



SPIS TREŚCI

NUMERU 10 (130)

Dowód twierdzenia
mocniejszego może być
łatwiejszy
prof. dr Jerzy Mioduszewski str. 1

Trzecia zasada termodynamiki
prof. dr Jarosław Piasecki str. 4

Zadania str. 6

W jakim świecie żyjemy?
mgr Janusz Korwin-Mikke str. 7

Mała Delta str. 8

Wybuchy rentgenowskie
w kosmosie
dr Michał Jaroszyński str. 10

Klub 44 str. 11

Rzuć monetę raz jeszcze...
dr Jerzy Ryll str. 12

Zjawisko Mössbauera
dr Andrzej Kotlicki str. 14

Patrz w niebo str. 16

Pole powierzchni walca str. 17

W następnym numerze:

Teleskopy

PRZYPOMINAMY :

w numerach 1 - 12 "Delty"

w roku 1985

13 odcinków

dużej kolorowej mapy nieba

z torami planet

i torem komety Halley'a 1

Może warto

zaprenumerować "Deltę" ?

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz SitarSKI
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Joanna Filipowicz
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 6624/12/84. T-70

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach,
w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę
w tych oddziałach,

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW
„Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych
i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:

— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW

„Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,

— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”
opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych
dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty”
na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala
Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział
w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest
droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla

zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnego,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
„DELTE”:

— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,

— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,

— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,

— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie
Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

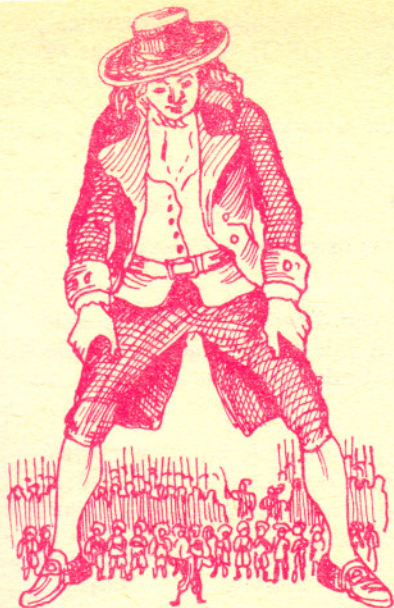
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik
Deutschland,

— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Dowód twierdzenia mocniejszego może być łatwiejszy



Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

„Nie mogę wnieść tej walizki na III piętro, jest ona za ciężka; wobec tego wezmę pod drugą pachę ten oto kufer” — w taki to ironiczny sposób przedstawia Cat-Mackiewicz monolog wewnętrzny pewnej postaci z niedawnej przeszłości (Zielone oczy, str. 177, wyd. 1959).

Od tego rodzaju desperackich decyzji nie są wolni i matematycy; co więcej, są nieraz do tego przez matematykę zachęcani. Liczby Fibonacciego, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., tworzy się tak, że każda począwszy od trzeciej jest sumą dwu poprzednich, $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$. Jeśli ktoś chce zadać torturę mniej doświadczonemu koledze, może mu dać do udowodnienia, że

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$

a potem, już zmęczonemu, dać pod drugą pachę kufer:

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2,$$

i przyglądać się, jak świetnie sobie radzi.

Zjawisko prosto się tłumaczy: w dowodzie indukcyjnym (bo taki przyjdzie tu prowadzić) sprawdzenie prawdziwości tezy na pierwszych krokach bywa przeważnie łatwe, więc dodanie nowej tezy na ogół nie zwiększa trudności; przejście z n na $n+1$ może jednak okazać się łatwiejsze, bo mamy teraz dodatkowe założenie umożliwiające ruszenie z martwego punktu.

L. Cinman w *Kwancie* 11 (1976), str. 9—12, pisze o nieuważnym Jasiu, który źle przepisał treść zadania i przez to zamiast nierówności $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} < 1/\sqrt{n}$ musiał dowieść (przez indukcję) mocniejszej nierówności, w której zamiast \sqrt{n} miał $\sqrt{n+1}$. Autor cytowanego artykułu analizuje te paradoksalne sytuacje z punktu widzenia teorii dowodu.

Ale i poza zakresem dowodów indukcyjnych zdarza się, że dowód twierdzenia mocniejszego bywa łatwiejszy. Rzecz jest ciekawa z punktu widzenia psychologii myślenia matematycznego. George Polya w swojej książce *Jak to rozwiązać* (tłumaczenie polskie, Warszawa 1964, Biblioteka Problemów 71) nazywa to zjawisko paradoksem odkrywcy komentując je wieloma przykładami.

Stwierdzenie

- (A) istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $5x^4 - x^3 - 72 = 0$ jest słabsze niż stwierdzenie
(B) liczba 2 spełnia równanie $5x^4 - x^3 - 72 = 0$;

ale dowód tego słabszego stwierdzenia wymaga pewnej wiedzy, a dowód twierdzenia (B) (mocniejszego) nie sprawi kłopotu nawet dziecku, jeśli wie ono, co to jest potęga liczby.

Ta rzecz też się prosto tłumaczy. Wyobraźmy sobie stos kluczy i zamek.

Stwierdzenie

- (A) któryś z tych kluczy otwiera zamek, jest słabsze niż stwierdzenie
(B) ten klucz otwiera zamek;

ale jeśli stos kluczy jest dość pokaźny, to dowód stwierdzenia A będzie odpowiednio trudny; dowód stwierdzenia B sprowadza się do otwarcia zamka wskazanym kluczem, co polega na wykonaniu pewnej czynności; w matematyce odpowiada to wykonaniu dowodu.

Podobnie jest z uogólnieniami. Bardzo intrygujące jest pytanie: co jest większe, π^e czy e^π ? Student I roku bez trudu wstawi właściwy znak nierówności między funkcje x^e i e^x dla $x \geq e$.



Dr A. K., po przeczytaniu rękopisu tego artykułu, zwrócił autorowi uwagę, że inny dobrze znany sposób to wsadzić walizkę i kufer do znacznie większej od nich paki (ogólniejszej równości):

$$u_{n+m} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1}$$

(przy $m = n$ dostajemy łatwo pierwszą z poprzednich równości, a przy $m = n+1$ drugą); tę już bez najmniejszego wysiłku przemieszcza nam zwykła indukcja względem m . Jest to sposób łatwiejszy niż dźwiganie walizki i kufru razem bądź oddzielnie.

Jeśli A wynika z B, ale B nie wynika z A, to zwykle się mówić, że stwierdzenie A jest słabsze niż B.

Oto przykład z matematyki bardziej zaawansowanej. Następujące twierdzenie, dowodzone przez Aleksandrowa (1924) i Sierpińskiego (1933), było uważane za trudne:

(A) jeśli przestrzeń metryczna jest spójna i lokalnie ośrodkowa, to jest ośrodkowa.

Z czasem uległo ono wzmocnieniu do twierdzenia

(B) jeśli przestrzeń parazwarta jest spójna i lokalnie ośrodkowa, to jest ośrodkowa,

które nie jest uważane za szczególnie trudne i którego dowodu można wymagać od studenta na egzaminie; dla wyjaśnienia dodajmy (nie objaśniając reszty pojęć), że przestrzenie metryczne są zawsze parazwarte (twierdzenie Stone'a, 1948); stąd właśnie (B) \Rightarrow (A).

Trudność dowodu twierdzenia (A) polega na tym, że jest wiele kluczy w postaci własności przestrzeni metrycznych, które można by w dowodzie wykorzystać; który więc wybrać? Próbując dowieść (B) nic takiego nas nie dręczy; parazwartość to określona własność — klucz, która stanowi doskonałą odpowiedź.

Wiele słynnych dowodów to dowody twierzeń od razu trudniejszych. Chcąc dowieść, że π jest niewymierne, Lambert (1767) dowiódł, że jeśli $\operatorname{tg} x$ jest liczbą wymierną, to x jest liczbą niewymierną; stąd niewymierność π , bo $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$.

Lindemann (1882) dowodząc niealgebraiczności liczby π dowodził od razu, że jeśli liczba e^z jest wymierna, to liczba (zespoleona) z nie jest algebraiczna; stąd niealgebraiczność liczby π , bo $e^{2\pi i} = 1$. Lindemann dowodził wszakże twierdzenia jeszcze dalej idącego: nie istnieją różne od zera liczby algebraiczne a_1, \dots, a_n i różne liczby algebraiczne x_1, \dots, x_n takie, że $a_1 e^{x_1} + \dots + a_n e^{x_n} = 0$. Było to ułatwienie (!), bo umożliwiała wejście na drogę przetartą wcześniej przez Hermite'a, który dowiódł (1873), że nie istnieją różne od zera liczby całkowite a_1, \dots, a_n i różne liczby całkowite m_1, \dots, m_n takie, że $a_1 e^{m_1} + \dots + a_n e^{m_n} = 0$, co oznaczało (*ex definitione*) niealgebraiczność liczby e .

Paradoksalność opisanych sytuacji bierze się głównie z uproszczonego patrzenia na twórczość matematyczną, w której zauważa się przede wszystkim dowody twierzeń, bo tylko one są utrwalane na piśmie i podlegają obiektywnym ocenom. Praca myśli polegająca na odrzucaniu fałszywych tropów, poszukiwaniu prawdopodobnych rozwiązań, a w końcu formułowaniu sprawdzalnych hipotez, bywa w rezultacie ignorowana. Zygzaki myśli prowadzące do odkrycia pozostają przeważnie nieznanne.

Uwidocznia je historia, jeśli droga do odkrycia rozkłada się na lata i na wielu ludzi.

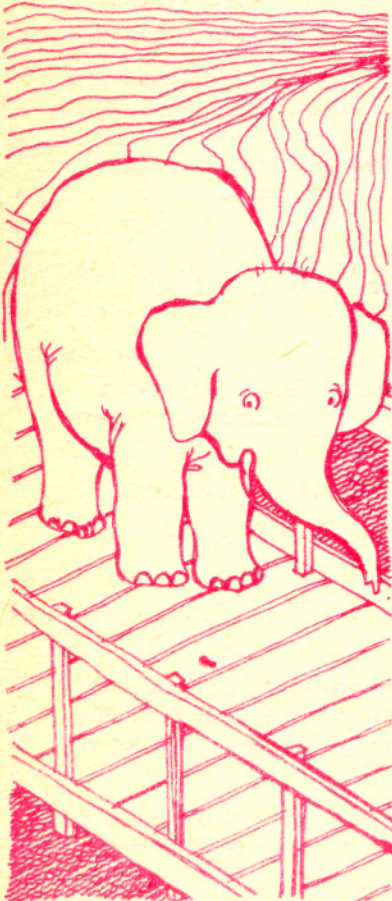
W poszukiwaniach matematycznych (jak we wszystkich innych) trudności bywają najczęściej związane z wyborem spośród napotykanymi możliwości. Na danym kroku nie musi być ich wiele, ale każdy niewłaściwy wybór to nieraz przekreślenie szans.

Już wybór z dwu możliwości może być dużym utrudnieniem. Próbując rozstrzygnąć zagadnienie nie wiemy z góry o wyniku. Natrafiając na trudności oscylujemy między poszukiwaniami dowodu i kontrprzykładu. O ile łatwiej szuka się dowodu, jeśli się wie, że twierdzenie jest prawdziwe.

Kiedy Lindemann dowiódł niealgebraiczności liczby π (dodajmy, że zagadnienie było w sposób wyraźny postawione przeszło sto lat przedtem przez Lamberta), pospytały się inne dowody: J. F. Koksma w *Diophantische Approximationen* (Springer 1936) wspomina (na str. 60) o co najmniej dwudziestu; tzw. drugie dowody są zwykle prostsze, a ich głębszy sens polega często na tym, że ukazują nowe powiązania danego twierdzenia z innymi i jego dodatkowe znaczenia.

A oto przykład lżejszego kalibru i prościej się tłumaczący. Martin Gardner w książce *Aha! Insight* (1978) opisuje (na str. 54) jak to Mr. Tack bezskutecznie łamał głowę nad obliczeniem pola między dwoma koncentrycznymi okręgami (takiego kształtu był hall, w którym miał położyć dywan) mając podany jeden tylko wymiar: długość cięciwy większego okręgu będącej jednocześnie styczną do mniejszego. Kiedy jednak dowiedział się, że Mr. Sharp, którego uważał za dobrego matematyka, wie jak to zrobić, przestał mieć jakiegokolwiek trudności.

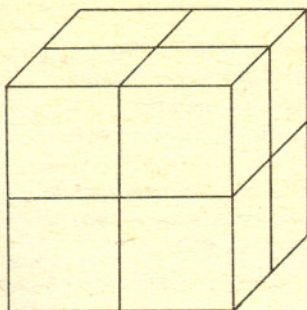
Liczbę a (rzeczywistą lub zespoloną) nazywamy algebraiczną, gdy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego a jest pierwiastkiem.





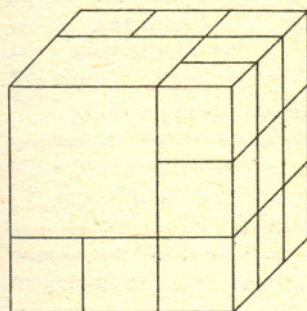
Rozwiązanie zadania M 378. Sześcian o krawędzi a można rozciąć:

1) na 8 sześcianów o krawędzi $\frac{1}{2} a$,



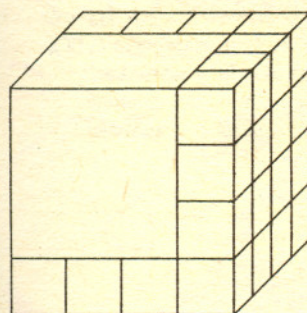
2) na 1 sześcian o krawędzi $\frac{2}{3} a$ i 19

sześcianów o krawędzi $\frac{1}{3} a$ — razem 20 sześcianów,



3) na 1 sześcian o krawędzi $\frac{3}{4} a$ i 37

sześcianów o krawędzi $\frac{a}{4}$ — razem 38 sześcianów.



