2. zwierciadło pomocnicze,  
3. płyta korekcyjna.



Rys. 14. Meniskowy teleskop Cassegraina  
1. zwierciadło główne,  
2. zwierciadło pomocnicze,  
3. płyta korekcyjna.

Kończąc tę, z konieczności krótką, historię teleskopu, warto przedstawić zestawienie kilku największych pracujących na świecie teleskopów:

Reflektory			Refraktory		
Średnica w cm	Obserwatorium	Kraj	Średnica w cm	Obserwatorium	Kraj
600	Zelenczuk	ZSRR	102	Yerkes	USA
508	Mount Palomar	USA	91	Lick	USA
460	Mount Hopkins	USA	83	Meudon	Francja
400	Cerro Tololo	Chile	80	Poczdam	NRD

W Polsce największy refraktor, o średnicy soczewkowego obiektywu 30 cm, znajduje się w Planetarium i Obserwatorium Astronomicznym w Chorzowie, największy zaś reflektor, o średnicy zwierciadła 90 cm, w Obserwatorium Astronomicznym Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Piwnicach pod Toruniem.



## Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 380. Oznaczmy przez  $S(n)$  sumę cyfr dziesiętnego zapisu liczby  $n$ . Wykazać, że

$$S(8n) \geq \frac{1}{8} S(n).$$

Rozwiązanie na str. 2

M 381. Punkty  $P$  i  $Q$  leżą na obwodzie wielokąta opisanego na okręgu o środku  $O$ . Prosta  $PQ$  dzieli zarówno pole, jak i obwód wielokąta na równe części. Wykazać, że punkt  $O$  leży na tej prostej.

Rozwiązanie na str. 15

M 382. Wykazać, że każdą liczbę całkowitą nieujemną można przedstawić w postaci  $n =$

$$= \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} \quad (x, y \text{ całkowite nieujemne}) \text{ oraz że liczby } x, y \text{ są określone jednoznacznie}$$

przez liczbę  $n$ .

Rozwiązanie na str. 15

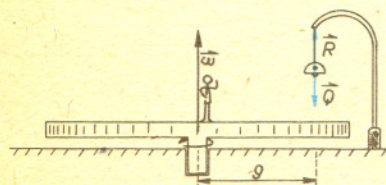
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 161. Nad wirującą ze stałą prędkością kątową tarczą wisi nieruchoma względem ziemi lampa (rys. 1). W układzie odniesienia związanym z ziemią siła ciężkości lampy równoważona jest przez siłę naciągu linki, na której wisi lampa. W nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z tarczą na lampę działa dodatkowo „siła” odśrodkowa. Dlaczego lampa nie odchyła się od pionu?

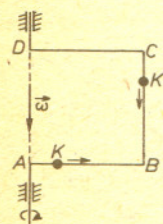
Rozwiązanie na str. 2

F 162. Druciana ramka (rys. 2) wiruje ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Wzdłuż boków  $AB$  i  $BC$  ślizgają się, ze stałymi prędkościami  $v'$  względem ramki, koraliki. Wyznaczyć siły reakcji działające na każdy z koralików ze strony ramki. Jakie siły bezwładności działają na koraliki w wirującym wraz z ramką układzie odniesienia?

Rozwiązanie na str. 14



Rys. 1



Rys. 2



W dzisiejszych czasach ankiety proponowane przez czasopisma w Polsce nie cieszą się popularnością. Tak było i z naszą ankietą opublikowaną w styczniowym numerze *Delty*. Otrzymałyśmy 166 odpowiedzi. Oczywiście, nie ma sposobu na stwierdzenie, w jakim stopniu jest to próbka reprezentatywna dla ogółu naszych Czytelników. Jedną z przesłanek świadcząca o reprezentatywności może być liczebność grupy Respondentów prenumerujących *Delte*. Stanowi ona bardzo podobną część jak wśród wszystkich Czytelników: około 16%. Zbiór osób, które zareagowały na naszą ankietę, rozбивa się dość wyraźnie na dwie grupy: młodzieży do lat 19 (w tym 63% chłopców) czytających *Delte* od stosunkowo niedawna (5 lat) i mężczyzn (stanowiących 96%) w grupie wiekowej ponad 19 lat, wśród nich wielu czytających *Delte* od pierwszego numeru.

Jedną z wielkości charakteryzujących pewne rozkłady jest mediana — parametr dzielący dany zbiór uporządkowany na dwa równoliczne podzbiory. Ciekawe wartości ma mediana dla dwóch płci: 14 lat (kobiety) i 18 lat (mężczyźni). 30% odpowiedzi pochodzi od uczniów szkół podstawowych, ponad 30% to uczniowie szkół średnich.

Pokrótce o pozostałych wynikach: z uzyskanych odpowiedzi wynika, że *Delta* reklamuje się sama, swoją dostępnością w kioskach i atrakcyjną okładką. Proporcje poszczególnych działów odpowiadają Czytelnikom, może z pewnym niedoborem astronomii. Matematyka w *Delcie* została uznana za zbyt trudną przez połowę Respondentów, fizyka — przez co czwartego. Taka sama część (1/6) Czytelników uznała astronomię w *Delcie* za zbyt łatwą, jak za zbyt trudną. Większość odpowiadających na ankietę preferuje różnorodne artykuły w *Delcie* oceniając jednocześnie stałe działy (zadania, Patrz w niebo) na czworke.

Chyba największą korzyścią z ankiety były odpowiedzi na pytania dotyczące zainteresowań Czytelników i oczekiwań w stosunku do *Delty*. Najbardziej podobały się naszym Respondentom takie artykuły, jak m.in. „Opowieść wigilijna”, „Czy Ziemia jest stara czy młoda”, „Ruchy Browna”, „Narodziny teorii kwantów”, „Atomy rydbergowskie”, „Inwersja, stożkowe i inni”. Otrzymałyśmy ponad 100 propozycji artykułów, kilkadziesiąt propozycji utworzenia nowych stałych działów, przede wszystkim poświęconych chemii, biologii, informatyce i historii nauki. Rozważamy te propozycje.

Odpowiedź na zadanie z artykułu „Trzeci problem Hilberta”.

Pokażemy przez indukcję, że  $\cos k\alpha = \frac{a_k}{\sqrt{3^k}}$ , gdzie  $a_k$  jest całkowitą liczbą niepodzielną przez 3. Istotnie, jest tak dla  $k = 1$  i  $k = 2$ . Skorzystamy ze wzoru

$$\cos(k+1)\alpha - \cos(k-1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos k\alpha$$

i z założenia indukcyjnego

$$\left( \cos k\alpha = \frac{a_k}{\sqrt{3^k}}, \cos(k-1)\alpha = \frac{a_{k-1}}{\sqrt{3^{k-1}}} \right).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \cos(k+1)\alpha &= \frac{a_{k-1}}{\sqrt{3^{k-1}}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a_k}{\sqrt{3^k}} = \\ &= \frac{3a_{k-1} + 2a_k}{\sqrt{3^{k+1}}}. \end{aligned}$$

$3a_{k-1} + 2a_k$  nie jest podzielne przez 3 (bo  $a_k$  nie było podzielne). Wystarczy teraz zauważyć,

że jeśli  $\alpha = \frac{1}{n}\pi$ , to  $2n\alpha = 2l\pi$ , więc  $\cos 2n\alpha = 1$ , czyli  $a_{2n} = 3^n$ .

Niestety, nie możemy w najbliższym czasie obiecać zwiększenia objętości lub częstotliwości ukazywania się *Delty*. Podobnie wnętrza *Delty* pewnie nie będą bardziej kolorowe, nie poprawi się też jakość papieru, mimo że redakcja *Delty* pragnęłaby tych zmian równie gorąco jak nasi Czytelnicy.

Wiele życzeń wyrażonych przez Uczestników ankiety pokrywa się z naszymi zamierzeniami. Dotyczy to przede wszystkim zwiększenia liczby zdjęć, ilości humoru. Wprowadziliśmy już stereoskopię, uprzyśtępniliśmy częściowo materiał reaktywując *Małą Delte* w postaci stałego działu w *Delcie*. Inne ciekawe propozycje rozważamy (dotyczy to m.in. wprowadzenia bibliografii, zwiększenia udziału dyscyplin pokrewnych itd.).

Spośród wszystkich Uczestników ankiety 142 osoby podpisały swoje wypowiedzi i wśród nich rozlosowaliśmy nagrody rzeczowe:

1. Elżbieta Chudy, Borowice 51, 58-564 Sosnowka,
2. Waldemar Przekop, ul. Kościuszki 36/27, 11-220 Górówo Haweckie,
3. Małgorzata Niemiec, Stary Wołów 59, 56-100 Wołów,
4. Andrzej Banachowicz, ul. Płk. Dąbka 63/III/110, 81-107 Gdynia,
5. Józef Ryszard Wieteska, ul. Pirenejska 18 m. 1, 01-493 Warszawa.

T. Ch.



## Potęga punktu względem okręgu

Jeśli ktoś wie co to takiego, niech zajrzy od razu na stronę 7. Dla tych co nie wiedzą — definicja. Potęgą punktu  $P$  względem okręgu  $o$  nazywamy iloczyn  $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ , gdzie  $AB$  jest dowolną cięciwą  $o$  taką, że prosta  $AB$  przechodzi przez  $P$ . Aby poprzednie zdanie mogło być definicją, trzeba wykazać, że wynik nie zależy od wyboru przechodzącej przez  $P$  siecznej. A nie zależy, bo trójkąty  $PAB'$  i  $PA'B$  mają wszystkie odpowiednie kąty równe, a więc są podobne i

$$\frac{AP}{B'P} = \frac{A'P}{BP}$$

W przypadku, gdy punkt  $P$  leży na zewnątrz okręgu, zamiast siecznej można wziąć także styczną (dlaczego?) i wówczas potęgę punktu  $P$  można obliczyć jako  $PC^2$ , czyli  $d^2 - r^2$ , gdzie  $r$  jest promieniem okręgu  $o$ , a  $d$  — odległością punktu  $P$  od jego środka. Wzór  $d^2 - r^2$  na potęgę punktu  $P$  pozostaje w mocy również dla punktów wewnątrz okręgu (dlaczego?).

