



## SPIS TREŚCI

NUMERU 6 (126)

Czarne dziury na niebie <i>dr Bożena Czerny</i>	str. 1
Mizar MSE	str. 4
O tym, jak Herakles walczył z hydrą <i>dr Roman Murawski</i>	str. 5
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Odkrycie „ciężkiego światła” <i>dr Barbara Badelek</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 13
Klub 44	str. 14
Jak zmierzyć promień Ziemi	str. 15
Jak szeroka może być wstęga Möbiusa	str. 16

W następnym numerze  
Chaos na odcinku

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astrofizyczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 dr Jerzy Brojan  
 dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr Alicja Derkowska  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc. dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
 dr Jan Rempala  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Grzegorz Sitariski  
 prof. dr Józef I. Smak  
 doc. dr Kazimierz Stępień  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Aniela Wońska

doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 dr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
 mgr Andrzej Majhofer  
 dr inż. arch. Jacek Mazur  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 6233/84 T-70

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
 — Licosa Commisionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

# Czarne dziury na niebie

Dr Bożena CZERNY

Od bardzo wielu lat astronomowie chcą zaobserwować na niebie czarne dziury. Ktoś mógłby poczuć się zdziwiony. Czarny obiekt to taki, który nie świeci, a więc którego nie widać. Co tu zatem obserwować? Jeśli ktoś trochę o czarnych dziurach słyszał, może się poczuć zdziwiony jeszcze bardziej. Czarne dziury to przecież obiekty wymyślone przez fachowców od ogólnej teorii względności, obdarzone tak silnymi polami grawitacyjnymi, że nawet cząstki światła — fotony — nie są w stanie z czarnej dziury uciec. Są to więc obiekty absolutnie czarne. A jednak je „widać”. Zacznijmy jednak od początku.

Wszystkie ciała oddziałują na siebie grawitacyjnie. Pierwszy opis tego oddziaływania zaproponował Newton podając prawo powszechnego ciążenia. Wszelkonośniejszą teorią oddziaływania grawitacyjnego jest opublikowana przez Einsteina w 1916 roku ogólna teoria względności. Według niej grawitacyjnie oddziałują nie tylko ciała obdarzone masą, ale wszelkie rodzaje energii; także fotony, czyli światło. Przewidywania ogólnej teorii względności różnią się od newtonowskiego opisu wtedy, gdy prędkości ciał są porównywalne z prędkością światła lub gdy mamy do czynienia z niezwykle silnymi polami grawitacyjnymi.

Astronoma interesuje przede wszystkim pole grawitacyjne, którego źródłem są gwiazdy. W przypadku gwiazdy takiej jak Słońce różnice między przewidywaniami ogólnej teorii względności a teorii Newtona są znikome. Znamy jednak gwiazdy o takiej samej masie, ale znacznie mniejszym promieniu. Pole grawitacyjne w pobliżu ich powierzchni jest znacznie silniejsze. Wprowadzimy teraz parametr, który będzie nam pomagał ten efekt określić. Posłużymy się w tym celu teorią Newtona, podobnie jak to zrobił Laplace prawie 200 lat temu.

Obliczymy prędkość ucieczki masy  $m$  z powierzchni gwiazdy o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Prędkość cząstki  $v$  powinna być taka, by energia całkowita będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej była równa zero:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0, \text{ skąd wynika } v^2 = \frac{2GM}{R}$$

( $G$  oznacza stałą grawitacji). Aby otrzymać parametr bezwymiarowy, podzielimy wynik przez kwadrat prędkości światła  $c$ . Powstanie wzór

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 R}$$

Wielkość  $2GM/c^2$  nosi nazwę promienia grawitacyjnego. Jeśli promień gwiazdy jest znacznie większy od promienia grawitacyjnego, to efekty ogólnej teorii względności nie są ważne. Jeśli natomiast gwiazda o danej masie jest tak mała, że jej promień przewyższa niewiele promień grawitacyjny, to nawet światło ma kłopoty z oderwaniem się od jej powierzchni i fotony tracą znaczną część swej energii na pokonanie przyciągania grawitacyjnego. Jak przewiduje ogólna teoria względności, zwykłe gwiazdy o promieniu mniejszym od grawitacyjnego nie istnieją. Siły wzajemnego przyciągania grawitacyjnego są tak ogromne, że żadne ciśnienie nie jest w stanie powstrzymać gwałtownego skurczenia się gwiazdy niemal do punktu. Powstaje czarna dziura, która w granicach swego promienia grawitacyjnego zasysa bezpowrotnie wszystko co napotka, łącznie z fotonami.