Wynika stąd, że z rozcięcia na n sześcianów można otrzymać rozcięcie na $n+7$, $n+19$ i $n+37$ sześcianów — dzieląc jeden z sześcianów rozbitcia odpowiednio według metody 1), 2) lub 3).

Wśród możliwych podziałów będą między innymi takie, w których liczba części wyniesie $k_1 = 1+7 = 8$, $k_2 = 1+19 = 20$, $k_3 = k_2+19 = 39$, $k_4 = k_3+19 = 58$, $k_5 = k_4+19 = 77$, $k_6 = 1+37 = 38$, $k_7 = k_6+37 = 75$, oraz (dla $i = 1, 2, \dots, 7$ oraz $m = 0, 1, \dots$)
 $k = k_i + 7m$.

Ponieważ jednak reszty z dzielenia k_i przez 7 wynoszą odpowiednio 1, 6, 4, 2, 0, 3 i 5, więc k przyjmuje wszystkie wartości naturalne, począwszy od $\max(k_i)$, czyli od 77

Twórcy matematyki nigdy nie mieli wątpliwości, gdzie leży punkt ciężkości w rozwiązywaniu zagadnień. Imre Lakatos, który całą swoją książkę *Proofs and refutations* (1976) poświęca roli hipotez w matematyce, pisze w niej (w odnośniku na str. 9):

To, że hipotezy (twierdzenia) wyprzedzają dowody, było dla matematyków starożytności rzeczą naturalną. Według Proklosa „... trzeba wiedzieć wcześniej, czego się szuka”. Grecy nie przywiązywali wagi do stwierdzeń, które udawało się im uzyskać po drodze, jeśli przedtem nie były przewidziane. Nazywali je poryzmatami (wnioskami, rezultatami ubocznymi pojawiającymi się przez przypadek i bez zasługi), stanowiącymi, jak pisał Proklos, rodzaj spadłego owocu lub daru losu. W nocie do jednej z prac Eulera można przeczytać, że twierdzenia arytmetyczne „są odkrywane na długo przedtem, nim ich prawda zostaje potwierdzona ścisłymi dowodami”. Podobno Gauss skarżył się: „mam rezultaty już od dawna, nie wiem jednak dotąd, jak się do nich dobrać”; Riemann zaś mówił: „Gdybym miał tylko twierdzenia. Dowody znalazłbym z łatwością”. Połyca upominał: „Masz znać najpierw twierdzenia, zanim zabierzesz się do dowodzenia”.

Wacław Sierpiński w liście do redakcji *Matematyki* (rocznik 11 (1958), zeszyt 4—6, str. 1) pisze: *Twierdzenia matematyczne noszą zwykle nazwisko tego, który je pierwszy sformułował, niezależnie od tego, czy je udowodnił.*

Twierdzenie Waringa zostało... udowodnione przez Hilberta, ale nie przestano je nazywać twierdzeniem Waringa. Na przykład tak zwane wielkie twierdzenie Fermata będzie nosiło nazwisko Fermata, a nie tego, który je może kiedyś udowodni.

Otrzymanie twierdzenia mocniejszego nie bywa więc łatwiejsze. Chociaż, może było tak dla nieuwważnego Jasia, któremu traf podarował właściwą hipotezę. Nie było to jednak w sumie łatwiejsze w przypadku liczb Fibonacciego, jeśli się uwzględni odpowiedź koleżde. Student, który dowodził twierdzenia o ośrodkowości od razu dla przestrzeni parawartych, oprócz odpowiedzi dostał przedtem cały zapas wiadomości o wpisywaniu pokryć, a ten, który dowodził nierówności $\pi^e < e^\pi$, szedł (już po odpowiedzi) utartą od przeszło dwu stuleci drogą. Niech pozostanie (zgodnie z przeznaczeniem) zagadką i jednocześnie zadaniem z geometrii pytanie, dlaczego było tak ważne dla Mr. Tacka wiedzieć, że Mr. Sharp wie. Doliczmy do trudu Lindemanna trud Hermite'a. I jeśli udaje nam się czasem znaleźć elegancki dowód znanego twierdzenia, to wypada nam sobie wtedy przypomnieć, że nie jesteśmy przez to lepsi od znakomitych poprzedników.

Kącik Czytelniczy

Jak spędzały czas angielskie ladies w latach trzydziestych dziewiętnastego stulecia?

Z czasopisma *The Mathematician* (vol. III, London 1848) przepisujemy zadanie nr 187.

CLXXXVII (Dr. Rutherford) Znaleźć nierzeczywiste pierwiastki równania

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Rozwiązanie (Dr. Rutherford, autor). Posługując się zwykłą metodą badania własności pierwiastków równań znajdujemy łatwo, że dane równanie ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, a wobec tego cztery pierwiastki nierzeczywiste czy „niemożliwe”. Rzeczywistym pierwiastkiem tego równania jest 1,05910900346 (patrz *Lady's Diary* na rok 1839, str. 47), a aby znaleźć pierwiastki nierzeczywiste, musimy...

... tak więc czterema pozostałymi pierwiastkami są

$$-0,247951472742 \pm i \sqrt{0,402475312370} \text{ oraz}$$

$$-1,781603028989 \pm i \sqrt{0,893699913966}.$$

(Pominęliśmy oczywiste rachunki — *Red.*)

Trzecia zasada termodynamiki

Prof. dr Jarosław PIASECKI

Trzecia zasada termodynamiki dotyczy granicznych własności materii w obszarze niskich temperatur. Ma ona już dziś prawie osiemdziesięcioletnią historię, gdyż jest daleko idącym uogólnieniem twierdzenia o warunkach równowagi chemicznej podanego w 1906 roku przez Walthera Nernsta (1864—1941). Dlatego też często nadal nazywana jest twierdzeniem Nernsta.

W sformułowaniu trzeciej zasady podstawową rolę odgrywa pojęcie entropii wprowadzone do fizyki w połowie XIX wieku przez Rudolfa Clausiusa — autora jednego z klasycznych ujęć drugiej zasady termodynamiki. Dla dwu dowolnych stanów równowagi A i B układu termodynamicznego (ciała makroskopowego) różnica entropii, tradycyjnie oznaczanej literą S , wynosi

$$(1) \quad S(B) - S(A) = \int_{(A \rightarrow B)} \frac{dQ}{T}.$$

Całka występująca po prawej stronie sumuje stosunek ciepła dQ pochłanianego przez ciało do jego temperatury bezwzględnej T w jakimkolwiek procesie odwracalnym, przeprowadzającym układ ze stanu początkowego A do stanu końcowego B . Zgodnie z twierdzeniem Clausiusa, sformułowanym w 1854 roku, wartość tej całki nie zależy od wyboru procesu ($A \rightarrow B$). Wzór (1) określa więc jednoznacznie zmianę entropii $S(B) - S(A)$. Tym samym każdemu stanowi równowagi B układu możemy przypisać odpowiadającą mu wartość entropii $S(B)$, o ile dla pewnego ustalonego stanu A przyjmiemy $S(A) = S_A$, gdzie S_A jest dowolnie wybraną stałą. Warto tu zwrócić uwagę na fakt, iż analogiczna dowolność pojawia się przy definiowaniu energii wewnętrznej. Zasada zachowania energii (pierwsza zasada termodynamiki) pozwala jedynie na określenie różnic energii dla różnych stanów równowagi. Zresztą tylko te różnice są mierzalne i mają sens fizyczny. Trzecia zasada termodynamiki określa zachowanie się entropii w granicy, gdy temperatura zmierza do zera bezwzględnego. Formuluje się ją następująco:

Entropia dowolnego układu termodynamicznego przyjmuje we wszystkich stanach odpowiadających temperaturze zera bezwzględnego tę samą minimalną, skończoną wartość S_0 . (Wartość stałej S_0 można przyjąć równą zeru.)

Jest to niezmiernie ogólne twierdzenie, pociągające za sobą bogate konsekwencje. Ich dyskusję rozpoczniemy od rozważania związku między entropią a molowym ciepłem właściwym $c_X(T)$, charakteryzującym odwracalny proces ogrzewania (lub ochładzania) układu w warunkach opisywanych przez stałe wartości parametru X (X — może oznaczać na przykład ustalone ciśnienie p lub objętość V). Dla N moli substancji ciepło pobierane z otoczenia przy małej zmianie temperatury dT wynosi

$$(2) \quad (dQ)_X = N c_X(T) dT.$$

Ze wzoru (1) otrzymujemy wówczas

$$(3) \quad S(T_2, X) - S(T_1, X) = N \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_X(T)}{T} dT.$$

Jeżeli ciepło właściwe w przedziale temperatur od T_1 do T_2 jest stałe, to otrzymujemy związek

$$(4) \quad S(T_2, X) - S(T_1, X) = N c_X \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Równanie (4) obowiązuje w szczególności dla ciał stałych w temperaturach rzędu temperatury pokojowej ($T \sim 300$ K), gdzie (zgodnie z prawem Dulonga i Petita) ciepło właściwe przy stałej objętości ma wartość $c_V = 3 n R$ (R jest uniwersalną stałą gazową, a n liczbą jonów przypadających na jedną cząsteczkę). Dla niskich temperatur wzór (4) prowadzi jednak do sprzeczności z trzecią zasadą termodynamiki. Istotnie, fakt, iż granica $\lim_{T_1 \rightarrow 0} S(T_1, X) = S_0$ jest

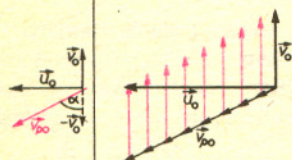
skończona (i niezależna od X) nie da się pogodzić z zachowaniem prawej strony równania (4), wykazującej przy $T_1 \rightarrow 0$ K rozbieżność logarymiczną. Z trzeciej zasady termodynamiki wynika więc, że klasyczne prawo Dulonga i Petita nie może obowiązywać w niskich temperaturach. Występująca we wzorze (3) całka jest rozbieżna przy $T \rightarrow 0$, o ile granica $\lim_{T \rightarrow 0} c_X(T)$ jest różna od zera. Trzecia zasada termodynamiki prowadzi więc do wniosku, że:

Wszystkie ciepła właściwe dążą do zera, gdy temperatura obniża się do zera bezwzględnego.



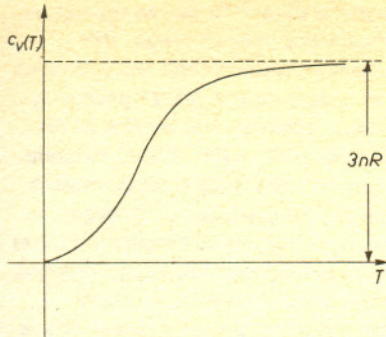
Rozwiązanie zadania F 160. Prędkość pudełka względem taśmy w chwili początkowej wynosi $v_{p_0} = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ i tworzy kąt α z jej brzegiem (rys. 1). Następnie, w wyniku działania siły tarcia prędkość ta maleje od v_{p_0} do zera zachowując stały kierunek względem taśmy (pudełko względem taśmy porusza się po linii prostej). Chwilowa prędkość pudełka względem ziemi jest sumą (wektorową) prędkości względem taśmy i stałej prędkości ruchu taśmy v_0 . Koniec wektora prędkości względem ziemi leży zawsze na odcinku łączącym końce wektorów v_0 i u_0 (rys. 2), a więc prędkość minimalna jest prostopadła do v_{p_0} i jej wartość wynosi

$$u_{min} = \frac{u_0 \cdot v_0}{\sqrt{v_0^2 + u_0^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{m}{s} \left(\approx 0,9 \frac{m}{s} \right).$$



Rys. 1

Rys. 2



Głębokie zrozumienie zachowania się ciepła właściwego w niskich temperaturach stało się możliwe dopiero po powstaniu mechaniki kwantowej, w szczególności dzięki pracom Alberta Einsteina (1879—1955) i Petera Debye'a (1884—1966). Z kwantowej termodynamiki statystycznej wynika, że ciepło właściwe c_V gazu doskonałego złożonego z fermionów (na przykład gazu elektronowego w metalach) jest proporcjonalne do temperatury przy małych T , w przypadku zaś gazu bozonów (dotyczy to w szczególności gazu fononowego, reprezentującego w niskich temperaturach wzbudzenia sieci krystalicznej) dąży do zera jak T^3 . Doświadczalnie obserwuje się, że prawo $c_V \sim T^3$ jest dobrze spełnione dla metali w temperaturach poniżej kilkudziesięciu kelwinów. Jednakże w bardzo niskich temperaturach ($T \sim 1$ K) zaczyna dominować wolniej (liniowo) zanikający wkład do c_V pochodzący od gazu elektronowego (efekt ten nie występuje, rzecz prosta, w przypadku izolatorów).