Tym, którzy nie lubią wektorów, wyjaśniamy, że potęgę można obliczyć jako iloczyn długości  $AP \cdot BP$  wzięty ze znakiem  $+$ , gdy  $P$  leży na zewnątrz i ze znakiem  $-$ , gdy leży wewnątrz okręgu  $o$ .



... obu za słowo ująłem,  
Iż będą strzelali się przez niedźwiedzią skórę.  
Szlachta w krzyk: „To śmierć pewna! prawie  
rura w rurę”!

A ja w śmiech, bo mnie uczył mój przyjaciel  
Maro,

Że skóra zwierza nie jest ładajaką miarą.  
Wszak wiecie Waćpanowie, jak królowa Dydo  
Przeflynęła do Libów i tam z wielką błądą  
Wytargowała sobie taki ziemi kawał,  
Któryby się wołową skórą nakryć dawał;  
Na tym kawałku ziemi stanęła Kartago!  
Więc ja to sobie w nocy rozbięram z uwagą.  
„Ledwie dniało, już z jednej strony taradejką  
Jedzie Dowecko, z drugiej na koniu Domecko.  
Patrzaj, aż tu przez rzekę leży most kosmaty,  
Pas ze skóry niedźwiedziej, porzniętej na  
szmaty.

Postawiłem Doweckę na zwierza ogonie  
Z jednej strony, Domeckę zaś po drugiej  
stronie.

„Pukajcie teraz, rzekłem, choć przez całe  
życie,  
Lecz póty was nie spuszcze, aż się pogodzicie”.  
Oni w złość; a tu szlachta kładnie się na  
ziemi

Od śmiechu, ...  
Adam Mickiewicz, *Pan Tadeusz*,  
księga IV — *Dyplomatyka i towy*, ww. 974—  
—994

O konieczności uzasadnienia tego  
„oczywistego” faktu świadczy rozwiązanie  
zadania przypominającego zagadnienie  
izoperymetryczne:

Wśród wszystkich figur wypukłych  
o obwodzie mniejszym od  $L > 0$  znaleź  
figurę o najmniejszym polu.

Niech  $\varepsilon > 0$  będzie dowolnie małą liczbą  
rzeczywistą. Dla każdej figury wypukłej  
o obwodzie  $L_1 = L - \varepsilon$  można znaleźć  
figurę wypukłą podobną do wyjściowej

o obwodzie  $L_2 = L - \frac{\varepsilon}{2} > L_1$ , której pole  
jest większe od pola figury poprzedniej.  
Zatem tak postawione zagadnienie nie ma  
rozwiązania.

Termin *izoperymetryczny* jest pochodzenia  
greckiego — od słów *isos* (jednakowo)  
i *perimetro* (mierzę dookoła). Wprowadzony  
został przez greckiego filozofa Syneuzjusza.  
Współcześnie wyraz ten jest synonimem  
stwierdzenia „przy ustalonym obwodzie”.

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Przenieśmy się na chwilę w świat mitologii. Około roku 814 p.n.e. Dydona — córka królewska, ratując swoje życie ucieka z fenickiego miasta Tyru do Afryki (nie zapominając zabrać kosztowności). Tam na północnym brzegu Afryki od Jarba — króla Numidii — kupuje „tyle ziemi, ile można opasać skórą zdjętą z wołu”. Ku zdumieniu Jarba tnie skórę wołu na wąskie paski i opasuje nimi obszar ziemi w kształcie półkola przyległego do brzegu morskiego. W miejscu tym zakłada miasto Kartaginę. Tyle mitologia. Powstaje pytanie: czy Dydona wybierając takie rozwiązanie zagarnęła możliwie największy obszar? (Dla uproszczenia przyjmijmy brzeg morski za linię prostą).

Zasadniczym etapem naszych rozważań będzie rozwiązanie tzw. problemu izoperymetrycznego: która wśród wszystkich figur płaskich o danym obwodzie ma największe pole powierzchni? Proste jest stwierdzenie: figura będąca rozwiązaniem problemu izoperymetrycznego jest wypukła. Po tej uwadze problem izoperymetryczny formułujemy tak: wśród wszystkich figur wypukłych o danym obwodzie znaleźć tę, która ma największe pole powierzchni.

Odpowiedź — koło — znana była już w starożytnej Grecji (Archimedes i Zenodorus), a prawdopodobnie wcześniej w Babilonii. Jednak historia świadczy, że matematyk szwajcarski Jakub Bernoulli w roku 1697 jako pierwszy rozwiązał ten problem i to w ogólniejszym przypadku. W ponad sto lat później geometra szwajcarski Jakub Steiner podał aż pięć różnych rozwiązań. Podobnie jak jego wielki poprzednik popełnił on jednak pewną nieścisłość przyjmując za oczywisty fakt istnienie figury o największym polu powierzchni (w zbiorze figur o ustalonym obwodzie). Uzupełnienie dowodu we wskazanym kierunku podał w 1882 r. F. Edler.

Dowód tego, iż rozwiązaniem problemu izoperymetrycznego jest koło, rozbijemy na dwa etapy. Najpierw korzystając z twierdzeń o ciągach figur wypukłych (patrz np. I. M. Jagłom i W. G. Bołtiański „Figury wypukłe”) udowodnimy, że w zbiorze figur wypukłych o ustalonym obwodzie istnieje figura o największym polu. Następnie wiedząc już o istnieniu takiej figury pokażemy, że musi nią być koło.

Rozważmy rodzinę  $\mathcal{F}$  wszystkich figur wypukłych o obwodzie  $L$  zawartych w ustalonym kole o promieniu  $L$  (każdą figurę wypukłą o obwodzie  $L$  możemy tak przesunąć, by znalazła się w tym kole). Niech  $P$  będzie zbiorem liczb — pól powierzchni figur z rodziny  $\mathcal{F}$ .

$$P = \{p(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}\},$$

gdzie  $p(\Phi)$  oznacza pole figury  $\Phi$ . Zbiór  $P$  jest oczywiście ograniczony z góry (np. przez  $\pi L^2$ ). Oznaczmy przez  $M$  kres górny zbioru  $P$ . Mamy znaleźć figurę  $\Phi \in \mathcal{F}$  o polu równym  $M$ .

Wybermy figury  $\Phi_n \in \mathcal{F}$  o polach  $p(\Phi_n) \geq M - \frac{1}{n}$ .

Zachodzi

Twierdzenie. Z ciągu krzywych ograniczających figury wypukłe i zawartych w ustalonym kole można wybrać podciąg zbieżny. Granica jest punktem, odcinkiem lub ogranicza obszar wypukły. Długość krzywej granicznej jest granicą długości krzywych, a pole figury przez nią ograniczanej jest granicą pól odpowiednich figur.

Z naszego ciągu  $\Phi_n$  wybieramy podciąg zbieżny do pewnej figury  $\Phi_0$ . Obwód tej figury jest równy  $L$ , a pole  $M$ .

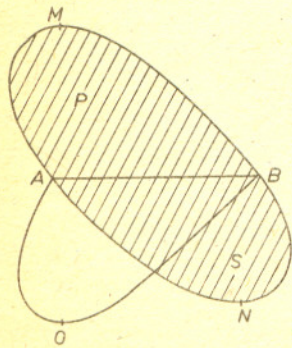
Tak więc każda (niekoniecznie wypukła) figura o obwodzie  $L$  ma pole nie większe od figury  $\Phi_0$ . Pokażemy teraz, że figura  $\Phi_0$  musi być kołem. Dowód rozbijemy na kilka lematów.

Lemat 1. Każda cięciwa połowiąca obwód figury  $\Phi_0$  połowi jej pole.

Załóżmy, że krzywa  $ANBMA$  ogranicza figurę  $\Phi_0$  i że cięciwa  $AB$  (rys. 1) dzieli tę krzywą na dwie części o jednakowej długości. Jeżeli powierzchnia  $P$  ograniczona krzywą  $AMBA$  jest większa od powierzchni  $S$  ograniczonej konturem  $ABNA$ , to wówczas zastępując krzywą  $ANB$  przez krzywą  $AOB$  symetryczną do krzywej  $AMB$  względem cięciwy  $AB$  otrzymujemy nową figurę  $AMBOA$  o obwodzie  $L$ , lecz o polu powierzchni większym od  $M$  (bo  $2P > P + S = M$ ), co jest sprzeczne z założeniem. Zatem musi być  $P = S$ .

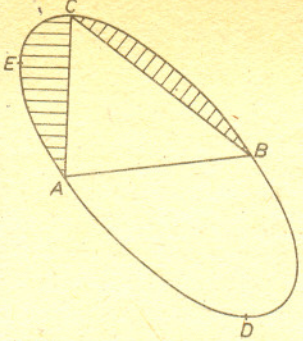
Lemat 2. Spośród wszystkich trójkątów o danych dwóch bokach największą powierzchnię ma trójkąt, w którym boki te są prostopadłe.

Lemat wynika ze wzoru na pole powierzchni trójkąta  $M(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ , gdzie  $0 < \gamma < \pi$  jest miarą łukową kąta zawartego między bokami  $a$  i  $b$ .

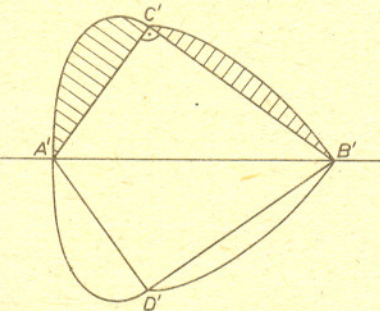


Rys. 1

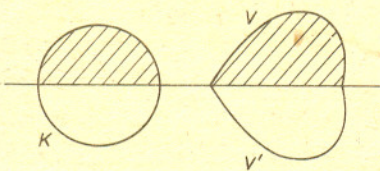




Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Lemat 3. Każda cięciwa połowiąca obwód figury  $\Phi_0$  jest widziana z każdego punktu leżącego na brzegu (różnego od końców cięciwy) pod kątem prostym.

