

SPIS TREŚCI

NUMERU 7 (127)

Chaos na odcinku <i>mgr Anna Zdunik</i>	str. 1
Zachód Słońca na Merkury <i>dr Leszek Czechowski</i>	str. 4
Małe zbiory na prostej <i>dr Andrzej Pelc</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Glosa do teorii bałaganu Zbigniewa Płochockiego <i>dr Ryszard Herczyński</i> <i>prof. dr Krzysztof Wilmański</i>	str. 10
Antymateria w promieniowaniu kosmicznym <i>mgr Jacek Szabelski</i>	str. 12
Rozstrzygnięcie konkursu 7.11	str. 14
Klub 44	str. 15
Zadania	str. 16
Patrz w niebo	str. 16
Mieszani	str. 17

W następnym numerze:
Twierdzenie Holditcha

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz SitarSKI
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wojska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 6337/84 T-70

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

Mgr Anna ZDUNIK

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy pewien układ, który podlega zmianom w czasie. Stany naszego układu utożsamiamy z punktami przestrzeni metrycznej X , przy czym stan w chwili następczej zależy tylko od stanu w chwili poprzedniej. Oznacza to, że istnieje przekształcenie $f: X \rightarrow X$, które mówi nam, że jeśli w chwili i układ znajdował się w stanie x , to w chwili $(i+1)$ będzie w stanie $f(x)$. Znając więc sytuację w chwili początkowej oraz regułę przechodzenia od stanu do stanu (opisaną przez f) umiemy wyznaczyć tzw. trajektorię $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ punktu x odpowiadającą kolejnym stanom naszego układu:

$$x_0 = x, \quad x_{i+1} = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Naturalne jest pytanie o zachowanie trajektorii: czy są one zupełnie chaotyczne, czy może rządzą nimi pewien porządek? Czy trajektorie bliskich punktów są podobne? Ile jest trajektorii okresowych (to znaczy takich, że $x_0 = x_n$ dla pewnego n)? Odpowiedź na takie pytania bywa bardzo trudna nawet w przypadku tak prostej przestrzeni jak odcinek $[0, 1]$ i tak nieskomplikowanych przekształceń jak funkcja kwadratowa.

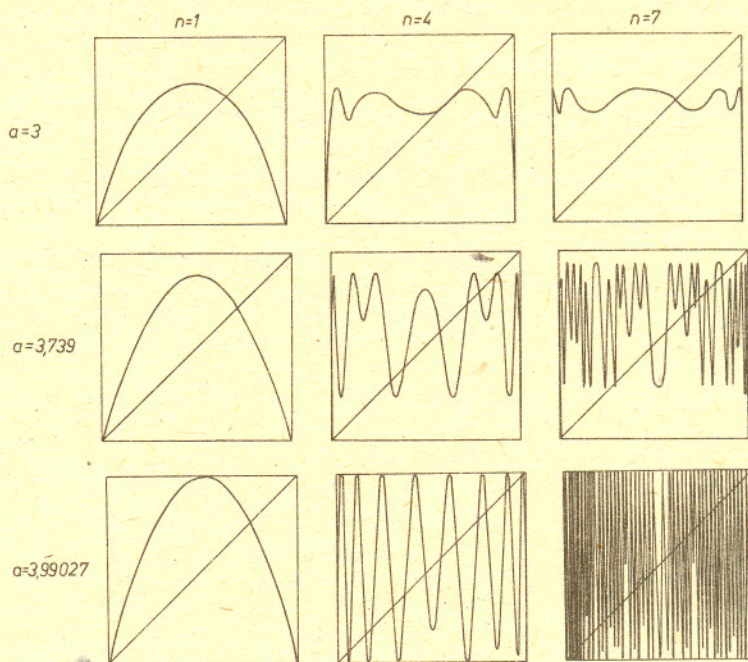
Rozpatrzmy rodzinę takich właśnie przekształceń:

$$f_a(x) = ax(1-x), \quad \text{gdzie } a \in [0, 4].$$

Dla naszych celów wygodne będzie rozpatrywanie funkcji złożonej wielokrotnie z sobą samą; wprowadźmy więc oznaczenie:

$$f^n(x) = f \circ f \circ \dots \circ f \text{ (n razy).}$$

Odtąd f^n będziemy nazywać n -tą iteracją funkcji f . Zatem $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ jest trajektorią punktu x_0 wyznaczoną przez $f \Leftrightarrow f^i(x_0) = x_i$ dla każdego $i = 0, 1, 2, \dots$



Rys. 1. Oto wykresy przekształceń (i kilku ich iteracji) dla różnych wartości a .

Wszystkie funkcje z naszej rodziny mają po dwa odcinki monotoniczności i wszystkie mają maksimum w punkcie $c = \frac{1}{2}$. Wykresy wyglądają podobnie (różnią się tylko „wysokością”), ale już wykresy kolejnych iteracji są bardzo różne dla różnych wartości a . Opiszemy kilka skrajnych przypadków, aby zrozumieć co się właściwie dzieje.

Sytuacja jest najprostsza, gdy a jest nie większe niż 1. Wówczas (Czytelniku przekonaj się!) wykres f^n ma tylko dwa odcinki monotoniczności dla każdego n . Punkt $p = 0$ jest stały dla naszego przekształcenia ($f_a(p) = p$), ponadto

$$f'_a(p) = a - 2ap = a < 1, \text{ więc } p \text{ jest ściekiem.}$$

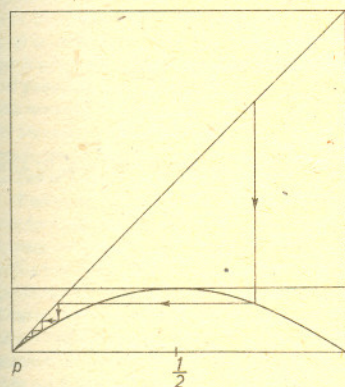
W tym przypadku z wklęsłości funkcji f_a wynika, że cały odcinek $[0, 1]$ jest przyciągany do punktu $p = 0$, to znaczy dla każdego $x \in [0, 1]$ trajektoria x dąży do p .



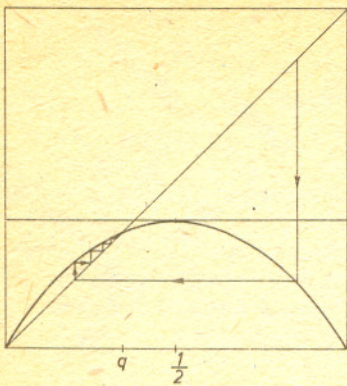
Niech $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ będzie klasy C^1 , a $p \in [0,1]$ — punktem okresowym o okresie n dla f (tzn. $f^n(p) = p$). Jeśli $|(f^n)'(p)| < 1$, to p nazywamy punktem przyciągającym albo ściekiem. Jeśli $|(f^n)'(p)| > 1$, to mówimy, że p jest odpychającym.

Ściek ma zawsze otoczenie złożone z punktów x , dla których ciąg $(f^{nk})(x)$ jest zbieżny do p , gdy $k \rightarrow \infty$ (sprawdź!).

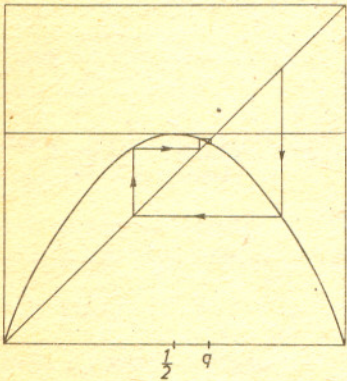
Oto przepis na wyznaczenie trajektorii punktu: Narysuj kwadrat o boku 1 i wewnątrz niego wykres naszego przekształcenia f_a . Zaznacz w kwadracie przekątną $y = x$. Wybierz punkt (x_0, x_0) na przekątnej, narysuj linię pionową przechodzącą przez ten punkt aż do przecięcia wykresu. Z punktu przecięcia narysuj linię poziomą aż do przecięcia przekątnej w jakimś punkcie (x_1, x_1) (wtedy $x_1 = f_a(x_0)$). Tak samo wyznacz $x_2 = f_a(x_1)$, x_3, \dots itd.



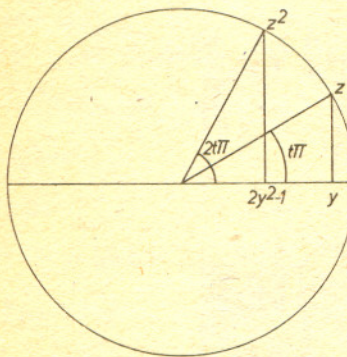
Rys. 2. $a = \frac{3}{4}$. Wszystkie trajektorie są zbieżne do $p = 0$.



Rys. 3. $a = \frac{3}{2}$. Punkt stały $q = \frac{1}{3}$ przyciąga wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$.



Rys. 4. $a = \frac{5}{2}$. Punkt stały $q = \frac{3}{5}$ przyciąga wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$.



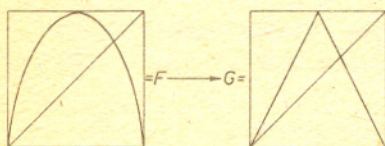
Rys. 5. Rysunek pomocny przy rozwiązywaniu zadania

$$y = 1 - 2x,$$

$$z = y + i\sqrt{1-y^2},$$

$$z^2 = (2y^2 - 1) + 2iy\sqrt{1-y^2},$$

$$\text{re } z^2 = 2y^2 - 1.$$



Rys. 6. Wykres funkcji F przed i po zamianie zmiennych.

Gdy a jest większe niż 1 (ale mniejsze niż 2), punkt $p = 0$ staje się odpychający, ale wewnątrz odcinka pojawia się nowy punkt stały przyciągający $q_a < \frac{1}{2}$. Również w tym przypadku

przekształcenie f_a ma tylko dwa odcinki monotoniczności i dla każdego $x_0 \in (0, 1)$ ciąg $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ jest zbieżny do q_a . W granicznym przypadku punkt q_a pokrywa się z c . Gdy a dalej rośnie, sytuacja zaczyna się trochę komplikować, bo wykresy kolejnych iteracji f_a mają już teraz więcej niż po dwa odcinki monotoniczności (dlaczego?).

Okazuje się jednak, że punkt q_a nie znika przy przejściu przez graniczną wartość $a = 2$, a jedynie „przenosi się” na drugą stronę c i pozostaje przyciągający. Nietrudno przekonać się (na przykład rysując trajektorie), że także w tym przypadku wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$ są przyciągane przez q_a . Ta dobra sytuacja kończy się, gdy a przekracza wartość 3 (wówczas punkt q_a staje się odpychający, a trajektorie punktów — bardziej skomplikowane).

Podsumujmy nasze dotychczasowe rozważania. W opisanych dotąd przypadkach przekształcenie f_a miało zawsze ścieżkę, który przyciągał wszystkie punkty z wnętrza odcinka. Oczywiście, nie było żadnych innych trajektorii okresowych w $(0, 1)$. Sytuacja jest więc niezwykle jasna: jakkolwiek byłby punkt początkowy $x_0 \in (0, 1)$, stan układu dąży do pewnego stanu „równowagi”. Przyszłość jest więc w pełni przesądzona z góry, w ogóle nie zależy od terażniejszości.

Ale już przejście przez wartość parametru $a = 3$ wprowadza do naszego obrazka bałagan. Jak wielki może on być — przekonamy się za chwilę badając „ostatnie” przekształcenie naszej rodziny: f_4 . Przyjmijmy dla prostoty oznaczenie $F(x) = f_4(x)$.

Na początek — zadanie: określamy przekształcenie $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(1 - 2x), \text{ wówczas } \varphi \text{ jest ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, } \varphi^{-1} \text{ jest ciągłe,}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ oraz}$$

$$G(t) = (\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})(t) = \begin{cases} 2t & t < \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Co nam daje przekształcenie φ ? Pozwala zapisać F w nowych zmiennych (t) i zmienić kształt wykresu na przyjemniejszy. Zamiast badać trajektorie wyznaczone przez F zajmiemy się trajektoriami wyznaczonymi przez G , co okaże się znacznie prostsze.

Wybermy taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że dla każdego $n \geq 0$ $G^n(x_0) \neq \frac{1}{2}$ i niech $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie trajektorią wyznaczoną przez G . Punktowi x_0 przyporządkujemy ciąg znaków $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$, gdzie $a_i = 0$ lub 1 według zasady:

$$a_i = 0, \text{ jeśli } x_i \text{ leży na lewo od punktu } \frac{1}{2},$$

$$a_i = 1, \text{ jeśli } x_i \text{ leży na prawo od punktu } \frac{1}{2}.$$

Ponieważ G (podobnie jak F) przeprowadza odcinek $[0, 1]$ w sposób ciągły na $[0, 1]$, możemy sformułować następujące lematy:

Lemat 1. Dla każdego ciągu $(A_i)_{i=0}^{\infty}$ złożonego z zer i jedynek istnieje taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty} = (A_i)_{i=0}^{\infty}$.

Lemat 2. Dla takiego punktu $x_0 \in [0, 1]$, że ciąg $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$ jest określony, definiujemy zbiór

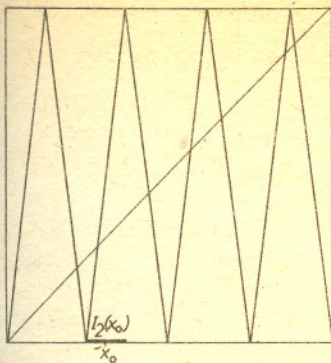
$$I_n(x_0) = \{x \in [0, 1] : a_i(x) = a_i(x_0) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Wówczas zbiór $I_n(x_0)$ jest odcinkiem o długości $\frac{1}{2^{n+1}}$. Jeśli c, d są końcami tego odcinka, to albo

$$G^n(c) = \frac{1}{2}, \text{ albo } G^n(d) = \frac{1}{2}.$$

Dowody (nietrudne) obu lematów zostawiam czytelnikom. Możemy udowodnić teraz

Twierdzenie. W dowolnie krótkim odcinku otwartym zawartym w $[0, 1]$ znajduje się punkt, którego trajektoria wyznaczona przez G zawiera punkt $\frac{1}{2}$ (to znaczy: przeciwobrazy punktu $\frac{1}{2}$ są gęste w $[0, 1]$).



Rys. 7. Wykres przekształcenia G^3 . $I_2(x_0)$ jest odcinkiem monotoniczności dla G^3 . Ogólnie: $I_n(x_0)$ jest odcinkiem monotoniczności dla G^{n+1} .

A oto wniosek z powyższego twierdzenia.