Ta własność ciał makroskopowych w niskich temperaturach jest w pełni potwierdzona przez pomiary doświadczalne. Typowy przebieg zmienności ciepła właściwego c_V ciał stałych przy stałej objętości przedstawia rysunek. Należy podkreślić, że trzecia zasada nie dostarcza żadnych informacji na temat obszaru temperatur, w którym ciepło właściwe zaczyna maleć. Nie można też na jej podstawie ustalić, w jaki sposób ciepła właściwe różnych substancji zbiegają do zera. Warto dodać, że w pewnych substancjach (niektóre sole paramagnetyczne) w bardzo niskich temperaturach zaczynają dominować własności magnetyczne, powodując istotne anomalie w zachowaniu się ciepła właściwego. Istnieją substancje, w których w temperaturach $T \sim 10^{-3}$ K ciepło właściwe nie tylko nie dąży jeszcze do zera, ale osiąga lokalne maksimum. Nawet w najniższych osiągniętych w laboratoriach temperaturach (rzędu 10^{-6} K) zastąpienie parametrów układu ich granicznymi wartościami odpowiadającymi zeru bezwzględemu może się okazać całkowicie błędne. Z trzeciej zasady termodynamiki wynika również znikanie innych wielkości termodynamicznych przy $T \rightarrow 0$ — na przykład współczynnika rozszerzalności objętościowej. Nasze rozważania poprowadzimy jednak obecnie w innym kierunku.

Od chwili, gdy w związku z drugą zasadą termodynamiki pojawiło się w fizyce pojęcie temperatury bezwzględnej, zaczęto badać możliwość praktycznego osiągnięcia zera bezwzględnego. Następujące rozumowanie wykazuje, iż w świetle trzeciej zasady termodynamiki takie krańcowe ochładzanie ciała nie da się przeprowadzić. Otóż przede wszystkim zauważmy, że oziębianie w bardzo niskich temperaturach może zachodzić tylko w warunkach możliwie doskonałej izolacji cieplnej od otoczenia, a więc w procesach adiabatycznych. Gdyby chłodzony układ pozostawał w kontakcie termicznym z otoczeniem, to otoczenie musiałoby mieć temperaturę niższą niż układ. W przeciwnym razie oddziaływałyby w kierunku podwyższenia jego temperatury. Załóżmy więc, co jest oczywiście idealizacją, że istnieją doskonałe osłony adiabatyczne. Należy teraz wziąć pod uwagę, że w odwracalnych procesach adiabatycznych entropia nie ulega zmianie (wynika to z (1) przy $dQ = 0$). O ile jednak proces adiabatyczny przebiega nieodwracalnie, entropia stanu końcowego jest zawsze większa od entropii stanu początkowego. Stanowi to istotną treść drugiej zasady termodynamiki. Ponieważ w temperaturze zera bezwzględnego, zgodnie z trzecią zasadą, entropia przyjmuje wartość minimalną, to należy rozważyć możliwość odwracalnego ochładzania adiabatycznego. Ale trzecia zasada głosi, że adiabata $S = S_0$ pokrywa się z izotermą $T = 0$ K. Zatem, żaden proces odwracalny adiabatyczny nie przeprowadzi układu ze stanu o $T > 0$ K do zera bezwzględnego. Stany o tej temperaturze są więc nieosiągalne. Zauważmy tu, że powiedzenie, iż (na przykład) temperatura 10^{-6} K jest bardzo niska, nie ma sensu, o ile nie wyjaśni się, z jaką temperaturą została porównana. Z przytoczonych wyżej rozważań, jak zresztą i z całej struktury termodynamiki wynika, że istotną rolę przy porównywaniu różnych stanów układu odgrywa bezwymiarowy stosunek odpowiadających im temperatur bezwzględnych. Z tego zaś punktu widzenia każda temperatura $T > 0$ jest nieskończenie wyższa od zera bezwzględnego.

Rozważmy jeszcze ciekawe zagadnienie związane ze stałą $S_0 = \lim_{T \rightarrow 0} S$. Zgodnie z trzecią zasadą można przyjąć $S_0 = 0$ i sformułować tę zasadę w postaci:

Entropia dowolnego układu termodynamicznego jest równa zeru w temperaturze zera bezwzględnego.

Jest to sformułowanie Plancka trzeciej zasady termodynamiki. Max Planck (1858—1947) badał związek entropii z mikroskopową strukturą materii w ramach teorii kwantowej. W zrozumieniu związku zasad termodynamiki z atomową teorią materii ogromną rolę odegrały prace Ludwiga Boltzmanna (1844—1906) — jednego z głównych twórców fizyki statystycznej. Rozwinięcie jego wyników, uwzględniające prawa mechaniki kwantowej, prowadzi do wniosku, że wartość entropii ciała w stanie równowagi termodynamicznej można powiązać z jego strukturą mikroskopową wzorem

$$(5) \quad S = k_B \ln \Omega,$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna, Ω zaś oznacza liczbę mikroskopowych stanów kwantowych odpowiadających określonemu stanowi makroskopowemu ciała (np. stanowi o ustalonych wartościach energii wewnętrznej U , całkowitej objętości V i liczby moli N). Odkrycie związku (5) stało się źródłem prostego rozumowania przedstawianego często jako mikroskopowe uzasadnienie trzeciej zasady termodynamiki w sformułowaniu Plancka. Otóż wiadomo, że w miarę obniżania temperatury maleje również energia wewnętrzna U . W granicy $T \rightarrow 0$ K osiąga ona wartość minimalną, odpowiadającą stanowi podstawowemu. O ile więc stan ten nie jest zdegenerowany, to liczba Ω wynosi 1 i ze wzoru (5) otrzymujemy $S_0 = k_B \ln 1 = 0$. Takie uzasadnienie trzeciej zasady zostało poddane w latach sześćdziesiątych surowej krytyce. Nie chodziło przy tym bynajmniej o dyskusję możliwości wystąpienia degeneracji stanu podstawowego zauważalnej na poziomie makroskopowym. Chodziło natomiast o fakt, że jakkolwiek prawdą jest, że trzecia zasada opisuje prawidłowości występujące w zachowaniu się ciał makroskopowych w niskich temperaturach, to również prawdą jest, że prawidłowości te przejawiają się w obszarze temperatur.



w którym liczba stanów mikroskopowych Ω jest nadal niewyobraźalnie duża. Ich występowanie nie ma więc nic wspólnego z ewentualnym brakiem degeneracji stanu podstawowego. Dla przykładu sięgnijmy do własności ciepła właściwego c_V kryształu izolatora. Teoria Debye'a drgań sieci krystalicznej przewiduje (zgodnie z doświadczeniem), że c_V dąży do zera jak T^3 począwszy od temperatur rzędu kilkudziesięciu kelwinów. Z teorii tej jednak równocześnie wynika, że dla 1 cm^3 kryształu nawet w temperaturze $T = 1 \text{ K}$ zachodzi równość $\ln \Omega = 10^{11}$. Efekty związane z degeneracją stanu podstawowego (lub jej brakiem) można by zaobserwować w temperaturach spełniających warunek $k_B T \ll E_1 - E_0$, gdzie E_1 i E_0 są odpowiednio energiami pierwszego stanu wzbudzonego i stanu podstawowego ciała makroskopowego. Tak niskie temperatury nie są dotychczas doświadczalnie osiągalne. Należy więc stwierdzić, że eksperymentalne efekty związane z zanikiem entropii, przewidywane na podstawie trzeciej zasady termodynamiki, wymagają zupełnie innej interpretacji. Zagadnienie to nadal jest badane. Jedno jest pewne, a mianowicie że przyjęcie $S_0 = 0$ nie prowadzi do sprzeczności z wynikami pomiarów, o ile badane układy znajdują się w stanach pełnej równowagi termodynamicznej. Jednakże często przy obniżaniu temperatury ulega „zamrożeniu” stan nierównowagowy. W niskich temperaturach relaksacja do stabilnego stanu równowagi staje się tak powolna, że „zamrożenie” to może trwać bardzo długo z punktu widzenia skali czasu nie tylko pomiarów doświadczalnych, ale i życia ludzkiego. Jako przykład może służyć utrzymywanie się amorficznej struktury szkła. „Zamrożenie” takiej fazy nieuporządkowanej może trwać całe wieki, zanim pojawi się zauważalny efekt procesu krystalizacji. Innym przykładem jest kryształ diamentu w temperaturze pokojowej, będący metatrwałym stanem węgla (stan równowagi odpowiada strukturze grafitu). Termodynamikę można z powodzeniem stosować do stanów metatrwałych. O ile jednak w danych warunkach przy $T \rightarrow 0$ ta sama substancja może wystąpić w różnych stanach (na przykład przyjmując strukturę kryształu lub zachować nieuporządkowaną strukturę amorficzną), to może się okazać, iż różnice entropii uzyskiwane w pomiarach kalorymetrycznych (stosowanie wzoru (1)) między tymi stanami mogą pozostawać różne od zera do najniższych osiągniętych temperatur. Aby móc rozszerzyć trzecią zasadę w sposób użyteczny z punktu widzenia tego typu doświadczeń, trzeba, zachowując dla stanów równowagi wartość $S_0 = 0$, przypisać stanom nierównowagowym przy $T \rightarrow 0$ entropię większą od zera.

Na temat trzeciej zasady powstały całe książki, tak wielkie jest bogactwo wniosków z niej płynących. Rozważyliśmy tu zaledwie kilka spośród nich, pomijając na przykład szerokie zastosowanie w dziedzinie chemii fizycznej. Mikroskopowa interpretacja trzeciej zasady możliwa jest jedynie w ramach teorii kwantowej. W tym sensie trzecia zasada termodynamiki dotyczy makroskopowych konsekwencji zjawisk kwantowych.



Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 377. Niech $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($n \geq 3$) będzie skończonym podzbiorem płaszczyzny. Punkt p nazwiemy pseudośrodkiem symetrii A , gdy p jest środkiem symetrii zbioru powstałego przez usunięcie pewnego punktu z A . Ile co najwyżej pseudośrodków symetrii może mieć A ?
Rozwiązanie na str. 15

M 378. Wykazać, że dla dowolnego $n \geq 100$ sześcian można rozciąć na n (niekoniecznie równej wielkości) sześcianów.
Rozwiązanie na str. 3

M 379. Wykazać, że dwustosunek współliniowych punktów A, B i C, D , czyli $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$, nie zmienia się przy rzutowaniu środkowym.
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 160. Na taśmę transportera posuwającą się z prędkością $v_0 = 1 \text{ m/s}$ nasunięto z boku pudełko. Prędkość pudełka względem ziemi tuż po znalezieniu się na taśmie wynosi $u_0 = 2 \text{ m/s}$ i jest prostopadła do prędkości taśmy. Jaką minimalną prędkość względem ziemi będzie miało pudełko w trakcie ustalania się jego ruchu? Zakładamy, że siła tarcia oraz szerokość taśmy są na tyle duże, aby pudełko nie ześlizgnęło się z taśmy.
Rozwiązanie na str. 4

W jakim świecie żyjemy?

Mgr Janusz KORWIN-MIKKE

Ciekawy „Paradoks czasu czekania” (*Delta* 2/1984) przypomniał mi pewne zagadnienie, którym się zajmowałem przed laty, gdy pracowałem w Warszawie w Uniwersytecie Warszawskim.

W określonych warunkach każdy z nas umie mniej więcej określić jakie jest, jego zdaniem, prawdopodobieństwo różnych zdarzeń, które mogą się mu przydarzyć. Np. idąc przez las zakładamy, że szansa natknięcia się na agresywną watahę głodnych wilków nie przekracza 1%. Jest to subiektywne prawdopodobieństwo tego zdarzenia. Subiektywne prawdopodobieństwa często zmieniają się dzięki otrzymywaniu informacji o warunkach, w jakich się znajdujemy. Informacji mogą dostarczać opinie innych, jak też zaistniałe wydarzenia. Jeśli np. spadnie nam na głowę (lub obok) wielka szyszka, to odskoczmy na bok, bo subiektywne prawdopodobieństwo, że zaraz spadnie następna, u nas wzrośnie. Tym bardziej jeśli spadną dwie, jedna po drugiej. Tak głosi zasada indukcji niezupełnej.

Jeśli, wracając do przykładu z wymienionego wyżej artykułu, zbliżywszy się do przystanku autobusowego zobaczymy odjeżdżający „nasz” autobus, powiedzmy linii „1”, to możliwe są bardzo różne reakcje. Albo uznamy, że teraz na następną „1” będziemy musieli czekać przepisowe (= rozkładowe) 10 minut (czyli jej przyjazd za chwilę uznamy za mniej prawdopodobny, niż gdybyśmy przyszli na przystanek i nie widzieli autobusu), albo uznamy, że (jak w przypadku szyszki) zaczęła się widać seria „1” i zaraz przyjedzie następna, albo uznamy ten fakt za zupełnie nie mający znaczenia i będziemy przekonani, że (tak jak to zazwyczaj było) po średnio 5 minutach „1” nadjedzie, albo jeszcze inaczej.

Znając subiektywne prawdopodobieństwa tego samego zdarzenia wedle różnych ludzi w tych samych warunkach możemy wiele dowiedzieć się nie tyle o nich, co właśnie o owych warunkach.