Załóżmy, że  $AB$  jest cięciwą figury  $\Phi_0$  (ograniczonej krzywą  $AECBD$  — rys. 2), która połowi jej obwód i którą widać z punktu  $C$  (należącego do brzegu) pod kątem różnym od prostego. Zbudujmy taki trójkąt prostokątny  $A'B'C'$ , że  $AC = A'C'$  i  $BC = B'C'$ ,  $C'$  jest wierzchołkiem kąta prostego (rys. 3). Punkty  $A'$  i  $C'$  oraz  $B'$  i  $C'$  łączymy odpowiednio krzywymi przystającymi do krzywych  $AC$  i  $BC$ . Z lematu 2 pole powierzchni trójkąta  $A'B'C'$  jest większe od pola powierzchni trójkąta  $ABC$ , wobec czego pole powierzchni figury ograniczonej konturem  $A'B'C'A'$  jest większe od pola powierzchni ograniczonej konturem  $ABCEA$ . Jeżeli teraz do figury  $A'B'C'A'$  dodamy figurę symetryczną względem  $A'B'$ , to otrzymamy figurę  $A'C'B'D'A'$  o tym samym obwodzie co figura wyjściowa, ale o większej powierzchni, co jest sprzeczne z założeniem o  $\Phi_0$ .

Z lematu 3 wynika, że brzeg figury  $\Phi_0$  jest miejscem geometrycznym punktów, z których widać dany odcinek (cięciwą połowiącą obwód  $\Phi_0$ ) pod kątem prostym, a więc, że figura  $\Phi_0$  jest kołem o promieniu  $r = \frac{L}{2\pi}$ .

Rozwiązanie problemu izoperymetrycznego na płaszczyźnie daje nam odpowiedź na pytanie postawione we wstępie. Weźmy pod uwagę półkoło o łuku długości  $L$  i dowolną figurę  $V$  ograniczoną odcinkiem prostej i łukiem o długości  $L$  (rys. 4). Przekształćmy te figury przez symetrię względem prostoliniowych odcinków, które je ograniczają. Otrzymujemy wówczas koło  $K$  i figurę  $V'$ , której pole powierzchni jest dwa razy większe od pola powierzchni figury  $V$ . Figury  $K$  i  $V'$  są izoperymetryczne, a więc na podstawie wykazanego twierdzenia pole powierzchni figury  $V'$  jest mniejsze niż pole powierzchni koła  $K$ , a zatem i pole powierzchni figury  $V$  jest mniejsze od pola powierzchni półkoła.

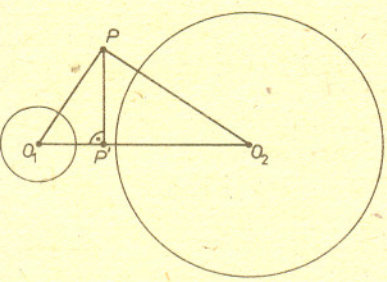
Na zakończenie uwaga. Problem izoperymetryczny można również postawić w przestrzeni trójwymiarowej: wśród wszystkich brył ograniczonych powierzchniami o ustalonym polu  $T$  znaleźć bryłę o największej objętości. Jego rozwiązanie — kula o promieniu  $R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi}}$  — podał w 1890 roku matematyk niemiecki Hermann Schwarz (1843—1921).



### Prosta potęgowa

Zbiór punktów mających taką samą potęgę względem dwóch okręgów tworzy prostą, którą nazywamy potęgową, lub jest pusty. Oto dowód:

Oznaczmy promienie okręgów przez  $r_1, r_2$  i odległość ich środków  $O_1$  i  $O_2$  przez  $p$ . Wykażemy, że rzut prostokątny  $P'$  dowolnego punktu  $P$  o jednakowych potęgach względem obu okręgów na  $O_1O_2$  nie zależy od wyboru punktu  $P$ . To wystarczy (prawda?). Oznaczmy jeszcze odległości  $P$  od  $O_1$  i  $O_2$  przez  $d_1$  i  $d_2$ .



Mamy więc

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

Obliczmy na dwa sposoby odległość  $PP'$ :

$$d_1^2 - (O_1P')^2 = (PP')^2 = d_2^2 - (O_2P')^2.$$

Mamy stąd

$$(O_2P')^2 - (O_1P')^2 = d_2^2 - d_1^2 = r_2^2 - r_1^2$$

i dalej

$$\begin{aligned} (p - (O_1P'))^2 - (O_1P')^2 &= r_2^2 - r_1^2, \\ p(p - 2(O_1P')) &= r_2^2 - r_1^2, \\ O_1P' &= \frac{1}{2} \left( p - \frac{r_2^2 - r_1^2}{p} \right). \end{aligned}$$

Zatem położenie punktu  $P'$  zależy tylko od  $r_1, r_2$  i  $p$ , a więc nie zależy od wyboru punktu  $P$ , co kończy dowód (bo zbiór pusty otrzymamy dla  $p^2 - r_2^2 + r_1^2 < 0$  — jak to wygląda na rysunku?).

Prosta potęgowa dzieli każdą wspólną styczną okręgów na połowy — Czytelnik może to łatwo sam sprawdzić (nam ta informacja nie jest dalej potrzebna).

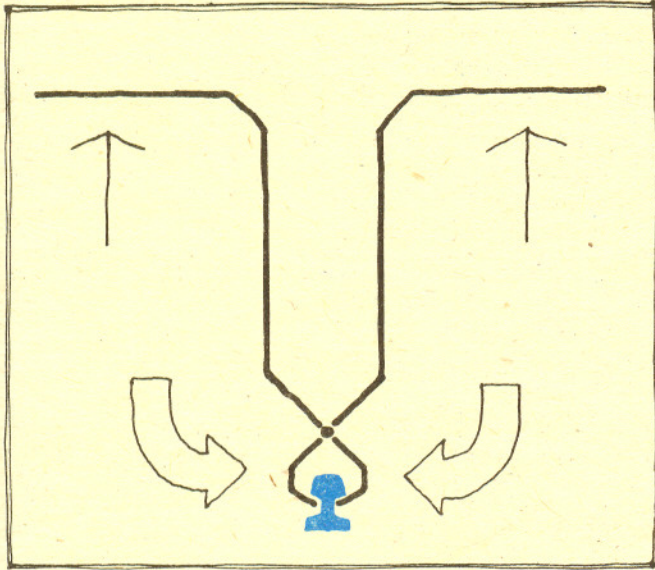






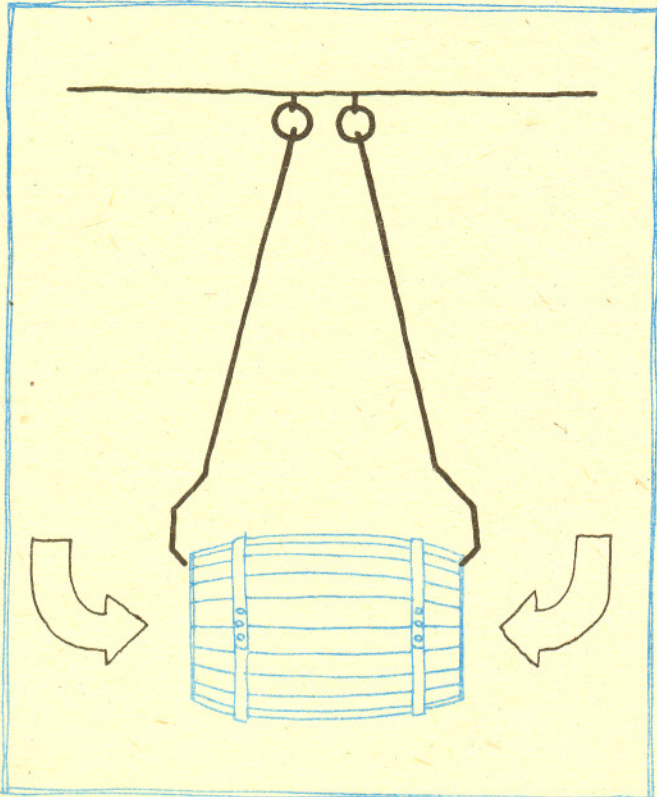
## Ciążenie przeciw ciężeniu

Gdy nie było jeszcze mechanizacji, szyny przenoszono za pomocą specjalnych obcęǳów. Konieczność użycia narzędzia brała się nie z chęci zmniejszenia potrzebnej do podniesienia siły, a z trudności w uchwyceniu szyn rękami.

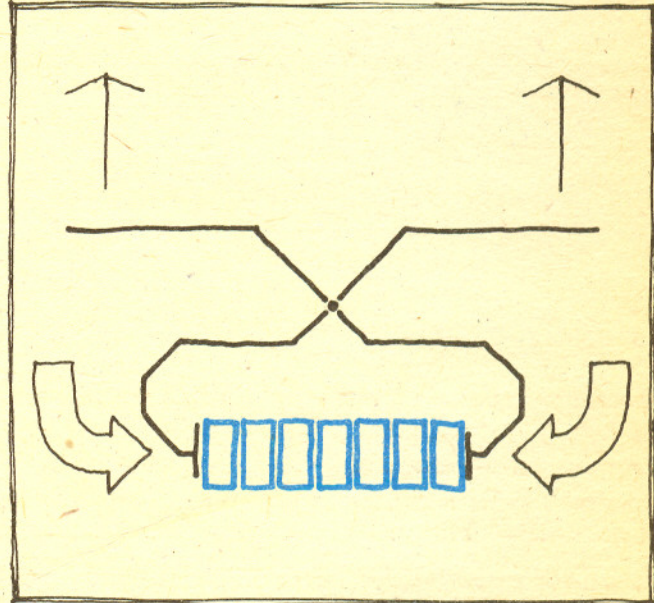


Zastosowane obcęǳi mają, jak łatwo zauważyć, tę własność, że im cięższa jest podnoszona szyna, tym mocniej się na niej zaciskają. Siła ciężkości wyrywająca szynę z obcęǳów pracuje przeciw sobie i uniemożliwia wyrwanie.

Pomysł nie był nowy. Już dawno podobny pomysł był wykorzystywany do wożenia beczek (np. z piwem) pod wozem za pomocą luźno zamocowanych haków.