Dla dowolnego $x \in [0, 1]$ przeciwobrazy x (czyli takie punkty, których trajektoria zawiera x) są gęste w odcinku $[0, 1]$.

Dowód twierdzenia: Weźmy odcinek $(a, b) \subset [0, 1]$ i podzielmy go na trzy równe części punktami r, s ($a < r < s < b$). W odcinku $[r, s]$ istnieje punkt x_0 , dla którego ciąg $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$ jest określony (dlaczego?). Weźmy takie n , aby $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{b-a}{3}$. Wówczas odcinek $I_n(x_0)$ jest zawarty w (a, b) . Z lematu 2 wynika, że przynajmniej jeden jego koniec ma trajektorię przechodzącą przez punkt $\frac{1}{2}$. Znaleźliśmy więc przeciwobraz punktu $\frac{1}{2}$ w odcinku (a, b) .

Dowód wniosku przebiega zupełnie podobnie, trzeba tylko pamiętać, że $I_n(x_0)$ jest jednym z odcinków monotoniczności dla G^{n+1} i że obrazem (przy przekształceniu G^{n+1}) każdego odcinka monotoniczności jest cały odcinek $[0, 1]$.

Wreszcie możemy zacząć czerpać korzyści z naszej pracy i przypomnieć sobie o właściwym obiekcie naszych zainteresowań — o funkcji F . Pokażemy, że dla F tezy twierdzenia i wniosku też są prawdziwe. Istotnie, weźmy dowolny odcinek otwarty $(a', b') \subset [0, 1]$. Funkcja φ przekształca (a', b') na pewien odcinek (a, b) . Z twierdzenia wiemy, że istnieje takie $z \in (a, b)$, że $G^n(z) = \frac{1}{2}$ dla pewnego n . Wówczas

$$F^n(\varphi^{-1}(z)) = \varphi^{-1}(G^n(z)) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\varphi^{-1}(z) \in (a', b')$, więc znaleźliśmy przeciwobraz punktu $\frac{1}{2}$ w odcinku (a', b') .

Wniosek otrzymujemy podobnie, znowu posługując się zamianą zmiennych φ .

Uzyskaliśmy więc pełny opis trajektorii wyznaczonych przez F . Punkt, którego trajektoria nie zawiera punktu $\frac{1}{2}$, odpowiada pewnemu ciągowi $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ zer i jedynek (i na odwrót). Ponadto punkty, których trajektorie zawierają $\frac{1}{2}$, są gęste w odcinku $[0, 1]$ (w poprzednio rozpatrywanych przypadkach tak oczywiście nie było — dlaczego?).

Sytuacja jest całkiem inna niż poprzednio. Łatwo na przykład zauważyć prawdziwość następującego faktu: dla dowolnie krótkiego odcinka otwartego $J \subset [0, 1]$ istnieją takie $n \in \mathbb{N}$ oraz punkty $x, y \in J$, że

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \frac{1}{2}.$$

Mówiąc obrazowo: trajektorie dowolnie bliskich punktów „rozejdą się” po pewnym czasie. Przyszłość układu zależy bardzo mocno od stanu początkowego x_0 . Wystarczy zaburzyć go odrobinę, a historia potoczy się zupełnie inaczej...

Opisane tu przypadki należą do najprostszych i jednocześnie pokazują dwie skrajne sytuacje, jakie mogą tu mieć miejsce.

Dla pośrednich wartości parametru a otrzymuje się w pewnym sensie „stany pośrednie”. Może się więc zdarzyć, że przekształcenie f_a ma ściek i wówczas trajektorie prawie wszystkich (w sensie miary) punktów dążą do tego ścieku. W pozostałych przypadkach prawdziwa jest teza naszego twierdzenia (choć dowód jest dużo trudniejszy).

Wielu problemów związanych z przekształceniami tej rodziny nie umiemy dotąd rozwiązać. Te niewinne funkcje okazują się bowiem bardzo odporne przy próbach szczegółowego badania.

W szczególności proste pytanie: „czy zbiór tych parametrów a , dla których f_a ma ściek, jest gęsty w odcinku $[0, 4]$?” wciąż czeka na odpowiedź.

We wstępie odwoływaliśmy się do wymyślanego „układu fizycznego”. Warto więc wyjaśnić, że przekształcenia tego typu rzeczywiście służą w ekologii jako model opisujący wzrost liczebności populacji pewnych owadów. Natura matematyczna takich przekształceń jest jednak na tyle frapująca, że warto się nimi zajmować, nawet gdyby nic „rzeczywistego” nie oznaczały.



Rozwiązanie zadania F 154. Klucz ześlizguje się z pręta wahając się równocześnie. Gdy pręt zaczyna się obracać, prędkość względna punktu zetknięcia klucza jest prostopadła do osi podłużnej pręta, podobnie jak przeciwnie skierowana siła tarcia kinetycznego. W kierunku prostopadłym do prędkości tarcie statyczne znika (patrz zad. F120 w *Delecie* 8/1982) i klucz rozpoczyna ześlizgiwanie się. Pojawia się wtedy składowa siły tarcia kinetycznego wzdłuż pręta, która hamuje ten ruch. Płynność lub „skokowość” ześlizgiwania się klucza zależy od wartości prędkości kątowej pręta. Drgania poprzeczne wzbudza już w pierwszej chwili ruchu wspomniana wyżej siła tarcia statycznego. Jest to bardzo uproszczony opis. Aby się o tym przekonać, proponujemy Czytelnikom zastanowić się, jak zmieniają się siły działające na klucz podczas bardzo powolnego narastania momentu obrotowego przykadanego do pręta.

Zachód Słońca na Merkurym

Dr Leszek CZECHOWSKI

Merkury to najbliższa Słońcu planeta Układu Słonecznego; w perihelium zbliża się do Słońca na odległość 0,31 j.a. (1 jednostka astronomiczna = 149,6 mln km), a w aphelium oddala się na 0,47 j. a. Orbita Merkurego jest więc wydłużoną elipsą; jej mimośród wynosi 0,2056. Wśród planet jedynie Pluton ma orbitę o większym mimośrodku. Okres obiegu Merkurego dookoła Słońca jest równy 88 dobom ziemskim, a wyznaczony na podstawie obserwacji odbitych od planety fal radarowych okres obrotu wokół osi 2/3 tego czasu (dokładniej 58, 646 doby).

Większość informacji o Merkurym zawdzięczamy amerykańskiej sondzie Mariner 10 wystrzelonej w listopadzie 1973 roku, która trzykrotnie przelatywała obok Merkurego. Dzięki tej misji wiemy, jak wygląda Merkury z bliska.

Planeta robi wrażenie „księżycowe”. Czegoś jednak brakuje do zupełnego podobieństwa do Księżyca. Na powierzchni Merkurego nie ma ciemnych obszarów — „mórz”, jakie na Księżycu można zaobserwować nawet gołym okiem. Najmniejsze, widoczne na zdjęciach kratery mają rozmiary kilku kilometrów. Większe kratery mają w centrum górkę, a jeszcze większe tworzą struktury złożone z kilku pierścieni. Widoczne są także olbrzymie pierścieniowe struktury o rozmiarach rzędu tysięcy kilometrów. Najpiękniejszy przykład takiej struktury to basen Caloris. Jest to kolistą równina o średnicy 1300 km pokryta wielką ilością szczelin, spękań i grzbietów. Otoczenie stanowi szerokie na 100-160 km pasmo górskie o wysokości około 2 km: Pod wieloma względami Caloris podobna jest do księżycowych Mare Imbrium czy Mare Orientale, a także do równiny Hellas na Marsie. Jest to jeden z dwóch najlepiej nasłonecznionych obszarów w Układzie Słonecznym — gdy Merkury jest najbliżej Słońca, to świeci ono na przemian: albo dokładnie nad Caloris albo nad jej antypodami. Mimo to nie jest to najcieplejsze miejsce w Układzie — cieplej o kilkadziesiąt stopni bywa na Wenus, gdzie tarcza słoneczna wcale nie jest widoczna.

Wyobraźmy sobie, że wylądowaliśmy na powierzchni Merkurego. Znowu stwierdzamy ludzkie podobieństwo do Księżyca. Grunt stanowi bardzo rozdrobniony materiał (regolit) powstały wskutek uderzeń mikrometeoroidów. Podobieństwa dopełnia (praktycznie) brak atmosfery — przez co niebo jest czarne nawet w dzień.

O tym, że jesteśmy jednak na Merkurym, świadczy wielkość tarczy słonecznej — około trzykrotnie większa niż na Księżycu. Jeżeli Słońce jest w zenicie, to na każdy metr kwadratowy powierzchni pada około 9 kW energii (na Ziemi około 1,4kW). Z uwagi na małe albedo (współczynnik odbicia) planety 90% tej energii idzie na rozgrzanie gruntu. Nic więc dziwnego, że temperatura gruntu w Caloris osiąga 420°C.

Podczas zachodu Słońca można zaobserwować zaskakujące zjawisko. Oto Słońce powoli (o wiele wolniej niż na Ziemi) chowa się za horyzontem. Schowało się już prawie całe, ale w pewnym momencie zatrzymuje się i zaczyna się podnosić. Mamy więc bezpośrednio po zachodzie Słońca jego wschód i to po zachodniej stronie nieba.

Wyłumaczymy to zjawisko dokładnie. Pozorny ruch Słońca na nieboskłonie jest wynikiem złożenia ruchu wirowego planety wokół osi i ruchu orbitalnego planety wokół Słońca.

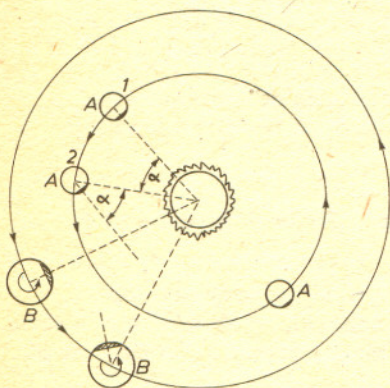
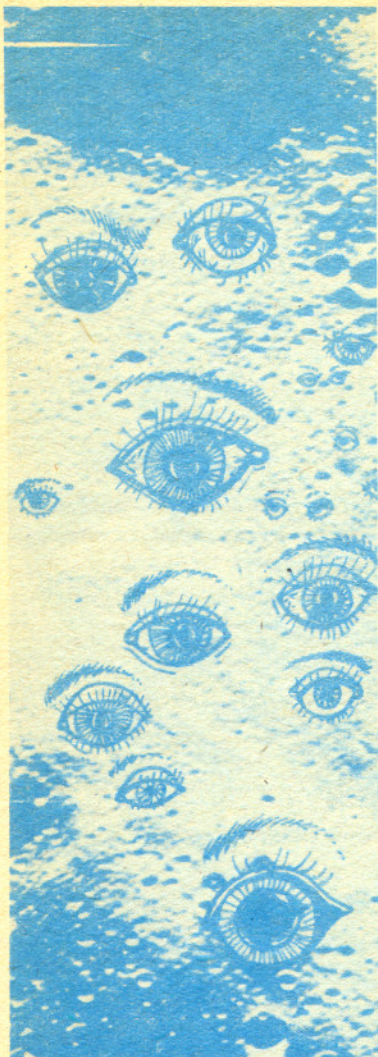
Rozważmy najpierw przypadek, gdy planeta nie obraca się wokół swojej osi (planeta A na rys. 1). Zachowuje ona stałą orientację względem gwiazd. Łatwo zauważyć, że prędkość kątowna Słońca na takiej planecie jest równa prędkości kątowej ruchu orbitalnego planety względem Słońca. Zgodnie z drugim prawem Keplera (rys. 2) prędkość ta jest duża w pobliżu perihelium, a mała w pobliżu aphelium.

Załóżmy teraz, że planeta obiega Słońce i jednocześnie obraca się wokół swojej osi (planeta B na rys. 1). Jeżeli obrót wokół osi odbywa się w tym samym kierunku co obieg dookoła Słońca, to prędkość Słońca na nieboskłonie planety B jest równa różnicy prędkości kątowych

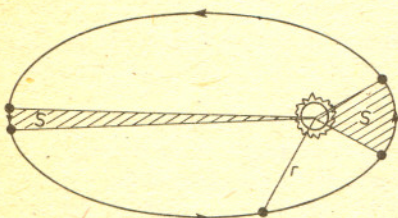
$$\omega_s = \omega_{\text{obtegu}} - \omega_{\text{obrotu}}$$

Jeżeli planeta wiruje w przeciwnym kierunku niż obiega Słońce, to prędkości kątowe trzeba dodać. W Układzie Słonecznym tak wirują tylko dwie planety — Wenus i Uran.

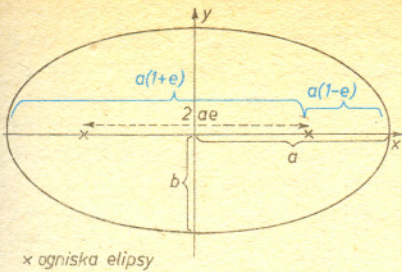
Prędkość ruchu obrotowego wokół osi jest prawie stała; zmienia się o ułamki procenta w ciągu milionów lat. Natomiast prędkość kątowa ruchu po orbicie jest, jak zauważyliśmy wyżej, zmienna. I tutaj widzimy szansę wyjaśnienia niezwykłego zachodu na Merkurym. Otóż, jeśli ω_{obrotu} w pobliżu perihelium jest mniejsza od ω_{obtegu} , zaś w pobliżu aphelium większa, to ω_s będzie czasem dodatnia, a czasem ujemna. Oznacza to, że Słońce na nieboskłonie Merkurego może



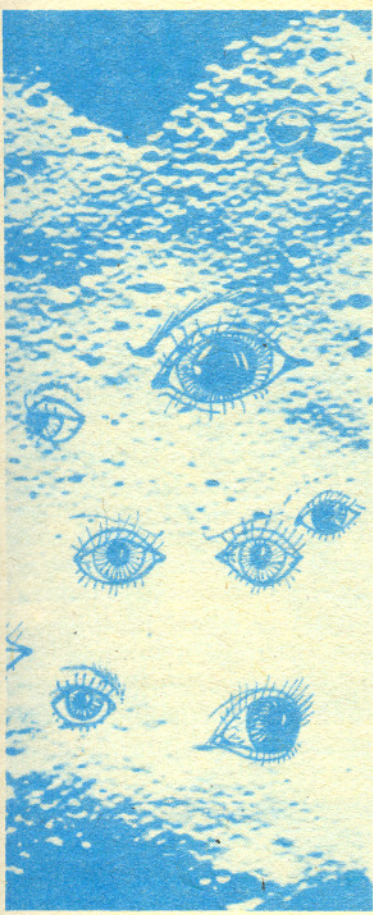
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



przesuwać się bądź z zachodu na wschód (gdy planeta jest blisko Słońca), bądź też ze wschodu na zachód (gdy planeta jest daleko).