Tu przykład (autentyczny). Szczerom kładziono pożywienie to w lewym, to znów w prawym końcu labiryntu w kształcie litery T. Czyniono to ze stałą

częstotliwością $\left(\frac{1}{4} : \frac{3}{4}\right)$. Szczury biegały do obu ramion z tą samą (1:3)

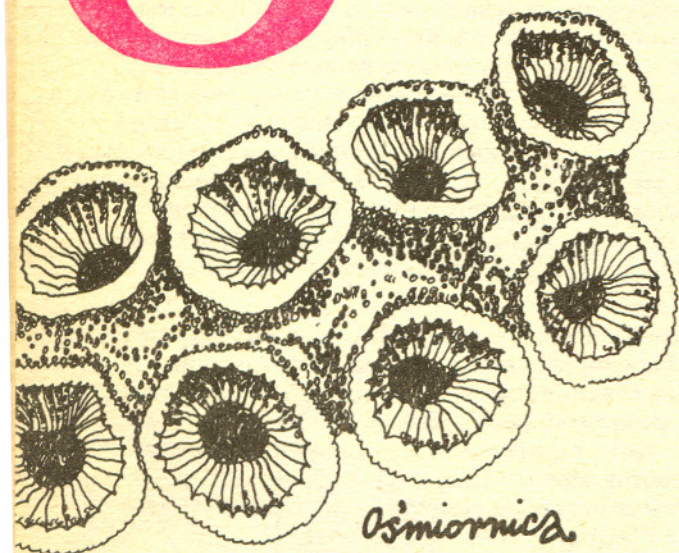
częstotliwością. Wydawać by się mogło, że odkryły, zmierzyły one częstotliwość kładzenia pożywienia. Otóż nie! Część szczurów była „głupia” i biegała raz tu, raz tam, po połowie. Ale były i takie, które biegały zawsze do ramienia, gdzie częściej kładziono pożywienie — łatwo się zgodzić, że jest to optymalna strategia i nazwać te szczury „mądrymi”. Na tym przykładzie można zauważyć, jaką rolę w społeczeństwie pełnią osobniki mniej czułe na bodźce środowiska: dzięki nim cała zbiorowość zachowywała się optymalnie, jak w grze z przeciwnikiem (nie z naturą!).

Wracając do oczekujących na autobus ludzi. Ich prawdopodobieństwo subiektywne wskazuje, czy uważają oni, że autobusy nasze kursują jak w świecie cywilizowanym (rozkładowo), czy też jak w dziczy. Łącznie mamy społeczną ocenę stanu naszej „cywilizacji autobusowej”. Bo subiektywne prawdopodobieństwo można mierzyć (powiedzmy zakładając się w różnych stosunkach 2:7, 4:5, itp.). Ludzie są więc dla nas w tym przypadku subtelnymi termometrami badającymi sytuację: „1” uciekła — prawdopodobieństwo następnej wzrosło, zmalało, nie zmieniło się.

Post Scriptum. Nauka zajmuje się faktami i ich związkami — a nie ich oceną. Określenie „świat cywilizowany” i „dzicz” użyłem wyłącznie w sensie opisowym. Nigdzie nie jest powiedziane, że „lepiej” żyć w kryształach. Życie jest tam prostsze — ale też kryształy są bardziej kruche od np. bryły gliny. W miarę komplikowania się struktury kryształu rośnie zarówno koszt strat w katastrofie — jak i prawdopodobieństwo jej zaistnienia (np. dwie słynne awarie elektryczności w megalopolis Nowego Jorku).



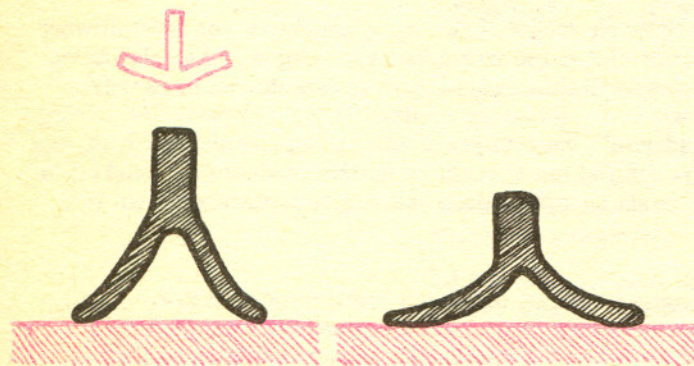
mata delta



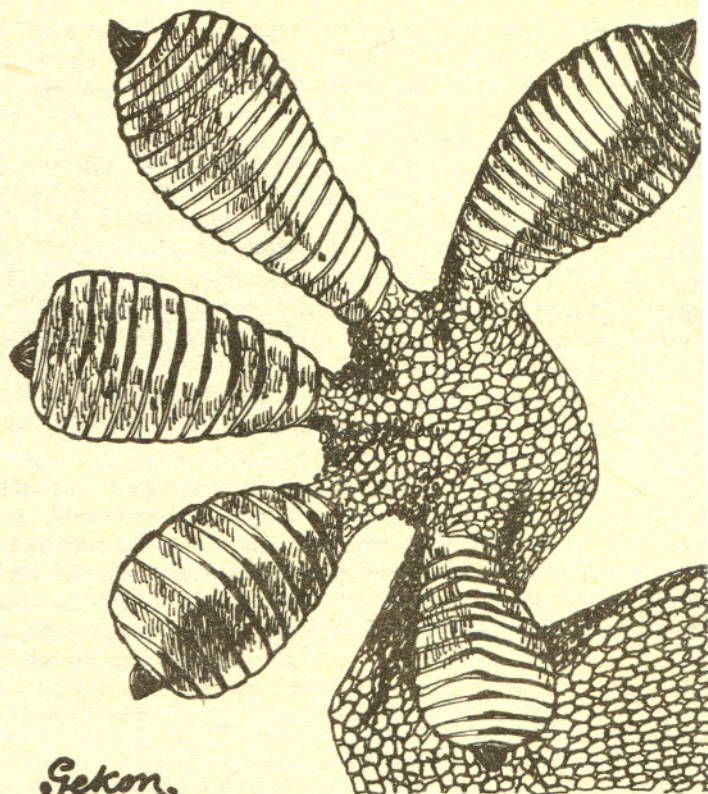
Ośmiornica

Przyssawki

Najczęściej spotykana gumowa przyssawka zbudowana jest bardzo prosto — jest to mniej więcej stożek i już. Jeśli ten stożek przycisnąć mocno do gładkiej powierzchni, to nie powróci on samorzutnie do pierwotnego położenia po ustąpieniu nacisku.

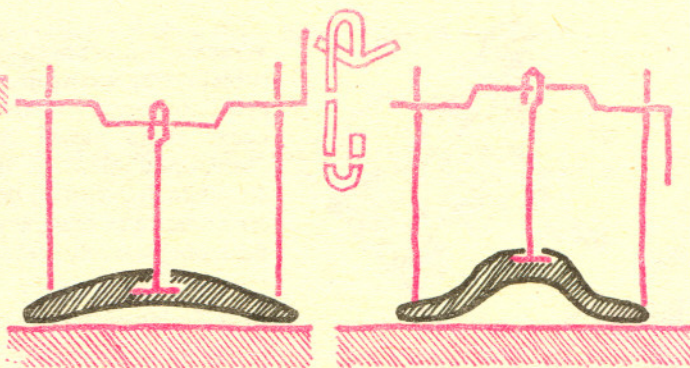


Trzeba będzie nawet sporej siły, by oderwać go od podłoża. Każdy to wie — są takie strzały do różnych dziecińczych strzelb, są takie wieszaki na ręczniki, tak mocuje się różne przyrządy do wewnętrznych szklanych ścianek akwariów itd. Wiadomo też, dlaczego przyssawka tak działa: po wyciśnięciu powietrza czy wody z wnętrza stożka guma prostując się, „chcąc znowu zostać stożkiem” powoduje wewnątrz podciśnienie w stosunku do otaczającego powietrza czy wody, a różnica ciśnień przyciska przyssawkę do podłoża. Siła potrzebna do oderwania przyssawki to iloczyn owej różnicy ciśnień przez powierzchnię przyssawki.



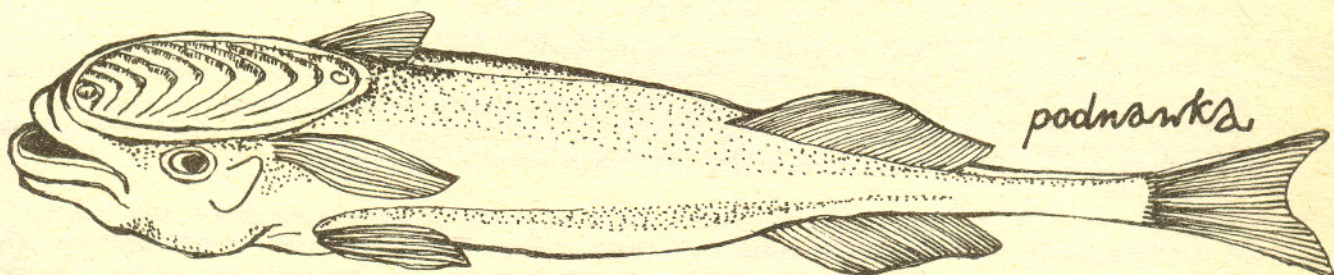
Sekon

Ze względu na wielkość siły potrzebnej do oderwania przyssawki, takie jak wyżej opisane, robi się małe i pożytek jest z nich niewielki. Większe zastosowanie mają przyssawki o bardziej skomplikowanej budowie. Po prostu o innej technice uzyskiwania podciśnienia. Są one mianowicie wyposażone w urządzenie do powiększenia wewnętrznej komory przyssawki po jej minimalnym przyssaniu. W ten sposób podciśnienie staje się większe i siła potrzebna do oderwania przyssawki wzrasta. Ale nie o to głównie tutaj chodzi — ważniejsze jest, że można potem wewnętrzną komorę zmniejszyć, różnica ciśnień zmaleje prawie do zera i przyssawkę można będzie bardzo łatwo oderwać.



Były (są?) w handlu np. maszynki do mięsa, które się mocuje do stołu właśnie za pomocą takiej przyssawki (jej schemat na rysunku). Był i jest ten typ przyssawki stosowany przez ośmiornice.

Można ten sam efekt osiągnąć jeszcze w inny sposób. Jest to typ przyssawki wyróżniający się tym, że jej pociągnięcie w jedną stronę równoległe do podłoża zwiększa siłę przyssania, w stronę zaś przeciwną — zmniejsza do zera. Schemat na rysunku. Nie umiemy wskazać tego typu przyssawki produkowanej przemysłowo. W przyrodzie stosują takie przyssawki jaszczurki gekony (na palcach mianowicie) i ryby podnawki (na głowie).

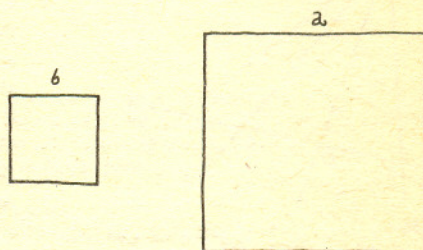
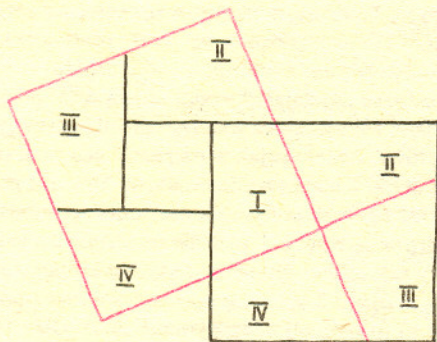
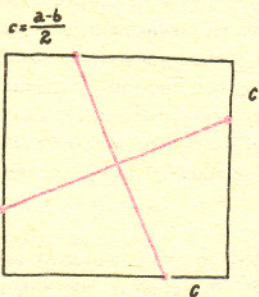


Cięcie kwadratu

$$\left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{2}{n+m}\right) = \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{2}{n+m}\right)$$

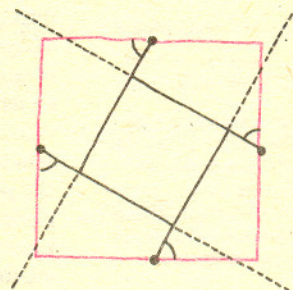
Niech $m \geq 0$. Droga łącząca $(0,0)$ i (n, m) musi mieć $\frac{2}{n+m}$ odcinków wzdłuż których się i $\frac{2}{n-m}$ opadających — rozłożonych w dowolny sposób. Stąd liczba takich dróg jest równa

Jeżeli mamy dwa kwadraty, to większy z nich (lub którykolwiek, gdy są równe) możemy tak przeciąć dwoma prostymi cięciami, że z otrzymanych pięciu kawałków ułoży się jeden kwadrat.



Od wierzchołków większego kwadratu odkładamy na bokach stale w tę samą stronę (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) odcinek $c = \frac{a-b}{2}$, gdzie a i b to boki wyjściowych kwadratów ($a \geq b$). Przecinamy większy kwadrat wzdłuż odcinków łączących punkty otrzymane na przeciwległych bokach. I gotowe. Prawda? Ale dlaczego zawsze „wychodzi” kwadrat?

A oto inne zadanie: Jeśli ze środków boków kwadratu odłożymy takie same kąty (między 45° a 90°), a potem rozetniemy ten kwadrat wzdłuż otrzymanych linii od środków do drugich przecięć linii, to otrzymamy mniejszy kwadrat i cztery inne części, z których złoży się inny kwadrat.



Jasne — jest to odwrócenie poprzedniego zadania. Jak jednak dobrać kąt, by wycięty kwadrat był z góry założonej wielkości?

