

# delta

## SPIS TREŚCI

NUMERU 8 (128)

Analiza niestandardowa <i>doc. dr Wojciech Guzicki</i>	str. 1
Zadania <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 4
Harmonia kosmiczna i prawo Titiusa-Bodego <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 5
Twierdzenie Holditcha <i>prof. dr Petar Kenderow, mgr Krasimir Kolarow</i>	str. 6
Mała Delta <i>dr Andrzej Królak</i>	str. 8
Program Leibniza i system Bachmanna	str. 10
Zasada Macha <i>dr Andrzej Królak</i>	str. 11
Patrz w niebo	str. 14
Klub 44	str. 15
Spontaniczne łamanie symetrii	str. 16

**W następnym numerze:**  
Plamy na gwiazdach



„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzebowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz SitarSKI  
prof. dr Józef I. Smak  
doc. dr Kazimierz Stepień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wołska

doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 6417/84 T-70

### WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
    - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
    - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następný,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

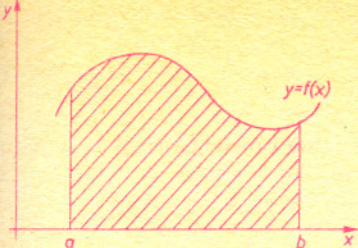
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

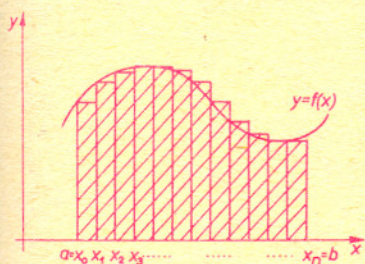
Cena 1 egzemplarza zł 20,—



Doc. dr Wojciech GUZICKI



Rys. 1



Rys. 2

Prezentację podstawowych pojęć analizy niestandardowej rozpoczniemy od omówienia dwóch przykładów. W pierwszym z nich wyobraźmy sobie, że jadąc samochodem chcemy w pewnym momencie stwierdzić, z jaką jedziemy prędkością (pech chciał, że akurat urwała się linka od naszego dotychczas niezawodnego szybkościomierza i nie wystarczy rzut oka na tablicę rozdzielczą). Każdy z nas oczywiście wie, co można zrobić. Na przykład zobaczyć, ile przejeżdżamy kilometrów w ciągu najbliższej godziny, albo lepiej — w ciągu najbliższej minuty czy sekundy i korzystając z prostych wzorów wyliczyć wtedy prędkość w kilometrach na godzinę. Zakładając nawet możliwość wykonywania bezbłędnych pomiarów odległości i czasu ta metoda daje jedynie przybliżony wynik. Obliczamy przecież przeciętną prędkość samochodu w badanym okresie, a nie prędkość w jednej interesującej nas chwili. Jest oczywiste, że błąd będzie tym mniejszy, im krótszy będzie przedział czasu, w którym wykonujemy pomiary. Chciałoby się powiedzieć: jeśli rozpatrywany przedział czasu jest nieskończenie krótki, to uzyskany błąd jest nieskończenie mały, można go więc pominąć. Oporając się na tej intuicji twórcy rachunku różniczkowego zdefiniowali pojęcie pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ : biorąc nieskończenie małą wartość  $h$  kładziemy  $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ . Jeżeli zatem przebyta samochodem drogę przedstawimy jako funkcję czasu, to prędkość w danej chwili jest pochodną tej funkcji.

W naszym drugim przykładzie będziemy chcieli wyznaczyć pole obszaru przedstawionego na rysunku 1. W tym celu dzielimy odcinek  $[a, b]$  na mniejsze odcinki punktami  $x_0 = a, \dots, x_n = b$  i sumujemy pola prostokątów o podstawach  $[x_i, x_{i+1}]$  i wysokościach  $f(x_i)$  (rysunek 2). Dla uproszczenia przyjmijmy, że punkty  $x_i$  dzielą odcinek  $[a, b]$  na równe części:  $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ .

Suma pól prostokątów wynosi zatem  $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{b-a}{n}$ . Tak wyznaczona liczba oczywiście tylko

przybliża pole rozważanego obszaru i przybliżenie jest tym lepsze, im mniejsze są odległości między punktami podziału. Znow idealną sytuację otrzymalibyśmy dzieląc odcinek  $[a, b]$  na nieskończenie małe odcinki i sumując pole nieskończenie wielu nieskończenie wąskich prostokątów. Tak otrzymaną sumę twórcy rachunku różniczkowego nazwali całką oznaczoną funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b]$ .

W momencie powstawania analizy matematycznej zarówno Newton, jak i Leibniz określali jej podstawowe pojęcia używając w jawny sposób liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych. Nie podawali oni przy tym żadnych reguł postępowania z takimi liczbami, opierając się jedynie na swojej intuicji i przekonaniu, że takie „idealne” liczby istnieją. Na przykład Leibniz uważał, że każda liczba rzeczywista jest otoczona wieloma liczbami nieskończenie mało różniącymi się od niej, tworzącymi tak zwaną monadę. Ponadto istniały według niego liczby nieskończone dodatnie i ujemne. Wszystkie te liczby miały podlegać tym samym prawom, co liczby rzeczywiste. Liczby nieskończenie małe dały również Leibnizowi motywację do przyjęcia notacji używanej do dziś w rachunku różniczkowym i całkowym. Na przykład pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  została określona jako ilorz  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ , przy czym różnica  $x_1 - x_0$  była nieskończenie mała. Różnicę  $x_1 - x_0$  można nazwać przyrostem zmiennej  $x$ , oznaczając przez  $\Delta x$ . Wtedy rozważany ilorz ma postać  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ . Nieskończenie mały przyrost  $\Delta x$  Leibniz oznaczył przez  $dx$ . Odpowiadający mu przyrost funkcji  $y = f(x)$  należało oznaczyć przez  $\Delta y$ ; w przypadku, gdy był on nieskończenie mały, naturalne było przyjęcie oznaczenia  $dy$ . Pochodna jest więc ilorzem  $\frac{dy}{dx}$ . Podobnie było z oznaczeniem całki. Przyjmując  $x_{i+1} - x_i = dx$  i pisząc

$f(x)$  zamiast  $f(x_i)$  otrzymujemy sumę  $\sum_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ . Teraz Leibniz na oznaczenie sumy przyjął znak  $\int_a^b f(x) dx$  będący stylizowaną literą  $S$ , otrzymując  $\int_a^b f(x) dx$ .

Przez cały XVIII wiek analiza matematyczna rozwijała się w oparciu o intuicje pochodzące z rachunku nieskończonych. Euler poświęcił całą monografię zastosowaniom liczb nieskończonych i nieskończenie małych. Uzyskiwane wyniki, pomimo budzącej wątpliwości metody dowodowej, były na ogół poprawne, chociaż zdarzały się wyjątki — niewłaściwe użycie nieskończenie małych





Przyjmując się, że w zbiorze  $\mathbf{R}^*$  liczb hiperrzeczywistych są określone dwa działania — dodawanie i mnożenie (zapisywane w tradycyjny sposób) oraz wyróżnione dwa elementy — 0 i 1. Mają one następujące własności:

— działania są łączne

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

— działania są przemienne

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

— mnożenie jest rozdzielne względem dodawania

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

— 0 i 1 są elementami neutralnymi

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a,$$

— wykonalne są działania odwrotne, tzn. dla każdego  $a \in \mathbf{R}^*$  istnieje w  $\mathbf{R}^*$  element oznaczany  $-a$  taki, że  $a + (-a) = 0$  oraz jeśli  $a \neq 0$ , to istnieje w  $\mathbf{R}^*$  element

$$\text{oznaczany } \frac{1}{a} \text{ taki, że } a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

(Powyższe aksjomaty mówią, że zbiór  $\mathbf{R}^*$  wraz z działaniami dodawania i mnożenia oraz elementami 0 i 1 jest ciałem.)

Następnie zakłada się, że w zbiorze  $\mathbf{R}^*$  jest określona relacja mniejszości  $<$ , tzn. relacja zachodząca między elementami  $\mathbf{R}^*$  i spełniająca aksjomaty:

— jeśli  $a < b$  oraz  $b < c$ , to  $a < c$ ,

— dla dowolnych  $a, b \in \mathbf{R}^*$  spośród zdań  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$  dokładnie jedno jest prawdziwe.

Związek działań z relacją mniejszości podają aksjomaty:

— jeśli  $a < b$ , to dla dowolnego  $c \in \mathbf{R}^*$  mamy również  $a + c < b + c$ ,

— jeśli  $a < b$  oraz  $c > 0$ , to  $a \cdot c < b \cdot c$ .

(Wszystkie dotychczasowe aksjomaty mówią, że zbiór  $\mathbf{R}^*$  wraz z działaniami, relacją mniejszości i elementami 0 i 1 jest ciałem uporządkowanym.)

Następnie przyjmuje się, że zbiór  $\mathbf{R}$  jest podzbiorem zbioru  $\mathbf{R}^*$  takim, że

— 0 i 1 są elementami  $\mathbf{R}$ ,

— jeśli  $a, b \in \mathbf{R}$ , to  $a + b \in \mathbf{R}$  oraz  $a \cdot b \in \mathbf{R}$ ,

— jeśli  $a \in \mathbf{R}$ , to  $-a \in \mathbf{R}$  oraz  $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$  ( $a \neq 0$ ).

(Zbiór  $\mathbf{R}$  jest zatem podciałem ciała  $\mathbf{R}^*$  — zauważmy, że działania i relacja mniejszości spełniają w  $\mathbf{R}$  wszystkie aksjomaty ciała uporządkowanego.)

Wreszcie przyjmuje się aksjomat ciągłości dla zbioru  $\mathbf{R}$ :

— jeśli zbiór  $A \subseteq \mathbf{R}$  jest niepusty

i ograniczony z góry, to w zbiorze liczb rzeczywistych ograniczających z góry zbiór  $A$  istnieje liczba najmniejsza, zwana kresem górnym zbioru  $A$ .



dawało wyniki błędne. Jednakże już w pierwszej połowie XVIII wieku metoda ta spotkała się z krytyką. Jednym z pierwszych krytyków był wybitny filozof, biskup Berkeley, przedstawiający w jednym ze swoich traktatów pełny obraz trudności, z jakimi borykała się powstająca analiza matematyczna. Uściślenie podstaw analizy było więc jednym z ważniejszych zadań stojących przed matematyką.

Zasadniczego postępu dokonał w początkach XIX wieku Cauchy, sprowadzając całą analizę matematyczną do pojęcia granicy, samego tego pojęcia nie definiując jednak w sposób wystarczająco ścisły. Niektóre podawane przez niego sformułowania definicji granicy odwoływały się wręcz do pojęcia nieskończenie małej. Zaznaczył się jednak zasadniczy kierunek rozwoju podstaw analizy: zamiast uściślić pojęcie wielkości nieskończonych starano się wyeliminować je, zastępując innymi, dobrze określonymi pojęciami. Ostatecznego kroku dokonał w końcu XIX wieku Weierstrass, wprowadzając powszechnie dziś przyjmowany formalizm „epsilon-wodeltowy”. Koniec XIX wieku przyniósł również precyzyjne określenie liczby rzeczywistej. Liczby nieskończone zniknęły z analizy matematycznej.

Ponowne pojawienie się liczb nieskończonych i nieskończenie małych było możliwe dzięki rozwojowi logiki matematycznej. Około 1960 roku wybitny amerykański logik Abraham Robinson stworzył podstawy tak zwanej analizy niestandardowej, będącej ścisłym ujęciem analizy matematycznej używającej liczb nieskończonych, zgodnie z ideami Leibniza. Analizę niestandardową można sformułować aksjomatycznie, podając własności, jakie powinny przysługiwać liczbom rzeczywistym łącznie z nowymi obiektami — liczbami nieskończenie małymi i nieskończonymi. Zasługą Robinsona było przede wszystkim wykazanie, że istnieją obiekty spełniające te aksjomaty, podobnie jak np. konstrukcja Dedekinda liczb rzeczywistych pokazuje, że istnieją obiekty mające wszystkie własności, których wymagamy od liczb rzeczywistych. Obecnie omówimy aksjomaty analizy niestandardowej, nie zajmując się samą konstrukcją liczb nieskończonych.

Zasadniczym pojęciem analizy niestandardowej są tzw. liczby hiperrzeczywiste, o których zakłada się, że zawierają cały zbiór liczb rzeczywistych oraz mają te same co liczby rzeczywiste własności algebraiczne. Można zatem na liczbach hiperrzeczywistych wykonywać działania algebraiczne — dodawania, mnożenia, odejmowania, dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez zero). Działania te są rozszerzeniami zwykłych działań algebraicznych. Liczby hiperrzeczywiste są również uporządkowane i związek relacji mniejszości z działaniami algebraicznymi jest taki sam, jak dla liczb rzeczywistych. Dokładne sformułowanie aksjomatów podających algebraiczne własności działań i porządku znajdzie Czytelnik obok.

W dalszym ciągu zbiór liczb rzeczywistych będziemy oznaczać przez  $\mathbf{R}$ , a zbiór liczb hiperrzeczywistych przez  $\mathbf{R}^*$ . Mamy zatem inkluzję  $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^*$ . Działania w  $\mathbf{R}^*$  oraz relację porządku będziemy oznaczać tak samo, jak w zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$ . Przyjmuje się ponadto tzw. aksjomat ciągłości, mówiący, że każdy ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma kresy będące liczbami rzeczywistymi. Ważnym aksjomatem jest aksjomat orzekający, że istnieją liczby hiperrzeczywiste nie będące liczbami rzeczywistymi, czyli że  $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^*$ .

Teraz liczbę hiperrzeczywistą  $x$  nazywa się liczbą nieskończoną, jeżeli jest większa od wszystkich liczb rzeczywistych:  $\bigwedge_{r \in \mathbf{R}} x > r$ . Podobnie  $x$  jest liczbą nieskończoną ujemną, jeśli jest mniejsza

od wszystkich liczb rzeczywistych. Pozostałe liczby hiperrzeczywiste nazywamy liczbami skończonymi. Zatem liczba  $x$  jest skończona, jeżeli istnieje liczba rzeczywista  $r$  taka, że  $-r < x < r$ , czyli  $|x| < r$ . Wreszcie liczbę hiperrzeczywistą  $x$  nazwiemy liczbą nieskończenie małą, jeżeli jest mniejsza co do wartości bezwzględnej od wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych:  $\bigwedge_{r \in \mathbf{R}} r > 0 \Rightarrow |x| < r$ . Zauważamy bez trudności, że 0 jest jedyną nieskończenie małą liczbą rzeczywistą.