Sprawdźmy teraz, że rzeczywiście ma to miejsce. Prędkość połowa (P) planety jest związana z prędkością liniową (v) zależnością (por. rys. 2):

$$P = \frac{1}{2} vr.$$

Ponieważ

$$v = \omega_{obtegu} \cdot r,$$

mamy

$$\omega_{obtegu} = \frac{2P}{r^2}.$$

Pozostaje teraz obliczyć prędkość połową Merkurego. W czasie 88 dni obiega on Słońce, czyli promień wodzący planety zakreśla pole powierzchni całej orbity. Pole powierzchni elipsy (por. rys. 3)

$$S = \pi a^2 \sqrt{1-e^2},$$

czyli prędkość połowa

$$P = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T_{obtegu}}.$$

Ostatecznie więc

$$\omega_{obtegu} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T_{obtegu} r^2}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $T_{obrotu} = \frac{2}{3} T_{obtegu},$

$$\omega_{obrotu} = \frac{3\pi}{T_{obtegu}}.$$

Korzystając z danych przytoczonych na początku artykułu otrzymujemy $\omega_s = 1/276$ rad/doba w perihelium ($r = a(1-e)$) i $\omega_s \approx -1/53$ rad/doba w aphelium ($r = a(1+e)$). Czyli, jak przypuszczaliśmy, ω_s zmienia znak w czasie ruchu na orbicie.

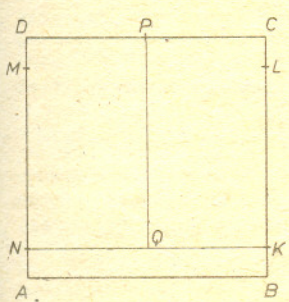
Opisany wyżej zachód Słońca odpowiada sytuacji, w której zmiana znaku następuje w chwili, gdy Słońce jest na horyzoncie. Łatwo teraz przewidzieć, co się stanie dalej. Przez pewien czas Słońce będzie coraz szybciej cofać się z zachodu na wschód, następnie prędkość ta będzie malała, wreszcie Słońce znowu zatrzyma się na nieboskłoniu, by zająć na dobre po zachodniej stronie widnokręgu.

Proponujemy Czytelnikowi wykazanie, że Słońce na pełen obrót na niebie Merkurego potrzebuje 176 dni. Tak więc doba na Merkurym trwa dwa razy dłużej niż rok.

Kiedy więc na Merkurym powstanie solarium dla całego Układu Słonecznego i będziemy korespondować z jego mieszkańcami, to pamiętajmy, że 80-letnia Merkurianka pożyczająca książkę do jutra, to panna na wydaniu mająca zamiar oddać książkę za pół roku.



Rozwiązanie zadania M 369. Niech naszym kwadratem będzie $ABCD$. Wybierzmy punkty K, L, M, N jak na rysunku, przy czym odległość każdego z tych punktów od najbliższego wierzchołka jest równa $\frac{\sqrt{2}}{16}$.



Przypuśćmy, że udało się nam podzielić kwadrat na trzy zbiory Z_1, Z_2, Z_3 , każdy o średnicy mniejszej niż $\frac{\sqrt{130}}{16}$. Oczywiście do któregoś zbioru (np. Z_1) należą dwa wierzchołki. Nie mogą to być wierzchołki przeciwległe, gdyż wtedy diam $Z_1 = 1$. Niech $A, B \in Z_1, C \in Z_2$. Mamy wtedy 1) $\overline{KC} \cap Z_1 = \emptyset, \overline{ND} \cap Z_1 = \emptyset$; jeśli bowiem $X \in \overline{KC} \cap Z_1$, to diam $Z_1 \geq \overline{AX} \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{256}} = \frac{\sqrt{130}}{16}$. 2) $D \in Z_3$; jeśli $D \in Z_2$, to tak jak w 1) $\overline{MA} \cap Z_2 = \emptyset, \overline{LB} \cap Z_2 = \emptyset$, a więc $M, K \in Z_3$, czyli diam $Z_3 \geq \overline{MK} \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2} \geq \frac{\sqrt{130}}{16}$. 3) $N \in Z_3, K \in Z_2$; jeśli $K \in Z_3$,

to diam $Z_3 \geq \overline{DK} \geq \frac{\sqrt{130}}{16}$.

4) $\overline{CD} \cap Z_1 = \emptyset$; niech $X \in \overline{Z_1} \cap \overline{CD}$ i $\overline{XC} \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$, wtedy diam $Z_1 \geq \overline{XB} \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} \geq \frac{\sqrt{130}}{16}$.

Niech P będzie środkiem odcinka CD . Z 4) $P \in Z_2 \cup Z_3$, z 3) mamy więc

$$\max(\text{diam } Z_2, \text{diam } Z_3) \geq \max(PN, PK) = \sqrt{\frac{1}{8} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{16},$$

a więc jeden ze zbiorów Z_1 ma średnicę co najmniej $\frac{\sqrt{130}}{16}$.

Z drugiej strony każdy z prostokątów

$ABKN, CPQK, DNQP$ ma średnicę $\frac{\sqrt{130}}{16}$.

Małe zbiory na prostej

Dr Andrzej PELC

Jakie zbiory liczb rzeczywistych czy też punktów na prostej można nazwać małymi? Co do niektórych na pewno nie ma wątpliwości. Każdy się chyba zgodzi, że zbiór pusty i zbiory jednoelementowe są małe. A inne zbiory skończone? Choćby miały milion elementów, to w porównaniu z mrowiem wszystkich liczb rzeczywistych są jednak małe. Nie na darmo matematycy mówią „prawie wszystkie wyrazy ciągu” zamiast „wszystkie poza skończoną ilością”.

Zapytajmy z kolei, czy są jakieś małe zbiory nieskończone. O sugestywne przykłady i tu nietrudno. Przyjrzyjmy się liczbom całkowitym na osi liczbowej. Tak rzadko się pojawiają, że prawie ich nie widać wśród reszty. No tak, ale to tylko przykład, a czy można podać cechę wyróżniającą małe zbiory nieskończone spośród innych? Najprostsze jest kryterium odwołujące się do liczby elementów. Zbiór mały to zbiór równoliczny ze zbiorem liczb całkowitych (którego „małość” już zaakceptowaliśmy), a więc przeliczalny.

Zbiory A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje różnowartościowa funkcja f działająca z A na B .

Tu jednak czekają pewne niespodzianki: zbiór wszystkich liczb wymiernych też jest przeliczalny, a intuicyjnie nie wydaje się taki mały, wszak liczby wymierne są gęsto upakowane wśród liczb rzeczywistych. Z praktyki matematycznej wynika jednak, że zbiory przeliczalne na prostej należy traktować jako małe, wiele bowiem istotnych rozważań można prowadzić dopuszczając zaburzenia badanej własności właśnie na zbiorach przeliczalnych. Umówmy się więc, że uważamy rodzinę przeliczalnych podzbiorów prostej za wzorcowy przykład rodziny zbiorów małych.

Zastosowane powyżej kryterium równoliczności nie jest jednak właściwe dla badania zbiorów małych. Okazuje się bowiem, że są zbiory równoliczne z całą prostą (która musi być oczywiście traktowana jako zbiór duży) i mające pewne własności strukturalne skłaniające do zaklasyfikowania ich jako zbiorów małych. Tymi własnościami będziemy się zajmować w niniejszym artykule, przedtem jednak podamy ogólne cechy rodzin zbiorów małych.

Jak już mówiliśmy, zbiory jednoelementowe są małe, cała prosta nie jest zbiorem małym, z pewnością podzbiór zbioru małego jest mały. Wydaje się również zgodne z intuicją twierdzić, że suma niewielu zbiorów małych jest mała. Że zaś zbiory przeliczalne uznaliśmy za niewielkie, przyjmijmy, iż suma przeliczalnej rodziny zbiorów małych jest zbiorem małym. Powyższe rozważania doprowadzają do pojęcia σ — ideału jako naturalnego schematu konstruowania rodzin zbiorów małych.

σ — ideałem na prostej nazwiemy rodzinę I zbiorów liczb rzeczywistych o następujących własnościach:

1. $\{x\} \in I$ dla każdej liczby rzeczywistej x ;
2. $\mathbb{R} \notin I$ (\mathbb{R} oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych);
3. Jeśli $A \subset B$ i $B \in I$, to $A \in I$;
4. Jeśli $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest rodziną zbiorów należących do I ,

to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in I$.

Piszemy $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ zamiast $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$

Rodzina podzbiorów skończonych lub przeliczalnych zbioru liczb rzeczywistych stanowi, jak się łatwo przekonać, σ — ideał (bowiem \mathbb{R} jest zbiorem nieprzeliczalnym). Jest to ponadto σ — ideał najmniejszy, tzn. zawarty w każdym innym. Naszym zaś celem będzie szukanie σ — ideałów obszerniejszych, do których należą również zbiory nieprzeliczone. Okazuje się, że takich rodzin pojawia się wiele przy okazji różnych badań matematycznych.

Na początek rozważmy rodzinę zbiorów, które można pokryć przeliczalną ilością odcinków o dowolnie małej sumie długości. Takie zbiory nazywamy zbiorami miary zero. Dokładniej:

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją odcinki $I_n : n \in \mathbb{N}$ takie, że $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ i $\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon$ ($|I|$ oznacza długość odcinka I).

Zbiory miary zero można z pewnością traktować jako małe, są bowiem podzbiorem sum krótkich odcinków. Czytelnik może sprawdzić bez trudu, że zbiory te tworzą σ — ideał. Nieco trudniej jest wskazać zbiór miary zero równoliczny z całą prostą. Typowym przykładem jest sławny zbiór Cantora. Tak więc zbiory miary zero to pierwszy rodzaj zbiorów, które są małe ze względu na sposób ułożenia elementów, a nie na ich ilość.

Zbiór Cantora konstruuje się następująco:

odcinek $[0, 1]$ dzielimy na trzy równe odcinki i wyrzucamy środkowy odcinek otwarty. Każdy pozostały odcinek dzielimy na trzy równe odcinki i wyrzucamy środkowe odcinki otwarte itd. Konstrukcję ciągniemy „w nieskończoność”. To co zostanie, to właśnie zbiór Cantora.

Następna rodzina zbiorów małych jest zdefiniowana łądząco podobnie, okazuje się jednak mieć zupełnie inne własności.

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazwiemy zbiorem silnie miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(a_n : n \in \mathbb{N})$ liczb dodatnich istnieje ciąg odcinków $(I_n : n \in \mathbb{N})$ taki, że $|I_n| < a_n$ i $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Tak więc zbiór silnie miary zero to zbiór, który można pokryć sumą odcinków o dowolnie małych długościach (w odróżnieniu od zbioru miary zero, który można pokryć sumą odcinków o dowolnie małej sumie długości). Ta niewielka z pozoru różnica w określeniu ma bardzo poważny wpływ na różnice własności omawianych rodzin zbiorów.

Zauważmy przede wszystkim, że zbiory silnie miary zero tworzą σ — ideał. Jest on zawarty w σ — ideałach zbiorów miary zero, innymi słowy każdy zbiór silnie miary zero jest zbiorem miary zero. Można ponadto wykazać, że na przykład wspomniany powyżej zbiór Cantora nie jest zbiorem silnie miary zero, czyli σ — ideał zbiorów silnie miary zero jest ostro zawarty w σ — ideałach zbiorów miary zero. Problem, czy istnieją nieprzeliczone zbiory silnie miary zero, pozostawał przez długi czas otwarty i jego pełne rozwiązanie podano dopiero w roku 1976. Okazuje się, że zdanie „Każdy zbiór silnie miary zero jest skończony lub przeliczalny”, zwane hipotezą Borela, jest niezależne od aksjomatyki teorii mnogości, czyli nie można go ani udowodnić, ani obalić. Tak prosto sformułowany problem wnika więc głęboko w podstawy matematyki.

Zarówno zbiory miary zero, jak i silnie miary zero są małe, bo są zawarte w sumach odcinków w pewnym sensie krótkich. Innym sposobem otrzymywania zbiorów małych jest żądanie, by nie zawierały „dużych kawałków”. Pierwszą próbą mógłby być postulat, by zbiór mały nie zawierał odcinka. Takie zbiory nazywamy brzegowymi. Rodzina zbiorów brzegowych nie jest jednak dobrą kandydatką na rodzinę zbiorów małych, nie stanowi ona bowiem σ — ideału: zarówno zbiór liczb wymiernych, jak i niewymiernych są brzegowe, a ich suma to cała prosta. Trzeba

więc spośród zbiorów brzegowych wyeliminować przynajmniej te, które są uzupełnieniami zbiorów brzegowych. Można to osiągnąć ograniczając się na przykład do zbiorów domkniętych brzegowych i te potraktować jako małe. Nie tworzą wprawdzie σ — ideału, ale łatwo je doń uzupełnić rozważając wszystkie podzbiory sum przeliczalnych rodzin zbiorów domkniętych brzegowych.

Zbiór domknięty to taki, który wraz z każdym ciągiem elementów zawiera jego granice.

Przyjmujemy następującą definicję:

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się cieni, jeśli istnieje taki ciąg $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów domkniętych brzegowych, że $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Warto chyba w tym miejscu podać pewną własność zbiorów cieni, bardzo sugestywnie dowodzącą ich „małości”. Z każdym zbiorem $A \subset \mathbb{R}$ wiążemy następującą grę dwuosobową G_A : gracze na przemian wybierają odcinki domknięte w ten sposób, by odcinek wybrany w danym ruchu zawierał się w odcinku wybranym w poprzednim ruchu partnera. Gra toczy się w „nieskończoność”. Jeśli przecięcie wszystkich zagranych odcinków ma wspólne punkty ze zbiorem A , wówczas wygrywa gracz pierwszy. W przeciwnym razie wygrywa drugi. Okazuje się, że gracz drugi ma strategię wygrywającą w grze G_A (czyli plan gry pozwalającej mu wyminąć zbiór A bez względu na przemyślność przeciwnika) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest cieni. Małe to muszą być zbiory, które można tak wyminąć, prawda?

Twierdzenie Baire’a orzeka, że zbiór \mathbb{R} nie jest cieni.

To, że zbiory cienie tworzą σ — ideał, wynika natychmiast z ich definicji i twierdzenia Baire’a. Tak więc istotnie można je uważać za zbiory małe. Porównajmy tak otrzymaną rodzinę z poprzednio rozważanymi σ — ideałami. Czekają nas tu, niestety, przykra niespodzianka. Okazuje się, że cały zbiór liczb rzeczywistych można podzielić na dwa zbiory, z których jeden jest cieni, a drugi miary zero. Oba te pojęcia małości zbioru, choć jednakowo chyba intuicyjne, są więc ze sobą sprzeczne.