Astronomowie sądzą, że czarne dziury o masach kilkakrotnie przewyższających masę Słońca rzeczywiście istnieją. Do tego przekonania prowadzi znajomość budowy i ewolucji zwykłych gwiazd.

Gwiazdy młode lub stosunkowo młode, takie jak Słońce, mają w swym wnętrzu dużo wodoru. Wodór ten spala się powoli jak w gigantycznym, kontrolowanym reaktorze termojądrowym i powstaje hel. Energia, która przy tym się wydziela, powoduje, że Słońce świeci już od 4,5 miliarda lat, a będzie świecić drugie tyle. Ogromne temperatury wnętrza (rzędu piętnastu milionów stopni) powodują, że ciśnienie w Słońcu równoważy przyciąganie grawitacyjne. Istnieją też gwiazdy o masie nawet sto razy przekraczającej masę Słońca. Świecą jaśniej, ponieważ wyższe temperatury są potrzebne do zrównoważenia znacznie większych sił grawitacyjnych związanych z większą masą. Gwiazdy wyczerpują jednak swoje paliwo. Co się stanie, jeśli dalsze reakcje termojądrowe nie będą już możliwe? Gwiazda typu Słońca zamieni się wtedy w białego karła.

Stosunek promienia grawitacyjnego do promienia gwiazdy

Masa = 1 masa Słońca,

$$\text{promień grawitacyjny} = \frac{2GM}{c^2} = 2,95 \cdot 10^3 \text{ cm}$$

Słońce	biały karzeł	gwiazda neutronowa	czarna dziura
0,00005	0,005	0,3	1

Skurczy się, jej promień osiągnie około 1/100 obecnej wartości, a zatem rozmiarami zbliży się do Ziemi. Przed dalszym kurczeniem pod wpływem grawitacji ochroni ją ciśnienie zdegenerowanych elektronów. Efekt polega na tym, że w wyniku zjawisk kwantowych elektrony wywierają pewne ciśnienie nawet wtedy, gdy temperatura jest równa zeru. Jeśli jednak masa gwiazdy przekracza 1,4 masy Słońca, ciśnienie to nie wystarczy, gwiazda musi się skurczyć. Kolejna szansa odzyskania równowagi nastąpi, gdy promień gwiazdy osiągnie zaledwie kilkanaście kilometrów. Powstaje gwiazda neutronowa. Źródło ciśnienia stanowią w niej zdegenerowane neutrony, także na skutek efektu kwantowego. Tak będzie dla gwiazd o masie mniejszej od dwóch—trzech mas Słońca. Jeszcze masywniejsze gwiazdy mają już tak silne pole grawitacyjne, że nawet ciśnienie zdegenerowanych neutronów nie jest wystarczające. Gwiazda musi kurczyć się dalej i zniknąć pod powierzchnią horyzontu, czyli sferą o promieniu równym promieniowi grawitacyjnemu. Powstanie czarna dziura.

Przewidzieć, która gwiazda zostanie czarną dziurą, a która nie, jest nieco trudniej niż by to wynikało z przedstawionego rozumowania, ponieważ w trakcie swego życia gwiazdy tracą sporą część swojej masy poprzez wiatr (taki, jaki wieje ze Słońca) lub w czasie ewentualnych wybuchów. Tym najmasywniejszym trudno uniknąć tego losu. Poza tym gwiazdy mogą nie tylko tracić, ale i zyskiwać masę, a wtedy już nie ma żadnych szans ocalenia. Tak może się dziać w ciasnych układach podwójnych gwiazd.

Dla poszukiwaczy czarnych dziur układy podwójne gwiazd przedstawiają się bardzo interesująco. Znamy z obserwacji wiele gwiazd podwójnych. Dwie gwiazdy takiego układu obiegają się wzajemnie. Ruch ten równoważy ich przyciąganie grawitacyjne; podobnie wygląda ruch satelity wokół Ziemi. Na ogół ruch obydwu gwiazd odbywa się po kołach o wspólnym środku, lecz różnym promieniu (w zależności od ich masy), z tą samą prędkością kątową. Podobnie jak Księżyc w stronę Ziemi, gwiazdy te zwracają się do siebie wciąż tą samą stroną.