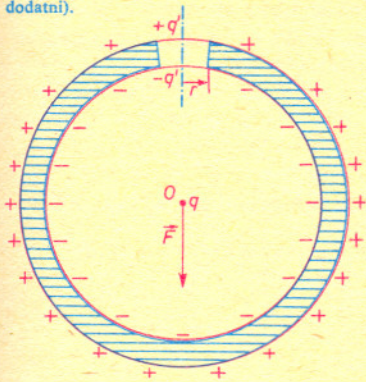
Nietrudno teraz dowieść, że jeśli liczba hiperrzeczywista  $x$  jest skończona, to liczba rzeczywista  $r = \sup \{s \in \mathbf{R} : s < x\}$  jest nieskończenie bliska liczbie  $x$ , tzn. liczba  $|x - r|$  jest nieskończenie mała. Piszemy wtedy  $x \approx r$ , a liczbę  $r$  nazywamy standardową częścią liczby  $x$  i oznaczamy  $st(x)$ .

Pokażemy teraz przy założeniu, że nie wszystkie liczby hiperrzeczywiste są rzeczywiste, że istnieją liczby nieskończone i nieskończenie małe. Weźmy liczbę hiperrzeczywistą  $x$  nie będącą liczbą rzeczywistą. Jeżeli liczba  $|x|$  jest nieskończona, to liczba  $\frac{1}{|x|}$  jest nieskończenie mała. Jeżeli zaś liczba  $x$  jest skończona, to rozważamy jej część standardową  $r$  — różnica  $|r - |x||$  jest nieskończenie mała, a jej odwrotność nieskończona.

Następny aksjomat podaje ważną własność funkcji rzeczywistych. Mówi on mianowicie, że funkcje rzeczywiste mogą również być określone dla argumentów hiperrzeczywistych nie będących liczbami rzeczywistymi. Dokładniej, jeśli funkcja  $f$  o wartościach rzeczywistych jest



**Rozwiązanie zadania F 156.** Rozważmy najpierw powłokę bez otworu. Dzięki obecności ładunku  $q$  w jej środku nośniki ładunku rozmieszczają się na powierzchni sfery tak, jak to pokazano na rysunku (rysunek wykonano przy założeniu, że ładunek  $q$  jest dodatni).



By we wnętrzu metalu natężenie pola było równe zero i by jednocześnie była spełniona zasada zachowania ładunku, wartości bezwzględne ładunków indukowanych na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni sfery muszą być równe wartości bezwzględnej ładunku  $q$ . Natężenie pola elektrostatycznego wytworzonego przez ładunki indukowane na powłoce jest w jej środku równe zero, co wynika z symetrii układu. Na mocy zasady superpozycji pole to daje się jednocześnie przedstawić:  $E = E_1 + E_2 = 0$ , gdzie  $E_1$  — pole pochodzące od powłoki z wyciętym myślowo otworem,  $E_2$  — pole od wyciętej części. Stąd:  $E_1 = -E_2$ . Po wycięciu otworu przemieszczenie ładunków w pozostałej części jest nieznaczne dla  $d \ll r$  i przy oszacowaniu można zapisać:  $E_1 \approx E_1 = -E_2$ , gdzie  $E_1$  — pole powłoki z rzeczywistym otworem. Tak więc obliczanie pola powłoki z wyciętym otworem można zastąpić przez obliczanie pola wyciętej części. W pierwszym przybliżeniu pole to jest polem dipola o momencie dipolowym  $q'A$ , gdzie  $q' = q\pi r^2/4\pi R^2 = q\pi r^2/4R^2$ . Pole takiego dipola w środku sfery jest równe:  $E = kq'A r^2/2R^3$ . Natężenie pola sfery z wyciętym otworem różni się jedynie zwrotem od natężenia pola wyciętej części. Zatem na ładunek  $q$  działa siła:  $F \sim kq^2 \Delta r^2/R^5$ . Dokładniejsze obliczenie działającej siły nie jest możliwe, gdyż nie wiemy, jak istotny jest wpływ przemieszczeń ładunku po wycięciu otworu — mamy jedynie podstawy, by sądzić, że jest on niewielki.



określona w pewnym zbiorze  $D \subseteq \mathbf{R}$ , to przyporządkowujemy jej pewną funkcję  $f^*$  określoną w pewnym podzbiorze  $\mathbf{R}^*$ , o wartościach hiperrzeczywistych taką, że dla  $x \in D$  zachodzi równość  $f(x) = f^*(x)$ . Funkcję  $f^*$  nazywamy naturalnym rozszerzeniem funkcji  $f$ . Ogólniej, zamiast funkcji jednej zmiennej możemy rozpatrywać funkcje wielu zmiennych, tzn. funkcje określone w pewnym podzbiorze przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ . Wreszcie, każdemu zbiorowi  $A \subseteq \mathbf{R}$  przyporządkowujemy jego naturalne rozszerzenie  $A^* \subseteq \mathbf{R}^*$  tak, aby  $A \subseteq A^*$  i analogicznie postępujemy w przypadku podzbiorów przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ . Należy przy tym zwrócić uwagę, że ten aksjomat nie mówi nam znów nic o tym, jak wyglądają naturalne rozszerzenia funkcji i zbiorów. W szczególności nie wyjaśnia, czy w ogóle funkcja  $f^*$  jest określona dla jakichkolwiek argumentów spoza dziedziny funkcji  $f$ , ani czy np. dziedzina funkcji  $f^*$  jest naturalnym rozszerzeniem dziedziny  $f$ . Te sprawy będą regulowane przez następny aksjomat. W tej chwili przyjmijmy tylko, że działania algebraiczne w  $\mathbf{R}^*$  są naturalnymi rozszerzeniami działań w  $\mathbf{R}$  oraz relacja mniejszości w  $\mathbf{R}^*$  jest naturalnym rozszerzeniem relacji mniejszości w  $\mathbf{R}$  (tzn. zbiór  $\{x, y\}: x \in \mathbf{R}^* \wedge y \in \mathbf{R}^* \wedge x < y\}$  jest naturalnym rozszerzeniem zbioru  $\{x, y\}: x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x < y\}$ ). Podobnie jak w przypadku działań algebraicznych, które zarówno w  $\mathbf{R}$ , jak i  $\mathbf{R}^*$  oznaczamy tak samo, naturalne rozszerzenie dowolnej funkcji  $f$  często oznacza się tym samym symbolem.

Przed sformulowaniem ostatniego aksjomatu pokażemy, że własności zbioru liczb hiperrzeczywistych istotnie różnią się od własności  $\mathbf{R}$ . Zauważmy najpierw, że zbiór liczb naturalnych  $\mathbf{N}$  jest w zbiorze liczb rzeczywistych nieograniczony od góry. W przeciwnym bowiem razie wzięlibyśmy liczbę  $t = \sup \mathbf{N}$  i z łatwością zauważylibyśmy, że liczba  $t-1$  jest również ograniczeniem górnym zbioru  $\mathbf{N}$ , wbrew definicji kresu górnego. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  istnieje liczba naturalna  $n$  taka, że  $x < n$  (jest to tzw. aksjomat Archimedesesa). Tej własności oczywiście zbiór  $\mathbf{R}^*$  nie ma — istnieją bowiem w nim liczby nieskończone, zatem większe od każdej liczby naturalnej. W szczególności wynika stąd, że aksjomat ciągłości nie jest prawdziwy dla liczb hiperrzeczywistych. Okazuje się jednak, że można wskazać szeroką klasę własności wspólnych dla liczb rzeczywistych i hiperrzeczywistych.

Ostatni aksjomat, nazywany zasadą Leibniza, stwierdza, że funkcje rzeczywiste i zbiory liczb rzeczywistych (ogólniej — podzbiory  $\mathbf{R}^n$ ) mają w zbiorze liczb rzeczywistych te same własności, co ich naturalne rozszerzenia w zbiorze liczb hiperrzeczywistych. Ograniczamy się jednak do takich własności, które można sformułować używając wyrażenia postaci „dla dowolnej liczby  $x$ ” czy „istnieje liczba  $x$ ”, nie używając natomiast kwantyfikatorów wiążących dowolne zbiory czy funkcje. W ten sposób na przykład tzw. zbiór liczb hipernaturalnych  $\mathbf{N}^*$  (tzn. naturalne rozszerzenie zbioru  $\mathbf{N}$  liczb naturalnych) ma w zbiorze  $\mathbf{R}^*$  własność analogiczną do aksjomatu Archimedesesa: dla każdej liczby  $x \in \mathbf{R}^*$  istnieje liczba  $n \in \mathbf{N}^*$  taka, że  $x < n$ . Podobnie zauważamy, że jeśli funkcja  $f$  jest określona na całej prostej rzeczywistej (czyli dla każdej liczby  $x \in \mathbf{R}$  istnieje liczba  $y \in \mathbf{R}$  taka, że  $f(x) = y$ ), to jej naturalne rozszerzenie  $f^*$  jest określone na całym zbiorze  $\mathbf{R}^*$  (bo dla każdego  $x \in \mathbf{R}^*$  istnieje  $y \in \mathbf{R}^*$  taki, że  $f^*(x) = y$ ). W taki sam sposób można pokazać, że dziedzina funkcji  $f^*$  jest naturalnym rozszerzeniem dziedziny funkcji  $f$ . Nie można natomiast wnioskować, że liczby hiperrzeczywiste spełniają aksjomat ciągłości, bo w jego sformułowaniu występuje niedozwolony kwantyfikator: dla każdego zbioru  $A \subseteq \mathbf{R}$ , jeśli  $A$  jest ograniczony z góry, to  $A$  ma kres górny.

Pokażemy teraz, jak przy użyciu analizy niestandardowej można określić podstawowe pojęcia analizy matematycznej. Na początek zajmiemy się pojęciem ciągłości funkcji. W intuicyjnym sensie funkcja jest ciągła, jeżeli „w ciągły sposób”, tzn. bez skoków przechodzi od jednej wartości do drugiej, czyli że niewielkim zmianom argumentu mają odpowiadać niewielkie zmiany wartości. Oczywiście jest zatem definicja: funkcja rzeczywista  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$ , jeśli dla dowolnego punktu  $x$  takiego, że  $x \approx x_0$  mamy  $f^*(x) \approx f(x_0)$ . Wykażemy, że ta definicja jest równoważna powszechnie przyjmowanej definicji „epsilon-deltowej”:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in \mathbf{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Załóżmy więc, że funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$  w sensie tradycyjnym. Weźmy dowolną liczbę hiperrzeczywistą  $x$  taką, że  $x \approx x_0$ . Mamy pokazać, że  $f^*(x) \approx f(x_0)$ , czyli że  $f^*(x) - f^*(x_0)$  jest liczbą nieskończenie małą. Mamy więc pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\epsilon > 0$  zachodzi nierówność  $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \epsilon$ . Dla tej liczby  $\epsilon$  dobieramy liczbę rzeczywistą  $\delta > 0$  taką, by  $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Z zasady Leibniza wynika, że wówczas  $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}^*} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f^*(x) - f^*(x_0)| < \epsilon$ .

Ponieważ jednak dla wybranej przez nas liczby  $x$  mamy  $x \approx x_0$ , więc tym bardziej  $|x - x_0| < \delta$ . Stąd  $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \epsilon$ . Na odwrót, załóżmy, że funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$  w sensie niestandardowym. Weźmy liczbę rzeczywistą  $\epsilon > 0$ . Mamy znaleźć liczbę rzeczywistą  $\delta > 0$  taką, że

$$\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$



Weźmy dowolną liczbę  $\delta \in \mathbb{R}^*$ ,  $\delta > 0$  taką, że  $\delta \approx 0$ . Wtedy dla dowolnej liczby hiperrzeczywistej  $x$  takiej, że  $|x - x_0| < \delta$  mamy  $x \approx x_0$ , a stąd  $f^*(x) \approx f^*(x_0)$ . Zatem  $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \varepsilon$ .

Wynika stąd, że  $\bigvee_{\delta \in \mathbb{R}^*, \delta > 0} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f^*(x) - f^*(x_0)| < \varepsilon$ .

Z zasady Leibniza otrzymujemy tezę:  $\bigvee_{\delta \in \mathbb{R}^*, \delta > 0} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

W następnej kolejności wprowadzimy pojęcie pochodnej opierając się na intuicjach omówionych we wstępie. Mówimy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  pochodną równą  $y_0$ , jeżeli dla każdej różnej od zera nieskończenie małej liczby  $h$  iloraz różnicowy  $\frac{f^*(x_0+h) - f^*(x_0)}{h}$  jest nieskończenie

bliski  $y_0$ . Zatem  $f'(x_0) = st\left(\frac{f^*(x_0+\Delta x) - f^*(x_0)}{\Delta x}\right)$  dla  $\Delta x \approx 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ .

Wreszcie zajmiemy się pojęciem całki oznaczonej. Przypuśćmy, że w przedziale  $[a, b]$  mamy określoną funkcję ciągłą  $f$ . Obieramy nieskończoną liczbę hipernaturalną  $\nu$  i kładziemy  $\delta = \frac{b-a}{\nu}$ .

Następnie dzielimy przedział  $[a, b]^*$  (zauważamy, że  $[a, b]^* = \{x \in \mathbb{R}^*: a \leq x \leq b\}$ ) na  $\nu$  równych części o długości  $\delta$  punktami  $t_0 = a$ ,  $t_1 = a + \delta$ ,  $t_2 = a + 2\delta$ , ...,  $t_\nu = b$ . Zauważamy, że oczywiście  $\delta \approx 0$ . Zgodnie z intuicją podaną we wstępie położymy teraz

$$\int_a^b f(x) dx = st\left(\sum_{i=0}^{\nu-1} f^*(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)\right).$$

Na zakończenie należy stwierdzić, że analiza niestandardowa nie jest wyłącznie motywowaną filozoficznymi względami elegancką formalizacją oryginalnych idei Leibniza, ale stanowi silny aparat dowodowy. Z zasady Leibniza wynika, że dowolna własność liczb hiperrzeczywistych, dająca się sformułować w sposób dopuszczony przez tę zasadę, przysługuje również liczbom rzeczywistym. Dowód takiej własności stosujący metody niestandardowe jest zatem dowodem jej prawdziwości. Obecnie znamy już szereg twierdzeń udowodnionych po raz pierwszy właśnie przy użyciu analizy niestandardowej.



## Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 371.** Wykazać, że jedynym rozwiązaniem całkowitym równania  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  jest  $x = y = z = 0$ .

Rozwiązanie na str. 16

**M 372.** Na dwóch półprostych o początku  $O$  wybieramy punkty  $A, B$  tak, że  $OA = OB + m$ , gdzie  $m$  jest ustaloną liczbą dodatnią. Wykazać, że środki odcinków  $AB$  spełniających ten warunek leżą na pewnej półprostej.

Rozwiązanie na str. 10

**M 373.** Co jest większe:  $\cos(\sin x)$  czy  $\sin(\cos x)$ ?

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 156.** Oszacować siłę działającą na ładunek  $q$  umieszczony w środku obojętnej elektrycznie, metalowej powłoki sferycznej o promieniu  $R$  i grubości ścianek  $\Delta$ . W powłoce znajduje się niewielki otworek o promieniu  $r$ . Należy przyjąć:  $r \ll R$  oraz  $\Delta \ll r$ .

Zadanie nadesłał p. Włodzimierz Zielić.

Rozwiązanie na str. 3

**F 157.** Próżniowy kondensator płaski zbudowany jest z dwóch cienkich płyt o powierzchni  $s$ , oddległych o  $d$  ( $s \gg d^2$ ). Jak zmieni się pojemność kondensatora, gdy umieścimy go w metalowej puszcze, której ścianki znajdują się w odległości  $3d$  (patrz rysunek)?

Rozwiązanie na str. 12





# Harmonia kosmiczna i prawo Titiusa-Bodego

Dr Tomasz KWAST

Z własnego doświadczenia wiemy, że człowiekowi dość często wychodzi coś opacznie, natomiast bardzo rzadko opaczny wynik bywa pozytywny. Tak jednak stało się w przypadku duńskiego astronoma Tycho Brahego (1546—1601). Ten najwybitniejszy krytyk heliocentrycznej teorii Kopernika (i twórca systemu konkurencyjnego) wbrew swojej woli przyczynił się do jej zwycięstwa. Mianowicie, wykonane przez niego niezwykle dokładne, jak na owe czasy, obserwacje położenia planet (z dokładnością zbliżoną do 1', a nie znano wówczas jeszcze lunet) umożliwiły jego uczniowi Johannesowi Keplerowi (1571—1630) sformułowanie słynnych praw ruchu planet stanowiących trwały wkład w rozwój nowożytnej astronomii.

Jednak poza tymi niewątpliwymi zasługami ma Kepler na swoim koncie osiągnięcie o wartości, powiedzmy, dyskusyjnej. Chodzi tu o próbę znalezienia prawa rządzącego odległościami (znanych wówczas) planet od Słońca, a określonymi po raz pierwszy prawidłowo przez Kopernika. Kepler, przepojony mistyką pitagorejską, doszukujący się wszędzie „kosmicznej harmonii”, doszedł do następującego wyniku opublikowanego w dziele „Mysterium cosmographicum” (1596). Na kuli o rozmiarach orbity Merkurego opisujemy foremny ośmiościan. Okazuje się wtedy, że kula opisana na tym ośmiościanie ma rozmiary orbity Wenus. Na tej drugiej kuli opisujemy dwudziestościan foremny, wtedy trzecia kula opisana na nim ma rozmiary orbity Ziemi.

Średnie odległości planet od Słońca  
(w jednostkach astronomicznych, 1 j.a. =  
=  $1,496 \times 10^{11}$  m).

planeta	$n$	odległość od Słońca
Merkury	$-\infty$	0,387
Wenus	1	0,723
Ziemia	2	1
Mars	3	1,524
Ceres	4	2,767
Jowisz	5	5,204
Saturn	6	9,575
Uran	7	19,30
Neptun	—	30,21
Pluton	8	39,91

Promienie orbit niektórych satelitów Jowisza  
(w tys. km)

Amalthea	181
Thebe	222
Io	422
Europa	671
Ganimedes	1070
Callisto	1880

Promienie orbit niektórych satelitów Saturna  
(w tys. km)

Mimas	186
Enceladus	238
Tethys	295
Dione	377
Rhea	527

Promienie orbit satelitów Urana (w tys. km)

Miranda	130
Ariel	191
Umbriel	266
Titania	436
Oberon	583

Potęgową formułą na promienie orbit  
satelitów Czytelnik sam znajdzie z łatwością.

Analogicznie dalej konstruujemy kolejno foremny dwunastościan, czworościan i sześciąt, a kule przedzielające te wielościany okazują się mieć rozmiary orbit Marsa i Jowisza, wreszcie ostatnia kula opisana na sześciacie będzie miała rozmiar orbity Saturna, szóstej — ostatniej planety znanej Keplerowi. W ten sposób pięć wielościanów foremnych przeplata się z sześcioma sferami planetarnymi tworząc zaiste zadziwiającą harmonię. Łatwo zauważyć, że „empiryczny model” Keplera musiał się załamać w przypadku odkrycia następnej planety — istnieje wszak tylko pięć wielościanów foremnych. Tak też stało się, gdy F. W. Herschel odkrył Urana (1781). Nikt jednak nie odebrał tego faktu jako upadku poważnej teorii, gdyż konstrukcja Keplera nigdy nie była brana całkiem poważnie, a ponadto już wcześniej w 1766 r. J. D. Titius przedstawił inną zależność określającą promienie  $r_n$  orbit planet, mianowicie

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-1}$$

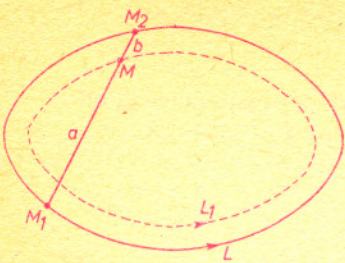
(w jednostkach astronomicznych). Merkuremu odpowiada tu  $n = -\infty$ , zaś pozostałym (znanym Keplerowi) planetom kolejno 1, 2, 3, 5, 6. Wzór ten rozpowszechniony pod koniec XVIII w. przez J. E. Bodego (zwany dlatego regułą lub prawem Titiusa-Bodego) został po raz pierwszy znakomicie potwierdzony właśnie przez odkrycie Urana, którego orbita okazała się mieć rozmiary zgodne z regułą Titiusa-Bodego dla  $n = 7$ . Drugi sukces nastąpił w 1801 r., gdy G. Piazzini odkrył pierwszą największą planetoidę, nazwaną Ceres, w odległości od Słońca odpowiadającej  $n = 4$ , gdzie do tego czasu była luka. Jeszcze później okazało się, że wprawdzie orbita Neptuna do tej reguły nie pasuje, ale orbita Plutona dobrze odpowiada  $n = 8$ . Fakt ten stał się zresztą powodem spekulacji na temat, czy aby Pluton nie był kiedyś satelitą Neptuna i rozzerwanie ich układu wytrąciło Neptuna z jego poprzedniej orbity. Wreszcie w czasach już całkiem niedawnych znalezione zostały w wyniku amatorskich rozrywek umysłowych analogiczne wzory określające odległości niektórych satelitów Jowisza, Saturna i Neptuna od ich macierzystych planet. Wszystkie te wzory mają postać  $r_n = a \cdot b^n$ , a więc bardzo podobną do prawa Titiusa-Bodego.

Nieodparcie narzuca się pytanie, czy te wszystkie empiryczne formuły pasują do rzeczywistości przypadkowo, czy też odzwierciedlają jakieś nie znane nam jeszcze prawa przyrody. Oczywiście, wielościany Keplera to tylko ciekawostka, ale prawo Titiusa-Bodego spełniają przecież nawet obiekty odkryte po jego sformułowaniu! Z jednej strony, zdajemy sobie sprawę, że do kilku obserwacji zawsze można dopasować jakąś formułę (zwłaszcza gdy obserwacje te są w pewnym sensie wybrane — jak w przypadku satelitów Jowisza i Saturna), ale z drugiej — prostota tych formuł jest zastanawiająca. Krótko mówiąc — w obecnej chwili astronomia po prostu nie wie, jak się do tych faktów ustosunkować. Prawo Titiusa-Bodego istnieje i zaprzeczyć temu niepodobna, ale wytłumaczyć go obecnie również nie jesteśmy w stanie.



# Twierdzenie Holditcha

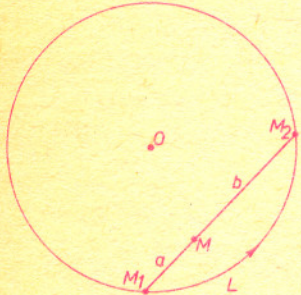
Prof. dr Petar KENDEROW, mgr Krasimir KOLAROW  
(Bułgaria)



Rys. 1

W roku 1858 wielbny Hamnet Holditch, rektor Cajsus College w Cambridge, opublikował ciekawe twierdzenie nazwane później twierdzeniem Holditcha.

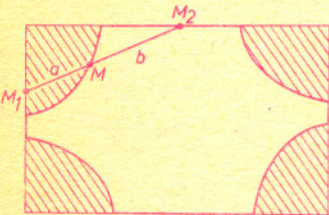
Rozpatrzmy płaską krzywą zamkniętą  $L$  i odcinek  $M_1M_2$  o długości  $a+b$  ( $a > 0, b > 0$ ), którego końce leżą na krzywej  $L$  (rys. 1). Niech  $M$  będzie takim punktem odcinka  $M_1M_2$ , że  $MM_1 = a$  i  $MM_2 = b$ . Jeśli będziemy przemieszczać odcinek  $M_1M_2$  tak, by oba jego końce leżały cały czas na krzywej  $L$ , a punkt  $M_1$  obiegał tę krzywą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to punkt  $M$  zakreśli pewną krzywą zamkniętą  $L_1$  (zaznaczona linią przerywaną). Twierdzenie Holditcha mówi, że różnica pól figur ograniczonych krzywymi  $L$  i  $L_1$  równa jest  $\pi ab$ . Nie zależy więc ona ani od kształtu, ani wielkości wyjściowej krzywej.



Rys. 2

Czytelnik z łatwością sprawdzi prawdziwość tego twierdzenia dla szczególnego przypadku, gdy krzywą  $L$  jest okrąg (rys. 2).

Dowód twierdzenia podany przez Holditcha nie był zupełnie ścisły, nie obejmował poza tym pewnych przypadków (na przykład takich krzywych jak brzeg kwadratu). Ścisły dowód przedstawił w 1978 roku szwedzki matematyk Arne Broman — dotyczył on krzywych ograniczających zbiory wypukłe. W roku 1981 Broman używając rachunku całkowego udowodnił twierdzenie dla szerszej klasy krzywych — w szczególności dla łamanych zamkniętych. Rozpatrzmy teraz kilka ciekawych przypadków.



Rys. 3

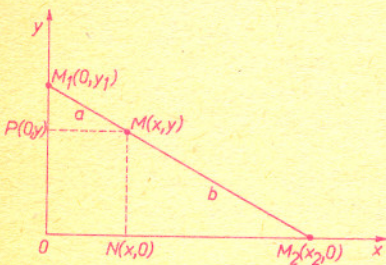
Jeśli przemieszczamy odcinek  $M_1M_2$  po krzywej  $L$  będącej brzegiem prostokąta o bokach dłuższych od  $M_1M_2$ , to punkt  $M$  będzie przebiegał po krzywej zaznaczonej na rys. 3. Aby udowodnić twierdzenie Holditcha, musimy pokazać, że suma pól zakreślonych figur równa jest  $\pi ab$ . Ale każda z tych figur to ćwiartka elipsy. Aby to wykazać, umieścimy prostokąt tak, by jego wierzchołek znalazł się w początku układu współrzędnych, a boki leżały na osiach (rys. 4). Z podobieństwa trójkątów  $PMM_1$  i  $OM_2M_1$  oraz trójkątów  $MNM_2$  i  $M_1OM_2$  mamy

$$\frac{x}{a} = \frac{PM}{MM_1} = \frac{OM_2}{M_1M_2} \quad \text{i} \quad \frac{y}{b} = \frac{MN}{MM_2} = \frac{OM_1}{M_1M_2}$$

Podnosząc do kwadratu i sumując otrzymujemy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{OM_1^2 + OM_2^2}{M_1M_2^2} = 1.$$

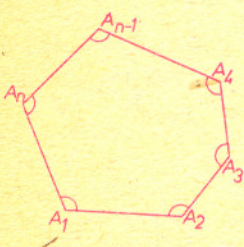
Tak więc współrzędne punktu  $M$  spełniają równanie elipsy o półosiach  $a$  i  $b$ . Wiadomo zaś, że pole takiej elipsy jest równe  $\pi ab$ . Tak więc dowód twierdzenia w tym szczególnym przypadku został zakończony.