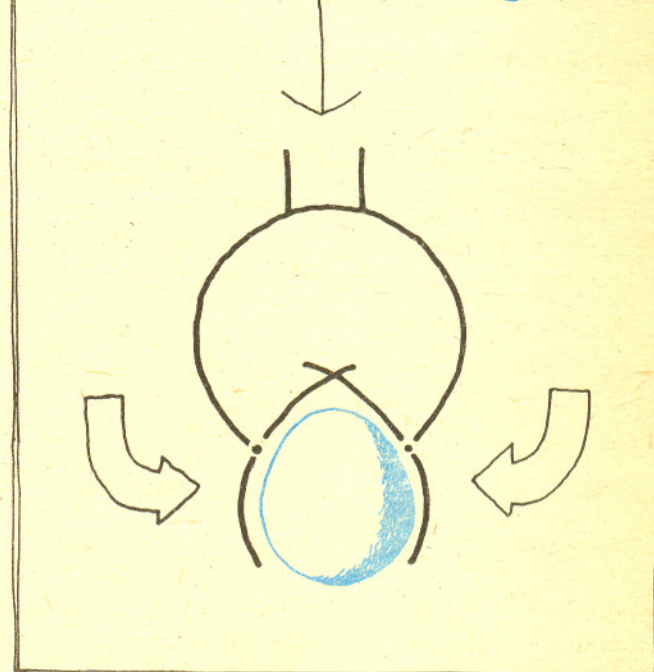


W samym pomysle nie jest istotne, że oba wymienione urządzenia miały ząb czy hak. Takich samych prawie obcęǳów jak do szyn używano do przenoszenia cegieł w szczęśliwych czasach, gdy duże domy jeszcze z małych cegieł budowano. Każdy chyba umie uzasadnić, dlaczego cegły z narysowanego urządzenia nie wypadną.



Jeszcze dawniej Natura wyposażyła w podobne urządzenia ptaki. Chodziło mianowicie o to, by siedzący na gałęzi ptak nie musiał ani kontrolować siły uchwytu, ani zużywać na ten chwyt energii mięśni. By siedział na gałęzi „automatycznie”, nawet podczas snu. Jak widać, zadanie udało się świetnie rozwiązać.

*mechanizm chwytu przez przeciwstawne palce nogi ptaka*



Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



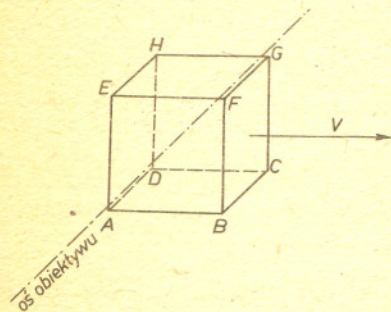
# Jak wyglądają szybko poruszające się ciała?

Artur Konrad EKERT

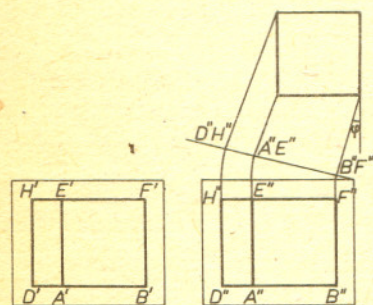
Problem sformułowany w tytule należy nieco uściślić. Załóżmy, że fotografujemy obiekty poruszające się po linii prostej ze stałą prędkością  $v$ , porównywalną z prędkością światła  $c$ , interesuje nas odpowiedź na pytanie — jaki kształt obiektu ujrzymy na fotografii. Zaczniemy od stosunkowo prostego przykładu, który wprowadzi nas w istotę tematu i, być może, zrewiduje naszą intuicję.

## Poruszający się sześcian

Sześcian o boku  $a$  porusza się wzdłuż prostej ze stałą prędkością  $v$ . Zdjęcie wykonane jest w chwili, gdy sześcian mija oś obiektywu (oś obiektywu jest prostopadła do jednej ze ścian — rysunek 1). Zanedbujemy rozmiary kątowe obiektu (np. sześcian jest bardzo daleko). Kształt zarejestrowany na kliszy będzie wynikiem współistnienia dwóch efektów: skrócenia sześcianu w kierunku ruchu o czynnik  $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  (skrócenie Lorentza) i zjawiska pozwalającego zarejestrować na kliszy ścianę  $ADHE$  („efekt optyczny”). Promienie z tej ściany muszą wystartować wcześniej, by dotrzeć do kliszy razem z promieniami ze ściany  $ABFE$  (jest to warunek powstania obrazu). Daje to sześcianowi czas na „usunięcie się z drogi” promieniom z  $ADHE$ . Otrzymany obraz przedstawia rysunek 2a. Możemy obliczyć długość zaznaczonych odcinków.



Rys. 1



Rys. 2a

Rys. 2b

$$A'B' = a \cdot \frac{1}{\gamma}, \quad A'D' = \frac{a}{c} \cdot v = a \cdot \beta,$$

gdzie  $\beta = \frac{v}{c}$ , a promienie z krawędzi  $DH$  startują  $\frac{a}{c}$  wcześniej niż promienie ze ściany  $ABFE$ .

Rysunek 2b przedstawia fotografię spoczywającego sześcianu w przypadku, gdy oś obiektywu tworzy kąt  $\varphi$  z normalną do  $ABFE$ . Mamy

$$A''B'' = a \cos \varphi, \quad A''D'' = a \sin \varphi.$$

Ze względu na podobieństwo 2a i 2b szukamy związku między nimi. Chcielibyśmy, aby  $A'B' = A''B''$  i  $A'D' = A''D''$  — jest to możliwe, gdy  $\sin \varphi = \beta$  i  $\cos \varphi = \frac{1}{\gamma}$ .

Możemy już sformułować nieco zaskakujący wniosek, że (przy przyjętych założeniach) fotografia sześcianu poruszającego się z prędkością  $v = \beta \cdot c$  jest identyczna z fotografią sześcianu spoczywającego, fotografowanego pod kątem  $\varphi$  takim, że  $\sin \varphi = \beta$ .

## Małe uogólnienie

Poprzedni wniosek można uogólnić na obiekty dowolnego kształtu. Można pokazać (np. posługując się regułą dodawania prędkości zgodną ze szczególną teorią względności), że promień świetlny wysłany w układzie obiektu pod kątem  $\Theta'$  (kąt mierzymy teraz od kierunku prędkości ruchu) będzie zaobserwowany przez spoczywającego obserwatora pod kątem  $\Theta$  takim, że

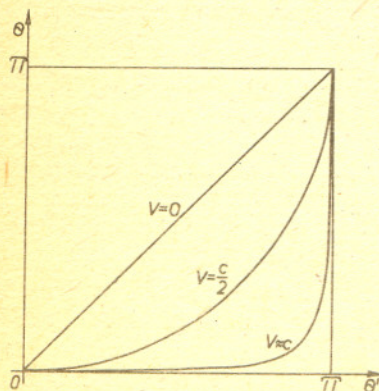
$$\sin \Theta = \frac{\sin \Theta'}{(1 + \beta \cos \Theta')}.$$

Zależność między  $\Theta$  i  $\Theta'$  przedstawia wykres na rysunku 3. Tak więc przy przyjętych na wstępie założeniach fotografia np. szybko jadącego porsche fotografowanego pod kątem  $\Theta$  jest identyczna z fotografią stojącego porsche zrobioną pod kątem  $\Theta'$ . Gdybyśmy filmowali jazdę naszego samochodu, wydawałoby się nam, że w trakcie jazdy obraca się on o kąt  $\Theta' - \Theta$  ( $\Theta'$  i  $\Theta$  zależałyby od czasu). Rysunek 4 pokazuje, jak to wygląda w przypadku sześcianu  $ABCDEFGH$  (prawa część rysunku odpowiada mniejszej prędkości). Zauważmy przy okazji, że dla

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \text{ mamy}$$

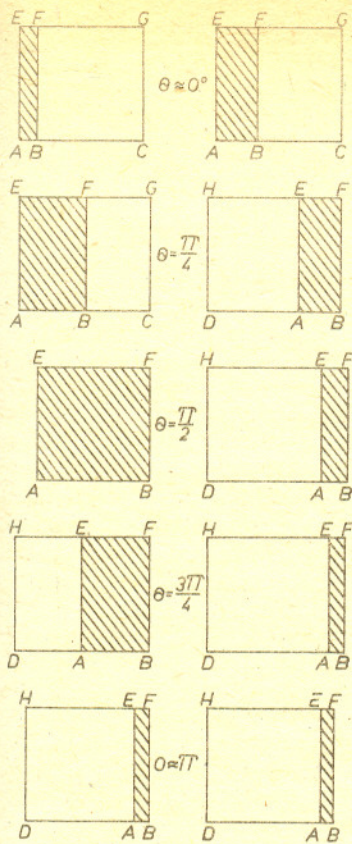
$$\sin \Theta' = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\gamma(1 - \beta \cos \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\gamma}, \quad \sin \varphi = \sin(\Theta' - \Theta) = \beta,$$

co zgadza się z naszymi wcześniejszymi obliczeniami.



Rys. 3





Rys. 4

## Duże uogólnienie

Chcielibyśmy teraz opuścić poczynione na wstępie założenia. W tym celu rozważmy dwa inercjalne układy  $K'$  i  $K$ . Układ  $K$  porusza się z prędkością  $-v$  względem  $K'$ . Zdarzenia  $(0, 0, 0, 0)$  w obu układach pokrywają się. Obserwatorzy rejestrują (np. na sferycznej kliszy) w chwili  $t = 0 = t'$  obraz otoczenia, a obie klisze umieszczone są w początkach układów  $K$  i  $K'$ . Zdarzenie  $P = (t', x', y', z')$  zostanie zarejestrowane na kliszy obserwatora  $K'$  tylko wtedy, gdy

$$t' = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{c}$$

(promienie padają na kliszę w chwili  $t = 0$ ), co jest równoważne warunkowi  $s^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$  i odpowiada rejestracji zdarzeń ze stożka przeszłości. Warunek  $s^2 = 0$  jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a więc jeśli zdarzenie  $P$  jest zarejestrowane na kliszy  $K'$ , to również jest zarejestrowane na kliszy  $K$ . Korzystając ze wzorów opisujących transformację Lorentza

$$x = \gamma(x' + vt'), y = y', z = z' \text{ i } t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

oraz warunku rejestracji zdarzeń  $ct' = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$  budujemy transformację  $(x', y', z') \leftrightarrow (x, y, z)$ . Otrzymujemy związku

$$x = \gamma(x' - \beta\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}), y = y', z = z'.$$

To w zasadzie cała wiedza o zmianie kształtu fotografowanych obiektów poruszających się z dużymi prędkościami. Sposób postępowania jest taki: obiekty w układzie  $K'$  składające się z punktów  $(x', y', z')$  po rzutowaniu na kliszę dają jakiś obraz, jeśli chcemy wiedzieć, jaki będzie obraz na kliszy  $K$ , to transformujemy  $(x', y', z') \leftrightarrow (x, y, z)$  i otrzymamy obiekty w układzie  $K$  złożone z punktów  $(x, y, z)$ , następnie rzutujemy je na kliszę  $K$  i to wszystko! Zauważmy, że nasza transformacja mówi więcej o kształcie obiektu niż obraz fotograficzny — w wyniku rzutowania na kliszę zaniedbujemy część informacji dotyczącą tylnej strony obiektu.