Wyobraźmy sobie cząstkę gazu, która znajduje się na prostej przechodzącej przez środki obu gwiazd i wiruje wraz z nią. Można znaleźć takie jej położenie, w którym siły działające ze strony obu gwiazd na tę cząstkę równoważą się. Punkt ten określa strefy „wpływów” obu gwiazd. Jeśli tak się zdarzy, że jedna z gwiazd jest za duża i jej zewnętrzne części wystają poza jej własną strefę wpływów, to gaz zaczyna przepływać z niej do sąsiada. Tym sąsiadem może być na przykład czarna dziura. Mamy wtedy szansę ją zaobserwować. Samotna czarna dziura w pustej przestrzeni rzeczywiście byłaby niezauważalna. Natomiast w układzie podwójnym istnienie czarnej dziury musi manifestować się poprzez dwa efekty. Pierwszy to zwykle oddziaływanie grawitacyjne na drugą gwiazdę powodujące jej ruch po okręgu. Drugi to procesy zachodzące w przepływającej materii. Zajmiemy się najpierw drugim, ponieważ on właśnie pomoże szybko wyszukiwać na niebie te gwiazdy podwójne, które mogą być interesujące.

Popatrzmy na rysunek, który pomoże nam zrozumieć, jak wygląda przepływ gazu z jednej gwiazdy na drugą. Wpływ następuje w okolicach punktu równowagi. Ponieważ jednak punkt równowagi wiruje wraz z obiema gwiazdami wokół osi zaznaczonej krzyżykiem, to wypływająca materia ma pewien moment pędu. Formująca się struga nie może opaść bezpośrednio na drugą gwiazdę, ale mija ją, a następnie okrąża. Cząsteczki gazu w trakcie ruchu wokół gwiazdy są stopniowo wyhamowywane, tracą swój moment pędu. Gaz tworzy więc wokół gwiazdy płaski dysk. Materia dopływająca wciąż do dysku porusza się po ciasno nawiniętej spirali i osiada na gwiazdzie lub wpada do czarnej dziury. Strumień masy, jaki przepływa, zawiera się na ogół w granicach  $10^{16} - 10^{18}$  g/s, albo określając to inaczej,  $10^{-10} - 10^{-8}$  masy Słońca/rok.

Wytracaniu momentu pędu przez materię towarzyszy wydzielanie dużej ilości energii. Łatwo ją ocenić korzystając z teorii newtonowskiej. Energia całkowita cząstki o masie  $m$  na orbicie kołowej o promieniu  $r$  wokół gwiazdy o masie  $M$  jest równa

$$E(r) = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

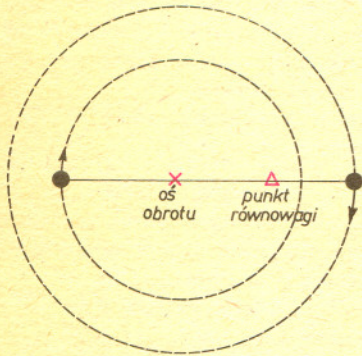
Daleko od gwiazdy energia ta jest praktycznie równa zero, przy zbliżaniu się do gwiazdy maleje. Nadmiar energii jest przez cząstki „wyświecany”. Pomiedzy orbitą o promieniu  $r + \Delta r$  oraz  $r$  cząstka musi stracić energię

$$E = E(r + \Delta r) - E(r) = \frac{dE(r)}{dr} \Delta r = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} \Delta r$$

Jeśli mamy do czynienia nie z jedną cząstką o masie  $m$ , ale ze strumieniem gazu o natężeniu  $\dot{M}$  gramów na sekundę, to energia wyświecana w ciągu sekundy pomiędzy orbitami  $r + \Delta r$  oraz  $r$  będzie równa

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}}{r^2} \Delta r$$

Energia ta jest wyświecana przez dwie powierzchnie cylindra:  $2 \times 2\pi r \times \Delta r$ . Zatem strumień