Rys. 4

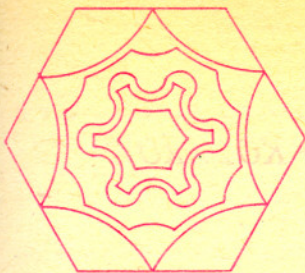
Trudniejszy jest nieco bardziej ogólny przypadek, gdy krzywa  $L$  jest brzegiem wielokąta wypukłego. Zakładamy, że  $a+b$  jest mniejsze od długości najkrótszego boku tego wielokąta (rys. 5). Figura, której pole mamy obliczyć, jest sumą zakreślonych figur. Można wykazać, że każda z tych figur jest kawałkiem elipsy, ale tym razem są to różne elipsy i nie możemy z nich złożyć jednej. Za pomocą rachunku całkowego da się jednak udowodnić, iż pole części elipsy leżącej koło wierzchołka  $A_i$  jest równe  $\frac{ab}{2}(\pi - \alpha_i)$ , gdzie  $\alpha_i$  jest miarą łukową kąta o wierzchołku  $A_i$ . Ale  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = (n-2)\pi$ , a więc sumą pól jest

$$S = \frac{ab}{2} \left( (\pi - \alpha_1) + \dots + (\pi - \alpha_n) \right) = \frac{ab}{2} \left( n\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \right) = \pi ab.$$

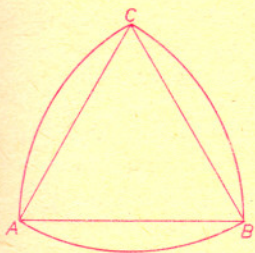


Rys. 5

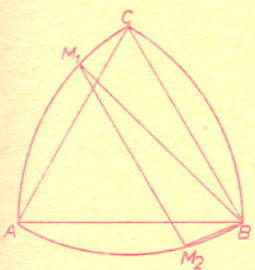




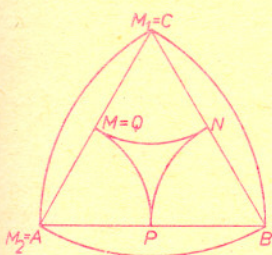
Rys. 6



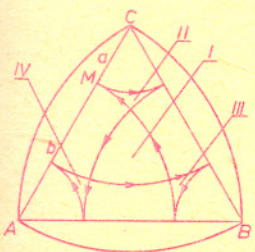
Rys. 7



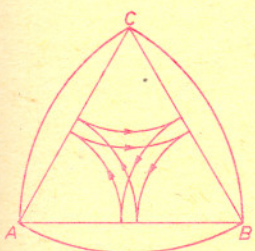
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Ten ostatni wynik, jak i pewne inne uogólnienia twierdzenia Holditcha, zostały podane w pracy dyplomowej K. Kolarowa.

Jeśli pozbedziemy się warunku, by długość odcinka  $M_1M_2$  była mniejsza od długości najkrótszego boku wielokąta, to kształt krzywej  $L_1$  bardzo się komplikuje. Na rysunku 6 pokazano kilka takich krzywych. Dla prostoty punkt  $M$  leży za każdym razem w środku odcinka  $M_1M_2$ .

Przy pewnych krzywych  $L$  i odpowiednio dobranych długościach  $a+b$  powstaje wątpliwość, czy twierdzenie Holditcha jest prawdziwe. Tak jest na przykład, gdy  $L$  jest brzegiem trójkąta Reuleaux, tzn. sumą trzech łuków  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  o środkach w wierzchołkach trójkąta równobocznego  $ABC$  i promieniach równych bokowi tego trójkąta (rys. 7).

Niech odcinek  $M_1M_2$  ma długość równą bokowi trójkąta. Jeśli punkt  $M_2$  leży na łuku  $\overline{AB}$  (bez końców), to punkt  $M_1$  musi pokrywać się z  $C$ . Nie może on, oczywiście, leżeć na łuku  $\overline{AB}$ . Załóżmy, że leży na łuku  $\overline{AC}$  (rys. 8). Trójkąty  $M_2BM_1$  i  $M_2BC$  mają wspólny bok  $M_2B$  oraz  $BC = BM_1 = M_1M_2 = CM_2$ . Zatem są one przystające i  $M_1 = C$ .

Rozpatrzmy przypadek, gdy punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $M_1M_2$  (rys. 9). Przypuśćmy, że w chwili początkowej  $M_1 = C$  i  $M_2 = A$ . Gdy punkt  $M_2$  przebiega łuk  $\overline{AB}$ , punkt  $M$  zakreśla łuk  $\overline{QN}$  o środku  $C$  i promieniu równym połowie boku trójkąta. Następnie punkt  $M_2$  pokrywa się z  $B$ , a  $M_1$  przebiega łuk  $\overline{CA}$  — punkt  $M$  zakreśli łuk  $\overline{NP}$ . Dalej punkt  $M_1$  jest nieruchomy w  $A$ ,  $M_2$  zaś porusza się po  $\overline{BC}$  — otrzymujemy łuk  $\overline{PQ}$ . W tym momencie punkt  $M$  powrócił do punktu  $Q$  i odcinek  $M_1M_2$  zajął poprzednie położenie, ale punkty  $M_1$  i  $M_2$  zamieniły się miejscami. Aby przywrócić położenie początkowe, musimy cały cykl powtórzyć jeszcze raz.

Pole  $S$  trójkąta Reuleaux jest równe różnicy potrojonego pola wycinka kołowego (dla kąta  $\frac{\pi}{6}$ ) i podwojonego pola trójkąta równobocznego. Jeśli bok trójkąta jest równy 2, to  $S = 2\pi - 2\sqrt{3}$ . Pole  $S_1$  figury  $F$  ograniczonej łukami  $\overline{QN}$ ,  $\overline{NP}$ ,  $\overline{PQ}$  otrzymamy odejmując od pola trójkąta pole trzech wycinków kołowych.

Tak więc  $S_1 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ . Pole to musimy odjąć od  $S$  dwukrotnie. Mamy

$$S - 2S_1 = 3\pi - 4\sqrt{3} \neq \pi.$$

Spróbujmy wyjaśnić powstałą wątpliwość. Zauważmy, że dla okręgu, prostokąta i wielokąta punkt  $M$  poruszał się po krzywej  $L_1$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, natomiast w ostatnim przykładzie punkt  $M$  obchodził figurę  $F$  dwukrotnie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Aby rozróżnić te dwa przypadki, w matematyce wprowadza się pojęcie pola powierzchni zorientowanej. Przyjmuje się je za ujemne, gdy punkt  $M$  porusza się ruchem zgodnym ze wskazówkami zegara i za dodatnie — gdy w przeciwnym. A więc w ostatnim przykładzie musimy obliczyć wielkość

$$S - (-2S_1) = 2\pi - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \pi.$$

Teraz się zgadza, otrzymaliśmy  $\pi$ .

Jeśli punkt  $M$  nie leży w środku odcinka  $M_1M_2$ , to może powstać jeszcze ciekawsza sytuacja (rys. 10). Tu odległość  $CM$  spełnia nierówność

$$0 \leq CM \leq \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}).$$

Punkt  $M$  obchodzi cztery zbiory, przy czym zbiór I ma powierzchnię dodatnią, a II, III i IV ujemną. Czytelnik łatwo sprawdzi, że twierdzenie Holditcha pozostaje prawdziwe. Jest tak również w sytuacji z rys. 11.

Tu długość  $CM$  spełnia nierówności  $\frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) \leq CM \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Czytelnik z pewnością zgodzi się z Bromanem, który powiedział: „twierdzenie Holditcha jest znacznie głębsze niż myślał sam Holditch w roku 1858”.

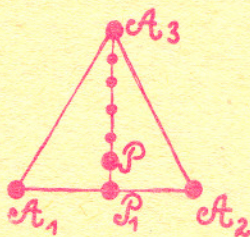


# delta

# mała delta

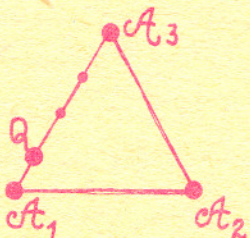
## Współrzędne barycentryczne

W trzech wybranych punktach  $A_1, A_2, A_3$  (nieważkiej) płaszczyzny umieszczamy ciężarki  $m_1, m_2, m_3$ . Tym samym wyróżniamy pewien jej punkt  $P$  — barycentrum, czyli po polsku — środek ciężkości. O ile ciężarki dobrane są tak, że  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ , to trójkę  $(m_1, m_2, m_3)$  nazywamy współzrędnymi barycentrycznymi punktu  $P$ . Zmieniając ciężarki na inne uzyskujemy inne środki ciężkości. Wszelkim możliwym układom ciężarków odpowiadają poszczególne punkty płaszczyzny. Każdemu zaś punktowi ... nie, nie całej płaszczyzny, tylko trójkąta  $A_1 A_2 A_3$  odpowiada pewien układ ciężarków — pewne współzrędnne barycentryczne. Aby mieć współzrędnne barycentryczne dla wszystkich punktów płaszczyzny, musielibyśmy używać również „ujemnych ciężarków” — np. baloników napełnionych lekkim gazem, ciągnących płaszczyznę do góry. Oczywiście, użycie trzech baloników jest wykluczone — musi być przecież  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ .



Gdy  $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{3}, m_3 = \frac{1}{6}$ ,  $P_1$  jest środkiem ciężkości  $A_1, A_2$ , zaś  $P - A_1 A_2 A_3$ .  
Współzrędnne  $P$  to  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

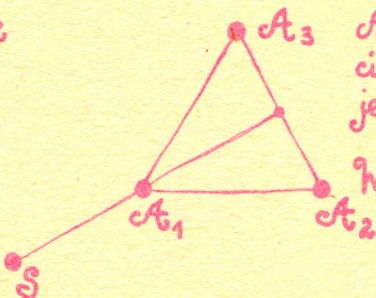
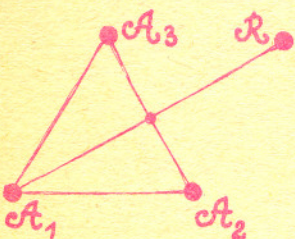
(A jakie są współzrędnne  $P_1$ ?).



Współzrędnne barycentryczne punktu  $Q$  są  $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ ,

prawda?

Punkt  $R$  ma współzrędnne barycentryczne  $(-1, 1, 1)$ , czyli w  $A_1$  jest balonik o sile nośnej równej każdemu z ciężarków w  $A_2$  i  $A_3$ .



A oto sytuacja przecinna: ciężarek i dwa jednakowe baloniki.

Współzrędnne  $S$  to  $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

## „Kolorowy” sygnał telewizyjny

nie jest wcale kolorowy. Są to trzy „zwykłe” sygnały mówiące jak silnie ma się świecić czerwony, żółty i niebieski punkt luminoforu w kineskopie. Te trzy sygnały to współzrędnne barycentryczne jakiegoś punktu opracowanego eksperymentalnie diagramu naszego widzenia. Stwierdzono mianowicie, że jeśli barwa czerwona ma intensywność świecenia  $m_1$ , żółta —  $m_2$ , a niebieska —  $m_3$  (przy czym  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ ), to zobaczymy kolor punktu o współzrędnnych

barycentrycznych  $(m_1, m_2, m_3)$  z pierwszej strony okładki Delt. W szczególności gdy

$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ , zobaczymy kolor biały.

Ponieważ nie ma „ujemnych” sygnałów świetlnych (przynajmniej w telewizorze), więc nie wszystkie kolory można w nim pokazać, a tylko mieszczące się w zaznaczonym trójkącie. Stąd sztuczność kolorystyki telewizyjnej.

Nasz okładkowy diagram otoczony jest szarością. Odpowiada ona tym obszarom widma, których wzrok nie rejestruje.



## Jak to jest zrobione?

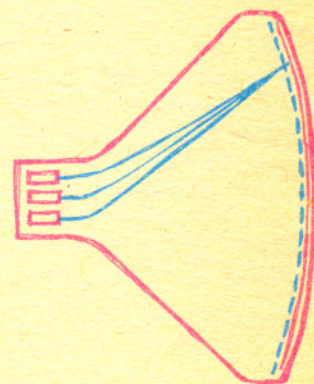
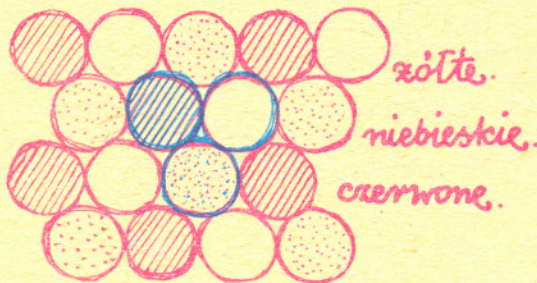
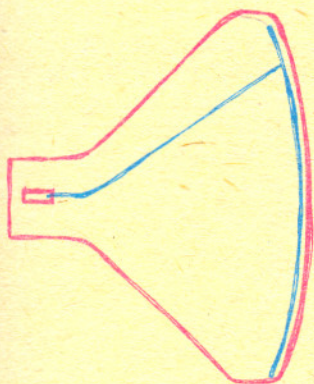
Spójrzcie przez silnie powiększające szkło na ekran włączonego telewizora. Okazuje się, że w dużym powiększeniu trudno rozpoznać wyraźny z daleka obraz. Widać tylko gęsto ułożone jaśniejsze i ciemniejsze plamki. To świeci luminofor, pokrywający od wewnątrz telewizyjny ekran. Pobudza go do świecenia wąski strumień elektronów wyrzucany ze specjalnego „działa” umieszczonego za ekranem. Im gęściej padają elektrony na warstewkę luminoforu, tym jaśniej świeci plamka, na którą padły. Aby elektrony bez przeszkód docierały do ekranu, ich wyrzutnia oraz powierzchnia pokryta luminoforem zamknięte są w opróżnionej z gazów bańce szklanej, zwanej kineskopem.

Spójrzcie jeszcze raz, przez silną lupę, na ekran kineskopu. Świecące plamki układają się w wyraźne poziome linie. To wyrzucany z działa strumień elektronów wędruje z lewej strony na prawą, aby od góry do dołu — wiersz po wierszu — zarysować cały

ekran. W ten sposób 25 razy na sekundę na ekranie telewizora pojawia się nowy obraz.

Ale na naszych ekranach widać zupełnie co innego! Wykrzykną zapewne posiadacze telewizorów kolorowych. I będą mieli rację... choć nie całkiem. Na ekranie telewizora kolorowego obraz też składa się z plamek i też rysowany jest przez strumień elektronów. Tylko że tam, gdzie w telewizorze czarno-białym świeci jedna plamka — w telewizorze kolorowym świeci „triada”, trzy plamki w kolorze czerwonym, żółtym i niebieskim. Ekran telewizora kolorowego jest nakrapiany trzema różnymi typami luminoforu tak, jak to pokazuje rysunek.