## Transformacja obrazu w przykładach

Aby „poczuć”, jak działa transformacja obrazu, dokonajmy transformacji prostych figur.

a) Płaszczyzna  $x' = a$

$$x = \gamma(a - \beta\sqrt{a^2 + y'^2 + z'^2}), y = y', z = z'.$$



## Twierdzenie Brianchona

Przekątne sześciokąta opisanego na okręgu przecinają się w jednym punkcie. W istocie jest tak również dla elips, ale my poprzestaniemy na okręgach.

Najpierw spostrzeżenie: Jeśli na dwóch stycznych do okręgu odłożymy (od punktów styczności i po tej samej stronie łączącej je cięciwy) taki sam odcinek, to będzie istniał okrąg styczny do tych stycznych w otrzymanych punktach. Istotnie — narysowana figura ma oś symetrii — prowadząc z końca odłożonego odcinka prostopadłą do stycznej otrzymujemy w jej przecięciu z osią symetrii środek poszukiwanego okręgu (dlaczego?).

A teraz dowód twierdzenia Brianchona. Niech sześciokąt  $ABCDEF$  będzie opisany na okręgu i styczny do niego w punktach  $P, Q, R, S, T, U$ . Odłożymy (jak na rysunku) jednakowe odcinki  $PP', QQ', RR', SS', TT', UU'$ . Narysujmy teraz okręgi  $o_1, o_2$  i  $o_3$  takie, o jakich była mowa w podanym wyżej spostrzeżeniu. Prosta  $BE$  jest prostą potęgową okręgów  $o_1$  i  $o_2$ , gdyż wobec

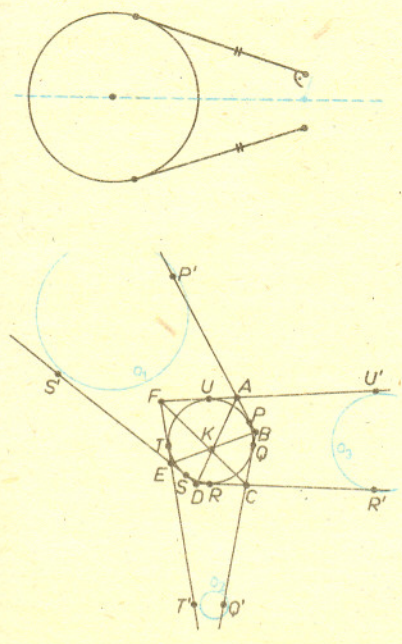
$$BP = BQ \text{ i } ES = ET$$

mamy

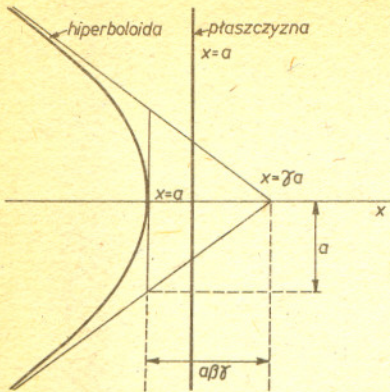
$$BP' = BQ' \text{ i } ES' = ET',$$

a więc  $B$  ma tę samą potęgę względem  $o_1$  i  $o_2$ , tak samo  $E$ .

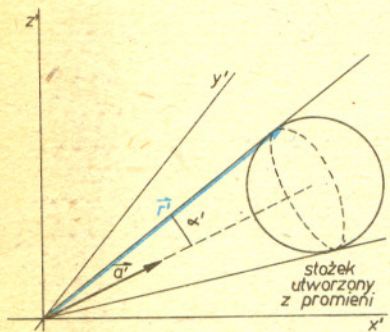
Analogicznie stwierdzamy, że  $CF$  jest prostą potęgową okręgów  $o_2$  i  $o_3$ , oraz że  $AD$  jest prostą potęgową okręgów  $o_1$  i  $o_3$ . Punkt  $K$  przecięcia  $BE$  i  $CF$  ma taką samą potęgę względem  $o_1$  i  $o_2$  oraz względem  $o_2$  i  $o_3$ , a więc taką samą względem  $o_1$  i  $o_3$ . Musi więc leżeć na  $AD$ .



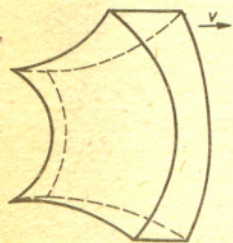




Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Otrzymujemy więc równanie

$$\left(\frac{x}{\gamma} - a\right)^2 = \beta^2(a^2 + y^2 + z^2)$$

opisujące hiperboloidę dwupowłokową (tylko jedna powłoka ma znaczenie fizyczne) lub stożek, gdy  $a = 0$ . Wynik transformacji przedstawia rysunek 5.

b) Półprosta  $x' = ay' \quad z = z' = 0$

$$x = \gamma(a\gamma' - \beta\sqrt{a^2\gamma'^2 + \gamma'^2}), \quad y = \gamma',$$

stąd  $x = \gamma(a - \beta\sqrt{a^2 + 1})\gamma'$  i obrazem jest półprosta.

Analizując zmianę współczynnika kierunkowego zauważmy, że

$$a = \text{ctg } \Theta', \quad (a - \beta\sqrt{a^2 + 1}) = \text{ctg } \Theta,$$

możemy więc wyznaczyć  $\text{tg } \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(\cos \Theta' - \beta)}$ .

Jest to wzór opisujący aberrację promieni świetlnych — już przez nas rozważany.

## Poruszająca się sfera

Wpływ „efektu optycznego” na wygląd szybko poruszających się ciał zauważył R. Penrose. Udowodnił on w 1959 r., że szybko poruszająca się sfera zachowuje kształt sfery. Wprawdzie transformacja obrazu nie przekształca sfery w sferę, ale po uwzględnieniu rzutowania na kliszę otrzymujemy przekształcenie przeprowadzające koła na kliszy  $K'$  w koła na kliszy  $K$ . Oto chyba najprostszy dowód (podany przez M. L. Boes w American Journal of Physics, 29 (1961), str. 283). Sfera spoczywa w układzie  $K$ . Promienie padające na kliszę tworzą stożek (rysunek 6), którego wierzchołkiem jest klisza — początek układu. Stosując bezpośrednio transformację Lorentza do równania stożka

$$r'a' = r' \cos \alpha', \quad r' = ct' \quad t' < 0 \quad (a' = 1)$$

otrzymamy

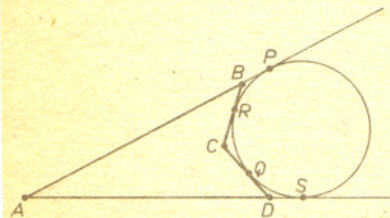
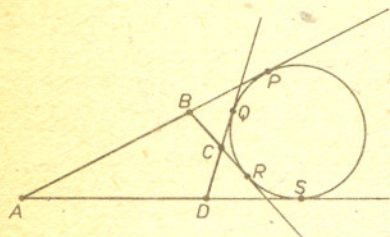
$$(a'_x \gamma - \beta \gamma \cos \alpha')x + a'_y y + a'_z z = -ct(\gamma \cos \alpha' - a'_x \beta \gamma),$$

a więc również stożek w układzie  $K$ . Stożek ten ma nieco inne parametry. Tak więc na kliszy obserwatora  $K$  ujrzymy też koło, ale na ogół o innej średnicy.

Rysunek 7 przedstawia, jak wygląda nasz sześcian, jeśli uwzględnimy jego rozmiary kątowe.



## Rozwiązanie zadania ze strony 1



Jak wiemy, wystarczy udowodnić twierdzenie ze strony 3. Załóżmy więc, że do czworokąta  $ABCD$  można wewnątrz kąta  $BAD$  dopisać okrąg. Oznaczmy punkty styczności przez  $P, Q, R$  i  $S$ .

Mamy

$$AP = AS, \quad BP = BR, \quad CQ = CR, \quad DQ = DS,$$

skąd

$$AB + BC = AP - BP + BR - CR = AP - CR = AS - CQ = AS - DS + DQ - CQ = AD + DC$$

lub

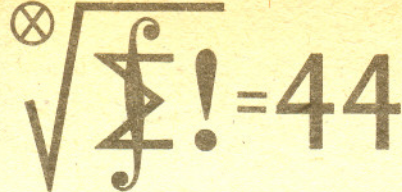
$$AB + BC = AP - BP + BR + CR = AP + CR = AS + CQ = AS - DS + DQ + CQ = AD + DC.$$

Założmy z kolei, że jest  $AB + BC = AD + DC$  i dla ustalenia uwagi  $AB > BC$ . Poprowadzimy przez  $B$  równoległą do  $CD$  i przez  $D$  równoległą do  $BC$ . Oznaczmy ich punkt przecięcia przez  $C_1$ . Z założenia mamy więc  $AB + C_1D = AD + C_1B$ , a więc w czworokąt  $ABC_1D$  można wpisać okrąg.

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki. Prostszy z nich to ten, gdy czworokąt  $ABCD$  ma kąt  $BCD$  wklęsły. Wówczas czworokąt  $ABC_1D$  jest wypukły. Poprowadzmy do wpisanego w ten czworokąt okręgu jeszcze dwie styczne równoległe odpowiednio do  $BC$  i  $CD$ . Oznaczmy ich przecięcia odpowiednio z  $AB$  przez  $D'$  i z  $AD$  przez  $B'$  oraz punkt ich przecięcia przez  $C'$ . Przekątne sześciokąta  $B'C'D'BC_1D$  na mocy twierdzenia Brianchona przecinają się w jednym punkcie  $K$ . Z podobieństwa trójkątów  $B'C'K$  i  $BC_1K$  oraz  $C'D'K$  i  $C_1DK$  mamy

$$\frac{B'C'}{BC_1} = \frac{C'K}{C_1K} = \frac{C'D'}{C_1D}, \quad \text{skąd} \quad \frac{B'C'}{C'D'} = \frac{BC_1}{C_1D} = \frac{CD}{BC}.$$





Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 97, 98, 99

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1985

97. Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że każda liczba  $x$  z przedziału  $0 < x < 1$  ma całkowitą wielokrotność  $kx$  spełniającą warunek:  $n^2(n+1)^{-1} \leq kx < n$ .