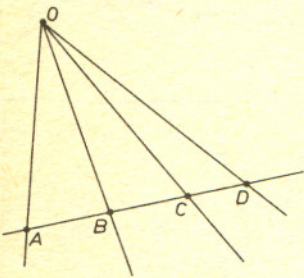
Wybuchy rentgenowskie w kosmosie

Dr Michał

JAROSZYŃSKI



Rozwiązanie zadania M 379. Wystarczy wykazać, że dwustosunek ten da się wyrazić tylko za pomocą kątów utworzonych przez proste OA , OB , OC , OD , gdzie O jest środkiem rzutowania.



Mamy

$$\frac{AB}{\sin * AOB} = \frac{AO}{\sin * ABO}$$

$$\frac{AD}{\sin * AOD} = \frac{AO}{\sin * ADO}$$

$$\frac{CD}{\sin * COD} = \frac{CO}{\sin * CDO}$$

$$\frac{CB}{\sin * COB} = \frac{CO}{\sin * CBO}$$

a więc

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{AO \cdot \sin * AOB}{\sin * ABO} \cdot \frac{\sin * CDO}{AO \cdot \sin * AOD}$$

$$\frac{CO \cdot \sin * COD}{\sin * CBO} = \frac{\sin * AOB \cdot \sin * COD}{\sin * AOD \cdot \sin * COB}$$

$$\frac{CO \cdot \sin * COB}{\sin * AOD} = \frac{\sin * CBO}{\sin * CDO}$$

Ponadto, w zależności od kolejności punktów A , C , D na przechodzącej przez nie prostej, kąty ADO i CDO są równe albo przyległe, a więc zawsze $\sin * ADO = \sin * CDO$.

Podobnie $\sin * CBO = \sin * ABO$. Zatem

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin * AOB \cdot \sin * COD}{\sin * AOD \cdot \sin * COB}$$

Uwaga: Również stosunek anharmoniczny współliniowych punktów A , B i C , D określony przez zastąpienie w definicji dwustosunku odcinków przez wektory, nie zmienia się przy rzutowaniu środkowym. Oczywiście zarówno dwustosunek, jak i stosunek anharmoniczny nie zmieniają się także przy rzutowaniu równoległym.

W końcu roku 1975 odkryte zostało nowe zjawisko astronomiczne: wybuchy rentgenowskie. Do chwili obecnej poznaliśmy około 30 źródeł takich wybuchów. Ich podstawowe cechy są podobne: natężenie promieniowania dochodzącego do nas (a ściślej do umieszczonej na satelitach aparatury rejestrującej) narasta w ciągu 1 sekundy do wartości maksymalnej, a następnie zanika w ciągu kilku-kilkudziesięciu sekund. Maksymalna moc źródła jest około 25000 razy wyższa od mocy Słońca; w jednym wybuchu wyemitowane zostaje tyle energii, ile Słońce wysyła w ciągu 3 dni. Widmo promieniowania i jego moc jest taka, jakby pochodziło on z kuli o promieniu 10 km, która w ciągu 1 sekundy rozgrzewa się do 30 mln stopni, a potem nieco wolniej stygnie. Oznacza to, że źródło w czasie wybuchu jest 5000 razy gorętsze od Słońca i wobec tego wysyłane przez nie fotony mają tyleż razy wyższą energię. Dlatego należą do rentgenowskiej części widma promieniowania elektromagnetycznego. Wybuchy powtarzają się z mniejszą lub większą regularnością co kilka — kilkanaście godzin, z tym że aktywność niektórych źródeł może zaniknąć na przeciąg tygodni, a nawet miesięcy. Oprócz gwałtownych rozbłysków można też zaobserwować promieniowanie rentgenowskie wysyłane przez te same źródła w sposób ciągły. Natężenie tej ciągłej składowej promieniowania jest o wiele niższe niż w maksimum wybuchu; z drugiej strony wybuchy są stosunkowo rzadkie i jeśli porównać sumaryczną energię wielu wybuchów z energią wypromieniowaną w tym samym czasie w sposób ciągły, to okaże się, że ta ostatnia jest większa i to około stokrotnie! Źródła wybuchów znajdują się w miejscach zajętych w naszej Galaktyce „głównie” przez stare gwiazdy. W paru przypadkach udało się te obiekty zaobserwować przez teleskopy optyczne i na tej podstawie można twierdzić, że ich częścią składową są mało masywne stare gwiazdy.

Powyższy opis zjawiska jest na tyle bogaty, że dość szybko udało się otrzymać modele teoretyczne tłumaczące mechanizm jego powstawania. W ciągu pierwszych miesięcy po odkryciu proponowano dość spekulatywne modele na ogół tłumaczące tylko niektóre cechy zjawiska. Już po roku znana była jednak idea leżąca u podstaw modelu, który opisujemy. Szczegółowe rachunki wykonywane przez parę następnych lat potwierdziły jej słuszność.

Wróćmy teraz do miejsca, w którym opisywaliśmy widmo promieniowania w czasie wybuchu. Użyliśmy tam porównania z gorącą kulą o promieniu 10 km. „Kule” tych rozmiarów znane są w astrofizyce jako gwiazdy neutronowe. Mamy więc silny argument świadczący o tym, że w czasie wybuchu promieniowanie wysyłane jest z powierzchni takiej gwiazdy. Nie wyjaśnia to jeszcze mechanizmu samego wybuchu. Przeciwnie: gwiazdy neutronowe są końcowymi produktami ewolucji gwiazdowej i jako takie nie stanowią niezależnych źródeł energii. (Są ostatecznie skurczone i wychłodzone, a wszystkie możliwe reakcje egzotermiczne „już” w nich zaszły.) Z tym problemem astrofizycy poradzi sobie już wcześniej badając inne źródła rentgenowskie. Wiele z nich to układy gwiazdy neutronowej i masywnej, młodej gwiazdy. Jeśli możliwy jest przepływ materii na gwiazdę neutronową z jej towarzysza (akrecja), to materia ta, spadając w silnym polu grawitacyjnym gwiazdy neutronowej, rozpędza się do prędkości prawie tak dużych jak prędkość światła. Gwałtowne zatrzymanie na powierzchni prowadzi do podgrzewania gazu. Ciepło może być następnie wypromieniowane, a temperatura gazu jest na tyle wysoka, że wysyłane są promienie Roentgena. Domyślamy się, że to samo może zachodzić w interesujących nas obiektach. W tym przypadku ilość materii dostarczonej przez mniej masywną gwiazdę-towarzysza jest mniejsza i wobec tego promieniowanie wysyłane w sposób ciągły jest słabsze. Pomiaru wskazują na istnienie takiej właśnie słabej składowej ciągłej promieniowania w źródłach wybuchowych.

Spadający na gwiazdę neutronową gaz składa się głównie z wodoru i helu. Jądra każdego z tych pierwiastków mogą w odpowiednich warunkach (przy dostatecznie wysokiej temperaturze i gęstości) łączyć się w reakcjach termojądrowych. Powstają wtedy jądra atomowe cięższych pierwiastków i wydzielona zostaje energia. Jądro atomu wodoru to po prostu proton. Wszystkie cięższe pierwiastki zawierają w swych jądrach również neutrony (np. hel — 2 protony i 2 neutrony). Wynika stąd, że reakcje termojądrowe „spalające” wodór muszą część protonów zamienić najpierw na neutrony, aby możliwe było ich wzajemne wiązanie siłami jądrowymi. Proces „zamiany” protonu w neutron jest możliwy. Podobnie jak w rozpadzie neutronu pojawiają się tu jeszcze inne cząstki, a reakcje zachodzą dzięki oddziaływaniom słabym. Ten fakt powoduje, że są one bardzo powolne, o wiele wolniejsze niż np. reakcja łączenia neutronu z protonem siłami jądrowymi. Najwydajniejsze paliwo jądrowe — wodór — okazuje się nieprzydatne dla naszych celów: jak wynika z ilościowej analizy niemożliwy jest sekundowy lub krótszy wybuch z jego udziałem. Zupełnie inaczej ma się rzecz z helem: 3 jądra tego pierwiastka mogą połączyć się dając jądro atomu węgla i niepotrzebne są tu (powolne!) oddziaływania słabe. Dla zapoczątkowania tego procesu trzeba jednak podgrzać hel do kilkuset milionów kelwinów. Jeśli temperatura byłaby jeszcze wyższa — reakcje przebiegałyby znacznie szybciej. Jak powiedzieliśmy, na powierzchnię gwiazdy neutronowej spada gaz. Po zderzeniu z powierzchnią gwiazdy rozgrzewa się on do temperatury kilku milionów stopni — za niskiej na zapoczątkowanie reakcji jądrowych. Gaz zbiera się więc na powierzchni, przy czym jego głębsze warstwy, przyciskane przez leżące wyżej, ulegają ścisnaniu i rozgrzewają się. Im głębiej, tym

wyższa temperatura i gęstość. Na pewnej głębokości możliwe jest „spalanie” wodoru, ale — w związku z tym, co powiedzieliśmy wyżej — nie prowadzi ono do wybuchu. Dopiero gdy temperatura na dnie gromadzącej się warstwy osiągnie kilkaset milionów stopni, możliwe jest zapoczątkowanie reakcji termojądrowych z udziałem helu. Następuje to wówczas, gdy masa zgromadzonego gazu jest taka jak masa miliona km^3 wody — trochę mniej niż w Oceanie Atlantyckim. O sile pola grawitacyjnego gwiazdy neutronowej niechaj świadczy to, że grubość rozważanej warstwy wynosi 2 metry. Materia na jej dnie jest kilkadziesiąt milionów razy gęstsza od wody w Atlantyku...

Zapoczątkowanie spalania helu prowadzi do wydzielienia ciepła. Podgrzewa to gaz, który wobec tego lekko się rozpręża. Jego ciśnienie pozostać musi stałe, bo określa je ciężar wyższych warstw materii. Dlatego wzrasta temperatura w warstwie, w której zachodzą reakcje termojądrowe, co jeszcze je przyspiesza. Teraz już nic nie może zatrzymać spalania helu aż do jego wyczerpania. Dokładna analiza pokazuje, że spalanie helu ma charakter krótkotrwałego wybuchu. Przetransportowanie ciepła do powierzchni oraz jego wypromieniowanie zajmuje dalsze kilkanaście sekund. Opisany mechanizm dobrze oddaje własności obserwowanych wybuchów. Ilość materii, która musi się zebrać dla zapoczątkowania wybuchu, jest właśnie taka, że wydzielona w wybuchu energia zgadza się z obserwowaną. (Opisany model mógłby „przewidywać” wybuchy dużo częstsze i słabsze lub rzadsze i silniejsze od obserwowanych. To, że daje wybuchy o obserwowanej energii, jest jego bardzo silnym potwierdzeniem!) Nasuwa się tu pytanie, dlaczego nie wszystkie źródła promieni Roentgena wybuchają. Jedną z przyczyn może być szybszy niż w naszych modelach przepływ materii prowadzący do wyższych temperatur w gromadzącej się warstwie i wcześniejszego, spokojnego zapalenia się helu. Również silne pola magnetyczne na gwiazdzie neutronowej powodują, że strumień spadającej materii jest wąską strugą, a gromadząca się warstwa ma wyższą temperaturę. Obie powyższe przeszkody w mechanizmie wybuchania napotkać można w układach złożonych z młodych gwiazd. To jest prawdopodobnie przyczyną innego charakteru źródeł rentgenowskich w takich układach.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 3/1984

Jerzy Milczarek	- Gorzów Wkp.	45,64pkt
Włodzimierz Szymczyk-Zielonka		45,60pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	44,95pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	44,69pkt
Tomasz Komorowski	- Świdnik	43,82pkt
Warek Gażdecki	- Milanówek	43,30pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	42,18pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	42,08pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	42,08pkt
Współczynniki trudności zadań 79, 80, 81:		
1,86	3,54	2,16

Klub 44 wzbogacił się o trzy nowe nazwiska: J. Milczarek, W. Szymczyk, J. Małopolski /bowiem D. Sowizdrzał już po raz drugi/ i w ten sposób doбилиśmy do dwudziestki.

Niezwykle zwarta jest grupa przekraczająca metę bądź zbliżająca się do mety. Nigdy dotąd tak nie było, żeby 41 punktów na koncie nie wystarczało do znalezienia się w drukowanej czołówce ligi.

Klub 44

Zadania nr 94, 95, 96

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1984

94. W przestrzeni dane jest n półprostych o wspólnym początku OP_1^-, \dots, OP_n^- , przy czym $\angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \dots + \angle P_nOP_1 < 360^\circ$. (Symbol $\angle AOB$ oznacza miarę mniejszego z dwóch kątów płaskich o ramionach OA^-, OB^-). Udowodnić, że istnieje półprzestrzeń zawierająca wszystkie te półproste.

95. Rozwiązać w liczbach dodatnich następujący układ n równań z n niewiadomymi x_1, \dots, x_n (n jest daną liczbą naturalną):

$$x_i x_{i+1} = 2^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1, \quad x_n x_1 = 2^n.$$

96. Dla dowolnej liczby naturalnej k oznaczmy przez $s(k)$ sumę jej cyfr (w układzie dziesiętnym). Czy istnieje ciąg liczb naturalnych (a_n) taki, że:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(a_n)}{s(2a_n)} = \infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(a_n)}{s(3a_n)} = \infty?$$

Zadanie 96 przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rzuć monetę raz jeszcze, czyli prawo arcusa sinusa

Dr Jerzy RYLL

Pewnego deszczowego wieczoru Paweł postanowił sprawdzić, czy ten cały rachunek prawdopodobieństwa to aby nie lipa. Zaczął rzucać monetę i zapisywać kolejne wyniki. Zapis wyglądał tak: Paweł traktował orła jako +1, reszkę jako -1; dodawał liczby otrzymane w pierwszych k rzutach, otrzymaną sumę s_k zaznaczał jako punkt (k, s_k) w układzie współrzędnych i łączył odcinkami kolejne punkty. Rozumował tak: orzeł i reszka są tak samo prawdopodobne, a więc mniej więcej połowa otrzymanej łamanej powinna leżeć w górnej półpłaszczyźnie.