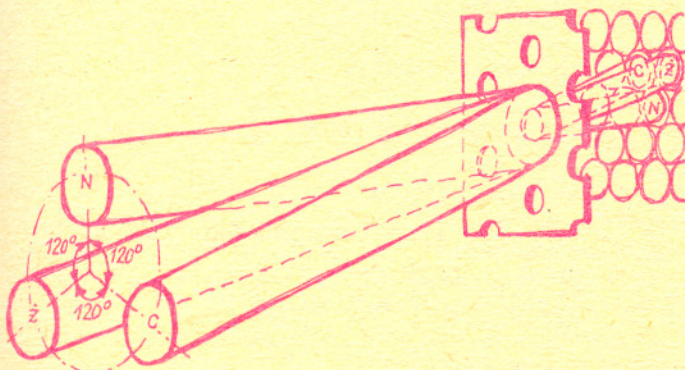
Ale jak strumień elektronów może sobie poradzić, żeby naraz zapalić wszystkie trzy plamki triady i to na dodatek każdą z inną jasnością? Jeden strumień pewnie by sobie nie poradził. Stąd w telewizorze kolorowym obraz rysowany jest jednocześnie przez trzy strumienie. Pęczek taki obiega ekran telewizyjny w ten sam sposób jak w telewizorze czarno-białym. Każdy strumień odpowiada za jasność świecenia plamki w danym kolorze.



Wspaniały pomysł, ale jeżeli plamki ułożone są na ekranie tak, jak to pokazuje rysunek, to każdy ze strumieni musi się porządnie „naskakać”, aby padać tylko na swoje plamki. Otóż wymyślono i na to sposób. Na drodze pęczka strumieni ustawiono dziurkowaną przesłonę. Dziurki tej przesłony wypadają akurat na wprost centrum każdej triady. Jednocześnie strumienie elektronów nie biegną równoległe, lecz zbiegają się tak, że przecinają się dokładnie w otworkach przesłony. Taki pęczek strumieni oświetla już tylko triady i to tak, że każdy strumień nie ma kłopotu z wyborem odpowiedniej plamki na ekranie.

Aby nawet z całkiem bliska obraz na ekranie był wyraźny, musi go tworzyć bardzo dużo małych plamek luminoforu. Triad na ekranie kolorowym jest tyle, z ilu plamek składa się obraz na telewizorze czarno-białym. A ten wyświetlany jest w około 500 liniach, z których każdą tworzy 800 punktów. Jest więc triad 400 000 i tyle samo otworków w przesłonie. Jeżeli jeszcze zauważycie, że plamek luminoforu jest trzy razy więcej, to widać jak precyzyjnie musi być wykonany kineskop kolorowy. Jego konstrukcję można nieco uprościć zastępując dziurkowaną przesłonę przesłoną z pionowymi szczelinami. Pozostaną jednak jeszcze problemy z bardzo precyzyjnym jej umieszczeniem względem ekranu i dokładnym sterowaniem wszystkimi trzema strumieniami elektronów, by przecinały się one dokładnie w otworkach przesłony.

Skoro już wiecie teraz, na jakiej zasadzie działa telewizor kolorowy, pomyślcie, dlaczego można na nim oglądać programy czarno-białe.



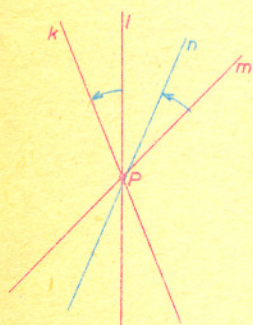
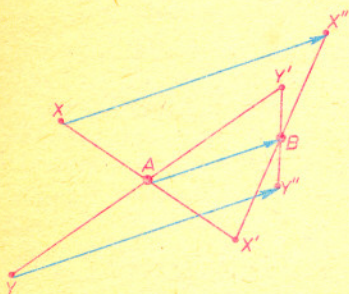
Małą Deltę przygotowali Krzysztof BIESAGA i Marek KORDOS



Rozwiązanie zadania M 372. Niech  $a$  i  $b$  będą wektorami jednostkowymi leżącymi na półprostych  $Op$  i  $Oq$ , odpowiednio. Wówczas środkiem odcinka o końcach  $A = ta + ma$ ,  $B = tb$  jest punkt

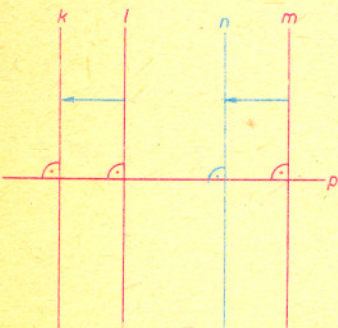
$$C = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}t(a+b) + \frac{m}{2}a,$$

skąd widać, że przy zmieniającym się  $t$  punkt  $C$  leży na półprostej równoległej do dwusiecznej kąta między danymi półprostymi i wychodzącej z punktu  $\frac{m}{2}a$ .



$$k \cdot l \cdot m = n$$

Prostą  $n$  można znaleźć odkładając od prostej  $m$  kąt  $lk$ . Dlaczego?



$$k \cdot l \cdot m = n$$

Prostą  $n$  można znaleźć odkładając od prostej  $m$  wektor  $lk$ . Dlaczego?

Polskiego tłumaczenia tej książki dotąd nie ma. Jest natomiast dostępne w bibliotekach tłumaczenie rosyjskie:

Построение геометрии на основе понятия симметрии.

Gdy Kartezjusz stworzył geometrię analityczną (tj. sposób uprawiania geometrii za pomocą rachunków na współrzędnych punktów), sprowadzając ją tym samym do pozycji jednego z działów arytmetyki, wybuchł wielki entuzjazm. Okazało się, że cały szereg nie rozwiązanych problemów udało się tymi nowymi metodami rozwiązać. A przecież w nauce nie chodzi o to, jakich (byle oczywiście poprawnych) metod używamy, tylko o rezultaty.

Nie wszyscy jednak byli tego zdania. Gottfried Wilhelm Leibniz miał poważne obawy, czy arytmetyzacja geometrii nie spowoduje, że będzie się w niej rozpatrywać przeważnie, a może jedynie, te tylko problemy, które dobrze poddają się arytmetyzacji. Dziś, po upływie ponad trzech stuleci, wielu sądzi, że tak właśnie się stało, jak to „wykrakał” Leibniz, ze szkodą dla najstarszej gałęzi nauki — geometrii. Leibniz nie miał nic przeciwko rachunkom, twierdził jednak, że jeśli chcemy w geometrii rachować, to rachujmy na obiektach geometrycznych. Zdanie to, zwane programem Leibniza, uznano jednak za przesadny puryzm metodologiczny po pierwsze dlatego, że geometria analityczna święciła triumfy, po drugie dlatego, że nikt nie wiedział, o jakie to geometryczne rachunki mogłoby chodzić.

Pod koniec XIX wieku idea Leibniza ożyła. Duński matematyk Hjelmslev wskazał obiekty geometryczne, na których można było rachować. Zauważył mianowicie, że punkty stałe inwolucji będących podobieństwami w przestrzeni, np. euklidesowej, tworzą podprzestrzenie tej przestrzeni (wyjaśnienie: inwolucja to przekształcenie odwrotne do samego siebie). Istotnie: jedyną inwolucję (co łatwo stwierdzić przez przegląd wszystkich podobieństw) to symetrię środkową (jeden punkt stały), symetrię osiową (prosta punktów stałych) i symetrię płaszczyznową (płaszczyzna punktów stałych). Jak rachować na przekształceniach — wiadomo — można je składać (wykonywać kilka po kolei).

Stworzoną przez Hjelmsleva możliwość podchwycił Kurt Reidemeister wskazując, jak pięknie i prosto można opisać szereg faktów geometrycznych za pomocą takich rachunków. Traktujmy punkt  $A$  jako to samo, co symetria środkowa o środku w  $A$ , prostą  $k$  — jako to samo, co symetria osiowa o osi  $k$  (ograniczmy się dalej do geometrii płaszczyzny). Zatem  $A \cdot B$  to złożenie symetrii względem  $A$  i względem  $B$ , czyli przesunięcie o wektor  $2 \cdot \overline{AB}$ . Wszelkie zaś równości to już fakty geometryczne. Na przykład  $A \cdot B = C \cdot D$  mówi, że  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

Podobnie  $A \cdot B \cdot C = D$  oznacza, że  $ABCD$  jest równoległobokiem: istotnie mamy

$$A \cdot B \cdot C \cdot C = D \cdot C,$$

a ponieważ  $C \cdot C$  to identyczność ( $C$  jest przecież inwolucją), więc

$$A \cdot B = D \cdot C,$$

co oznacza, że  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że

$$k \cdot l = l \cdot k \quad \text{i} \quad k \neq l$$

oznacza, że  $k$  i  $l$  są prostopadłe, oraz że

$$A \cdot k = k \cdot A$$

mówi, iż punkt  $A$  leży na prostej  $k$ .

Geometria daje się więc opisać zgodnie z programem Leibniza, choć Reidemeister nie umiał jeszcze tego w pełni zrealizować. Umiał natomiast zapalić do tej idei swoich licznych uczniów. Ich prace dostarczały coraz to nowych reguł hjelmslevowskich rachunków. Punktem przełomowym były tu dwa twierdzenia udowodnione w 1941 roku przez Arnolda Schmidta:

dla dowolnych trzech prostych  $k, l, m$  mających wspólny punkt (wspólną prostopadłą) istnieje taka prosta  $n$ , że  $k \cdot l \cdot m = n$ ,

co formalnie można zapisać tak:

$$\bigwedge_{k,l,m,P} \bigvee_n k \cdot P = P \cdot k \wedge l \cdot P = P \cdot l \wedge m \cdot P = P \cdot m \Rightarrow k \cdot l \cdot m = n,$$

$$\bigwedge_{k,l,m,p} \bigvee_n k \cdot p = p \cdot k \wedge l \cdot p = p \cdot l \wedge m \cdot p = p \cdot m \wedge \neq (k, l, m, p) \Rightarrow k \cdot l \cdot m = n.$$

I dalej już poszło szybko. W 1959 roku Friedrich Bachmann opublikował piękną i bogatą monografię „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff”, w której przedstawił geometrię wyłożoną właśnie w sposób wymarzony przez Leibniza — jako opisane wyżej geometryczne rachunki. W Niemczech ten sposób do tego stopnia stał się popularny, że chyba niedaleka jest chwila, gdy stanie się on tam sposobem nauczania geometrii w szkołach.



Dr Andrzej KRÓLAK

Austriacki filozof Ernst Mach (1836—1916) jako pierwszy dokonał konstruktywnego ataku na mechanikę Newtona. Twierdził on, że bezwładność ciała jest całkowicie wyznaczona przez otaczający je Wszechświat, a nie jak to zakładał Newton, jest jego wewnętrzną niezależną cechą.

Pojęcie bezwładności (inercji) ciała po raz pierwszy wprowadził Galileusz. Znalazło ono swoje matematyczne ujęcie w prawach ruchu Newtona. Zgodnie z drugim prawem siła działająca na ciało jest proporcjonalna do przyspieszenia tego ciała. Stała proporcjonalności jest miarą bezwładności ciała i jest nazywana masą inercjalną. Według Newtona masa inercjalna jest własnością ciała zupełnie niezależną od innych otaczających je ciał. Tak więc jeżeli  $F$  — siła,  $a$  — przyspieszenie, a  $m$  — masa, to drugie prawo ruchu ma postać

$$F = ma.$$

Przyspieszenie ciała ma ten sam kierunek i zwrot, co działająca na nie siła.

Powyższe równanie nie jest jednak prawdziwe we wszystkich układach odniesienia. Rozważmy dwa przykłady. Najpierw przypuśćmy, że ciało o masie  $m$  spada swobodnie na Ziemię. Na ciało to działa siła grawitacyjna  $F$  przyciągania ziemskiego. W układzie współrzędnych  $O_1$  (rys. 1a) związanym z Ziemią zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$F = mg,$$

gdzie  $g$  — przyspieszenie grawitacyjne Ziemi.

Natomiast w układzie współrzędnych  $O_1'$ , w którym ciało spoczywa, przyspieszenie ciała jest równe zero, mimo że w dalszym ciągu działa na nie siła przyciągania ziemskiego (rys. 1b). Tak więc w układzie współrzędnych  $O_1'$  drugie prawo ruchu nie obowiązuje. Jako drugi przykład rozważmy ruch Ziemi wokół Słońca. Niech  $O_2$  będzie układem odniesienia, w którym Słońce spoczywa, a Ziemia je obiega. W układzie tym przyspieszenie Ziemi jest zawsze skierowane w kierunku Słońca, a więc zgodnie z kierunkiem siły grawitacyjnej wywieranej przez Słońce na Ziemię (rys. 2a). Drugie prawo Newtona jest spełnione. Weźmy teraz układ odniesienia  $O_2'$ , w którym Ziemia spoczywa. W układzie tym drugie prawo ruchu nie obowiązuje, ponieważ siła grawitacyjna Słońca nie wywołuje żadnego przyspieszenia Ziemi (rys. 2b). Tak więc nie można stosować drugiego prawa ruchu we wszystkich układach odniesienia. Układy, w których prawo to obowiązuje, nazywamy inercjalnymi.

Aby móc stosować swoje prawo również w nieinercjalnych układach odniesienia, Newton założył istnienie dodatkowych sił, zwanych siłami pozornymi lub inercjalnymi, nie pochodzących od obiektów materialnych. W nieinercjalnym układzie odniesienia obowiązuje zmodyfikowane prawo ruchu Newtona

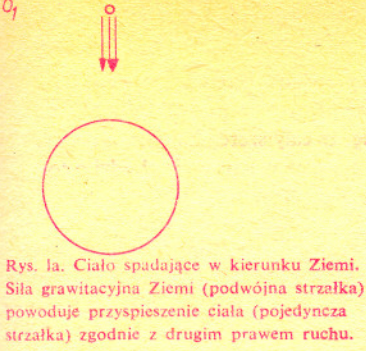
$$F + P = ma,$$

gdzie  $P$  jest sumą sił pozornych.

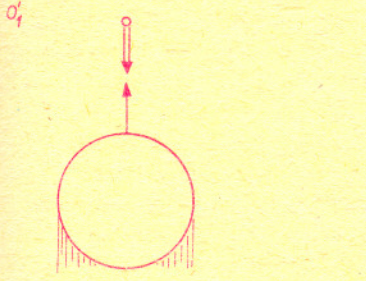
W układzie  $O_1'$  (w przykładzie powyżej)  $P$  jest siłą co do wartości równą sile przyciągania ziemskiego, ale skierowaną do niej przeciwnie. W układzie  $O_2'$  siłą pozorną jest dobrze znana siła odśrodkowa.