### Rozwiązanie zadania M 367.

Łatwo sprawdzić (rozpatrując przypadki

$$[a] \leq a < [a] + \frac{1}{2}, [a] + \frac{1}{2} \leq a < [a] + 1),$$

że  $[a + \frac{1}{2}] = [2a] - [a]$ . Mamy teraz

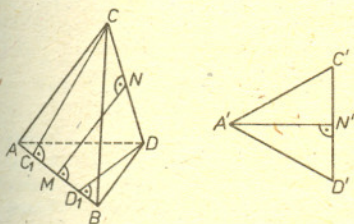
$$\begin{aligned} S &= \left[ \frac{n+1}{2} \right] + \left[ \frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[ \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots = \\ &= \left[ \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] + \dots = \\ &= \left( [n] - \left[ \frac{n}{2} \right] \right) + \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n}{4} \right] \right) + \\ &+ \dots + \left( \left[ \frac{n}{2^k} \right] - \left[ \frac{n}{2^{k+1}} \right] \right) + \dots \end{aligned}$$

Wszystkie wyrazy poczynając od  $K$ -tego, gdzie  $K = [\log_2 n] + 1$  są już równe 0. Redukując mamy wreszcie  $S = [n] = n$ .



**Rozwiązanie zadania M 365.**

Rzut prostokątny czworoscianu  $ABCD$  wzdłuż krawędzi  $AB$  jest trójkątem  $A'D'C'$ , w którym bok  $A'D'$  jest równy wysokości  $DD_1$ , ściany  $ABD$ ,  $A'C'$  jest równy wysokości  $CC_1$  ściany  $ABC$ , a wysokość  $AN$  jest rzutem odcinka  $MN$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in CD$ ,  $AB \perp MN \perp CD$ . Trójkąty  $ABC$  i  $ABD$  mają z założenia równo pola i wspólny bok  $AB$ , więc  $CC_1 = A'C' = DD_1 = A'D'$ . Trójkąt  $A'C'D'$  jest zatem równoramienny i jego wysokość  $A'N'$  jest również środkową boku  $C'D'$ . Wynika stąd, że  $N$  jest środkiem boku  $CD$ . Analogicznie wskazujemy, że  $M$  jest środkiem boku  $AB$  i wobec tego  $MN$  jest osią symetrii czworoscianu. Podobnie osiami symetrii są proste  $PQ$  i  $RS$ , gdzie  $P$  jest środkiem  $AC$ ,  $Q$  — środkiem  $BD$ ,  $R$  — środkiem  $AD$  i  $S$  — środkiem  $BC$ . Z symetrii czworoscianu względem  $MN$  mamy  $ABD \equiv ABC$  i  $BCD \equiv ACD$ , z symetrii względem  $PQ$  wynika, że  $BCD \equiv ABD$  i wobec tego wszystkie ściany są przystające.



- $A'$  - rzut  $A, B, M, C, D_1$
- $C'$  - rzut  $C$
- $D'$  - rzut  $D$
- $N'$  - rzut  $N$

promieniowania wychodzący z jednostki powierzchni jest równy

$$F = \frac{GMM}{8\pi r^3}$$

Określa on temperaturę gazu w dysku oraz typowy zakres widma, w jakim dysk świeci. Najwyższe temperatury są w pobliżu powierzchni gwiazdy lub horyzontu czarnej dziury. Możemy je ocenić korzystając ze wzoru

$$F = \sigma T^4,$$

gdzie  $T$  oznacza temperaturę,  $\sigma$  stałą Stefana-Boltzmann. Zatem temperatury dysku w pobliżu powierzchni gwiazdy mogą osiągać

$$T = \left( \frac{GMM}{8\pi R^3 \sigma} \right)^{1/4}$$

Przyjmijmy  $M$  równe dwóm masom Słońca,  $\dot{M}$  równe  $10^{17}$  g/s oraz  $R$  równe 10 km. Otrzymamy temperaturę około 10 milionów stopni! Gaz w takiej temperaturze świeci przede wszystkim w dziedzinie rentgenowskiej.

Podsumujmy zatem dotychczasowe wnioski. Czarną dziurę mamy szansę odkryć, gdy stanowi składnik ciasnego układu podwójnego. Układ taki będzie widoczny na niebie jako źródło promieniowania rentgenowskiego. Natomiast nie każde takie źródło musi zawierać czarną dziurę, ponieważ proces przebiega podobnie, gdy materia opada na gwiazdę neutronową. Nie na tyle dokładnie potrafimy teoretycznie odwzorzyć przebieg procesu, aby umieć z samego widma tylko odróżnić układ z gwiazdą neutronową od układu z czarną dziurą, a odległości są tak duże, że każdy taki układ jest dla nas tylko pojedynczym słabym punkcikiem widocznym przez teleskop. Widmo promieniowania od całego układu stanowi dla nas jedyne źródło informacji. Ratuje nas to, że potrafimy czasem określić masę gwiazdy, na którą splywa materia.