Po stu rzutach stwierdził ze zdumieniem, że 70 odcinków leży w górnej półpłaszczyźnie. Powtórzył to doświadczenie jeszcze cztery razy zapisując liczbę odcinków, których było więcej (leżących nad lub pod osią odciętych). Otrzymał kolejno 75, 73, 68, 74. „Albo ja mam pecha, albo ten cały rachunek prawdopodobieństwa do niczego się nie nadaje” — stwierdził i skończył zabawę z monetą.

Paweł rzeczywiście miał pecha, ale „w drugą stronę”. Jego wyniki były bardziej zbliżone do hipotetycznej pięćdziesiątki niż na to wskazuje rachunek prawdopodobieństwa. Dokładniej — prawdopodobieństwo uzyskania liczby między 50 a 75 jest

równe około $\frac{1}{3}$ (mniej więcej takie samo jest prawdopodobieństwo

uzyskania liczby większej od 93). Paweł powinien dokładnie zbadać całe doświadczenie i nie obrażać się na teorię. Właśnie za pomocą kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa obliczymy powyższe wyniki.

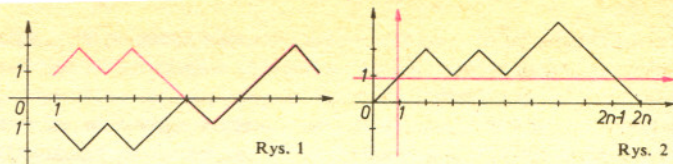
Oznaczmy liczbę łamanych, takich jakie rysował Paweł, łączących punkt $(0,0)$ z punktem (n, m) ($|m| \leq n$) przez $D_{n,m}$. Jeśli n i m są różnej parzystości, to oczywiście $D_{n,m} = 0$.

W pozostałych przypadkach $D_{n,m} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}}$ (dowód w numerze).

Obliczmy teraz, ile spośród łamanych łączących $(0,0)$ z $(2n,0)$ jest nieujemnych (tzn. leży w górnej półpłaszczyźnie) — oznaczmy ich liczbę przez p_n , a ile jest dodatnich (tzn. dodatkowo jedynymi ich punktami wspólnymi z osią odciętych jest ich początek $(0,0)$ i koniec $(2n,0)$) — tę liczbę oznaczmy q_n .

Zauważmy, że łamanych dodatnich od $(0,0)$ do $(2n,0)$ jest tyle, ile łamanych dodatnich od $(1,1)$ do $(2n-1,1)$. Wszystkich łamanych łączących te punkty jest $D_{2n-2,0}$ natomiast każdej takiej łamanej, która nie jest dodatnia, odpowiada dokładnie jedna łamana od $(1,-1)$ do $(2n-1,1)$ (odbijamy symetrycznie część łamanej od początku do pierwszego zetknięcia z osią odciętych — rys. 1). Takich łamanych jest $D_{2n-2,2}$. Tak więc

$$q_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$



Łatwo też zauważyć, że łamanych nieujemnych od $(0,0)$ do $(2n,0)$ jest tyle, ile dodatnich od $(0,0)$ do $(2n+2,0)$ (rys. 2). Tak więc

$$p_n = q_{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Podzielmy zbiór łamanych nieujemnych od $(0,0)$ do $(2n,0)$ na n rozłącznych zbiorów B_1, \dots, B_n . Łamana należy do zbioru B_k , jeśli przechodzi przez punkt $(2k,0)$ i jest dodatnia między $(0,0)$ i $(2k,0)$ (i oczywiście nieujemna między $(2k,0)$ i $(2n,0)$). Łamanych w zbiorze B_k jest więc $p_{k-1} \cdot p_{n-k}$. Sumując zbiory B_k otrzymujemy, iż ciąg p_n spełnia zależność rekurencyjną

$$p_n = \sum_{k=1}^n p_{k-1} \cdot p_{n-k} \quad (p_0 = 1).$$

Bezpośredni analityczny dowód tego faktu jest skomplikowany. Napiżemy o tym w jednym z następnych numerów *Delty*.

Rozpatrzmy następujące zdarzenia:

- 1° Łamana przechodzi przez punkt $(2n,0)$.
- 2° Łamana nie przechodzi przez punkty $(2k,0)$ dla $k = 1, \dots, n$.
- 3° Łamana jest nieujemna między 0 a $2n$.
- 4° Łamana przechodzi przez punkt $(2n,0)$ i jest dodatnia lub ujemna.
- 5° Łamana przechodzi przez punkty $(2n-2,0)$ i $(2n-1,-1)$ i jest nieujemna między 0 a $2n-2$.

Okazuje się, że prawdopodobieństwo zdarzeń 1° — 3° jest równe

$$a_n = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \quad (a_0 = 1),$$

$$b_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n+1} = \frac{1}{2n} a_{n-1} = a_{n-1} - a_n \quad (b_0 = 0).$$

Oczywiście przy obliczaniu tych prawdopodobieństw wystarczy się ograniczyć do łamanych o $2n$ odcinkach — tych łamanych jest 2^{2n} .

Prawdopodobieństwa zdarzeń 4° i 5° otrzymujemy natychmiast z obliczonych wartości q_n i p_{n-1} . Prawdopodobieństwo 2° jest równe $1 - b_1 - b_2 - \dots - b_n$ (od wszystkich łamanych odejmujemy te, które przechodzą przez $(2,0)$ — jest ich $b_1 \cdot 2^{2n}$; te, które nie przechodzą przez $(2,0)$, ale przechodzą przez $(4,0)$ — jest ich $b_2 \cdot 2^{2n}$ i tak dalej). Ale

$$1 - b_1 - b_2 - \dots - b_n = 1 - (a_0 - a_1) - \dots - (a_{n-1} - a_n) = a_n.$$

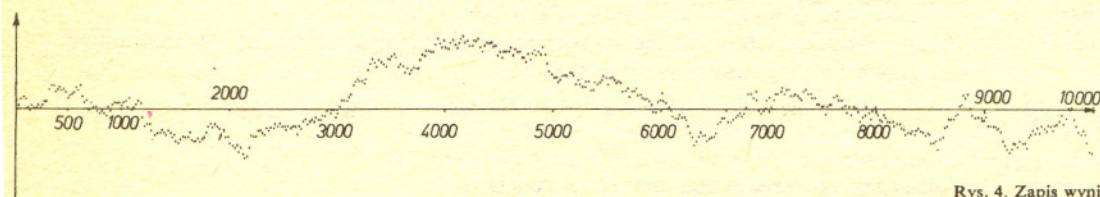
Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo 3° korzystając z prawdopodobieństwa 5°. 1° wynika bezpośrednio ze wzoru na $D_{2n,0}$.

Jako wniosek otrzymujemy równość

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k}$$

trudną do analitycznego udowodnienia.

Podzielmy zbiór łamanych o $2n$ odcinkach przechodzących przez $(2n,0)$ na rozłączne zbiory A_1, \dots, A_n . Do zbioru A_k należą łamane przechodzące przez $(2k,0)$, ale nie przechodzące przez $(2i,0)$ dla $i = 1, \dots, k-1$. Każda taka łamana jest wyznaczona



Rys. 4. Zapis wyników 10000 rzutów idealną monetą...

przez łamaną od (0,0) do (2k,0), która jest albo dodatnia, albo ujemna, oraz przez dowolną łamaną od (2k,0) do (2n,0). Tak więc do zbioru A_k należy $2^{2k} b_k 2^{n-k} a_{n-k}$ łamanych (korzystamy z 4° i 1°). Sumą zbiorów A_1, \dots, A_n jest zdarzenie 1° i otrzymujemy żadaną równość.

A teraz główne twierdzenie

Prawdopodobieństwo tego, że łamana o 2n odcinkach ma 2k odcinków dodatnich i 2n-2k ujemnych (tzn. 2k odcinków leży w górnej półpłaszczyźnie, a 2n-2k w dolnej) jest równe

$$a_k \cdot a_{n-k} = \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot 2^{-2n}.$$

Dowód jest indukcyjny względem n. Dla wygody oznaczmy przez $P_{k,n}$ prawdopodobieństwo z twierdzenia. Dla n = 0 nie ma co sprawdzać. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczb mniejszych niż n. Mamy oczywiście $P_{n,n} = P_{0,n} = a_n a_0 = a_n$. Niech $1 \leq k \leq n-1$. Wtedy łamana z interesującego nas zbioru musi przecinać oś odciętych — pierwszym punktem przecięcia niech będzie (2r,0). Albo łamana była między (0,0) a (2r,0) dodatnia (wtedy $r \leq k$), a dalej miała 2k-2r odcinków dodatnich i 2n-2k ujemnych, albo między (0,0) i (2r,0) była ujemna, a dalej było 2k odcinków dodatnich i 2n-2k-2r ujemnych (wtedy $r \leq n-k$).

Łamanych pierwszego rodzaju jest

$$\left(\frac{1}{2} b_r \cdot 2^{2r}\right) \cdot (P_{k-r, n-r} 2^{2n-2r}) = 2^{2n-1} \cdot b_r \cdot P_{k-r, n-r}$$

(pierwszy czynnik to liczba łamanych dodatnich, a drugi to po prostu oznaczenie). Łamanych drugiego rodzaju jest

$$\left(\frac{1}{2} b_r \cdot 2^{2r}\right) \cdot (P_{k, n-r} 2^{2n-2r}) = 2^{2n-1} \cdot b_r \cdot P_{k, n-r}.$$

Sumując te iloczyny i dzieląc przez 2^{2n} otrzymujemy

$$P_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k b_r \cdot P_{k-r, n-r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot P_{k, n-r}.$$

Skorzystajmy teraz z założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} P_{k,n} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k b_r \cdot a_{k-r} \cdot a_{n-k} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot a_k \cdot a_{n-k-r} = \\ &= \frac{1}{2} a_{n-k} \cdot \sum_{r=1}^k b_r \cdot a_{k-r} + \frac{1}{2} a_k \cdot \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot a_{n-k-r} = \\ &= \frac{1}{2} a_{n-k} \cdot a_k + \frac{1}{2} a_k \cdot a_{n-k} = a_k \cdot a_{n-k}. \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z wniosku poprzedzającego twierdzenie.

Już z powyższego twierdzenia można obliczyć podane na początku prawdopodobieństwa, ale byłoby to dosyć pracochłonne. Okazuje się, że można podać bardzo wygodny wzór przybliżony zwany pierwszym prawem arcusa sinususa.

Niech $0 < t < 1$. Prawdopodobieństwo tego, iż stosunek $\frac{k}{n}$

odcinków dodatnich do wszystkich odcinków jest mniejszy niż t, jest zbieżne (przy $n \rightarrow \infty$) do

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}.$$

Ze wzoru Stirlinga ($n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$) mamy

$$P_{k,n} = \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot 2^{-2n} \approx \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}.$$

Jeśli $\frac{1}{2} < t < 1$, to prawdopodobieństwo tego, że $\frac{k}{n}$ leży między $\frac{1}{2}$ a t, jest równe

$$\sum_{\frac{n}{2} < k < tn} P_{k,n} = \frac{1}{\pi n} \sum_{\frac{n}{2} < k < tn} \left(\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Przy $n \rightarrow \infty$ prawa strona dąży (jako ciąg sum Riemanna) do

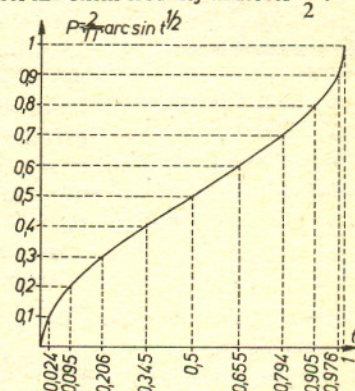
$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} - \frac{1}{2}.$$

Ale prawdopodobieństwo, iż $\frac{k}{n}$ nie jest większe od $\frac{1}{2}$, jest oczywiście równe $\frac{1}{2}$, stąd nasz wzór przybliżony.

Wzór powyższy dobrze przybliża wartości nawet dla małych n (np. n = 20). Z wykresu funkcji występującej po prawej stronie

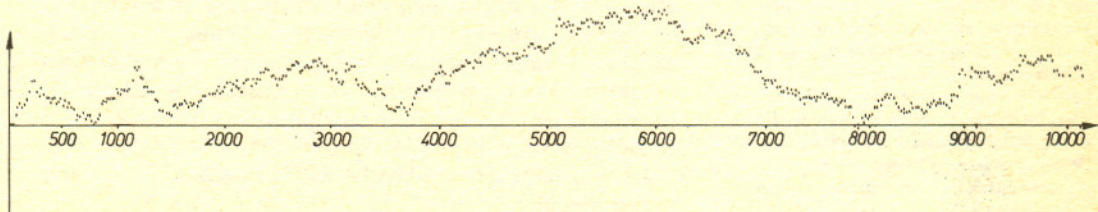
(rys. 3) widać, że stosunek $\frac{k}{n}$ ma dużo większą szansę być bliski

zeru lub jedności niż bliski średniej wartości $\frac{1}{2}$.