Powstaje pytanie, jak odróżnić układy inercjalne od nieinercjalnych? Aby odpowiedzieć na to pytanie, Newton założył istnienie przestrzeni absolutnej i określił inercjalne układy odniesienia jako takie, które nie mają przyspieszeń względem przestrzeni absolutnej. Zaproponował szereg doświadczeń, za pomocą których można wyznaczyć przyspieszenie względem przestrzeni absolutnej. Najbardziej znane jest doświadczenie z obracającym się wiadrzem wody.

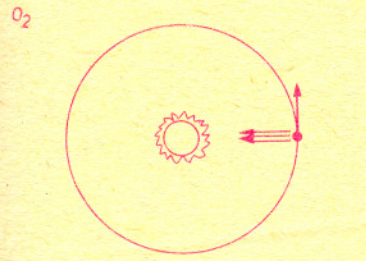
Weźmy wiadro zawieszane na linie i wypełnione wodą. Obracając wiadro skreślamy linię. Gdy lina jest dostatecznie skreślona, puszczamy wiadro. Przed puszczeniem wiadra powierzchnia wody jest płaska (rys. 3a). Po puszczeniu wiadro jest obracane przez linię. W miarę jak lina rozkręca się i prędkość kątowa wiadra jest coraz większa woda unosi się na brzegach wiadra i jej powierzchnia przybiera kształt paraboloidalny (rys. 3b). Po całkowitym rozkręceniu się liny następują drgania tłumione i w końcu wiadro nieruchomieje. Newton interpretował swoje doświadczenie w sposób następujący. Krzywizna powierzchni wody w wiadrze jest miarą jego prędkości kątowej względem przestrzeni absolutnej. Ten absolutny obrót nie ma nic wspólnego z obrotami względnymi. Na przykład zakrzywienie powierzchni wody nie zależy od prędkości kątowej  $\omega$  wiadra względem wody. Gdy wiadro jest w spoczynku i powierzchnia wody jest płaska, to  $\omega$  jest równa zero. Prędkość kątowa  $\omega$  jest również równa zero, gdy wiadro obraca się i powierzchnia wody jest zakrzywiona.



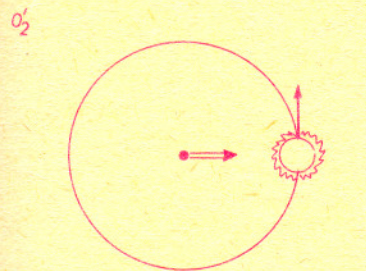
Rys. 1a. Ciało spadające w kierunku Ziemi. Siła grawitacyjna Ziemi (podwójna strzałka) powoduje przyspieszenie ciała (pojedyncza strzałka) zgodnie z drugim prawem ruchu.



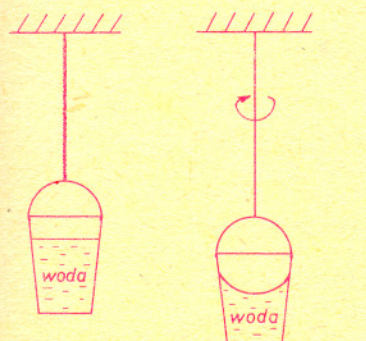
Rys. 1b. Ciało spoczywa w układzie  $O_1'$ . Siła grawitacyjna Ziemi nie wywołuje przyspieszenia ciała.



Rys. 2a. Ruch wokół Słońca. Prędkość Ziemi zaznaczono grubą strzałką. Przyspieszenie Ziemi (pojedyncza strzałka) jest skierowane w stronę Słońca zgodnie z kierunkiem siły grawitacyjnej Słońca.



Rys. 2b. Ruch Słońca względem Ziemi. Siła grawitacyjna Słońca nie wywołuje przyspieszenia Ziemi.



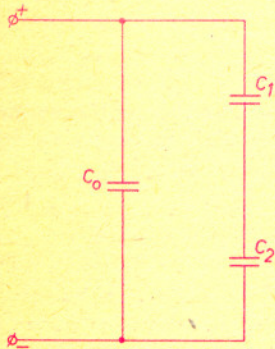
Rys. 3a Rys. 3b



Rozwiązanie zadania P 157. Wstawienie kondensatora do puszki powoduje przegrupowanie ładunku w obrębie jej ścianek oraz w samych okładkach kondensatora. W wyniku tworzy się układ płaskich, naładowanych przewodników równoważny układowi kondensatorów pokazanemu na rysunku. Gdy zaniedba się efekty brzegowe przy obliczaniu pojemności kondensatorów, mamy  $C_1 \approx C_2 \approx C_0$  i pojemność zastępcza wzrasta do:

$C_0 + \frac{C_0}{2} = \frac{3}{2} C_0$ .  $C_0$  — jest pojemnością kondensatora przed wsunięciem do puszki:

$$C_0 = \frac{s}{4\pi kd}$$



$C_0$  — pojemność kondensatora utworzonego z płyt  $A$  i  $B$   
 $C_1$  — pojemność kondensatora z płyt  $AA'$   
 $C_2$  — pojemność kondensatora z płyt  $BB'$



Jednym z pierwszych, który poddał krytyce ideę przestrzeni absolutnej, był irlandzki filozof biskup George Berkeley (1685–1753). Odrzucił on istnienie przestrzeni absolutnej na podstawie tego, że jest ona nieobserwowalna. Twierdził on, że jest sens mówić o ruchu ciała tylko względem innych ciał materialnych. W przypadku doświadczenia z wiadrem za istotny element uważał ruch względem reszty Wszechświata, a w szczególności gwiazd stałych.

Ernst Mach poszerzył i pogłębił krytykę Berkeleya. Według niego doświadczenie Newtona z obracającym się wiadrem mówi nam, że „obrót wody względem brzegu wiadra nie wywołuje zauważalnych sił odśrodkowych, ale że takie siły są wywoływane przez jej obrót względem masy Ziemi i innych ciał niebieskich. Nikt nie może powiedzieć, jaki byłby wynik eksperymentu, gdyby wiadro miało taką masę, że jego grubość wynosiłaby kilka mil”.

Według Macha woda w wiadrze w doświadczeniu Newtona nie unosiłaby się, gdyby nie było Ziemi i innych ciał niebieskich. Wiadro z wodą nie miałoby względem czego się obracać. Według niego zakrzywienie powierzchni wody w wiadrze mierzy jego prędkość kątową względem dalekich gwiazd, a nie względem przestrzeni absolutnej. W jego pojęciu przestrzeń absolutna w ogóle nie istnieje. Jest sens mówić tylko o ruchu jednych ciał względem drugich.

Te rozważania doprowadziły Macha do definicji układu inercjalnego jako takiego, który pozostaje w ruchu jednostajnym względem odległej materii we Wszechświecie. Twierdził on, że gdyby Wszechświat był pusty, nie można by było wprowadzić układów inercjalnych. Ruch cząstki próbnej w takim Wszechświecie byłby nieokreślony.

Mach w swojej krytyce mechaniki Newtona poszedł nawet dalej. Przypuśćmy, że w całym Wszechświecie istnieje tylko jedna cząstka i nie działają na nią żadne siły. W tym przypadku zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$ma = 0.$$

Jeżeli przyjąć punkt widzenia Newtona, to  $a = 0$ , co oznacza, że cząstka porusza się ze stałą prędkością. Natomiast zgodnie z punktem widzenia Macha, ponieważ Wszechświat jest pusty, cząstka nie ma względem czego się poruszać. W związku z tym ruch jej nie może być określony. Można to uzyskać przyjmując alternatywne rozwiązanie powyższego równania  $m = 0$ . Oznacza to, że w pustym Wszechświecie ciało może nie mieć masy. Wnioskiem Macha jest uznanie, że masa ciała jest całkowicie wyznaczona przez materię we Wszechświecie. Jako zasadę Macha przyjmujemy twierdzenie, że bezwładność ciała jest całkowicie wyznaczona przez otaczający je Wszechświat. Idee Macha zostały przyjęte ze znacznym sceptycyzmem. Utrzymywano, że prawa ruchu powinny być takie same dla wszystkich możliwych rozkładów materii i istnienie siły odśrodkowej nie powinno zależeć od tego czy istnieje, czy też nie materia na zewnątrz rozważanego układu. Zarzucano Machowi, że nie dał żadnej wskazówki co do postaci oddziaływania między dalekimi gwiazdami a lokalną materią.

Mimo to koncepcje Macha wywarły duży wpływ na Einsteina, gdy budował on swoją ogólną teorię względności (szczególnie krytyka Macha przestrzeni absolutnej). Właśnie Einstein wprowadził nazwę zasada Macha. Einstein jednak nieco inaczej rozwiązał problem istnienia układów inercjalnych. Zaobserwował on, że lokalnie nie można odróżnić sił grawitacyjnych od pozornych (jest to tzw. zasada równoważności). W szczególności spadający swobodnie, nieobracający się obserwator nie zauważy pola grawitacyjnego w swoim bezpośrednim sąsiedztwie. Sugeruje to utożsamienie układu inercjalnego ze swobodnie spadającym nieobracającym się obserwatorem.

Jest rzeczą zastanawiającą, że siły pozorne tak dokładnie naśladują siły grawitacyjne. Prosty wyjaśnieniem zasugerowanym przez Einsteina jest, że siły pozorne są również pochodzenia grawitacyjnego. Odpowiedź na pytanie, jakie są źródła tych sił grawitacyjnych, narzucały Einsteinowi idee Macha. Siły te są wyznaczone przez rozkład materii w całym Wszechświecie. Einstein miał nadzieję, że zasada Macha jest zawarta w ogólnej teorii względności. Okazało się jednak, że chociaż są rozwiązania równań Einsteina zgodne z zasadą Macha, to istnieją również rozwiązania całkowicie z nią sprzeczne. Podjęto wiele prób skonstruowania teorii grawitacji, w której zasada Macha byłaby spełniona. Jednym z pomysłów było znalezienie pewnych warunków na rozwiązania równań Einsteina (na przykład w postaci warunków brzegowych), które eliminowałyby rozwiązania niezgodne z zasadą Macha. Jak dotąd próby te nie doprowadziły do zadowalającej teorii.

Zasadę Macha można również spróbować potwierdzić doświadczalnie. Chodzi tu o zweryfikowanie jak dobrze nieobracający się układ odniesienia wyznaczony przez daleką materię we Wszechświecie jest zgodny z nieobracającym się układem wyznaczonym za pomocą metod lokalnych (w przypadku wiadra był to pomiar zakrzywienia powierzchni wody). W tym



celu można posłużyć się odkrytym w 1965 roku przez Penziasa i Wilsona promieniowaniem mikrofalowym tła (nagroda Nobla w 1978 roku). Promieniowanie to powstało we wczesnym etapie rozwoju Wszechświata i można przyjąć, że układ odniesienia związany z tym promieniowaniem jest wyznaczony przez daleką materię we Wszechświecie. Pomiary zmian natężenia promieniowania tła w okresie 24 godzin pozwalają na pomiar prędkości Układu Słonecznego względem tego promieniowania. Obserwacje wykazały, że prędkość ta wynosi około 350 km/s.

Z drugiej strony możemy obliczyć prędkość Słońca wynikającą z rotacji Galaktyki za pomocą obserwacji astronomicznych. Prędkość ta jest równa około 250 km/s. Aby móc porównać obie otrzymane prędkości, należy jeszcze uwzględnić prędkości liniowe Słońca i samej Galaktyki, jak również udział Galaktyki w obrocie większych skupisk materii we Wszechświecie. Po uwzględnieniu tych efektów otrzymujemy znacznie lepszą zgodność obu pomiarów obrotu.

Punkt widzenia Macha nie jest przyjęty przez wszystkich fizyków ani nawet przez ich większość. Problem źródeł bezwładności jest ciągle jeszcze otwarty.

Nasz Czytelnik S. Łukiński pyta, na czym polegają trudności w rozszyfrowaniu tzw. szyfru optymalnego. Nie wchodząc w szczegóły szyfru (patrz *Delta* 1/1980) przypomnijmy, że do zaszyfrowania informacji wystarczy znajomość iloczynu dwóch liczb pierwszych — ten iloczyn jest powszechnie znany i każdy może wiadomość zaszyfrować — natomiast do rozszyfrowania konieczna jest znajomość obu czynników — zna je tylko adresat.

Czytelnik pisze: *Skąd szyfrant weźmie te dwie bardzo duże liczby pierwsze? Ja na przykład musiałbym zajrzeć do katalogu opublikowanych liczb pierwszych. Deszyfrant zajrzy do tego samego katalogu i sprawdzi wszystkie iloczyny. To, rzecz jasna, jest coś, co mi się tylko „wydaje”, bo nie znam ilości „odkrytych” liczb pierwszych.*

W opublikowanym katalogu liczb pierwszych jest ponad 6 milionów liczb. Ale szyfrującemu nie oplaca się korzystać z tego katalogu — jest za mały. Wystarczy bowiem wykonać tyle dzieleń, ile liczb jest w tym katalogu, aby rozłożyć na czynniki iloczyn dwu liczb pierwszych (też z tego katalogu). A z takim zadaniem najszybsze komputery uporają się w kilka minut. Nie warto natomiast sprawdzać wszystkich iloczynów — aby je obliczyć, trzeba zamiast  $6 \cdot 10^6$  wykonać  $(6 \cdot 10^6)^2$  działań.

Wśród liczb mniejszych od  $N$  jest około  $N/\ln N$  liczb pierwszych. Aby na pewno znaleźć jakiś czynnik pierwszy  $N$ , należy wykonać  $\sqrt{N}/\ln \sqrt{N}$  dzieleń — mniej — jeśli szczęśliwie trafimy na czynnik pierwszy  $N$ . Gdy  $N$  jest iloczynem dwu liczb pierwszych, da to już nam rozkład  $N$  na czynniki pierwsze. Gdyby  $N$  miało (jak zaproponowano w artykule) około stu cyfr, to  $\sqrt{N}/\ln \sqrt{N} > \sqrt{N}/300 > 10^{50}/300 > 10^{47}$ . Jeśli nawet jesteśmy szczęściarzami i wystarczy nam 1/1 000 000 część maksymalnej liczby dzieleń, to i tak najszybszy komputer będzie dzielił przez ponad  $10^{20}$  lat (bardzo „grube” oszacowanie z dołu).