Zależność między zbiorami cieniami a zbiorami silnie miary zero jest bardziej skomplikowana. Bez trudu można podać przykład zbioru cieniowego, który nie jest silnie miary zero (znów zbiór Cantora), natomiast zdanie „każdy zbiór silnie miary zero jest cieni” okazuje się niezależne od aksjomatyki teorii mnogości.

Inny aspekt związku między tymi σ — ideałami pokazuje następujące twierdzenie:

Zbiór jest silnie miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór cieni zawiera się w pewnym przesunięciu jego uzupełnienia.

Przesunięciem zbioru $A \subset \mathbb{R}$ o liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór $\{x+a : a \in A\}$.

Twierdzenie to dostarcza dodatkowej informacji o tym, jak małe są zbiory silnie miary zero lub, mówiąc inaczej, jak wielkie są ich uzupełnienia: tak wielkie, że każdy zbiór cieni można w nie „wsunąć”.

Jak to często bywa w matematyce, powyższe twierdzenie stało się inspiracją nowego pojęcia. Powstał mianowicie pomysł badania zbiorów, które tak mają się do zbiorów miary zero, jak zbiory silnie miary zero do zbiorów cieni.

Zbiorami silnie cieniami przyjęto nazywać takie zbiory A , że każdy zbiór miary zero zawiera się w pewnym przesunięciu uzupełnienia zbioru A .

Łatwo sprawdzić, że każdy zbiór silnie cieni jest cieni, nic więc nie stoi na przeszkodzie, by potraktować zbiory silnie cienkie jako jeszcze jeden przykład zbiorów małych. Tu jednak znów niespodzianka: nie wiadomo dotąd, czy zbiory silnie cienkie tworzą σ — ideał, ba, nie wiadomo nawet, czy suma dwóch zbiorów silnie cienkich jest zawsze zbiorem silnie cienkim.

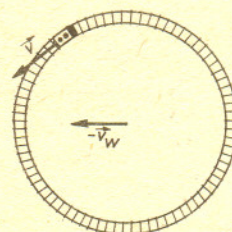
W tym miejscu przerwiemy naszą wycieczkę po krainie zbiorów małych. Podane tu przykłady rodzin takich zbiorów bynajmniej nie wyczerpują wszystkich pojęć „małości” zbioru badanych w matematyce. Dają one jednak wyobrażenie o rozważaniach prowadzonych w tej interesującej teorii i o pewnym ważnym fakcie metodologicznym. Często mając na uwadze znany obiekt o jakiejś własności próbuje się wyodrębnić te jego cechy, które o niej w przekonaniu badacza przesądzą. Stworzone w ten sposób pojęcie okazuje się czasem nie pasować do pierwotnych wyobrażeń, ujawniane są przykłady innych obiektów spełniających wprawdzie przyjętą definicję, ale w intuicyjnym odczuciu nie mających żądanej własności. (Przykład takiej sytuacji podaliśmy mówiąc o rozbiciu prostej na dwa zbiory małe w różnym sensie, przeczy on w pewnym stopniu przekonaniu, że intuicje związane z małością zbiorów miary zero i cieni są trafne.) Zmusza to zawsze do zrewidowania intuicji i głębszego wniknięcia w sens rozważanego pojęcia (w naszym przypadku małości zbioru).



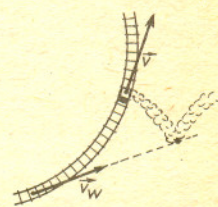
Rozwiązanie zadania F 155. Załóżmy, że parowóz jeździ po kołowym torze i przejdźmy do układu odniesienia związanego z powietrzem. W tym układzie odniesienia dym jest nieruchomy i wyznacza tor parowozu względem powietrza, natomiast środek okręgu, po którym porusza się parowóz, przemieszcza się z prędkością równą co do wartości prędkości wiatru względem powierzchni ziemi, lecz przeciwnie skierowaną. W układzie odniesienia związanym z powietrzem tor parowozu, a zatem i kształt śladu dymu jest po prostu torem punktu poruszającego się jednostajnie wokół środka okręgu, który jednocześnie przemieszcza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Wartości

prędkości liniowych obu ruchów są niezależne. Tor parowozu jest więc uogólnioną cykloidą. Tylko w jednym przypadku cykloida ma charakterystyczny „dziobek”, taki jaki tworzy dym przedstawiony na rysunku. Tak jest, gdy wartości obu prędkości są równe. Tak więc prędkość wiatru jest równa $v_w = 36 \text{ km/h}$. Ponieważ „dziobek” został przesunięty przez wiatr względem Ziemi, a w chwili jego tworzenia się prędkość wiatru musiała być styczna do toru, więc wystarczy z wierzchołka „dziobka” poprowadzić styczną do torów, aby otrzymać kierunek prędkości wiatru względem powierzchni ziemi. (Wartość promienia zakrętu była oczywiście zbędna.)

Układ odniesienia związany z powietrzem



Układ odniesienia związany z ziemią



5 mata delta

A.C. 100



$$\begin{aligned} 122 : 11 &\approx 10 \\ -\frac{11}{12} &\approx 11 \\ -\frac{11}{400} &\approx 11,09 \\ -\frac{99}{1} &\text{ itd.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 122 > 11 \cdot 10 &= 110 \\ 122 > 11 \cdot 11 &= 121 \\ 122 > 11 \cdot 11,09 &= 121,99 \end{aligned}$$

Przy dzieleniu z użyciem zwykłych cyfr zawsze „zbliżaliśmy się” do wyniku od dołu — iloczyn częściowego ilorazu i dzielnika był zawsze nie większy niż dzielna. Jeśli użyjemy również cyfr ujemnych, możemy wynik przybliżać tak od dołu, jak i z góry. W przykładzie* pierwsze przybliżenie jest 100, co (jak każdy zauważy) jest za dużo; następne przybliżenia (cyfry 2) zmniejszają jednak wynik.

$$\begin{array}{r} 513019 : 871 = \\ = 151302\bar{1} : 1131 = 14\bar{1}\bar{1} = 589 \\ \hline 1131 \\ 4420 \\ \hline 4524 \\ 1042 \\ \hline 1131 \\ 1131 \\ \hline 1131 \\ 0 \end{array}$$

Jeszcze o cyfrach ujemnych

Poprzednim razem zaproponowaliśmy używanie, obok zwykłych cyfr, również cyfr ujemnych $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}$. W ten sposób uzyskaliśmy możliwość zapisywania liczb na różne sposoby, np. $1\bar{2}34 = 1000 - 200 + 30 - 4 = 826$. Dodawaliśmy za ich pomocą, odejmowali, mnożyli i dzielili. Dla tych, którym ten pomysł się spodobał, mamy dodatkowe uwagi.

$$\begin{aligned} 7488 : 96 = \\ = 135\bar{1}\bar{2} : 104 = 12\bar{2} = 78 \\ \hline 104 \\ 391 = \\ \hline 211 \\ 208 \\ \hline 192 = \\ \hline 208 \\ 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} = 7488 : 104 = 77 \\ \hline 728 \\ 468 \\ \hline 728 \\ 96 = \\ \hline 104 \\ 104 \\ \hline 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{78} \leftarrow \text{poprawka}$$

Dzielenie to „zmniejszanie” różnicy między dzielną a iloczynem dzielnika i ilorazu częściowego (najlepiej do zera). To znaczy staramy się tak dobrać kolejną cyfrę wyniku, by „zlikwidować” pierwszą z lewej cyfrę dzielnej. Nie musimy zrobić tego od razu. W przykładzie** w miejscu A nie zlikwidowaliśmy od razu tej cyfry, ale w następnym kroku „zrobiliśmy poprawkę”. Czasem taką poprawkę trzeba zrobić kilkakrotnie. Można tego uniknąć np. zgadując od razu właściwą cyfrę.

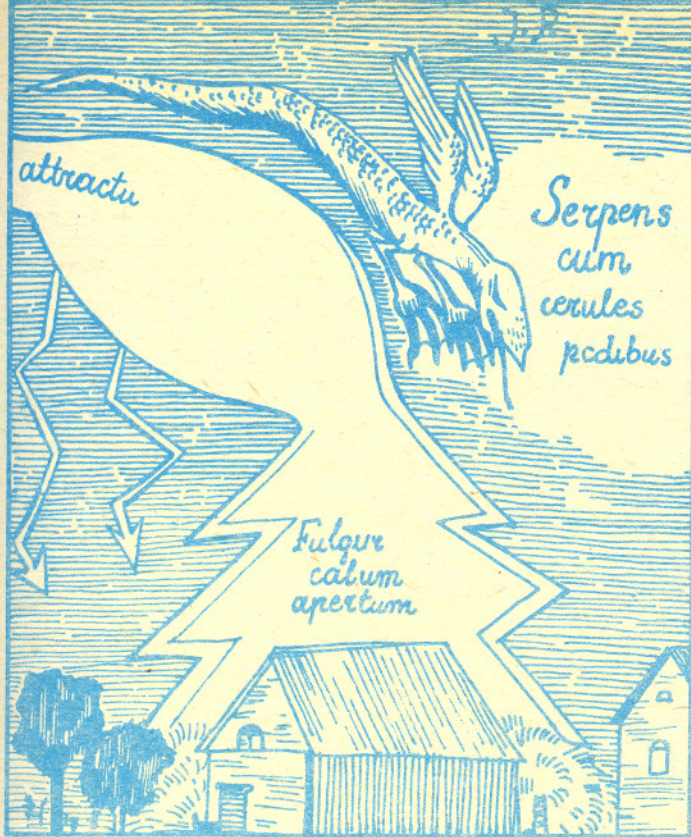
$$\begin{array}{r} 513019 : 589 = \\ = 151302\bar{1} : 1411 = 11\bar{2}\bar{1} \\ \hline 1411 \\ 1240 \\ \hline 1411 \\ 2312 \\ \hline 2822 \\ 530 = \\ \hline 1530 \\ 1411 \\ \hline 1411 \\ 1411 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 151302\bar{1} : 1411 = 11\bar{2}\bar{5} \\ \hline 1411 \\ 1240 \\ \hline 1411 \\ 2312 \\ \hline 2822 \\ 5304 \\ \hline 3055 \\ 2356 \\ \hline 2822 \\ 1178 \\ \hline 1411 \\ 589 \\ \hline 1411 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 11\bar{2}\bar{5} \\ \hline 1125 \\ 1125 \\ \hline 0 \end{array} = 871$$

Dzielenie nie musi kończyć się na „całościach”. Możemy (jak dla zwykłych cyfr) dzielić dalej. Otrzymamy wówczas ułamek dziesiętny, w którym mogą znów wystąpić cyfry ujemne. My podzieliśmy 1 przez 7. Proponujemy obejrzenie, czym się to różni od dzielenia 1 przez 13.

$$1 : 7 = 1,00\dots : 7 = 0,(143\bar{1}\bar{4}\bar{3})$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 7 \\ 30 \\ \hline 20 \\ 21 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 21 \\ \hline 1 \text{ itd.} \end{array}$$

Komety



Komety poruszają się dookoła Słońca, w polu jego przyciągania grawitacyjnego, podobnie jak planety. Tory ich ruchu różnią się jednak dość istotnie od torów planet. Planety krążą po orbitach zbliżonych do okręgów, zatem zawsze pozostają niemal w tej samej odległości od Słońca. Tymczasem komety poruszają się zwykle po orbitach bardzo wydłużonych, toteż możliwość zaobserwowania ich ogranicza się zwykle do kilku tygodni lub miesięcy, kiedy są najbliżej Słońca. Kometa staje się widoczna z Ziemi, gdy znajdzie się w odległości kilka razy większej niż odległość Ziemia — Słońce. Początkowo jest to rozmyty obiekt, na ogół z jasnym jądrem w części centralnej. W miarę zbliżania się do Słońca jasność jego wzrasta, mglista otoczka powiększa się, aż wreszcie dochodzi do wyrzucenia długiego warkocza zawsze odchylnego od Słońca.

Zanim naprawdę zrozumiano, na czym polega pojawianie się komet, uważano je za zwiastuny nieszczęścia. Przestano widzieć komety w tak posępnym świetle dopiero wtedy, gdy Newton objaśnił ich ruchy wykazując, że są one posłuszne tym samym prawom ruchu i kierowane tym samym przyciąganiem grawitacyjnym co planety.

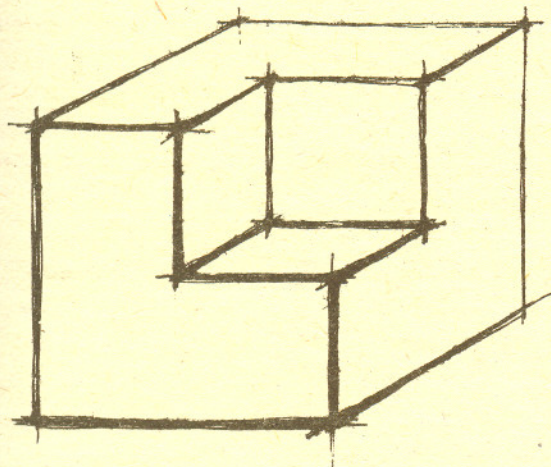
Nadal jednak nie wyjaśnione pozostawało zjawisko powstawania warkocza komety. Warkocz ten to jasna, świetlista smuga rozciągająca się od głowy komety na odległości dochodzące kilkudziesięciu milionów kilometrów. Bardzo charakterystyczną jego cechą jest to, że skierowany jest on zawsze od Słońca, bez względu na to, w jakim miejscu swej orbity znajduje się aktualnie kometa.

Dla wyjaśnienia tego faktu w 1951 r. astronom niemiecki L. Birman wysunął hipotezę istnienia wiatru słonecznego. Hipoteza ta została potwierdzona przez liczne doświadczenia i dziś już możemy powiedzieć, że wiatr słoneczny jest strumieniem naładowanych cząstek wypływającym w sposób ciągły ze Słońca w przestrzeń międzyplanetarną. Wiatr ten, a także promieniowanie słoneczne, są powodem uwalniania cząstek gazu i pyłu z głowy komety, co prowadzi do powstania warkocza.

Jądro komety jest prawdopodobnie bryłą lodową wody, amoniaku i dwutlenku węgla z wmrzonymi cząstkami meteorytowymi i cząstkami pyłu kosmicznego. Choć więc komety należą do rodziny Układu Słonecznego, budową swą, kształtem torów, po jakich poruszają się, istotnie różnią się od planet.