Rys. 3

W książce W. Fellera „Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa” podany jest przykład przebiegu doświadczenia imitującego 10 000 rzutów monetą (rys. 4). Rozpatrzmy też doświadczenie odwrotne (rys. 5) — punkt końcowy traktujemy jako początek układu współrzędnych i zmieniamy zwrot osi odciętych. Okazuje się, że bardziej prawdopodobne jest doświadczenie mniej „zrównoważone” niż to na rys. 5 od doświadczenia bardziej „zrównoważonego” niż to z rys. 4 (odpowiednie prawdopodobieństwa są równe 0,10 i 0,07).



Rys. 5. ... i to samo „od tyłu”.

Zjawisko Mössbauera

Dr Andrzej KOTLICKI

Metoda pomiarowa, z którą chcę zapoznać Czytelników, została odkryta w 1958 roku przez Rudolfa Mössbauera i doczekała się w chwili obecnej kilkudziesięciu monografii, własnego czasopisma naukowego oraz wielu poświęconych jej kongresów naukowych. Sam zbiór streszczeń prac mössbauerowskich, wydawany najpierw co kilka lat, a obecnie co miesiąc, to już kilkanaście grubych tomów.

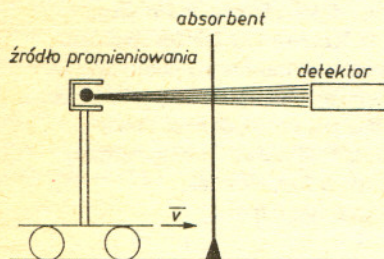
Poza fizyką spektroskopii mössbauerowska znalazła zastosowanie w chemii, biologii, geologii, archeologii, geofizyce i innych dziedzinach badań podstawowych, a także w technice. Emisja kwantu gamma o energii E związana jest, ze względu na prawo zachowania pędu, z odrzutem emitującego obiektu, w tym przypadku jądra atomowego. Ponieważ dla fotonu $E_\gamma = p_\gamma c$, gdzie p_γ jest pędem fotonu, prosty rachunek wykazuje, że energia odrzutu wynosi $\frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$ (M masa jądra). W przypadku emisji energia kwantu musi być o tę wartość mniejsza od różnicy energii wzbudzonych poziomów jądrowych, między którymi nastąpiło przejście. Analogiczne rozumowanie wskazuje, że absorpcja może zajść, gdy energia jest o $\frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$ większa od różnicy energii poziomów. Dla przejścia gamma szerokość naturalna linii, wynikająca z zasady nieoznaczoności Heisenberga, jest (w odróżnieniu od przejść optycznych) mniejsza od energii odrzutu, wydaje się więc, że emisji i absorpcji rezonansowej nie da się obserwować dla atomów nie związanych, np. w gazie.

Dotychczasowe rozumowanie opierało się na założeniu, że emitujące lub absorbujące jądro znajduje się w spoczynku. Proste rozważania wykorzystujące prawa zachowania energii i pędu prowadzą do wniosku, że gdy emitujące lub absorbujące jądro znajduje się w ruchu, to energia odrzutu jądra zależy od jego prędkości i kierunku, jaki ta prędkość tworzy z kierunkiem emisji. W przypadku emisji z beładnie poruszających się atomów gazu prowadzi to do poszerzenia linii emisyjnej i absorpcyjnej. Może to przy dużych temperaturach gazu prowadzić do absorpcji rezonansowej, w takich warunkach bardzo trudnej do obserwacji. Okazało się jednak, że w przypadku emisji i absorpcji zachodzącej w atomach znajdujących się w ciele stałym lub bardzo lepkiej cieczy możliwy jest proces bezodrzutowy — pęd odrzutu jądra przejmowany jest przez całe ciało, którego emitujące lub absorbujące jądro jest częścią, a zatem energia odrzutu jest pomijalnie mała (ze względu na bardzo dużą masę M , w tym przypadku jest to masa ciała makroskopowego). Taki proces to właśnie zjawisko Mössbauera. Zostało ono dotychczas zaobserwowane w 80 izotopach 44 pierwiastków.

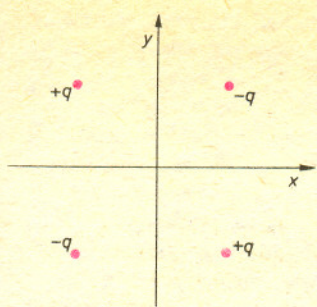
Sama możliwość obserwacji rezonansu dla promieniowania gamma i ewentualnie jego zależności od temperatury nie usprawiedliwiałaby tak szerokiego zastosowania efektu. Okazało się jednak, że wykorzystując zjawisko Dopplera można obserwować kształt linii rezonansowej, a także porównywać różnice energii poziomów źródła z różnicą poziomów w absorbencie.

Dla najbardziej rozpowszechnionego izotopu mössbauerowskiego — żelaza 57 — szerokość linii wynosi około 10^{-8} eV. Jak łatwo obliczyć, ruch źródła względem absorbentu z prędkością rzędu milimetra na sekundę jest wystarczający do zmiany energii kwantu gamma o tę wartość. Wobec tego, jeżeli będziemy badać zależność transmisji przez absorbent (liczby docierających poprzez absorbent do detektora kwantów gamma) od wzajemnej prędkości źródła względem absorbenta, to otrzymamy kształt linii rezonansowej. Dodatkowo, jeżeli różnica energii poziomów w źródle będzie przesunięta nieznacznie (10^{-8} — 10^{-6} eV) względem różnicy poziomów w absorbencie, to będzie można wyznaczyć wielkość tego przesunięcia.

Absorpcję rezonansową obserwujemy, gdy układ naświetlamy promieniowaniem o energii fotonów równej różnicy energii stanów podstawowego i wzbudzonego. Układ przechodzi wówczas w stan wzbudzony; ponownemu przejściu do stanu podstawowego towarzyszy emisja promieniowania o tej samej długości fali (energii, fotonu), ale na ogół w innym kierunku niż fala padająca. Wiązka padająca jest więc osłabiona po przejściu przez absorbent.



Schemat doświadczenia wykorzystującego zjawisko Mössbauera. Absorbent i źródło zawierają ten sam izotop mössbauerowski. Ruch źródła powoduje zmianę długości fali promieniowania padającego na absorbent (zjawisko Dopplera). Mierząc osłabienie wiązki w zależności od prędkości v źródła można wyznaczyć kształt linii absorpcyjnej. (W innym wariantcie można absorbent poruszać pomiędzy nieruchomym źródłem a detektorem.)



Moment kwadrupolowy Q układu ładunków zdefiniowany jest jako:

$$Q = \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2) \quad (\text{lub } \int \rho(r) (3z^2 - r^2) d_3r),$$

gdzie sumowanie dotyczy wszystkich ładunków q_i układu o współrzędnych x_i, y_i, z_i , $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Rysunek przedstawia najprostszy (płaski) układ ładunków o różnym od zera momencie kwadrupolowym.

Zjawisko Mössbauera jest więc metodą pozwalającą na wykrywanie zmian poziomów jądrowych o 10^{-8} eV! Ponieważ typowe energie występujących w tym zjawisku kwantów gamma wynoszą $10^4 - 10^5$ eV, to dokładność energetyczna metody (dobroć rezonansu) wynosi $10^{12} - 10^{13}$. Dla izotopu ^{67}Zn dobroć ta osiąga wartość 10^{16} , a dla ^{107}Ag — 10^{22} (eksperyment potwierdzający występowanie zjawiska Mössbauera w tym ostatnim izotopie nie jest przekonujący). Tak wielka energetyczna zdolność rozdzielcza spektroskopii mössbauerowskiej pozwoliła na obserwacje wpływu otoczenia atomu na poziomy jądrowe. Istotnymi w tym przypadku oddziaływaniami (zwanymi nadsztylnymi) okazały się: oddziaływanie kontaktowe ładunku jądra z ładunkiem elektronów, oddziaływanie momentu kwadrupolowego jądra z gradientem pola elektrycznego i oddziaływanie momentu magnetycznego jądra z polem magnetycznym. Te ostatnie dwa oddziaływania prowadzą do rozszczepienia poziomów, a więc do pojawienia się w widmie mössbauerowskim szeregu linii. Linie te, będące wynikiem obecności oddziaływań, tworzą często układ charakterystyczny dla substancji, w jakiej znajduje się atom mössbauerowski. Pozwala to na wykorzystanie zjawiska przy analizie chemicznej. Duża rozdzielczość metody i fakt, że jest to analiza nie niszcząca, spowodował, że zastosowano ją do badania związków żelaza występujących w skałach księżycowych otrzymanych w czasie kolejnych wypraw Apollo oraz sond księżycowych Łuna 16 i 20. Czułość metody na ruch źródła względem absorbenta pozwoliła na szereg oryginalnych zastosowań. I tak na przykład zjawisko Mössbauera wykorzystano do badania aktywności mrówek w mrowisku. Mrówki „nakarmione” substancją zawierającą ^{57}Co , a więc izotop, który w wyniku wychwytu elektronu przechodzi w ^{57}Fe w stanie wzbudzonym, tworzyły zespół źródeł promieniowania gamma. Ruchomym absorbentem było żelazo w metalu diamagnetycznym o wysokiej symetrii, a więc dające pojedynczą linię. Im większa była aktywność mrówek, a więc im więcej z nich poruszało się w różnych kierunkach, tym większe było zróżnicowanie energii emitowanych kwantów gamma, czyli tym większa szerokość linii absorpcyjnej. Pozwoliło to na stosunkowo łatwe wyznaczenie zależności aktywności mrowiska od różnych czynników (przyszłościowe wsadzenie kija w mrowisko spowodowałoby na pewno znaczne poszerzenie linii). Ważnym zastosowaniem zjawiska Mössbauera były badania dotyczące molekuł organicznych zawierających żelazo. Szczególnie dużo uwagi poświęcono badaniom nad myoglobiną i hemoglobiną. Na podstawie widm mössbauerowskich okazało się możliwe obserwowanie szybkości reakcji hemoglobiny z tlenem. Stwierdzono, że spodziewane w temperaturach helowych (tj. temperaturach rzędu 2–3 K) spowolnienie reakcji chemicznych jest mniejsze niż przewidywano. Okazało się, że w związku z procesami tunelowania także w temperaturze helowej zachodzą pewne reakcje. Sugerowałoby to, że osoby dające się zamrozić do temperatury helowej nie mają wielkich szans na ożywienie w przyszłości.



Rozwiązanie zadania M 377. Łatwo zauważyć, że każdy pseudośrodek symetrii musi być środkiem pewnego odcinka łączącego dwa punkty zbioru A . Wynika stąd, że zbiór pseudośrodków symetrii A jest skończony. Możemy więc znaleźć taką prostą P , by rzuty równoległe na P wszystkich punktów a_i i wszystkich pseudośrodków symetrii s_j były różne.

Ustalmy zwrot prostej P i załóżmy, że rzuty b_i punktów a_i są ponumerowane tak, by $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Łatwo zauważyć, że rzut r_j pseudośrodku s_j jest pseudośrodkiem zbioru $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Jeżeli teraz usuniemy z B jeden z punktów b_2, \dots, b_{n-1} , to środków symetrii otrzymanego zbioru może być tylko środek r odcinka $b_1 b_n$. Wynika stąd, że B ma najwyżej trzy pseudośrodki symetrii, punkt r oraz ewentualne środki symetrii zbiorów $\{b_1, \dots, b_{n-1}\} = B - \{b_n\}$ i $\{b_2, \dots, b_n\} = B - \{b_1\}$. Ponieważ rzuty różnych pseudośrodków symetrii A były różne, więc A może mieć najwyżej trzy pseudośrodki. (Łatwo zauważyć, że gdy $n = 3$, A ma trzy pseudośrodki.)

Czułość metody na niewielkie prędkości ruchu źródła względem absorbenta pozwala zastosować ją do wykrywania i pomiaru małych drgań. Umieszczenie niewielkich ilości ^{57}Co w odpowiednio dobranych punktach pozwala zmierzyć amplitudę drgań różnych części samolotu. W ten sam sposób badano amplitudę drgań bębna usznego przy różnych częstościach odbieranego dźwięku. Dokładność pomiaru osiągała 1 Å. W jednym z najbardziej znanych doświadczeń wykorzystujących zjawisko Mössbauera dwaj uczeni amerykańscy R. V. Pound i G. A. Rebka zmierzili przesunięcie energetyczne linii promieniowania gamma ^{57}Fe wywołane „spadaniem” fotonów w polu grawitacyjnym Ziemi. Pomiar wykonano w Uniwersytecie Harvarda w 1960 roku; różnica wysokości źródła i absorbentu wynosiła 22 m. Wyniki potwierdziły przewidywania teorii względności, z których wynika, że foton spadający z wysokości H w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g powinien doznawać względnego przesunięcia energetycznego

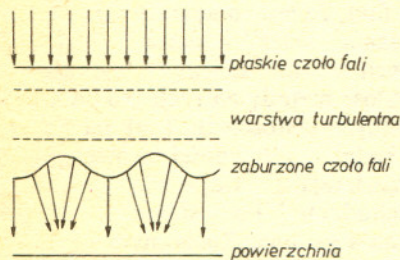
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{gH}{c^2}.$$

Grawitacyjne przesunięcie energetyczne fotonów mierzono później wielokrotnie zwiększając dokładność pomiaru.