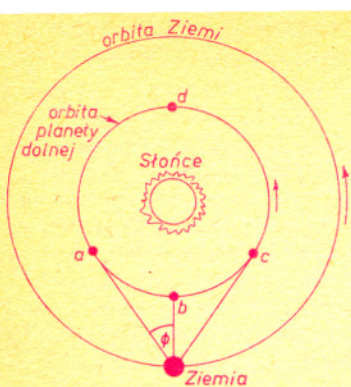
Szyfrujący musi znaleźć dwie liczby pierwsze około pięćdziesięciocyfrowe, powiedzmy, mniejsze niż  $10^{60}$ . Przeciętnie wśród  $\ln 10^{60}$  takich liczb znajduje się liczba pierwsza. Ale  $\ln 10^{60} < 200$ , tak więc prawdopodobieństwo, że wśród 200 kolejnych liczb (mniejszych niż  $10^{60}$ ) jest liczba

pierwsza, jest większe od  $1 - \frac{1}{2^{200}} > 0,999999$ . Zważywszy, że możemy od razu odrzucić liczby

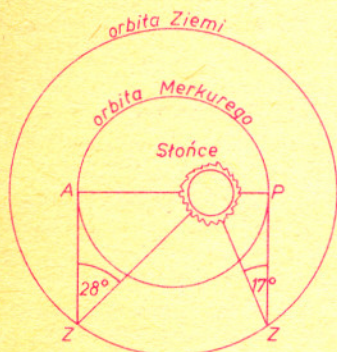
parzyste oraz podzielne przez 3 i 5, wystarczy zbadać mniej niż 600 liczb. W artykule A. Kreczmara (*Delta* 6/1979) podany jest algorytm sprawdzający, czy liczba jest pierwsza. Komputer stosując ten algorytm w 10 minut sprawdził, które z liczb postaci  $2^p - 1$  ( $p \leq 500$ ) są pierwsze. Ale ponad 300 spośród tych liczb jest większych od  $10^{60}$ . Tak więc używając tego samego komputera i algorytmu szyfrujący ma bardzo dużą szansę, że już po 40 minutach stanie się posiadaczem dwu „własnych” liczb pierwszych. Ważne jest przy tym to, iż algorytm może tylko sprawdzić, czy liczba jest pierwsza, natomiast nie poda czynnika liczby złożonej, jest więc bezużyteczny dla deszyfranta.

J. R.





Rys. 1. Konfiguracje planety dolnej: a — największa elongacja wschodnia, b — złączenie dolne, c — największa elongacja zachodnia, d — złączenie górne.



Rys. 2. Objaśnienie różnych wartości kąta maksymalnej elongacji dla Merkurego. P — perihelium, A — aphelium orbity Merkurego.

Obserwujemy planety — to hasło, które proponujemy na coraz dłuższe wieczory i noce kończącego się lata. Śledzenie torów planet przez dłuższy czas (np. kilka miesięcy) może być bardzo ciekawe, gdyż obiekty te dość szybko zmieniają swe położenie na tle gwiazd, zakreślając przy tym zawiłe łuki i pętle.

Ze względu na położenia orbit planet względem orbity Ziemi planety dzielimy na dolne i górne. Dziś zamieszczamy parę wskazówek ułatwiających odnalezienie planet dolnych, tj. Merkurego i Wenus.

Planety dolne w zależności od swego pozornego położenia względem Słońca mogą tworzyć następujące szczególne konfiguracje (rys. 1): koniunkcję dolną (złączenie dolne) — planeta znajduje się między Ziemią i Słońcem i wszystkie trzy ciała leżą niemal w linii prostej, koniunkcję górną (złączenie górne) — sytuacja analogiczna do poprzedniej, z tym że planeta znajduje się poza Słońcem, wreszcie wschodnią lub zachodnią elongację, podczas której planeta oglądana z Ziemi znajduje się w największej odległości od Słońca. Oczywiście najbardziej dogodnie warunki do obserwacji planet dolnych występują wtedy, gdy znajdują się one w maksymalnej elongacji wschodniej bądź zachodniej.

Spośród planet widocznych gołym okiem najtrudniej jest śledzić Merkurego. Przemieszcza się on bardzo szybko na tle gwiazd i zwykle jest słabo widoczny, pozostając nieustannie w stosunkowo bliskim sąsiedztwie Słońca. W związku z tym jedynie okresy w pobliżu największych odchyień (elongacji) nadają się do poszukiwań. W tym czasie obserwowany za pomocą nawet niewielkich instrumentów widoczny jest w fazach podobnych do pierwszej i ostatniej kwadry Księżyca. Sposobność zaobserwowania Merkurego zdarza się średnio dwa razy na 116 dni, tj. dwukrotnie w czasie jego okresu synodycznego (odstępu między dwoma jednakowymi położeniami na niebie względem Słońca). W czasie elongacji wschodniej Merkury widoczny jest o zmierzchu w zachodniej stronie nieba, zaś w czasie elongacji zachodniej może być obserwowany o brzasku we wschodniej stronie nieba.

Z powodu silnego spłaszczenia orbity Merkurego planeta ta nie zawsze jest jednakowo oddalona od Słońca podczas maksymalnych elongacji. Kąt największej elongacji zależy od wzajemnego położenia orbity Merkurego i Ziemi i waha się w granicach od 17° do 28° (rys. 2).

31 lipca Merkury był w największej elongacji wschodniej (27°). Teraz więc kolej na elongację zachodnią — zjawisko to nastąpi 14 września i planeta będzie widoczna nad ranem we wschodniej stronie nieba tuż przed wschodem Słońca. Następną elongację wschodnią Merkurego (22°) będzie miała miejsce 25 listopada. Godne zaobserwowania jest również zjawisko przejścia Merkurego w bliskim sąsiedztwie (1,5) najjaśniejszej gwiazdy w konstelacji Lwa — Regulusa, co nastąpi 9 września.

Wenus jest dla obserwacji obiektem znacznie wdzięczniejszym niż Merkury. Jej orbita znajduje się w większej odległości od Słońca i stąd w maksymalnych elongacjach kątowa odległość planety od naszej gwiazdy dziennej może osiągać 48° — a więc okresy jej widzialności w ciągu jednej nocy mogą osiągać 4<sup>h</sup>, podczas gdy dla Merkurego górna granica czasu, w jakim może on być widoczny, wynosi 1,5<sup>h</sup>. W czasie elongacji wschodniej, gdy Wenus w zachodniej stronie nieba pojawia się wkrótce po zniknięciu Słońca za horyzontem, zwana jest Gwiazdą Wieczorną, zaś w czasie elongacji zachodniej widoczna przed świtem zwana jest Gwiazdą Poranną lub Jutrzenką. W okresach tych bez trudu można odnaleźć ją na niebie — jest wówczas najjaśniejszym ciałem niebieskim po Słońcu i Księżycu. Przy sprzyjających warunkach może być widoczna nawet w dzień bez użycia instrumentów astronomicznych. Podobnie jak Księżyc i Merkury, Wenus przechodzi różne fazy — tj. różne obszary jej tarczy są niejednakowo oświetlone przez Słońce.

15 czerwca Wenus przeszła złączenie górne i od tego czasu zmierza ku coraz korzystniejszej pozycji do obserwacji. Jej okres synodyczny trwa 584 doby, a więc do końca roku nie osiągnie ona maksymalnej elongacji wschodniej. Jednak im bliżej końca roku, tym lepiej widoczna będzie prawdziwa ozdoba nieba — Gwiazda Wieczorna. 27 października Wenus zbliży się na odległość kątową 3,2 do najjaśniejszej gwiazdy konstelacji Skorpiona — Antaresa.

mgr Joanna Filipowicz

Rozwiązanie zadania M 373. Mamy

$$\sin(\cos x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

więc  $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) =$

$$= \cos(\sin x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} \times$$

$$\times \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2}.$$

Alte  $|\cos x + \sin x| =$

$$= \sqrt{\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{2},$$

i  $|\cos x - \sin x| = \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2},$

a ponieważ  $\frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > \sqrt{2}$ , więc mamy

zawsze

$$0 < \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{i } 0 < \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

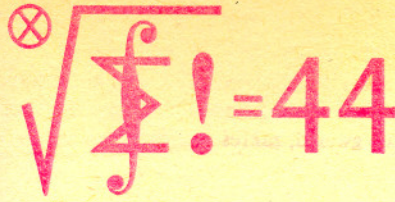
Zatem  $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) =$

$$= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} \times$$

$$\times \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2} > 0,$$

a więc zawsze  $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ .





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 88, 89, 90

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1984

88. Jeden z kątów trójkąta  $T$  ma miarę  $120^\circ$ . Niech  $T'$  będzie trójkątem, którego wierzchołkami są punkty przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta  $T$  z przeciwległymi bokami. Dowiedz, że trójkąt  $T'$  jest prostokątny.

89. Który z płaskich przekrojów sześcianu ma największe pole?

90. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania  $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$  w liczbach całkowitych.

Zadanie 90 przysłał pan Jaroślaw Cel z Końskich.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1984

Przypominamy treść zadań:

82. Po krawędziach sześcianu pełza żuk. Na przejście jednej krawędzi zużywa minutę. Znalazłszy się w wierzchołku wchodzi na jedną z trzech krawędzi wychodzących z tego wierzchołka, z równym prawdopodobieństwem wyboru. Niech  $A$  i  $Z$  będą przeciwległymi wierzchołkami sześcianu. W chwili  $t = 0$  żuk znajduje się w wierzchołku  $A$ . Czas, po którym żuk po raz pierwszy znajdzie się w wierzchołku  $Z$ , jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

83. Każdy z wierzchołków równoległoboku o danym polu  $S$  połączono odcinkami ze środkami boków wychodzących z przeciwległego wierzchołka. W środku równoległoboku odcinki te tworzą ośmiokąt. Obliczyć jego pole.

84. Czy istnieje liczba naturalna, której każda wielokrotność ma albo wszystkie cyfry parzyste, albo wszystkie cyfry nieparzyste?

82. Oznaczmy wierzchołki sąsiadujące z  $A$  przez  $B_1, B_2, B_3$ , a wierzchołki sąsiadujące z  $Z$  — przez  $C_1, C_2, C_3$ . Zauważmy, że po dowolnej parzystej liczbie ruchów żuk znajduje się w jednym z wierzchołków  $C_i$  lub  $A$ , zaś po nieparzystej liczbie ruchów — w  $B_i$  lub  $Z$ . Zatem czas, po którym żuk po raz pierwszy dotrze do wierzchołka  $Z$ , wyraża się liczbą nieparzystą. Niech  $p_n$  oznacza prawdopodobieństwo, że czas ten będzie równy  $2n+1$  (minut), a więc, że w momentach  $t = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$  żuk będzie się znajdował w pozycji  $B$  (tj. w jednym z wierzchołków  $B_i$ ), a w momencie  $t = 2n+1$  — w pozycji  $Z$ . Zatem  $p_n = p^{n-1}(1-p)$ , gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem tego, że żuk, będąc w pozycji  $B$ , po dwóch ruchach znów będzie w pozycji  $B$ ; podany wzór na  $p_n$  wynika stąd, że w chwili  $t = 1$  żuk jest na pewno w pozycji  $B$ , przez dalszych  $n-1$  par ruchów powraca do  $B$ , a w kolejnej parze ruchów przechodzi do  $Z$ . Obliczymy  $p$ . Z pozycji  $B$  żuk może z prawdopodobieństwem  $1/3$  przejść do  $A$  i następnie z prawdopodobieństwem  $1$  do  $B$ , lub też z prawdopodobieństwem  $2/3$  przejść do  $C$  i następnie z prawdopodobieństwem  $2/3$  znów do  $B$ . Stąd  $p = (1/3) \cdot 1 + (2/3) \cdot (2/3) = 7/9$ , czyli  $p_n = (7/9)^{n-1}(2/9)$ . Rozważana zmienna losowa przyjmuje wartość  $2n+1$

z prawdopodobieństwem  $p_n$ , a zatem jej wartość oczekiwana równa się  $E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)p_n$ . Przy

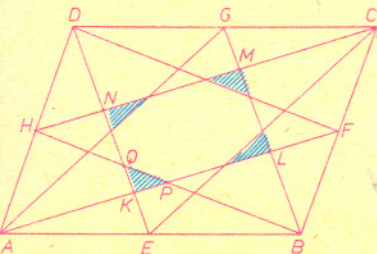
sumowaniu tego szeregu korzystamy z wzorów  $\sum x^{n-1} = (1-x)^{-1}$  i  $\sum nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$  dla  $|x| < 1$ ; tu  $x = 7/9$ . Wynik obliczeń:  $E = 10$ .

83. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zachodzą następujące proporcje:  $AK:AF = 2:5$ ,  $AP:AF = 1:2$  (a stąd  $KP:AP = 1:5$ );  $HQ:HB = 1:3$ ,  $HP:HB = 1:2$  (a stąd  $QP:HP = 1:3$ );  $S_{KPO}:S_{APH} = (KP:AP)(QP:HP) = 1:15$ ,  $S_{APH} = S_{ABFH}/4 = S/8$ , więc  $S_{KPO} = S/120$ . Dalej,  $S_{ABL}:S_{ABF} = AL:AF = 4:5$ ,  $S_{ABF} = S/4$ , więc  $S_{ABL} = S/5$  i analogicznie  $S_{BCM} = S_{CDN} = S_{DAK} = S_{ABL} = S/5$ . Zatem równoległobok  $KLMN$ , powstały z  $ABCD$  przez odcięcie tych czterech trójkątów o polach  $S/5$ , ma także pole  $S/5$ . Z kolei ośmiokąt, o którym mowa w zadaniu, powstaje z równoległoboku  $KLMN$  przez odcięcie czterech małych trójkątów, z których każdy, tak jak  $KPQ$ , ma pole  $S/120$ . Ostatecznie pole tego ośmiokąta równa się  $S/5 - 4(S/120) = S/6$ .

84. Liczba o tej własności nie istnieje. Dowód. Przypuśćmy, że  $k$  jest taką liczbą. Wówczas  $2k$  ma same cyfry parzyste. Niech  $j$  będzie ostatnią niezerową cyfrą liczby  $2k$ . Gdy  $j = 2$  lub  $j = 8$ , mnożymy  $2k$  przez 7; gdy  $j = 4$  lub  $j = 6$ , mnożymy  $2k$  przez 3. W każdym przypadku otrzymana wielokrotność  $k$  jest liczbą, której ostatnia niezerowa cyfra jest parzysta, a przedostatnia — nieparzysta.