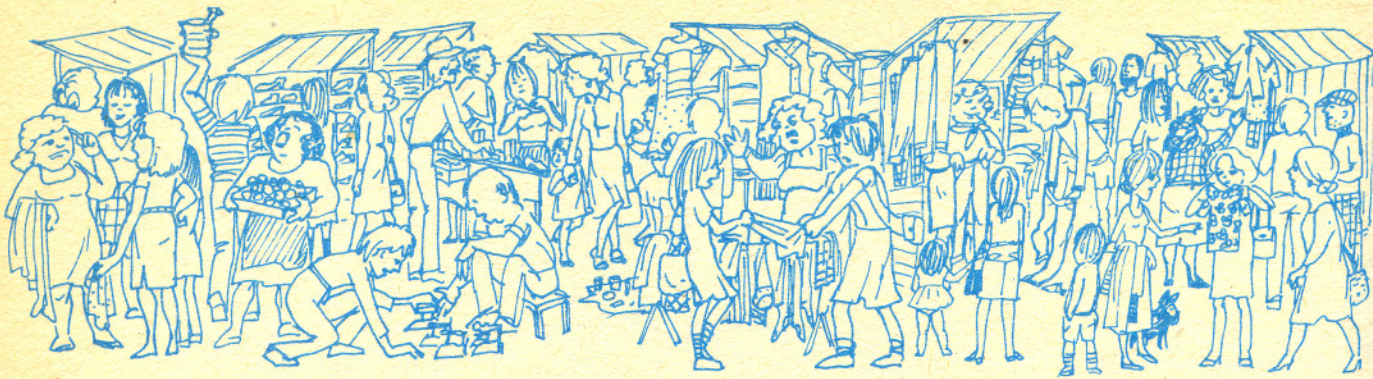
Konkurs

Dysponujemy sześciennym klockiem z jednorodnego drewna i ręczną piłką do drewna. W jaki sposób możemy wyciąć widoczną poniżej bryłę (takie $7/8$ sześcianu) możliwie mało przycinając pozostałe części klocka. Dodatkowym ograniczeniem jest warunek, że cięcie możemy tylko równoległe do którejś (dowolnej, może być za każdym razem inna) krawędzi sześcianu. Wygrywa ten, czyj klocek będzie po cięciu w jednym, możliwie jeszcze mocnym kawałku. Nie wolno pociętego klocka kleić, zbijać itd.



Najlepsze rozwiązania spośród przesłanych do 15 września 1984 roku będą nagrodzone.

Małą Deltę przygotowali JOANNA FILIPOWICZ
i KRZYSZTOF MOSTOWSKI



O SŁOWACH

Najpierw sprawa terminologiczna. Słowo bałagan przyszło do języka polskiego z języka rosyjskiego. Oznaczało pierwotnie w Rosji jarmarczne, komiczne przedstawienie, później zaś przenośny kram, w którym można było kupić na miejscowym targu najróżniejsze drobiazgi. Chyba więc jacyś wędrowni kupcy przynieśli to słowo z nad Donu do Polski, tu zaś zmieniło ono swoje znaczenie i stało się synonimem nieporządku.

Słowo chaos — chaosem właśnie, nie zaś bałaganem zajmują się fizycy — jest pochodzenia greckiego i, o ile wiem, do opisu przyrody zostało użyte po raz pierwszy w nieco zmienionej formie: słowo gaz (od greckiego chaos) wprowadził żyjący na przełomie XVI i XVII wieku sławny belgijski alchemik i lekarz (jatrochemik, wyznający poglądy bliskie Paracelsusowi) van Helmont dla oznaczenia ciał lotnych. Słowo gaz wyparło używane uprzednio słowo spirytus (duch), które znalazło inne zastosowania.

CHAOS

Pomysł zapożyczenia słowa chaos dla oznaczenia gazów okazał się niezwykle trafny, lecz stało się to w pełni zrozumiałe dopiero po trzystu latach, gdy Boltzmann sformułował tzw. hipotezę chaosu.

Dla wypowiedzenia tej prostej skądinąd hipotezy musimy wprowadzić przestrzeń (r, v) , którą możemy sobie wyobrazić jako sześciowymiarową przestrzeń kartezjańską, na osiach której odłożone są trzy składowe wektora położenia $r = (x, y, z)$ i trzy składowe wektora prędkości $v = (v_x, v_y, v_z)$. Każdy punkt przestrzeni (nazywamy ją przestrzenią fazową) opisuje więc zarówno położenie, jak i prędkość cząstki. Element objętości przestrzeni fazowej oznaczamy $\Delta^3 r \Delta^3 v$. Na tej przestrzeni określimy jednoczątkową funkcję rozkładu $f_1(r, v; t)$ taką, że iloczyn

$$f_1(r, v; t) \Delta^3 r \Delta^3 v$$

oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili t cząstka będzie miała położenie i prędkość znajdującą się w objętości $\Delta^3 r \Delta^3 v$, wokół punktu (r, v) . Analogicznie możemy wprowadzić dwucząstkową funkcję rozkładu $f_2(r_1, v_1, r_2, v_2; t)$, która określa gęstość prawdopodobieństwa tego, że w chwili t jedna cząstka znajdzie się w punkcie (r_1, v_1) , druga zaś w punkcie (r_2, v_2) przestrzeni fazowej.

Hipoteza chaosu głosi, że

$$f_2(r_1, v_1, r_2, v_2; t) = f_1(r_1, v_1; t) f_1(r_2, v_2; t).$$

Wzór ten przypomina natychmiast znany fakt z teorii prawdopodobieństwa, że zdarzenia A i B są niezależne, gdy prawdopodobieństwo łącznego wystąpienia zdarzeń A i B równe jest iloczynowi prawdopodobieństwa zdarzenia A i prawdopodobieństwa zdarzenia B. Dlatego właśnie fizyczny sens hipotezy chaosu polega na tym, że położenia i prędkości dwóch dowolnych cząstek są wzajemnie niezależne.

Podane sformułowanie hipotezy chaosu należy do Ludwiga Boltzmann'a, znakomitego austriackiego uczonego i arcyciekawego człowieka. Sam Boltzmann nazwał przytoczony wzór Stosszahlansatz — twierdzeniem o ilości zderzeń, i pod tą nazwą można znaleźć je do dziś w wielu monografiach.

Hipoteza chaosu jest jednym z głównych założeń, jakimi posługujemy się przy wyprowadzeniu równania określającego funkcję rozkładu. Równanie to sprawiedliwie nosi nazwę równania Boltzmann'a.

RÓWNOWAGA TERMODYNAMICZNA

Znamy tylko jedno ściśle, fizycznie interesujące rozwiązanie równania Boltzmann'a odpowiadające stanowi równowagi termodynamicznej. Dla tego rozwiązania funkcja rozkładu zależy tylko od prędkości i nie zależy od położenia. Równowagowa funkcja rozkładu znana była już Maxwellowi i on właśnie dał jej fizyczną interpretację.

Stan równowagi, będący w terminologii Płochockiego maksymalnym bałaganem, jest ściśle określony bardzo przyzwyczajoną funkcją rozkładu. Jest to funkcja rozkładu normalnego (funkcja Gaussa) dobrze znana w teorii prawdopodobieństwa, nieraz omawiana w *Delcie*. Ma ona, jak wiadomo, typowy kształt dzwonu lub, jeśli kto woli, napoleońskiego kapelusza.

Ściśle rzecz biorąc tylko w stanie równowagi termodynamicznej określone są makroskopowe parametry opisujące układy fizyczne, takie jak temperatura, gęstość, ciśnienie, prędkość gazu czy cieczy itd. Dowodzi się wszakże, że można bezpiecznie (tj. bez popadania w sprzeczność) posługiwać się tymi parametrami w stanach bliższych stanowi równowagi, w szczególności wtedy, gdy ma miejsce lokalna (w przestrzeni) równowaga termodynamiczna.

Ponieważ zmiany wymienionych parametrów są przedmiotem fizyki makroskopowej, można powiedzieć, że zajmuje się ona stanami nieznacznie odbiegającymi od stanu równowagi termodynamicznej.

Tylko w niewielu przypadkach badane zjawiska są na tyle odległe od stanu równowagi, że musimy zrezygnować z ich opisu za pomocą „zwykłych”, uprzednio wymienionych parametrów fizycznych i odwołać się do równania Boltzmann'a. Do takich szczególnych zjawisk, w których występują istotne odchylenia od stanu równowagi termodynamicznej, należą między innymi fale uderzeniowe.

NIESPODZIEWANE KONSEKWENCJE

Trudność, jaką napotykamy przy rozważaniu stanów dalekich od równowagi termodynamicznej, polega na tym, że nie umiemy rozwiązać równania Boltzmann'a, nie znamy (poza równowagowym) jego ścisłych rozwiązań. Matematyczna analiza tego równania pozwala jednak na wyciągnięcie szeregu wniosków. Najważniejszym z nich jest ten, że entropia układu izolowanego rośnie. Fakt ten był uprzednio postulowany w termodynamice; równanie Boltzmann'a dało jego podstawę statystyczną, pozwoliło na zbudowanie mostu między fizyką statystyczną i termodynamiką.

Wniosek o wzroście entropii układu izolowanego (jeśli nie znajduje się on w stanie równowagi) był zaskakujący. Bo jakże to: przy wyprowadzeniu równania Boltzmann'a rozważa się elastyczne zderzenia (sferycznych) cząstek i każde takie zderzenie jest odwracalne. Gdybyśmy je sfilmowali, to film oglądany w obu kierunkach daje prawdziwy (z fizycznego punktu widzenia) przebieg zdarzenia.

Z równania Boltzmana wynika natomiast nieodwracalność: entropia w układzie zamkniętym może tylko rosnąć. Ta nieodwracalność musi być ukryta w jakimś założeniu, z którego skorzystaliśmy przy wyprowadzaniu równania Boltzmana. Jedynym takim założeniem jest hipoteza chaosu. W niej schowana jest nieodwracalność. A więc także i „strzałka czasu”, bowiem tylko przyrost entropii jest zegarem wskazującym, w którym kierunku „plynie” czas. Z tego punktu widzenia atomy są tymi szczęśliwcami, którzy czasu nie znają, a czas okazuje się być związany z wielkimi zbiorami cząstek. Nie jest to myśl łatwa do przyjęcia, stoi bowiem w konflikcie z pojęciem czasu znanym z mechaniki newtonowskiej.

OGRANICZENIA

Zakres stosowalności hipotezy chaosu, a zatem także równania Boltzmana, był i jest przedmiotem wielu dyskusji. Nie ma wątpliwości, że równanie to dobrze opisuje sytuację, jeśli się je stosuje do „rzadkich”, jednoatomowych gazów. Jednym z głównych sukcesów równania Boltzmana było przecież to, że udało się z niego wyprowadzić równania ruchu gazów idealnych (równania Eulera) i także, w wyższym przybliżeniu, równania gazów lepkich i przewodzących ciepło (równania Naviera-Stokesa). Czy można jednak je stosować do gazów gęstych lub też gazów składających się z wieloatomowych molekuł? A do plazmy, do cieczy?

Wiele zrobiono w tych kierunkach. Wszakże rezygnacja z hipotezy chaosu, próby zastąpienia jej innymi, mniej ograniczającymi sformułowaniami, okazały się nie w pełni zadowalające. Lokalne uporządkowanie (jak w gazach gęstych i cieczach) trudniej poddaje się analizie niż „chaos”. Łatwiej modelować matematycznie punktowe zderzenia niż oddziaływania dalekie (występujące w plazmie). Na drogach do lepszego zrozumienia obiektów bardziej skomplikowanych niż rzadki gaz jednoatomowy piętrzą się liczne trudności, nad ich przewyższeniem będą się fizycy we wszystkich zakątkach świata.

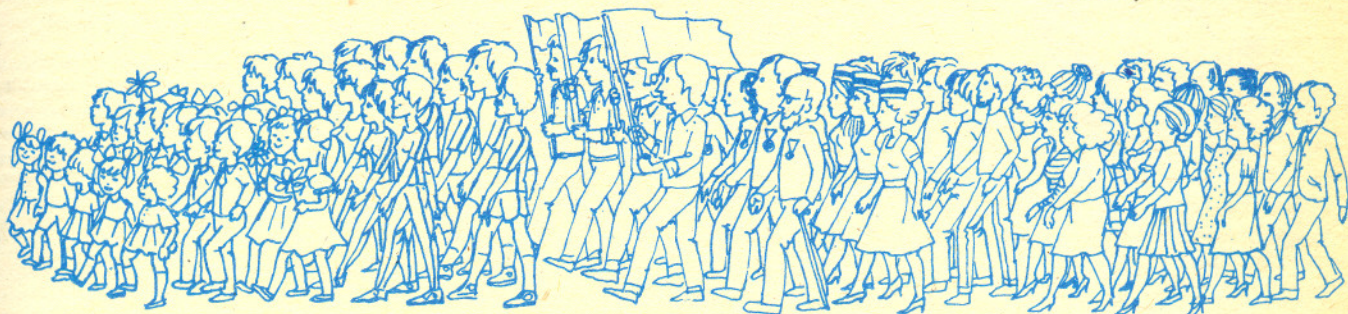
Na zakończenie uwaga dotycząca przenoszenia praw „społeczności molekuł” na społeczności biologiczne, roślinne, zwierzęce, wreszcie ludzkie. Takie przenoszenie, choć nieraz urzekające, jest zabiegiem niepewnym i podejrzanym.

Dwojakie są tego powody. Rozważane w fizyce zbiory różnią się liczebnością o wiele rzędów od wszelkich społeczności biologicznych. Żadna z nich nie zawiera tylu elementów, ile jest cząstek w centymetrze sześciennym najdoskonalszej próżni, jaką udało się dotąd uzyskać w warunkach laboratoryjnych (około 10^{12}). Konsekwencją różnicy liczebności jest różnica wielkości występujących fluktuacji (których zresztą równanie Boltzmana nie opisuje). Wielkość fluktuacji jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka liczebności elementów w rozpatrywanym układzie i dlatego fluktuacje odgrywają znacznie większą rolę (czasem wręcz decydującą) w układach biologicznych niż w układach fizycznych.

Ważniejsze wszakże jest to, że w społecznościach biologicznych „cząstki” nie są identyczne i że występują owe lokalne uporządkowania i dalekie oddziaływania, które tak opornie poddają się analizie, że te więzy są głównym czynnikiem konstytuującym społeczności biologiczne.