98. Ciąg  $(x_n)$  dany jest wzorem rekurencyjnym  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = (\sqrt{1+x_n^2}-1)/x_n$ . Uzasadnić istnienie i znaleźć wartość granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x_n$ .

99. Na płaszczyźnie dany jest odcinek  $\overline{AB}$  o długości  $c$ . Wyznaczyć wszystkie możliwe położenia punktu  $C$ , przy których odcinek  $\overline{AB}$  jest najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$  oraz spełnione są nierówności  $h_a \leq a, h_b \leq b, h_c \leq c$  (jak zwykle,  $h_a$  oznacza długość wysokości opuszczonej na bok  $a$  itd.)

Zadanie 99 przysłał pan Jerzy Milczarek z Gorzowa Wielkopolskiego.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

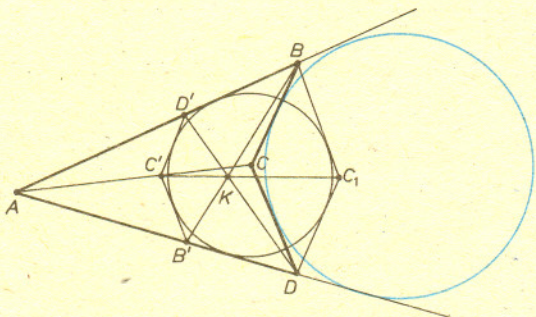
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 4/1984

Tomasz Komorowski - Świdnik	50,09pkt
Marek Gałecki - Milanówek	49,68pkt
Paweł Kamiński - Warszawa	48,74pkt
Edward Orzechowski - Warszawa	47,71pkt
Józef Siwy - Łaziska Grn	45,96pkt
Krzysztof Jedziniak - Katowice	45,74pkt
Wojciech Olszewski - Brwinów	45,49pkt

Współczynniki trudności zadań 82, 83, 84:  
2,90 1,80 1,86

Cała siedmiuosobowa czołówka składa się tym razem z uczestników przekraczających linię 44: panowie Gałecki i Kamiński już po raz trzeci /zostając Weteranami/, pan Orzechowski po raz drugi, pozostali po raz pierwszy, powiększając tym samym liczbę członków Klubu do 24.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA



Teraz z twierdzenia Talesa mamy współliniowość punktów  $A, C', C$ , a jednokładność o środku  $A$  i stosunku  $AC : AC'$  przeprowadza okrąg wpisany w czworokąt  $ABC_1D$  na okrąg dopisany do czworokąta  $ABCD$ .

A teraz przypadek, gdy czworokąt  $ABCD$  jest wypukły. Wprowadzając dodatkowe oznaczenia, jak na rysunku, uzyskujemy jak poprzednio

$$\frac{B'C'}{B''C_1} = \frac{C'D'}{C_1D''}$$

nie można jednak tak prosto uzyskać współliniowości punktów  $A, C', C$ . Ale można. Z twierdzenia Talesa mamy bowiem

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AD}{AD_1} \quad \text{i} \quad \frac{AD''}{AD} = \frac{AB}{AB_1}$$

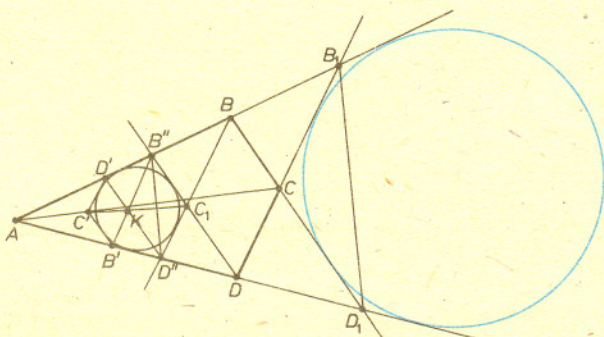
skąd

$$\frac{AB''}{AD''} = \frac{AB_1}{AD_1}$$

a więc  $B''D''$  i  $B_1D_1$  są równoległe i trójkąty  $B''C_1D''$  i  $D_1CB_1$  są podobne. Mamy więc

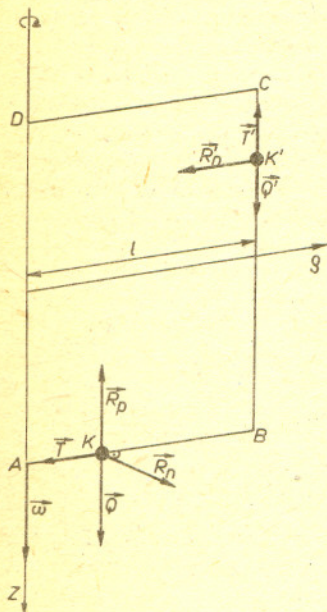
$$\frac{D_1C}{CB_1} = \frac{B''C_1}{C_1D''} = \frac{B'C'}{C'D'}$$

i (znow z Talesa) punkty  $A, C', C$  są współliniowe. A koniec dowodu jak w poprzednim przypadku.





Rozwiązanie zadania P 162. W inercjalnym układzie odniesienia na koraliki działają siły pokazane na rys. 1:

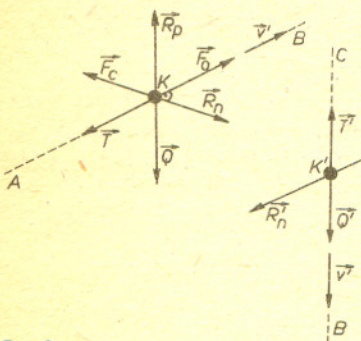


Rys. 1

$Q, Q'$  — siły ciężkości,  
 $T, T'$  — siły zapewniające stałość prędkości  $v'$ ,  
 $R_p$  — reakcja pionowa ramienia  $AB$ ,  
 $R_n, R'_n$  — poszukiwane siły reakcji.  
 Prawo ruchu koralików ma postać

$$M_w = \frac{dL}{dt}$$

gdzie  $M_w$  — wypadkowy moment sił względem osi obrotu ramki,  
 $L$  — moment pędu koralika.



Rys. 2

Późna jesień jest okresem wyjątkowo korzystnym do obserwacji meteorów. Nie tylko dlatego, że wieczory są coraz dłuższe, ale również z tego powodu, że w ciągu ostatnich trzech miesięcy roku obserwuje się mniej więcej połowę stałych, silnych rojów meteorów. Przykładowo — dłuższa obserwacja nieba (powiedzmy, godzinna) na przełomie listopada i grudnia doprowadzi do zauważenia kilku, kilkudziesięciu śladów meteorów, z których większość rozchodzi się z jednego (w przybliżeniu) punktu. Ten punkt nazywamy radiantem. Fakt rozbiegania się torów jest odbiciem rzutowania prawdziwych trajektorii meteorów na sferę niebieską. Obserwowany w tym czasie rój to Geminidy. Różne roje charakteryzują się różnymi obfitościami, co więcej ten sam rój może być bardziej liczny jednego roku, a mniej — innego. Jednym z najbardziej obfitych rojów był rój Leonidów. 17 listopada 1966 roku obserwowano prawie 40 meteorów na sekundę. Jednak znacznie bardziej typowymi wartościami są obfitości rzędu kilku na godzinę. Opracowano wiele metod obserwacji i wyznaczania torów meteorów. Jednym z ciekawych rozwiązań pozwalających na wyznaczenie prędkości kątowej spadającej gwiazdy jest kamera fotograficzna z okresowo przesłanianym obiektywem. Na zdjęciu wykonanym taką kamerą ślad meteoru jest linią przerywaną. Znając parametry kamery i przysłony łatwo wyznaczamy prędkość kątową ciała. Aby odtworzyć rzeczywistą trajektorię, potrzebne są albo dwie obserwacje tego samego meteoru z dwóch różnych miejsc, albo obserwacje radiolokacyjne (rejestracja echa radiowego od zjonizowanego śladu meteoru, który trwa krócej niż 10 sekund). Tą ostatnią metodą odkryto również kilka nowych strumieni przypadających na dzień. Wyznaczenie prawdziwych wektorów prędkości pozwoliło na potwierdzenie przypuszczenia, że meteory powstały w Układzie Słonecznym, a nie przybyły z przestrzeni międzygwiazdowej. Większość meteorów związana jest genetycznie z rozpadającymi się kometami, pochodzenie innych jest nieznane, jeszcze inne związane są z ... Ziemią. Odkryto dotychczas kilkadziesiąt meteorów, których orbity były prawie identyczne z orbitą Ziemi. Tworzą one jakby chmurę, wewnątrz której porusza się nasza planeta.

Typowe masy meteorów wynoszą od kilku gramów do tysięcznych części grama, ich prędkości są rzędu kilkunastu, kilkudziesięciu kilometrów na sekundę. Jasność i barwa rozbłysku towarzyszącego wejściu takiego ciała w atmosferę ziemską zależy od jego masy i prędkości. Meteory biegnące naprzeciw poruszającej się Ziemi zapalają się bardzo wcześnie, są jaśniejsze i bielsze od tych, które doganiają Ziemię.