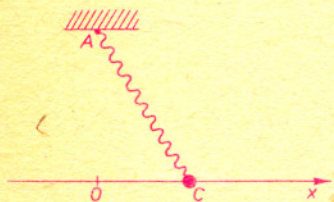
Czołówka ligi zadaniowej „Klub 44”  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 2/1984

Włodzimierz Szymczyk-Zielonka	43,74pkt
Jerzy Małopolski - Kraków	42,83pkt
Dariusz Sowizdrzał - Szczecin	41,81pkt
Jerzy Milczarek - Gorzów Wkp	41,62pkt
Wojciech Olszewski - Erwinów	40,35pkt
Krzysztof Jedziniak - Katowice	39,54pkt
Edward Orzechowski - Warszawa	38,06pkt
Marek Gałeczki - Milanówek	36,80pkt
Współczynniki trudności zadań 76, 77, 78:	
3,62	3,06
1,32	

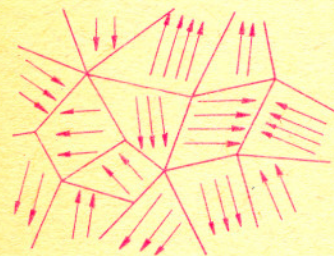




Rozwiązanie zadania M 371. Rozpatrzmy równanie ogólniejsze  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^\alpha xyz$ , gdzie  $\alpha$  jest liczbą naturalną. Oczywiście możemy ograniczyć się do szukania rozwiązań tego równania w liczbach całkowitych nieujemnych (pozostałe rozwiązania otrzymamy przez zmianę znaku dwóch niewiadomych). Jest oczywiste, że wśród liczb  $x, y, z$  spełniających to równanie albo wszystkie, albo dokładnie jedna są parzyste. Ten drugi przypadek jest jednak niemożliwy, gdyż kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1 ( $(2a+1)^2 = 4a(a+1) + 1$ ), a więc lewa strona dawałaby 2, prawa zaś 0. Tak więc wszystkie liczby  $x, y, z$  są parzyste:  $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ , i podstawiając do równania otrzymujemy  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{\alpha-1} x_1 y_1 z_1$ . Podobnie wykazujemy, że  $x_1, y_1, z_1$  są parzyste itd. Tak więc  $x, y, z$  są podzielne przez dowolną potęgę liczby 2, a zatem  $x = y = z = 0$ .



Rys. 1



Rys. 4

Wiele teorii fizycznych ogranicza się do rozważania niewielkich odchyłeń od stanu równowagi. Równania opisujące ruch są w takim przybliżeniu liniowe i najczęściej łatwe do rozwiązania. Teoria transportu, na przykład, opisuje niewielkie odchylenia od stanu równowagi termodynamicznej, a kwantowa teoria pola procesy zachodzące między cząstkami elementarnymi, czyli niewielkimi zaburzeniami stanu o najniższej energii, zwanego próżnią. Wydawać by się mogło, że stan równowagi jest prosty i symetryczny, a w szczególności ma wszystkie symetrie układu fizycznego. I rzeczywiście na ogół tak jest. Istnieje jednak wiele ciekawych wyjątków.

Dla przykładu rozważmy prosty układ mechaniczny (rys. 1). Kulka na sprężynie, zamocowanej w punkcie  $A$ , może poruszać się tylko po prostej  $Ox$ . Sprężyna może być rozciągana lub ściskana. Czytelnik z łatwością wyznaczy zależność energii potencjalnej sprężyny od położenia kulki  $x = OC$  i odległości  $AO = d$  (rys. 2). Dla  $d > l_0$  ( $l_0$  długość swobodnej sprężyny) sprężyna jest rozciągana i energia ma minimum dla minimalnej odległości  $AC$ . Stan równowagi  $x = 0$  jest w tym przypadku, podobnie jak cały układ, symetryczny względem prostej  $AO$ . Dla  $d < l_0$  minimum energii potencjalnej odpowiada oczywiście warunkowi  $AC = l_0$ , czyli pojawiają się dwa minima o tej samej „głębokości”. Przy przejściu przez taki punkt  $A$ , że  $d = l_0$  stan równowagi traci „spontanicznie”, tj. bez ingerencji zewnętrznych sił, symetrię względem odbić.

Opisaną własność ma stan podstawowy wielu układów fizycznych. Przy przejściu magnetyka ze stanu paramagnetycznego, w którym elementarne momenty magnetyczne ułożone są chaotycznie, a więc żaden kierunek w przestrzeni nie jest wyróżniony, do stanu ferromagnetycznego, pojawia się spontanicznie makroskopowe namagnesowanie, a więc ginie symetria sferyczna. Układ przechodzi w jeden z nieskończenie wielu równoważnych stanów podstawowych. Zależność energii swobodnej od magnetyzacji dla dwuwymiarowego magnetyka przedstawiona jest na rys. 3a. Warto dodać, że ferromagnetyk podzielony jest na makroskopowe obszary (domeny) i w każdym z nich symetria jest łamana w inny sposób, tzn. inny jest wyróżniony kierunek magnetyzacji (rys. 4). Uśredniona po wielu domenach magnetyzacja jest więc równa zero. Jeśli ferromagnetyk znajduje się w zewnętrznym polu magnetycznym, to energia swobodna ma przebieg przedstawiony na rys. 3b. Magnetyzacja w domenach ma teraz kierunek zewnętrznego pola.

Spontanicznie złamana symetria może być przywrócona przez efekty kwantowe. Atom azotu w cząsteczce amoniaku ( $NH_3$ ) ma dwa możliwe (klasyczne) stany równowagi (rys. 5), podobnie jak opisana wyżej kulka na sprężynie. Tym razem jednak możliwe jest przejście z prawego minimum do lewego w wyniku kwantowego tunelowania, które dopuszcza przenikanie cząstek przez nieprzenikliwe z punktu widzenia mechaniki klasycznej bariery. Powoduje to, że stan, w którym atom azotu zlokalizowany jest w pobliżu jednego z minimów, nie tylko nie jest stanem podstawowym, ale jego energia nie jest nawet określona. W stanie podstawowym atom średnio tyle samo czasu przebywa po prawej i po lewej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez atomy wodoru. W ten sposób kwantowe tunelowanie powoduje, że stan podstawowy jest równie symetryczny, jak cały układ.

Istnieją jednak układy kwantowe ze spontanicznym łamaniem symetrii. Jednym z nich jest stan podstawowy w teorii cząstek elementarnych, czyli próżnia. Próżnia oznacza tutaj brak wzbudzeń pola kwantowego, czyli brak cząstek. Przy skomplikowanym (nieliniowym) oddziaływaniu między polami może się zdarzyć sytuacja analogiczna do poprzednio opisanych, tj. pole może mieć wiele stanów podstawowych o tej samej gęstości energii. Spontaniczny wybór jednego z nich łamie niektóre symetrie układu. Przywrócenie wyjściowej symetrii nie jest w tym przypadku możliwe, bo dla układów o nieskończonej objętości bariera energetyczna dzieląca oba stany podstawowe jest nieskończenie wysoka i tunelowe przejście między próżniami nie występuje. W zasadzie próżnia mogłaby mieć, podobnie jak ferromagnetyk, strukturę domenową. Wydaje się jednak, że w rzeczywistości tak nie jest. Ściany między domenami miałyby bowiem wielką masę, wiele razy większą od masy wszystkich obserwowanych ciał niebieskich. Wystarczyłaby jedna taka ściana przecinająca Wszechświat, aby istotnie zaburzyć obserwowaną izotropowość promieniowania reliktoowego.

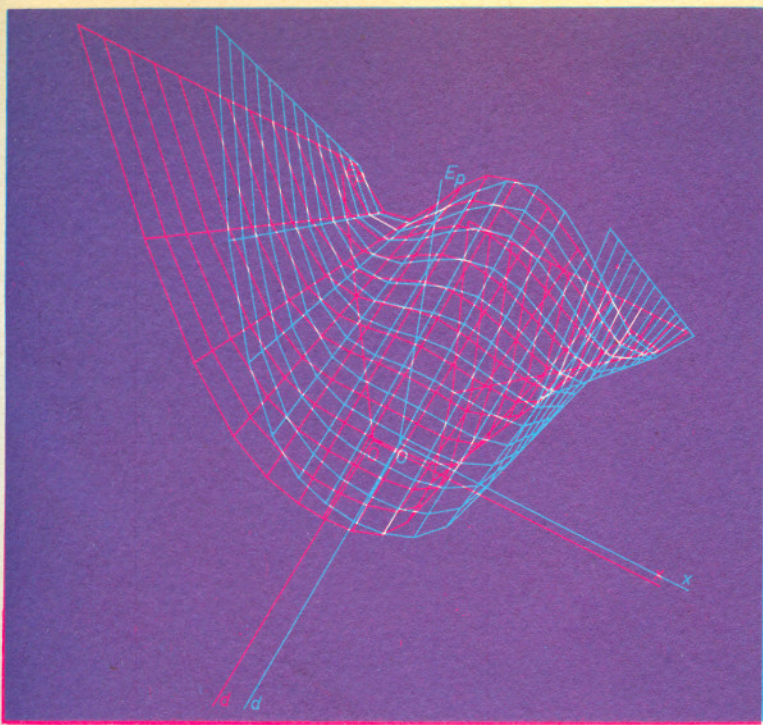
## Z czego śmieje się redakcja

Niesiony do karetki pogotowia motocyklista, który kilkanaście minut temu rozbił się o drzewo, jęknął: „Jak to dobrze, że dzieli się przez dwa” i stracił przytomność. Wstrząs mózgu — orzekł lekarz. I to poważny — stwierdził, gdy po odzyskaniu przytomności chory z maniakalnym uporem wciąż powtarzał swoje: „Jak to dobrze, że dzieli się przez dwa”. Po dwóch dniach sprawa stała się naprawdę niepokojąca. Wreszcie kierujący zbranym przy łóżku konsylium docent zaryzykował pytanie: „Co się dzieli?”, „mu<sup>31</sup>” — brzmiała odpowiedź.

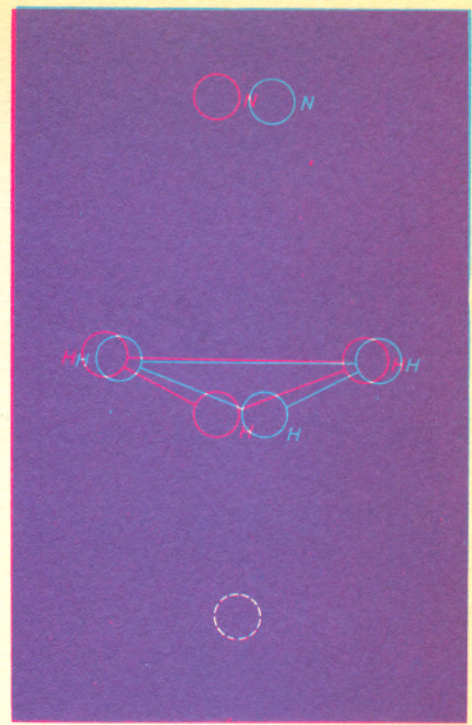
Opowiedział nam Jerzy Bednarczuk (Warszawa).

M. J.

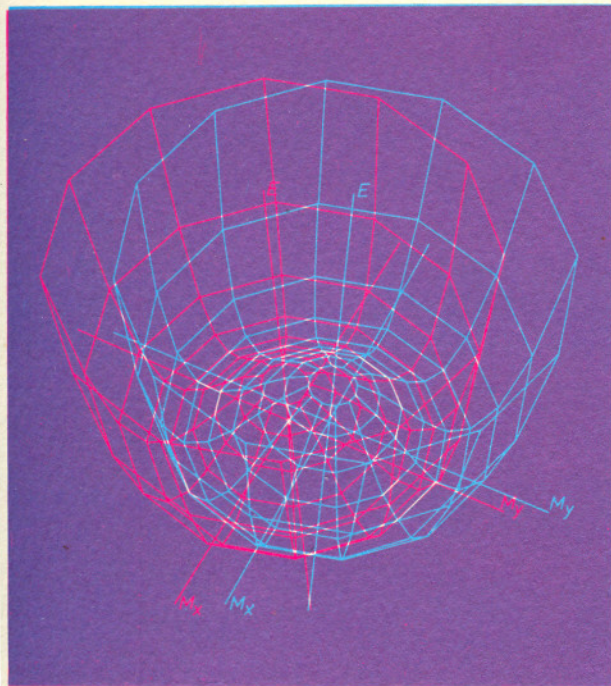




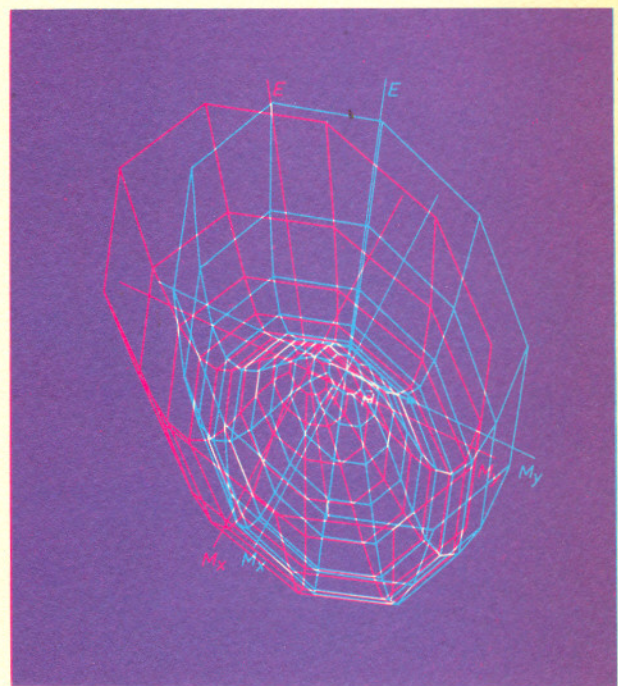
Rys. 2



Rys. 5



Rys. 3a



Rys. 3b