Dlatego myślę, że „teoria bałaganu” społeczności biologicznych i ludzkich w szczególności musi wyrosnąć na innych podstawach, bezpośrednio zaś stosowanie analogii termodynamicznych nie na wiele może się przydać. Siła każdej teorii polega na umiejętności wyróżnienia najbardziej istotnych cech badanego obiektu. Sądzę, że traktowanie ludzkich zachowań jako chaotycznego ruchu pomija to, co w tych zachowaniach najważniejsze, ową specyficzną cechę gatunku, jaką jest świadomość celów.

dr Ryszard HERCZYŃSKI



Pomysł przeniesienia termodynamiki do nauk społecznych, zaprezentowany w artykule Z. Płochockiego, uważam za znakomity. I to z dwóch powodów. Wszelkie próby antropomorfizacji fizyki, a więc i termodynamiki, ułatwiają zwykłym zjadaczom chleba zrozumienie istoty różnych modeli fizycznych. Z drugiej strony, uzyskane w termodynamice wyniki stwarzają szansę na formalizację nauk społecznych — a więc, mimo żartobliwego tonu artykułu, na zwiększenie roli rzeczywistych modeli w tych naukach. Na marginesie — wynik takiego przeniesienia nie zawsze jest zgodny z oczekiwaniami i intencjami — vide doświadczenia ostatnich lat w tzw. cybernetyce społecznej, która stała się wspaniałą pożywką dla hochsztaplerów.

Kilka stwierdzeń artykułu budzi jednak moje wątpliwości. Po pierwsze — wydaje się, że Autor jest zwolennikiem poglądu, iż bałagan jest stanem niepożądanym lub przynajmniej nieprzyjemnym. W naukach społecznych nie da się chyba takiego stanowiska obronić. Przykład trywialny — kompania honorowa. Dla postronnego obserwatora jest to niewątpliwie struktura wysoce uporządkowana i na ogół budząca pozytywne odczucia. Mam wątpliwości, czy te uczucia podzielają członkowie kompanii. Gdyby chcieć uogólnić ten przykład, to można by powiedzieć, że porządek jest odbierany pozytywnie z zewnątrz układu. Dla aktywnych uczestników uporządkowanej struktury uczucia mogą być już jednak co najmniej mieszane. Przykładem na większą skalę społeczną są państwa totalitarne i demokratyczne. System totalitarny wydaje się wyżej uporządkowanym, o niższej entropii (można ją zresztą obliczyć!), od demokratycznego bałaganu, co nie oznacza jego wyższości w hierarchii ludzkich wartości.

Po drugie — nie wydaje się, by termodynamika przepowiadała — pesymistycznie, według Autora — nieuchronny końcowy stan totalnego bałaganu. Takie stwierdzenie wymaga w ramach termodynamiki założenia, że Wszechświat jest izolowany. Tego nie udało się dotąd pokazać i, co więcej, wydaje się, że jest to niemożliwe do pokazania (ani obalenia!). W ludzkiej skali czasu i odległości jest to zresztą problem nieistotny — „zawsze” będziemy mieli dostatecznie wielu kosmicznych sąsiadów, by zmniejszać nasz bałagan ich kosztem, podrzucając im trochę wyprodukowanej entropii.

Po trzecie wreszcie — wielu fizyków-kosmologów przychyliło się do opinii, że Wszechświat jest raczej nietypowym wybrykiem, niż stanem naturalnym. Od kilku lat zdobywa coraz więcej zwolenników hipoteza, że zwykłym stanem wszechrzeczy jest nicłość, a Wszechświat jest jedynie gigantyczną fluktuacją tej nicości. Jeśli hipoteza ta jest prawdziwa — a można to założyć, bo prawie na pewno jest niesprawdzalna — to po upływie skończonego czasu powrócimy wraz z całym Wszechświatem do stanu nicości, a więc najwyższego możliwego porządku! Z taką perspektywą na przyszłość może nie warto się przejmować drobnym powiększaniem bałaganu, który wynika z działalności rodzaju ludzkiego. Poza tym doświadczenia ostatnich kilku lat w Polsce wywołują nieodpartą chęć przejścia do stanu o choć odrobinę wyższej entropii.

prof. dr Krzysztof WILMAŃSKI

Wstęp

Mgr Jacek SZABELSKI



Do niedawna naukowe obserwacje nieba były prowadzone przez astronomów tylko przy pomocy teleskopów optycznych. Obecnie wiadomo, że z przestrzeni kosmicznej dociera do nas promieniowanie elektromagnetyczne w szerokim zakresie widma — od fal radiowych po kwanty gamma o energiach kilkuset elektronowoltów, a także promieniowanie kosmiczne, czyli cząstki materialne. Tak poszerzone „okno na świat” pozwala z jednej strony poznać szczegółowo budowę i ewolucję wcześniej obserwowanych obiektów, takich jak gwiazdy czy galaktyki, a z drugiej strony umożliwia odkrywanie jakościowo nowych obiektów i zjawisk astrofizycznych (np. pulsary kwazary, radiogalaktyki).

Promieniowanie kosmiczne, mimo że odkryte około 70 lat temu, jest ciągle mało znanym zjawiskiem astrofizycznym. Elektrony, protony, cząstki α (jądra ${}^4\text{He}$), jądra cięższych pierwiastków oraz trudno wykrywalne neutrino bombardujące Ziemię mają niekiedy energie aż do 10^{20} eV. Nie wiemy, w jakich procesach mogą być produkowane cząstki o tak wielkich energiach. W największych akceleratorach na Ziemi przyśpiesza się protony do energii 100 milionów razy mniejszej.

Niedawno pojawiła się nowa zagadka. W pierwotnym, tzn. pochodzącym spoza Układu Słonecznego, promieniowaniu kosmicznym stwierdzono obecność antyprotonów w ilościach znacznie przewyższających przewidywania ogólnie przyjętych modeli źródeł antymaterii we Wszechświecie.

Nie potrafimy wskazać na niebie źródeł promieniowania kosmicznego, gdyż w polach magnetycznych w przestrzeni międzygwiazdowej cząstki naładowane poruszają się po torach krzywoliniowych. Mimo to przyjmuje się zwykle, że wszystkie źródła promieniowania kosmicznego zbudowane są z materii. Wiadomo bowiem, że antymateria nie może mieszać się z materią, gdyż prowadzi to poprzez anihilację do stanu, w którym pozostaje tylko materia albo tylko antymateria. W wyniku anihilacji protonu i antyprotonu powstają średnio 3 fotony o energiach 200 MeV, około 3—4 elektrony i pozytony oraz neutrino. Gdyby dwa duże obiekty astronomiczne: materialny i antymaterialny, anihilowały, to dla masy rzędu masy Słońca odpowiadałoby to anihilacji ok. 10^{57} par cząstka-antycząstka. Głównie z powodu niezaobserwowania promieniowania gamma i promieniowania radiowego (emitowanego przez elektrony i pozytony) wskazującego na anihilację uważa się, że nie ma antymaterialnych obiektów we Wszechświecie.

Obecność antyprotonów w promieniowaniu kosmicznym tłumaczy się na ogół przez produkcję par proton — antyproton w zderzeniach wysokoenergetycznych cząstek promieniowania z materią międzygwiazdową. Okazuje się jednak, że nie można wyjaśnić w ten sposób pochodzenia wszystkich obserwowanych na Ziemi antyprotonów.

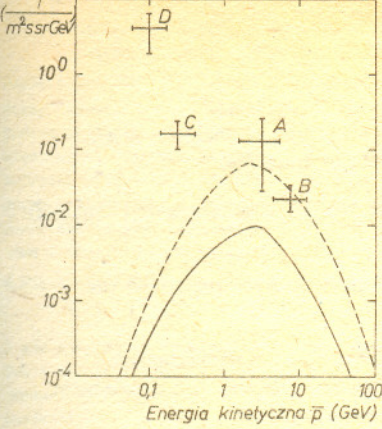
Promieniowanie kosmiczne w Galaktyce

Obserwowane galaktyczne promieniowanie kosmiczne o energiach cząstek od kilkunastu MeV do kilkudziesięciu GeV składa się głównie z protonów z 10% domieszką cząstek α i znacznie mniejszą ilością cięższych jąder i elektronów. Antyprotonów w promieniowaniu kosmicznym jest mniej więcej tyle, ile jąder żelaza.

Bardzo ciekawe informacje o rozchodzeniu się promieniowania kosmicznego otrzymano mierząc jego skład izotopowy. Okazało się, że stosunek ilości izotopu ${}^3\text{He}$ do ilości zwykłego ${}^4\text{He}$ jest w promieniowaniu kosmicznym znacznie większy niż w Układzie Słonecznym. Podobnie jest w przypadku stosunku ilości jąder Li, Be, B do ilości jąder C, N, O.

Wiadomo, że przestrzeń międzygwiazdowa nie jest pusta; jej średnia gęstość w Galaktyce jest równa około 0,1—1 atomu wodoru na cm^3 . Gdyby cząstki ${}^4\text{He}$ i jądra C, N, O były produkowane w źródłach, to część z nich w drodze od źródeł do Ziemi zderzałaby się z cząstkami materii międzygwiazdowej i cięższe jądra ulegałyby rozszczepieniu na lżejsze (m.in. na ${}^3\text{He}$ i Li, Be, B). Liczba tych lżejszych jąder zależy oczywiście od długości drogi między źródłem a Ziemią, to jest efektywnej grubości tarczy napromieniowanej cięższymi jądrami. Żeby w ten sposób powstała obserwowana ilość ${}^3\text{He}$, Li, Be i B, efektywna grubość tarczy powinna wynosić 4—5 g/cm^2 . Przy założeniu, że materia międzygwiazdowa ma średnią gęstość 1 atom wodoru/ cm^3 , odległość źródła promieniowania kosmicznego od Ziemi powinna być równa około 10^6 pc. Należy zwrócić uwagę, że średnia droga swobodna w tak rzadkim wodorze jest istotnie dłuższa (dla ${}^4\text{He}$ około $20\text{g}/\text{cm}^2$, a dla C, N, O około $6,7\text{g}/\text{cm}^2$), co oznacza, że znaczna część promieniowania dochodzi do Ziemi bez zderzeń z materią międzygwiazdową.

Efektywna grubość tarczy to średnia masa materii na jednostkę objętości (gęstość) zsumowana wzdłuż całej drogi, wyraża się więc w g/cm^2 .



Strumień antyprotonów w okolicy Ziemi. Linia przerywana — dane obserwacyjne. Linia ciągła — przewidywania teoretyczne.

Urządzenia poszukujące antymaterii w pierwotnym promieniowaniu kosmicznym wynoszone są na balonach wysoko ponad ziemię, aby po pierwsze: kosmiczne antymaterialne cząstki nie anihilowały w zderzeniach ze stosunkowo gęstą atmosferą oraz po drugie, aby nie rejestrować wtórnych antyprotonów powstałych w atmosferze w zderzeniach z wysokoenergetycznym promieniowaniem kosmicznym.

Grupa radziecka z Leningradu (na rysunku punkt A) zidentyfikowała w 1979 roku 2 antyprotony pochodzenia galaktycznego, a grupa amerykańska z Nowego Meksyku z USA (punkt B) 28 antyprotonów (też w 1979 r.). W 1981 roku grupa fizyków amerykańskich z uniwersytetu w Berkeley i Kalifornijskiego Instytutu Technicznego zarejestrowała 11 przypadków anihilacji antyprotonów spoza Układu Słonecznego (punkt C). Latem 1983 roku grupa fizyków hinduskich doniosła o znalezieniu 3 przypadków anihilacji antyprotonów (punkt D) i 1 jądra antytrytu. W analizie wyników wszystkich doświadczeń uwzględniono tło związane z pomyłką rejestracji innych cząstek jako antyprotonów i produkcją antyprotonów wewnątrz Układu Słonecznego, w górnych warstwach atmosfery i wewnątrz aparatury.

Założmy, że protony o energiach 20—200 GeV pochodzą z tych samych źródeł co cięższe jądra. Odległość — grubość tarczy, jaką przechodzą w drodze w okolicy Ziemi, niech będzie $\lambda = 5 \text{ g/cm}^2$. W zderzeniach protonów z materią międzygwiazdową mogą być produkowane antyprotony (i antyneutrony, które następnie rozpadają się na antyprotony), podobnie jak to ma miejsce w akceleratorach. Prawdopodobieństwo wyprodukowania antyprotonu w zderzeniu protonu z protonem można dobrze określić dla kilku energii analizując wyniki doświadczeń z akceleratorów w Fermilab, CERN-ie i Sierpuchowie. Strumień protonów w przestrzeni kosmicznej jest również znany na podstawie pomiarów w okolicy Ziemi. Sumując antyprotony wyprodukowane w tarczy o grubości λ przez protony o różnych energiach otrzymujemy oczekiwany strumień wtórnych antyprotonów w okolicy Ziemi. Strumień ten jest zaznaczony na rysunku linią przerywaną. Jak widać, krzywa leży znacznie (skala logarytmiczna) poniżej danych doświadczalnych (linia ciągła).

Mimo, że przedstawione wyżej własności rozchodzenia się promieniowania kosmicznego uważa się za realistyczne, spróbujmy tak oddalić źródło, aby otrzymać możliwie dobrą zgodność z doświadczeniem. Pojawia się tutaj jednak istotna trudność. Zwiększanie grubości tarczy powyżej 40 g/cm^2 nie zwiększa już strumienia antyprotonów. Dzieje się tak dlatego, że wyprodukowane antyprotony anihilują z materią międzygwiazdową. Maksymalny strumień antyprotonów zaznaczony jest na rysunku linią przerywaną.

Z wyżej przytoczonych argumentów wynika, że w obecnej chwili nie znamy pochodzenia znacznej części antyprotonów w promieniowaniu kosmicznym. Być może pochodzą one z wtórnej produkcji w przestrzeni międzygwiazdowej, a sposób rozchodzenia się promieniowania kosmicznego jest całkiem inny niż go sobie dziś wyobrażamy. Możliwe, że źródłem antyprotonów są nieznanne dziś procesy, np. kreacja antyprotonów w silnych polach grawitacyjnych w pobliżu hipotetycznych małych czarnych dziur. A może po prostu antyprotony te świadczą o istnieniu antymaterii w odległych rejonach Wszechświata „oddzielonych” od naszego materialnego otoczenia wielkim pustym obszarem.