Oczywiście obserwujemy jedynie znikomą część meteorów spadających na Ziemię. Ogólna masa wpadająca do atmosfery ziemskiej oceniana jest na kilkadziesiąt ton na dobę, z tego odnajduje się zaledwie kilka sztuk rocznie. Trzeba znaleźć się w wyjątkowo nietypowych warunkach, by tak jak Antoine de Saint-Exupéry zbierać meteoryty jak jabłka leżące pod jabłonią (*Ziemia, planeta ludzi, Samolot i planeta*, 3)

dr Tomasz CHLEBOWSKI

Dla koralika  $K$ :  
 $R_n \varrho = \frac{d}{dt}(m\omega \varrho^2) = 2m\omega \varrho \frac{d\varrho}{dt} = 2m\omega \varrho v'$   
 $R_n = 2m\omega v'$   
 $R_p = Q = mg$   
 Dla koralika  $K'$ :  
 $\frac{d}{dt}(m\omega \varrho) = 0$   
 $R'_n = m a_r = m\omega^2 l$

W układzie nieinercjalnym koraliki poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym i konieczne jest wprowadzenie siły bezwładności o wartości (rys. 2)

$$F_c = 2m\omega v'$$

Zwróćmy uwagę, że siła ta nie pojawia się (gdy  $v' \parallel \omega$ ) lub jest prostopadła do  $\omega$  i  $v'$ . Sugeruje to ogólną postać

$$F_c = -2m\omega \times v'$$

Wprowadzona siła bezwładności nazywana jest siłą Coriolisa. Wpływa ona na przebieg wielu zjawisk na obracającej się Ziemi.

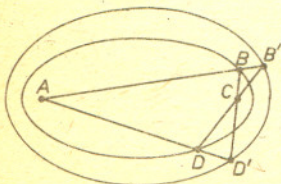
### Wymyśl twierdzenie

Zadanie ze strony 1 można sformułować tak, by dotyczyło elipsy. W tym celu definicja:

Zbiór punktów, których suma odległości od dwóch danych punktów  $O_1$  i  $O_2$  jest stała, nazywamy elipsą, a punkty  $O_1$  i  $O_2$  — jej ogniskami. Zadanie można więc sformułować tak:

Jeśli istnieje elipsa o ogniskach  $A$  i  $C$  przechodząca przez  $B$  i  $D$ , to istnieje (inna) elipsa o tych samych ogniskach przechodząca przez  $B'$  i  $D'$ .

Z naszego rozwiązania mamy jednak jeszcze dodatkową informację: styczne do elips w punktach  $B, D, B', D'$  przecinają się w jednym punkcie — mianowicie w środku okręgu dopisanego do  $ABCD$  (dlaczego?). Może da się z tego spostrzeżenia zrobić jakieś ciekawe twierdzenie o stycznych do elipsy. Warto spróbować.





## Twierdzenie Hadwiger'a wynika z lematu

Lemat. Jeśli wielościan  $W$  daje się rozłożyć na wielościany  $W_1, \dots, W_n$ ;  $M$  jest zbiorem zawierającym liczbę  $\pi$  i wszystkie kąty dwuścienne wielościanów  $W, W_1, \dots, W_n$ ;  $f$  jest taką addytywną funkcją określoną na  $M$ , że  $f(\pi) = 0$ , to

$$(*) \quad f(W) = f(W_1) + \dots + f(W_n).$$

Na krawędziach wielościanu  $W$  oraz wielościanów  $W_1, \dots, W_n$  zaznaczmy wszystkie wierzchołki tych wielościanów oraz punkty, w których przecinają się krawędzie (rys. 8). Każda krawędź zostanie podzielona na drobniejsze odcinki. Nazwijmy je ogniwami. Tak więc każda krawędź każdego z wielościanów składa się z jednego lub więcej ogniw. Dla ogniwa zawartego w krawędzi wielościanu  $W$  określamy jego wagę wzorem  $m \cdot f(\alpha)$ , gdzie  $m$  jest długością ogniwa i  $\alpha$  wielkością kąta dwuściennego (wielościanu  $W$ ) przy krawędzi zawierającej to ogniwo. Podobnie określamy wagi ogniw w wielościanach  $W_1, \dots, W_n$ .

Łatwo zauważyć, że suma wag (w wielościanie  $W$ ) wszystkich ogniw leżących na krawędziach  $W$  jest równa niezmiennikowi Dehna  $f(W)$ . Istotnie, jeśli np. krawędź wielościanu  $W$  o długości  $l_1$  składa się z ogniw o długościach  $m_1, m_2, m_3$  (rys. 8), a kąt dwuścienny (wielościanu  $W$ ) przy niej jest równy  $\alpha_1$ , to  $l_1 f(\alpha_1) = m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1)$ .

Podobnie dla innych krawędzi. Sumując otrzymujemy żadaną równość. Analogicznie niezmiennik Dehna wielościanu  $W_i$  jest równy sumie wag (w  $W_i$ ) ogniw leżących na jego krawędziach. Tak więc dla obliczenia prawej strony (\*) trzeba zsumować wagi wszystkich ogniw we wszystkich wielościanach  $W_1, \dots, W_n$ . Obliczmy, z jakim współczynnikiem wchodzi do tej sumy długość  $m$  pewnego ogniwa  $\omega$ .

Oznaczmy przez  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  kąty dwuścienne (przy  $\omega$ ) tych z wielościanów  $W_1, \dots, W_n$ , w których krawędzi zawarte jest ogniwo  $\omega$ . Dla wygody założmy, że są to wielościany  $W_1, \dots, W_s$ . Oczywiście suma wag ogniwa  $\omega$  w wielościanach  $W_1, \dots, W_n$  jest równa

$$(**) \quad m f(\gamma_1) + \dots + m f(\gamma_s) = m(f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s)).$$

1° Może się zdarzyć, że ogniwo  $\omega$  jest zawarte we wnętrzu wielościanu  $W$  (nie biorąc pod uwagę końców  $\omega$ ). Jeśli każdy z wielościanów  $W_1, \dots, W_n$  zawierający ogniwo  $\omega$  zawiera je w pewnej krawędzi, to suma kątów  $\gamma_i$  tworzy kąt pełny (rys. 9) i  $\gamma_1 + \dots + \gamma_s - 2\pi = 0$ .

Funkcja  $f$  jest addytywna, więc  $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = 2f(\pi) = 0$ . Jeśli jeden z wielościanów  $W_{s+1}, \dots, W_n$  zawiera  $\omega$  we wnętrzu pewnej ściany, to (rys. 10)

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_s = \pi \quad \text{i} \quad f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = f(\pi) = 0.$$

(Jeśli dwa wielościany zawierają  $\omega$  we wnętrzach ścian, to  $\omega$  nie może być ogniwem).

2° Ogniwo  $\omega$  może leżeć na ścianie  $W$  (ale nie krawędzi). Wtedy (rys. 11)

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_s = \pi \quad \text{i} \quad f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = 0.$$

Zarówno w przypadku 1°, jak i 2° (\*\*) jest równe zeru.

3° Jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich przypadków, to ogniwo  $\omega$  leży na krawędzi  $W$ . Teraz  $\gamma_1 + \dots + \gamma_s$  jest równe albo  $\alpha$ , albo  $\pi - \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest odpowiednim kątem dwuścinnym  $W$  (rys. 12). W obu przypadkach  $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = f(\alpha)$  i (\*\*) jest równe wadze ogniwa  $\omega$  w wielościanie  $W$ . Tak więc suma po prawej stronie równa jest niezmiennikowi Dehna wielościanu  $W$ .

Musimy jeszcze wiedzieć, że funkcję addytywną na zbiorze skończonym można tak rozszerzyć do większego zbioru skończonego, by była nadal addytywna. Oczywiście wystarczy wiedzieć, jak rozszerzać na zbiór, który ma jeden element więcej. Przypuśćmy, że funkcja  $f$  jest addytywna na zbiorze  $M$  i  $a \notin M$ . Jeśli dla żadnej różnej od zera liczby całkowitej  $k$  oraz dla żadnych  $a_1, \dots, a_n \in M$  i  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  nie zachodzi

$$(***) \quad ka = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n,$$

to możemy jako  $f(a)$  wziąć dowolną liczbę rzeczywistą. Jeśli natomiast (\*\*\*) zachodzi, to określamy

$$f(a) = \frac{1}{k} (k_1 f(a_1) + \dots + k_n f(a_n)).$$

Liczba  $f(a)$  jest dobrze określona. Jeśli  $la = l_1 b_1 + \dots + l_m b_m$  ( $l, l_1, \dots, l_m \in \mathbb{Z}$ ;  $b_1, \dots, b_m \in M$ ,  $l \neq 0$ ), to  $k(l_1 b_1 + \dots + l_m b_m) = l(k_1 a_1 + \dots + k_n a_n)$ , więc  $k(l_1 f(b_1) + \dots + l_m f(b_m)) = l(k_1 f(a_1) + \dots + k_n f(a_n))$ , gdyż funkcja  $f$  jest addytywna na  $M$ . Zatem

$$\frac{1}{k} (k_1 f(a_1) + \dots + k_n f(a_n)) = \frac{1}{l} (l_1 f(b_1) + \dots + l_m f(b_m)).$$

A oto dowód twierdzenia. Przypuśćmy, że  $W$  daje się rozłożyć na  $W_1, \dots, W_n$ ;  $V$  na  $V_1, \dots, V_n$  oraz wielościany  $W_j$  i  $V_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) są przystające. Funkcję addytywną  $f$  na zbiorze  $M$  (patrz sformułowanie twierdzenia) rozszerzamy do funkcji addytywnej  $f^*$  określonej na zbiorze  $M^*$  zawierającym zbiór  $M$  i wielkości wszystkich kątów dwuściennech wielościanów  $W_1, \dots, W_n$  (a więc i  $V_1, \dots, V_n$ ). Z lematu

$$f(W) = f^*(W) = f^*(W_1) + \dots + f^*(W_n),$$

$$f(V) = f^*(V) = f^*(V_1) + \dots + f^*(V_n),$$

ale oczywiście  $f^*(V_i) = f^*(W_i)$ , tak więc

$$f(W) = f(V).$$

J. R.

(Na podstawie książki W. G. Bołtiańskiego „Trzeci problem Hilberta”)



Rozwiązanie zadania M 382. Oznaczmy  $x+y = s$ .

$$\text{Mamy } n = \frac{(x+y)^2 + 3x+y}{2} = \frac{s^2+s}{2} + x,$$

a warunki  $0 \leq x, 0 \leq y, x, y$  całkowite możemy zapisać w formie  $x, s$  całkowite,  $0 \leq x \leq s$ . Wynika stąd, że dla ustalonego

$$s: x \in \{0, 1, \dots, s\} \text{ i } n \in \left\{ \frac{s^2+s}{2}, \frac{s^2+s}{2} + 1, \dots, \frac{s^2+s}{2} + s \right\}.$$

$$\text{Zauważmy, że } \frac{s^2+s}{2} + s + 1 = \frac{(s+1)^2 + (s+1)}{2}$$

$$\text{oraz } \frac{0^2+0}{2} = 0.$$

Tak więc każda liczba naturalna  $n$  należy do dokładnie jednego z przedziałów domkniętych

$$\left[ \frac{s^2+s}{2}, \frac{s^2+s}{2} + s \right], \text{ wyznaczając w ten sposób } s(n), \text{ a jej miejsce w tym przedziale}$$

wyznacza  $x(n)$ . Wystarczy teraz położyć  $y(n) = s(n) - x(n)$ , by uzyskać parę  $(x, y)$

$$\text{taką, że } n = \frac{(x+y)^2 + 3x+y}{2}.$$



Rozwiązanie zadania M 381. Zauważmy, że łamana  $POQ$  dzieli wielokąt na dwa wielokąty o równych polach. (Aby się o tym przekonać, wystarczy połączyć  $O$  z wierzchołkami tych wielokątów i zauważyć, że w ten sposób podzieliłmy je na trójkąty o wysokości równej promieniowi okręgu wpisanego). Ponieważ jednak, zgodnie z założeniem, prosta  $PQ$  połowi pole naszego wielokąta, trójkąt  $POQ$  musi mieć pole równe 0, a więc  $O$  leży na prostej  $PQ$ .