Są to oczywiście tylko niektóre z rozlicznych zastosowań zjawiska Mössbauera. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do odpowiednich monografii, np. W. I. Goldanski — *Efekt Mössbauera i jego zastosowania w chemii*.

Pisząc „Patrz w niebo” przed pół rokiem (*Delta* 3/1984) postawiłem tezę, że patrząc w dzień na niebo nie dostrzeżemy gwiazd używając nawet lornetki. Dociekliwy Czytelnik mógłby jednak zapytać, czy użycie większej lunety nie doprowadzi do sukcesu? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że oczywiście tak. Bo przecież obraz gwiazdy jest praktycznie punktowy, co oznacza, że przy zastosowaniu nawet ogromnych powiększeń nie zobaczymy tarczy. Gdy obserwujemy przez teleskopy o bardzo długich ogniskowych (o dużych powiększeniach), pole widzenia jest bardzo małe, podobnie jak w czasie obserwacji przez długą rurę. Przy danej średnicy teleskopu ilość światła pochodzącego od gwiazdy jest stała, natomiast przy coraz dłuższych ogniskowych ilość światła pochodzącego od tła nieba jest coraz mniejsza. Tak więc w idealnym przypadku zauważymy dowolnie słabą gwiazdę na dowolnie jasnym tle, o ile będziemy dysponować teleskopem o dostatecznie długiej ogniskowej.

Każdy jednak czuje, że odpowiedź powyższa jest błędna nie tylko dlatego, że nikt nie będzie budował teleskopów o kilometrowych ogniskowych. Istotną rolę odgrywają tu również pewne dobrze znane zjawiska, które uniemożliwiają zobaczenie gwiazd w dzień nawet przez teleskop. Pierwszym jest dyfrakcja obrazu gwiazdy na otworze teleskopu. Jest ona istotna dla małych teleskopów, na przykład dla lunety o średnicy obiektywu wynoszącej 7 cm średnica krążka dyfrakcyjnego osiąga 4 sekundy łuku i maleje proporcjonalnie do wzrostu średnicy obiektywu.



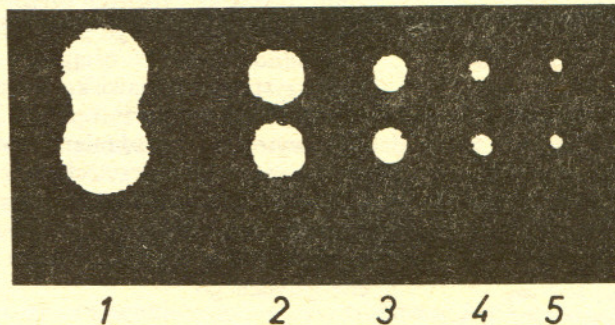
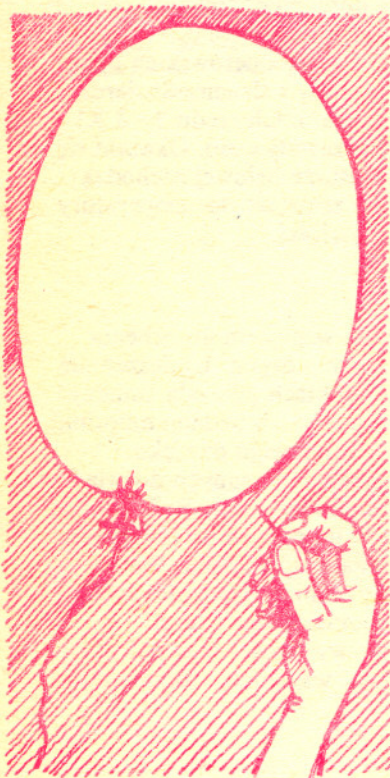
Rys. 1. Zmiana kształtu czoła fali wywołana przez turbulentne warstwy atmosfery.

Dla większych teleskopów główną rolę zaczyna odgrywać tzw. seeing. Nazwa ta odnosi się do kompleksu zjawisk towarzyszących przechodzeniu promienia światła gwiazdy przez turbulentne warstwy atmosfery (rys. 1), dotyczy to przede wszystkim zmian kierunku przychodzenia promieni światła oraz intensywności oświetlenia. Obraz gwiazdy zniekształcony seeingiem wygląda nieco inaczej w przypadku dużych teleskopów niż w przypadku małych instrumentów. Patrząc przez teleskop o małej średnicy widzimy, że obraz gwiazdy jest dość mały, jednak bardzo „skacze” na wszystkie strony, natomiast użycie większego teleskopu pozwala na uzyskanie bardziej statycznego, ale większego obrazu (dlaczego?).

Wielkość seeingu zależy od wielu czynników. Zmienia się z nocy na noc, jest różny w różnych miejscach na Ziemi i na różnych wysokościach. Typowe rozmiary obrazu gwiazdy wywołane seeingiem są rzędu 5"—10", jednak są takie obszary, gdzie obraz gwiazdy bywa mniejszy niż 1". Dlatego też systematyczne pomiary wielkości seeingu decydują o wyborze miejsc, gdzie mają być budowane obserwatoria astronomiczne. Jednym z głównych czynników wpływających na wielkość seeingu jest wilgotność powietrza — im jest ono bardziej suche, tym obrazy gwiazd są mniejsze; innym — jest ciepło emitowane przez kopułę, teleskop, a nawet człowieka przy teleskopie. Ciało człowieka emitujące promieniowanie podczerwone o mocy żarówki 25-watowej może w szczególnie niekorzystnych warunkach uniemożliwić obserwacje przez wpływ na seeing. Aby zmniejszyć te lokalne wpływy, stosuje się często regulację temperatury w kopule oraz temperatury podłogi kopuły, w niektórych obserwatoriach buduje się nawet wentylację wysysającą ciepłe powietrze ogrzane przez człowieka, aparaturę elektroniczną itd.

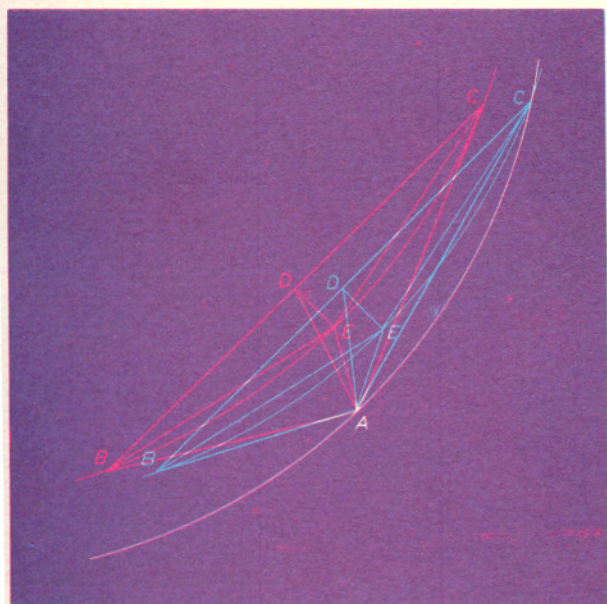
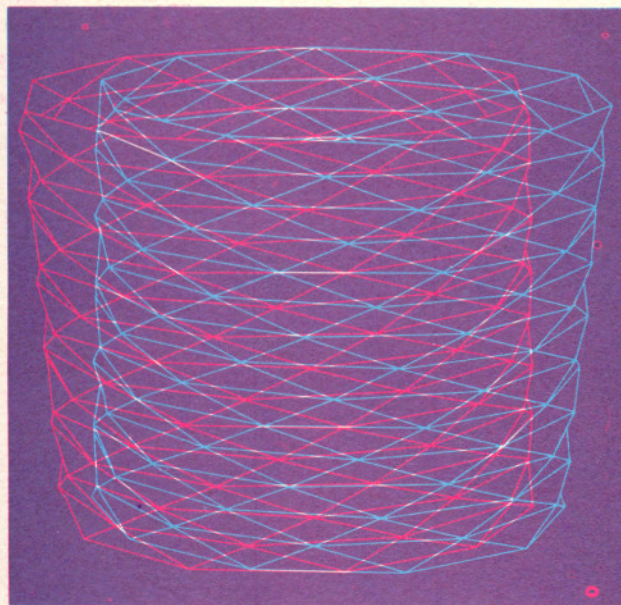
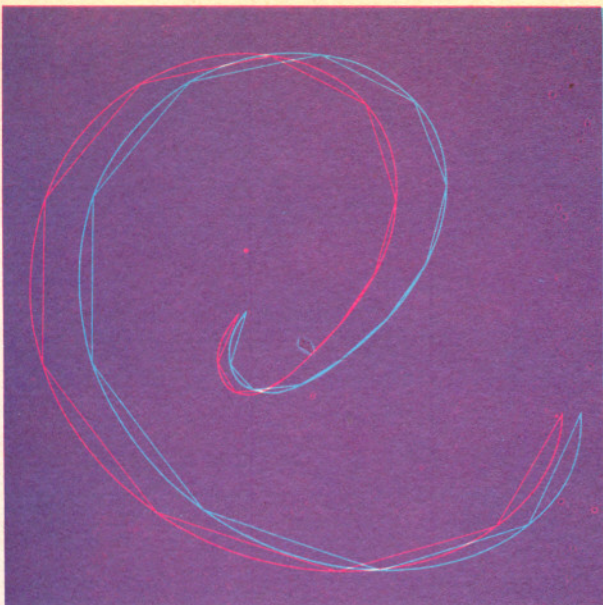
Bardzo dogodnym miejscem do budowy obserwatoriów astronomicznych ze względu na dobry seeing okazały się góry wzdłuż zachodnich wybrzeży obu Ameryk, jednak i tam trzeba brać pod uwagę wiatry, różnice temperatur, zanieczyszczenie powietrza, mgły, nawet korytarze powietrzne linii lotniczych.

W obserwatoriach zbudowanych zgodnie ze wszystkimi wymogami dotyczącymi seeingu noce są czasem dobre, a czasem złe (rys. 2). Nigdy obraz gwiazdy jednak nie jest tak mały, aby można go było porównać z krążkiem dyfrakcyjnym.



Rys. 2. Wpływ zmian seeingu na obrazy układu gwiazd odległych o 2" widzianych przez ten sam teleskop (o średnicy 40 cm).

Wracając więc do problemu poruszanego na początku stwierdzamy, że obraz gwiazdy nie może być mniejszy niż 1". Najdłuższe ogniskowe istniejących teleskopów wynoszą ok. 150 m (coude), obraz gwiazdy ma w ognisku takiego teleskopu rozmiary ok. 1 mm, pole widzenia wynosi co najmniej 1', a więc jego powierzchnia jest kilka tysięcy razy większa od powierzchni obrazu gwiazdy i nie może już być mniejsza. Tak więc przez duży teleskop możemy dojrzeć gwiazdy w dzień, ale jedynie te najjaśniejsze.



Dość łatwo zdefiniować długość krzywej (przez krzywą rozumiemy ciągi obraz odcinka). Długością takiej krzywej jest granica długości łamanych wpisanych w tę krzywą — tzn. wierzchołki łamanych leżą na krzywej — pod warunkiem, że długości wszystkich odcinków łamanych dążą do zera (rys. 1). Oczywiście trzeba pokazać, że tak określona długość nie zależy od wyboru ciągu łamanych, ale nie jest to trudne.

Przez analogię można próbować określić pole powierzchni leżącej w przestrzeni. Budujemy taki ciąg powierzchni wielościennych o wierzchołkach leżących na powierzchni, by pola ścian dążyły do zera. Pole powierzchni to granica pól tych powierzchni wielościennych.

Niestety, już w przypadku takiej powierzchni jak walec nie otrzymamy rozsądnego wyniku. Wpiszmy bowiem w walec następującą powierzchnię wielościenną. Na walcu o wysokości h i promieniu podstawy r rysujemy $m + 1$ okręgów równo rozłożonych co $\frac{1}{m}$ wysokości.

Każdy z nich dzielimy na n równych części tak, by punkty podziału okręgu wyższego leżały nad środkami łuków okręgu niższego. Powierzchnia wielościenna utworzona z $2mn$ trójkątów przedstawiona jest na rys. 2.

Cięciwa BC ma długości $2r \sin \frac{\pi}{n}$. Wysokość AD

trójkąta jest równa $\sqrt{ED^2 + AE^2} =$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} \quad (\text{rys. 3}).$$

Polem powierzchni wielościennej jest więc

$$P_{mn} = 2 mnr \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} =$$

$$= 2 \pi r \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \sqrt{h^2 + 4r^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Rys. 2

Wiadomo, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Wybieramy taki ciąg liczb naturalnych $(m_n)_{n=1}^{\infty}$,

by ciąg $\frac{m_n}{n^2}$ był zbieżny. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^2} = q$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi^2}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = q \cdot \frac{\pi^2}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m_n n} = 2 \pi r \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} \pi^4 r^2 q^2}.$$

Gdy $q = 0$, otrzymujemy znany wzór $2 \pi r h$, natomiast dla innych wartości q wynik będzie większy. (Dla

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^2} = \infty$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m_n n} = \infty$, jeśli ciąg $\frac{m_n}{n^2}$ jest rozbieżny, to ciąg $P_{m_n n}$ też).

„Nadwyżka” pola powierzchni wielościennu nad polem powierzchni walca pochodzi stąd, że trójkąty bardzo odstawiają od powierzchni walca. Tak więc do określenia pola powierzchni trzeba użyć takich pojęć jak płaszczyzna styczna itd. Ale to już zupełnie inna historia.

Rys. 3