Rozwiązanie zadania M 368. Oznaczmy liczby uzyskane przez przestawienia cyfr n przez $n_0 = n, n_1, n_2, \dots, n_5$. Mamy, jak łatwo sprawdzić,

$$n_0 + n_1 + \dots + n_5 = 222(a + b + c),$$

a więc warunek zadania można zapisać

$$222(a + b + c) = 6(100a + 10b + c),$$

czyli $37(a + b + c) = 100a + 10b + c$, skąd

$$63a = 27b + 36c,$$

a więc $7a = 3b + 4c$, lub inaczej

$$7(a - b) = 4(c - b)$$

i ponieważ $|a - b| \leq 9$, $|c - b| \leq 9$, więc ostatnia równość może być spełniona tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad a - b = 0 = c - b, \text{ czyli } a = b = c = 1, 2, \dots, 9,$$

$$(**) \quad a - b = 4, c - b = 7, \text{ skąd } c = 9, 8 \text{ lub } 7,$$

$$(***) \quad a - b = -4, c - b = -7, \text{ skąd } b = 9, 8 \text{ lub } 7.$$

Mamy więc trzy serie rozwiązań:

$$(*) \quad 111, 222, 333, \dots, 999,$$

$$(**) \quad 407, 518, 629,$$

$$(***) \quad 370, 481, 592.$$



Rozwiązanie zadania M 370. Oznaczmy różnicę naszego ciągu przez d . Gdyby $2 \nmid d$, to jedna z liczb $a_0 + d, a_0 + 2d$ byłaby parzysta i większa niż 2, wbrew warunkom zadania. Analogicznie rozpatrując $a_0 + d, a_0 + 2d, \dots, a_0 + pd$ dla $p = 3, 5, 7$, przekonamy się, że $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ dzieli d . Również jeżeli tylko $a_0 \neq 11$, to 11 musi dzielić d . Mamy wtedy (dla $a_0 \neq 11$) $d = 11 \cdot 210 \cdot k = 2310 \cdot k$ ($k \geq 1$) i $a_{10} = a_0 + 10 \cdot 2310 \cdot k > 20\,000$, wbrew warunkom zadania.

Pozostaje więc tylko możliwość, że $a_0 = 11$, $d = 210 \cdot k$, przy czym $1 \leq k < 10$ (bo $d \leq$

$$\frac{20\,000 - 11}{10} < 2000).$$

Mamy $210 = 13 \cdot 16 + 2$, skąd $a_n = 11 + (13 \cdot 16 + 2) \cdot kn = 13 \cdot (16kn - 1) + 2 \cdot (kn - 1)$. Jeżeli teraz $k \neq 6$, to oznaczając $n_1 = 1, n_2 = 7, n_3 = 9, n_4 = 10, n_5 = 8, n_7 = 2, n_8 = 5, n_9 = 3, n_{10} = 4$ mamy $13 \mid (kn_k - 1)$ i $13 \mid a_{n_k}$. Dla $k = 6$ mamy $d = 1260$ i $a_4 = 11 + 3 \cdot 1260 = 3791 = 17 \cdot 223$. Okazuje się więc, że jedna z liczb a_0, a_1, \dots, a_{10} musi być złożona.



Przypomnijmy: suma cen czterech towarów wynosi 7,11; tyle też wynosi iloczyn tych cen. Zadanie konkursowe polegało na znalezieniu cen poszczególnych towarów.

Okazuje się, że warunki zadania wyznaczają ceny jednoznacznie (z dokładnością do kolejności): 3,16 – 1,25 – 1,50 – 1,20.

Spośród nadesłanych rozwiązań tylko dwanaście było dobrych (w których znaleziono ceny i wykazano, że innego układu cen być nie może).

Metody uzyskania rozwiązania były (mówimy dalej już tylko o dobrych rozwiązaniach) bardzo różne. Ich cechą wspólną było rozpoczęcie od spostrzeżenia, że chodzi o rozwiązanie w liczbach naturalnych układu równań (ceny w centach, a nie w dolarach)

$$\begin{cases} a+b+c+d = 711 \\ a \cdot b \cdot c \cdot d = 711 \cdot 10^6 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 79, \end{cases}$$

a zatem pogrupowanie piętnastu liczb pierwszych w cztery grupy tak, by suma iloczynów liczb z poszczególnych grup wyniosła 711.

Dalej rozwiązania idą już różnymi drogami. Często jednak powtarza się oszacowanie cen (w centach) z góry za pomocą spostrzeżenia, że średnia geometryczna liczb dodatnich nie jest większa od ich średniej arytmetycznej. Również częste jest rozważanie rozmieszczenia piątek. Cena (w centach) podzielna przez 79 (niech będzie to a) nie dzieli się przez 5, gdyż wówczas mielibyśmy

$$b+c+d = 316 < 3 \cdot \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot \sqrt[3]{b \cdot c \cdot d},$$

a więc sprzeczność. Wszystkie piątki są więc rozmieszczone w b , c i d . Żadna z tych liczb nie dzieli się przez $5^4 = 625$, bo musiałaby być równa 625, co daje sprzeczność w podobny sposób. Zatem pozostają (z dokładnością do kolejności) trzy możliwości.

1. Każda z liczb b , c , d dzieli się przez 5^2 . Tak być nie może, bo każda z liczb $b+c+d = 711-a$ nie dzieli się przez 25 (mamy bowiem $711-a = 79(9-k)$, gdzie $k = 1, 2, \dots, 8$).

2. Jedna z liczb (powiedzmy b) nie dzieli się przez 5. Wówczas c i d dzielą się przez 125 i są mniejsze od 375 (możliwość, że c bądź d jest 375 lub 500 wykluczamy jak poprzednio). Mamy więc $c+d = 125 \cdot l$, gdzie $l = 2, 3, 4$. Ale to nie prowadzi do rozwiązania, gdyż żaden z trzech układów równań

$$\begin{cases} a+b = 711-125 \cdot l \\ a \cdot b = 2^{6+2-l} \cdot 3^2 \cdot 79 \end{cases} \quad l = 2, 3, 4$$

nie ma rozwiązań naturalnych.

3. $b = x \cdot 125$, $c = y \cdot 25$, $d = z \cdot 5$, gdzie x, y, z nie dzielą się przez 5. Wówczas $b+c+d = 711-a$ dzieli się przez 5, skąd mamy $a = 316$. Pozostaje do rozwiązania układ

$$\begin{cases} b+c+d = 395 \\ b \cdot c \cdot d = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6, \end{cases}$$

czyli po podstawieniu

$$\begin{cases} 25x+5y+z = 79 \\ x \cdot y \cdot z = 2^4 \cdot 3^2. \end{cases}$$

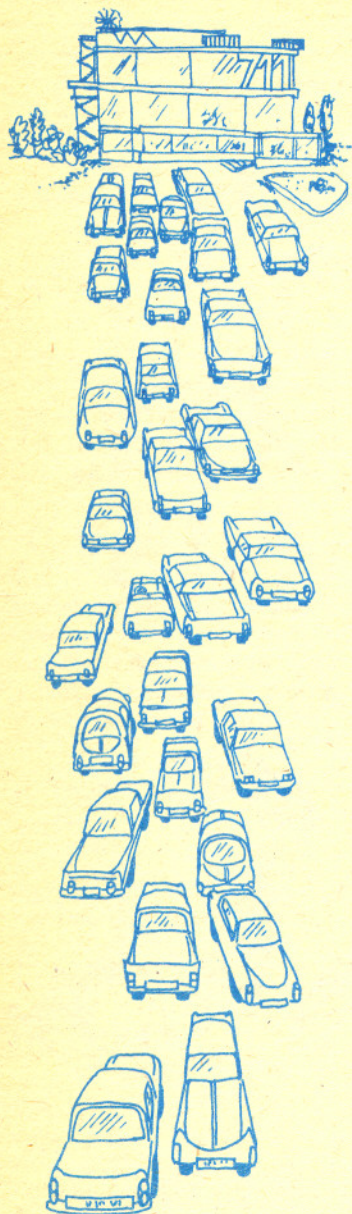
Zatem $x \leq 2$. Dla $x = 2$ mamy jednak

$$\begin{cases} 5y+z = 29 \\ y \cdot z = 2^3 \cdot 3^2 = 72, \end{cases}$$

co nie ma rozwiązań naturalnych. Pozostaje więc $x = 1, y = 6, z = 24$.

Przytoczone rozwiązanie nie pokrywa się z żadnym spośród otrzymanych. Nie umieliśmy się jednak zdecydować, który z Czytelników rozwiązał konkurs najlepiej. Wszystkie przyznane nagrody traktujemy wobec tego równorzędnie.

Odrębnie potraktowaliśmy tylko pracę pana Ksawerego Stojdy, który opracował algorytm poszukiwania rozwiązań, zakodował go w języku Fortran i przekazał dalszą pracę komputerowi CDC CYBER 72 pod kontrolą systemu SCOPE 3.4.4 w Świerku (miał do niego dostęp jako student drugiego roku fizyki UW). Nie nagrodziliśmy ani p. Stojdy, ani CDC, tylko zwróciliśmy się o opisanie całej sprawy w nr. 12/1984, który będzie poświęcony algorytmom. Zamiast nagrody będzie więc publikacja i honorarium.



Nagrody książkowe otrzymali:

Anna Gluza, Toruń,
Ewa Janiszewska, Kraków,
Jerzy Janowicz, Bolesławiec,
Adam Lipowski, Zielona Góra,
Michał Marczak, Radom,
Marek Prauza, Poraj,
Józef Siwy, Łaziska Górne,
Piotr Tomassi, Warszawa,
Jarosław Wróblewski, Wrocław,
Krzysztof Zygan, Lubin

Nie otrzymał nagrody Piotr Figurny, gdyż nie podał adresu.

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 1/1984

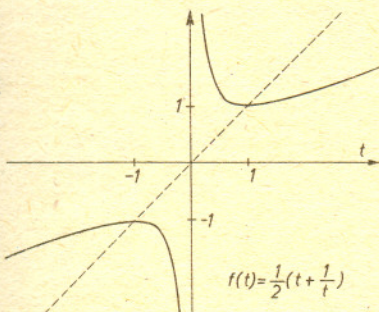
Jacek Źryga	- Bytom	50,31pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	49,18pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	47,30pkt
Włodzimierz Szymczyk-Zielonka		42,42pkt
Wojciech Olszewski	- Brwinów	40,35pkt
Jerzy Milczarek	- Gorzów Wlkp	40,30pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	39,37pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	36,74pkt

Współczynniki trudności zadań 73, 74, 75:
1,55 3,69 2,31

I oto mamy dwóch Weteranów. Gratulujemy! Dwa i pół roku trwania ligi zadaniowej okazało się wystarczające na to, by dwaj uczestnicy – pan Jerzy Janowicz i pan Jacek Źryga – zdołali wykonać po trzy rundy czterdziestoczwieropunktowe. Tytuł Weterana uzyskali równocześnie, dystansując dość znacznie pozostałych współuczestników, z których, w chwili obecnej, jeszcze tylko dwóch ma za sobą po dwie rundy.

Ponieważ tytuł Weterana – to wszystko, co nasz regulamin oferuje, a mamy nadzieję, że Weterani nie będą chcieli rozstać się z ligą, zwracamy się do Czytelników z prośbą o pomysł co do formy dalszego honorowania jej najwytrwalszych uczestników.

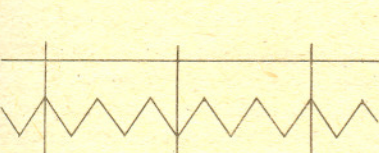
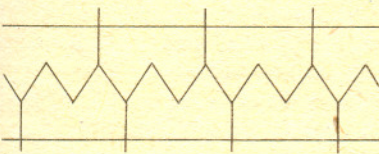
Klub 44 liczy w tej chwili 17 członków; siedemnastym jest pan Tomasz Rawlik, a z tabeli widać, że rażno zbliżamy się do dwudziestki.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez.

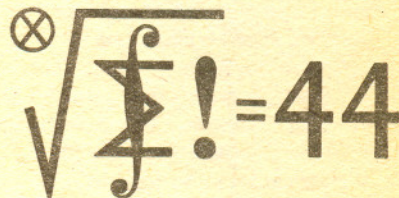
$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Klub 44



Rozwiązania zadań z numeru 3/1984

Przypominamy treść zadań:

79. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$2v = u + 1/u \quad 2x = v + 1/v \quad 2y = x + 1/x \quad 2u = y + 1/y.$$

80. Czy istnieje parkietaż płaszczyzny utworzony z przystających wypukłych: a) pięciokątów, b) siedmiokątów, c) ośmiokątów? Czy odpowiedzi zmieniają się, jeśli nie będziemy żądać wypukłości?

81. Liczby naturalne a, b spełniają warunki: $a \equiv -1 \pmod{b}$, $b \equiv 1 \pmod{2}$. Niech $c_n = a^{b^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dowieść, że dla każdego n liczba c_{n+1} jest podzielna przez bc_n .

79. Piszmy x_1, x_2, x_3, x_4 odpowiednio zamiast u, v, x, y oraz przyjmijmy $x_5 = x_1$. Dane równania przybierają postać: $x_{i+1} = f(x_i)$, gdzie $f(t) = (1/2)(t + 1/t)$. Z przebiegu funkcji f (rys. 1) widać, że wszystkie cztery liczby x_i , będąc wartościami tej funkcji, muszą leżeć albo w przedziale $(1, +\infty)$ albo w $(-\infty, -1)$. Ponieważ $f(t) < t$ dla $t > 1$ oraz $f(t) > t$ dla $t < -1$, więc jeśli $x_1 > 1$ lub $x_1 < -1$, to ciąg x_1, \dots, x_5 jest ściśle monotoniczny, wbrew temu, że $x_5 = x_1$. Wobec tego $x_1 = \pm 1$, a zatem jedynymi rozwiązaniami danego układu są $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ oraz $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

80. Niech W będzie wypukłym k -kątem i przypuśćmy, że istnieje parkietaż płaszczyzny utworzony z przystających kopii W . Oznaczmy przez S pole W , a przez d średnicę najmniejszego koła zawierającego W . Ustalmy liczbę $r > d$ i weźmy pod uwagę koło K o promieniu r oraz koła współśrodkowe z K o promieniach $r-d, r+d$. Niech n_1 oznacza liczbę kopii W całkowicie zawartych w K , a n_2 – liczbę kopii W , mających co najmniej jeden wierzchołek w K . Zachodzą nierówności: $n_1 S \geq \pi(r-d)^2$, $n_2 S \leq \pi(r+d)^2$. Suma kątów wszystkich tych pierwszych n_1 wielokątów wynosi $s_1 = (k-2)\pi n_1$. Liczba węzłów pokrycia leżących w K jest nie większa niż $kn_2/3$, ponieważ każdy z rozważanych n_2 wielokątów ma k wierzchołków, a w każdym węźle stykają się co najmniej 3 wielokąty. Suma kątów w każdym węźle wynosi 2π , a więc suma s_2 wszystkich kątów w rozważanych węzłach spełnia nierówność $s_2 \leq 2\pi \cdot kn_2/3$. Oczywiście $s_1 \leq s_2$. Stąd, uwzględniając poprzednie nierówności, dostajemy po krótkich rachunkach:

$$\frac{3(k-2)}{2k} \leq \left(\frac{r+d}{r-d}\right)^2.$$

Ponieważ liczba r może być dowolnie wielka, a d jest ustalone, możemy przejść po prawej stronie do granicy ($r \rightarrow \infty$), otrzymując w efekcie nierówność $3(k-2) \leq 2k$, czyli $k \leq 6$.