# Trzeci problem Hilberta

W szkole wzoru na objętość czworościanu  $C \left( \frac{1}{3} \cdot \text{pole podstawy} \cdot \text{wysokość} \right)$  uczono mnie tak:

dzieliło pewien graniastosłup o tej samej podstawie i wysokości co czworościan  $C$  na takie trzy czworościany  $C_1, C_2, C_3$  (rys. 4), że  $C_1$  i  $C_2$ , a także  $C_2$  i  $C_3$  miały takie same podstawy i wysokości, a ponadto  $C_1$  był przystający do  $C$ . Tak więc objętość  $C$  była trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa.

Ale skąd wiadomo, że czworościany o takich samych podstawach i wysokościach mają równe objętości?

W płaskim przypadku łatwo podzielić trójkąt na dwa trójkąty i trapez tak, aby dał się z nich złożyć prostokąt (rys. 1) o tej samej podstawie i dwa razy krótszej wysokości. Tak więc dwa trójkąty o równych podstawach i równych wysokościach mają równe pola. Co więcej, można pokazać, że jeśli dwa prostokąty mają równe pola (iloczyn boków), to jeden z nich daje się podzielić na skończoną liczbę wielokątów, z których da się złożyć drugi (rys. 2 i 3).

Może to samo uda się z czworościanami? Nazwijmy równoważnymi przez podział (w skrócie *rpp*) dwa wielościany, z których pierwszy da się tak podzielić na skończoną liczbę wielościanów, by z otrzymanych kawałków można było złożyć drugi. Czy każde dwa czworościany o równych podstawach i równych wysokościach są *rpp*? Pytanie powyższe nazywane jest *trzecim problemem Hilberta*. Negatywną odpowiedź podał w roku 1900 M. Dehn. Autorem innego — prostszego — dowodu jest H. Hadwiger (1954 r.). Tak więc, aby uzupełnić dowód podany na początku artykułu, trzeba korzystać z przejścia granicznego (rys. 5), jak np. uzasadnia się regułę Cavalieriego.

Pokażemy, że „złą”, tzn. nie *rpp*, parą czworościanów są czworościany  $H_1$  i  $H_2$  (rys. 6).

Zauważmy, że relacja *rpp* jest relacją równoważności. Łatwo pokazać (rys. 7), iż  $H_1$  jest *rpp* z graniastosłupem o podstawie trójkątnej. Przekształcając podstawę tego graniastosłupa w prostokąt (tak jak na rys. 1) stwierdzamy, że  $H_1$  jest *rpp* z pewnym prostopadłościem.

Każde dwa prostopadłości o równych objętościach są *rpp* (wystarczy dwukrotnie zastosować dla ich podstaw podział z rys. 2 i 3). Tak więc ostatecznie  $H_1$  jest *rpp* z pewnym sześcianem.

Pokażemy, że  $H_2$  nie jest *rpp* z żadnym sześcianem (nawet o równej mu objętości). Znajdziemy mianowicie pewien *niezmiennik* równoważności przez podział (czyli „coś”, co jest takie samo dla wielościanów równoważnych przez podział), który jest różny dla  $H_2$  i sześcianu.

Funkcję rzeczywistą  $f$  określoną na podzbiorze  $M$  liczb rzeczywistych nazywamy *addytywną*, jeśli dla każdych  $a_1, \dots, a_n \in M$  i  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych) spełniających warunek  $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0$  mamy  $k_1 f(a_1) + \dots + k_n f(a_n) = 0$ .

Niech  $W$  będzie wielościanem,  $M$  zbiorem liczb rzeczywistych zawierającym wartości  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  wszystkich kątów dwuściennych  $W$  (w radianach),  $l_1, \dots, l_p$  długościami odpowiednich krawędzi, a  $f$  funkcją addytywną na  $M$ . Liczbę

$$f(W) = l_1 f(\alpha_1) + \dots + l_p f(\alpha_p)$$

nazywamy *niezmiennikiem Dehna* wielościanu  $W$ .

**Twierdzenie (Hadwiger).** Niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  będą kątami dwuściennymi wielościanu  $W$ , a  $\beta_1, \dots, \beta_q$  kątami wielościanu  $V$ . Jeśli istnieje taka funkcja addytywna na zbiorze  $M$  zawierającym  $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ , że  $f(W) \neq f(V)$ , to  $W$  i  $V$  nie są równoważne przez podział.

Jako wniosek z twierdzenia otrzymujemy, że  $H_2$  i żaden sześcian nie są *rpp*. Kątami dwuściennymi

$H_1$  są  $\frac{\pi}{2}$  i  $\alpha$  (rys. 6). Oczywiście,  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Z równości tej wynika, iż  $\frac{\alpha}{\pi}$  nie jest liczbą

wymierną (dowód w numerze). Na zbiorze  $M = \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, \alpha \right\}$  określamy funkcję  $f$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0, f(\alpha) = 1$ . Funkcja  $f$  jest addytywna, gdyż jeśli elementy zbioru  $M$

spełniają warunek  $k_1 \frac{\pi}{2} + k_2 \pi + k_3 \alpha = 0$ , to  $k_3 = 0$  (inaczej  $\frac{\alpha}{\pi} = -\frac{2k_1 + k_2}{k_3}$ )

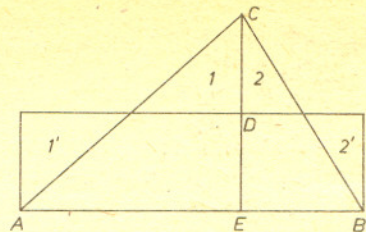
i  $k_1 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + k_2 f(\pi) + k_3 f(\alpha) = 0$ .

Obliczmy  $f(H_2)$  i  $f(Q)$  ( $Q$  — sześcian o krawędzi  $l$ ).

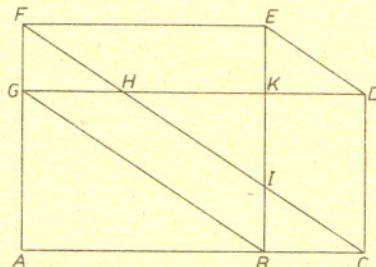
$$f(H_2) = 3f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{2}f(\alpha) = 3\sqrt{2}.$$

$$f(Q) = 12lf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Tak więc dla każdego sześcianu  $Q : f(Q) \neq f(H_2)$  i, na podstawie twierdzenia,  $Q$  i  $H_2$  (czyli również  $H_1$  i  $H_2$ ) nie są równoważne przez podział.



Rys. 1. Bok  $AB$  jest najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$  (wtedy spodek wysokości spuszczonej z  $C$  leży wewnątrz odcinka  $AB$ ). Trójkąty 1 i 1' oraz 2 i 2' są przystające.



Rys. 2.  $AF \cdot AB = AG \cdot AC$ , czyli  $\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AB}$ . Tak więc  $BG \parallel CF$  i, podobnie,  $DE \parallel BG$ . Trójkąty  $GHE$  i  $BCI$  są zatem przystające ( $GF = BI$ ) — podobnie trójkąty  $EFI$  i  $DHC$ . Jeśli odcinek  $FC$  przecina odcinek  $GK$  (tzn. jeśli  $2 \cdot AB > AC$ ), to podział jest zakończony ( $ACDG = AGHIB \cup DHC \cup BCI : AB EF = AGHIB \cup EFI \cup GHF$ ). Jeśli  $2 \cdot AB \leq AC$ , to zamiast prostokąta  $ABEF$  rozpatrujemy równoważny przez podział prostokąt  $A'B'E'F'$ , dla którego  $2 \cdot A'B' > AC$  (rys. 3).

Oznaczmy:  $S$  — pole powierzchni podstawy czworościanu  $ABCD$ ,  $h$  — jego wysokość. Obliczamy sumę objętości  $n$  (podobnych) graniastosłupów o wysokościach  $\frac{h}{n}$ , których

suma teoriomnogościowa zawiera czworościan  $ABCD$  (na rys. 5  $n = 5$ ). Graniastosłup  $k$ -ty od góry ma pole podstawy  $\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot S$ .

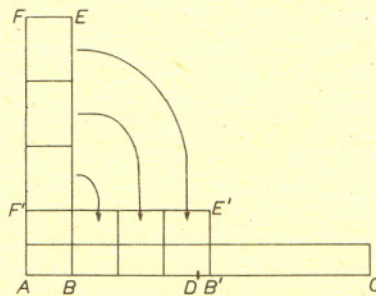
Tak więc szukana suma objętości jest równa

$$\frac{1}{n^3} \cdot h \cdot S \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \cdot S \cdot h,$$

czyli objętość czworościanu nie jest większa niż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla graniastosłupów zawartych w czworościanie otrzymamy nierówność przeciwną. Tak więc objętość czworościanu  $ABCD$  musi być równa  $\frac{1}{3} S \cdot h$ .



Rys. 3