Tak więc odpowiedź na pytania b) i c) jest przecząca. Odpowiedź na pytanie a) jest twierdząca (rys. 2). Bez żądania wypukłości również odpowiedź na pytania b) i c) staje się twierdząca (rys.3).

81. Wobec nieparzystości b , dla dowolnej liczby naturalnej k jest spełniona równość oraz kongruencja

$$\frac{k^b + 1}{k + 1} = \sum_{j=0}^{b-1} (-k)^j \equiv \sum_{j=0}^{b-1} 1 = b \pmod{k+1}.$$

Przyjmując w szczególności $k = a^{b^n}$, dostajemy $c_{n+1}/c_n \equiv b \pmod{c_n}$, a więc istnieje liczba całkowita q_n taka, że

$$(*) \quad c_{n+1} = c_n(q_n c_n + b).$$

Ponieważ $c_0 = a + 1$, więc z równości (*) wynika przez indukcję podzielność wszystkich liczb c_n przez b . Stąd, znów na mocy (*), otrzymujemy tezę zadania.



Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 368. Dla danej liczby trzycyfrowej $n = 100a + 10b + c$ ($0 \leq a, b, c \leq 9$) utwórzmy średnią arytmetyczną p sześciu liczb otrzymanych przez wszystkie przestawienia cyfr a, b, c . Znajdź wszystkie takie liczby $n \geq 100$, dla których $p = n$.
Rozwiązanie na str. 13

M 369. Wykazać, że kwadrat o średnicy 1 (o boku $\frac{\sqrt{2}}{2}$) można podzielić na trzy zbiory o średnicach $\frac{\sqrt{130}}{16}$, a nie można podzielić na trzy zbiory o średnicach mniejszych.

Średnicą zbioru A nazywamy taką najmniejszą liczbę d , że odległość dowolnych punktów z A nie jest większa niż d . Oznaczamy ją przez d_A .

Rozwiązanie na str. 5

M 370. Wykazać, że nie istnieje jedenastowyrazowy rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach będących liczbami pierwszymi nie większymi od 20 000.

Rozwiązanie na str. 13

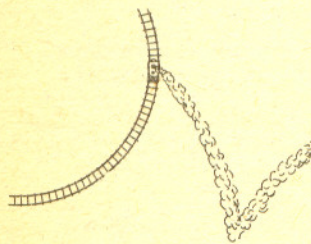
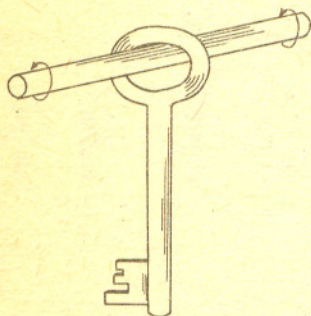
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 154. Na walcowym pręcie zawiesz klucz. Dobierz takie nachylenie pręta, by klucz nie ześlizgiwał się, a pchnięty ku dołowi — zatrzymywał się po niewielkim odcinku drogi. Zaczniń delikatnie obracać pręt. Co dzieje się z kluczem? Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 3

F 155. Dym z poruszającego się po zakręcie parowozu unoszony jest przez poziomy wiatr. Kształt śladu dymu przedstawiono na rysunku (widok z góry). Korzystając z rysunku określ prędkość wiatru przy założeniu, że jest ona stała. Prędkość parowozu wynosi $v = 36$ km/h, promień zakrętu $R = 200$ m. (Na podstawie „Kwanta” 9/1983.)

Rozwiązanie na str. 7



Patrz w niebo

Wielokrotnie pisaliśmy tu o obserwacjach nieba w innych niż optyczny zakresach fal, przede wszystkim o fascynujących wynikach radioastronomii i astronomii rentgenowskiej. Dziś chcemy wspomnieć o obserwacjach w podczerwieni. Podczerwień to długość fali znacznie bliższa optycznej, co nie znaczy jednak, że łatwiej ją obserwować.

Promieniowanie podczerwone w zakresie 1—30 μm jest w znacznym stopniu absorbowane przez atmosferę ziemską, fale o większej długości (do 1000 μm) są pochłaniane całkowicie. Astronomowie jednak uważają ten zakres za bardzo interesujący dla poszerzenia naszej wiedzy o Wszechświecie.

Przed rokiem 1983 obserwacje podczerwone można było wykonywać jedynie przy użyciu potężnych teleskopów optycznych (4 m średnicy lub więcej) pracujących na szczytach wysokich gór (3 km i więcej) — w takich warunkach można było spodziewać się najmniejszych strat w atmosferze.

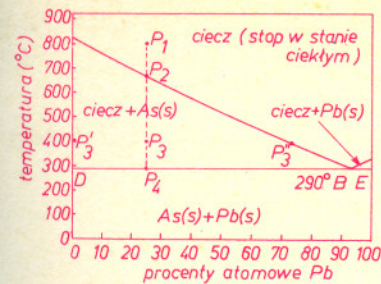
W zeszłym roku astronomia podczerwona weszła w nowy etap rozwoju. 25 stycznia wyrzuciono na orbitę specjalnego satelity przeznaczonego do obserwacji w tym zakresie fal. Nazywał się IRAS (Infrared Astronomical Satellite). Miał pracować około 7 miesięcy. Pracował do 21 listopada.

Warto uświadomić sobie fakt, że promieniowanie podczerwone emitowane jest przez ciała już o temperaturze kilkudziesięciu kelwinów. Skoro tak, to należało uniknąć takiej sytuacji, w której najsilniejszym źródłem rejestrowanym przez detektory satelity byłby ... tenże satelita. W tym celu cały teleskop o masie ok. 1 tony musiał zostać ochłodzony do temperatury bliskiej zera bezwzględnego. Przez 10 miesięcy pracy ponad 70 kg nadciekłego helu chłodziło satelitę do temperatury 2,4 K. Trzeba przyznać, że już tylko ten rezultat jest wcale niebagatelnym osiągnięciem technicznym.

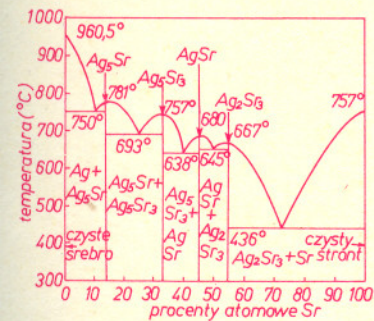
W tym czasie IRAS „obejrzał” dwukrotnie 95% nieba. Wyniki tych obserwacji dopiero zaczynają pojawiać się w czasopiśmie astronomicznych. Wiele rewelacji wymaga potwierdzenia przy użyciu kolejnych kosmicznych obserwatorów podczerwieni. Możliwe, że w ciągu najbliższych 10 lat wyrzuczone będą dwa kolejne teleskopy podczerwone.

dr Tomasz CHLEBOWSKI

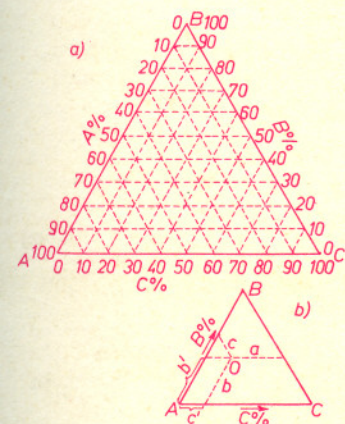
Rozpuszczenie soli kuchennej (NaCl) w wodzie powoduje spadek temperatury krzepnięcia (poniżej temperatury krzepnięcia czystej wody — 0°C) tym większy, im większe jest stężenie soli. Zjawisko to wykorzystywane jest zimą przy „uprzątaniu” śniegu — posypanie solą szybko zmienia świeżo spadły śnieg w błoto — metoda ta może być jednak stosowana tylko wówczas, gdy temperatura powietrza jest wyższa niż $-21,5^{\circ}\text{C}$. W tej temperaturze współlistnieją w równowadze trzy fazy: lód, sól i roztwór o ściśle określonej proporcji soli do wody 31,3:100 (wagowo). Jest to tak zwany punkt eutektyczny. Przy ustalonym ciśnieniu (w tym przypadku 1 atm) w temperaturze poniżej punktu eutektycznego może istnieć tylko mieszanina kryształów lodu i soli. Podobne własności do opisanych wyżej mają również inne mieszaniny — na przykład stopy metali, o ile nie tworzą one kryształów mieszanych. Na rys. 1 przedstawiony jest wykres fazowy układu dwuskładnikowego arsen-olów dla ustalonego ciśnienia 1 atm. Temperatury krzepnięcia czystego arsenu (As) i ołowiu (Pb) wynoszą odpowiednio 817°C i 327°C . Co się jednak dzieje, gdy obniżymy temperaturę ciekłego stopu o składzie, powiedzmy, 25% ołowiu (skład atomowy) i temperaturze początkowej 800°C — punkt P_1 ? Po osiągnięciu temperatury odpowiadającej punktowi P_2 rozpocznie się proces krzepnięcia, przy czym zaczną powstawać kryształy arsenu; w każdej niższej temperaturze będziemy mieli mieszaninę stałego arsenu i stopu arsenu z ołowiem o składzie wyznaczonym przez krzywą AB — dla przykładu w temperaturze 400°C (punkt P_3) będzie to mieszanina arsenu i stopu o składzie odpowiadającym punktowi P_3 ; poniżej punktu P_4 otrzymamy mieszaninę kryształów arsenu i ołowiu. Punkt B jest punktem eutektycznym — punktem współlistnienia trzech faz: ciekłego stopu, arsenu i ołowiu. Oziębianie ciekłego stopu o zawartości ołowiu większej niż w punkcie B (93% atomowych ołowiu) przebiega podobnie jak w przypadku opisanym poprzednio, z tym że najpierw po przekroczeniu krzywej BC wydzielają się kryształy ołowiu. Dużo bardziej skomplikowane jest zachowanie układów tworzących ze sobą kilka związków w różnych proporcjach wagowych. Występuje wówczas kilka punktów eutektycznych. Przykład takiego układu przedstawia rys. 2 — wykres fazowy układu srebro-stront. Opisane wyżej przykłady zaczerpnęliśmy z książki „Chemia” Linusa i Petera Paulingów. Jak wygląda wykres fazowy dla układu trójskładnikowego: KF, LiF, NaF, możecie zobaczyć na naszym anaglifie (rys. 4). Skorzystaliśmy tutaj z łatwego do udowodnienia faktu, że suma długości odcinków a, b, c w trójkącie równobocznym (rys. 3) równa jest długości boku. Każdy punkt trójkąta równobocznego wyznacza więc jednoznacznie skład procentowy mieszaniny trójskładnikowej; przyporządkowaliśmy mu jeden punkt powierzchni określający temperaturę, w której rozpoczyna się krzepnięcie mieszaniny o danym składzie (wykorzystaliśmy anaglif z książki „Kształcenie wyobraźni przestrzennej młodzieży szkół zawodowych” Daniela Żuk).



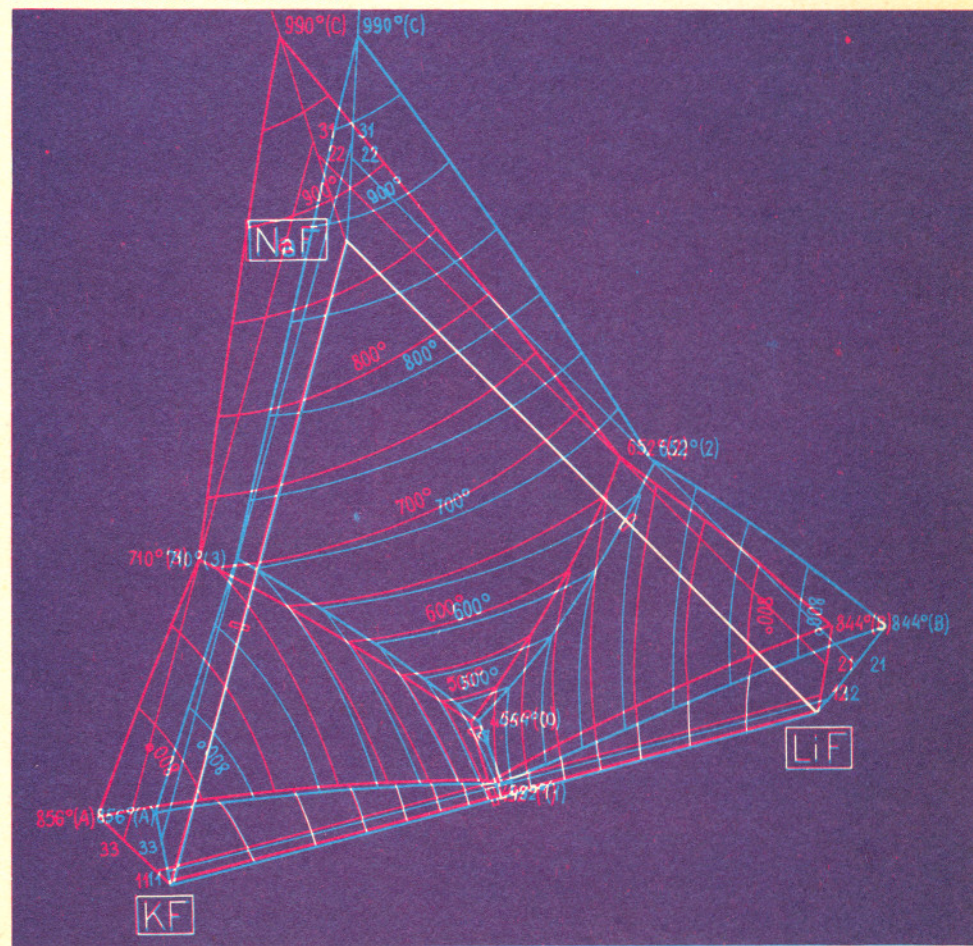
Rys. 1. Wykres fazowy układu dwuskładnikowego arsen-olów.



Rys. 2. Wykres fazowy układu dwuskładnikowego srebro-stront, przedstawiający tworzenie się czterech związków międzymetalicznych.



Rys. 3. Współrzędne do przedstawiania układu potrójnego: a) równoboczny trójkąt składów, b) sposób wyznaczania składu stopów.



Rys. 4. Wykres równowagi układu trójskładnikowego.