Z obserwacji udaje się zwykle wyznaczyć dwa parametry. Z regularnych okresowych zmian jasności układu wynika okres wzajemnego obiegu gwiazd. Drugi parametr to amplituda prędkości radialnej gwiazdy dostarczającej masę, który udaje się wyznaczyć, jeśli w widmie gwiazdy podwójnej w dziedzinie optycznej są widoczne linie widmowe należące do tej gwiazdy. Ich regularne ruchy raz w stronę fal dłuższych, raz krótszych, interpretowane jako efekt Dopplera, pozwalają wyznaczyć prędkość zbliżania się lub oddalania gwiazdy. Nie jest to jednak dokładnie prędkość ruchu gwiazdy na orbicie kołowej, ponieważ musimy pamiętać o tym, że zwykle oglądamy układ nie w płaszczyźnie jego ruchu, ale pod jakimś kątem.

Oprócz dwóch parametrów wyznaczonych z obserwacji musimy jeszcze, aby móc wyznaczyć poszukiwaną wartość masy, odgadnąć trzy, a mianowicie: odległość układu, kąt, pod którym go obserwujemy i jeszcze jakiś trzeci. Tym trzecim mogłaby być masa gwiazdy dostarczającej gazu. Okazuje się jednak, że znacznie dokładniej możemy odgadnąć jej promień.

Procedurę opartą na takiej zasadzie przeprowadzono dla różnych układów świecących rentgenowsko. Okazuje się, że w dwóch przypadkach, dla źródła Cyg X—1 oraz ostatnio odkrytego LMC X—3 wartość masy „ciemnego” ciała przekracza znacznie wartość dopuszczalną dla gwiazdy neutronowej. Powinny to być zatem czarne dziury!

Cyg X—1 jest pierwszym źródłem rentgenowskim odkrytym w gwiazdozbiórze Łabędzia (po łacinie Cygnus) na północnej półkuli nieba. Jest to źródło bardzo niespokojne, zmieniające jasność w odstępie sekund, jak i dni. Odkryte pod koniec lat sześćdziesiątych, precyzyjnie obserwowane było po raz pierwszy w 1971 roku przez satelitę rentgenowskiego Uhuru. Cyg X—1 leży w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, około 8 tysięcy lat świetlnych od Słońca. Masę gwiazdy otrzymującej masę oceniono na większą od 6 mas Słońca.

LMC X—3 jest trzecim źródłem rentgenowskim odkrytym w Dużym Obłoku Magellana (po ang. Large Magellanic Cloud), galaktyce widocznej gołym okiem na południowej półkuli nieba i odległej o 140 tysięcy lat świetlnych. LMC X—3 jest spokojniejsze od Cyg X—1, wysłała też mniej promieniowania w bardziej energetycznej części widma rentgenowskiego. Masę oceniono na większą od 9 mas Słońca.

Więcej takich „pewnych” kandydatów na czarną dziurę na razie nie odkryto. Czy te dwa przypadki, które omówiliśmy, są stuprocentowe? Jak widzieliśmy, wyciągnięcie wniosków wymaga wielu kroków pośrednich. Dokładność procedury wyznaczania masy wydaje się, co prawda, wystarczająca, by pokazać, że wynik jest większy niż dopuszczalna masa gwiazdy neutronowej. Cięż wątpliwości nadal jednak pozostaje i na pytanie, czy widać na niebie czarne dziury, lepiej jest odpowiedzieć: chyba tak.

„Gwiazdowe” czarne dziury, to znaczy takie, które stanowią końcowy etap życia gwiazdy, nie są jedynymi, jakich się poszukuje. Być może istnieją też gigantyczne czarne dziury, o masach milion czy nawet miliard razy większych, które ukrywają się w jądrach niektórych galaktyk. Ale to całkiem inna historia.



**Rozwiązanie zadania M 366.**

Liczba  $(7 + \sqrt{50})^{100} + (7 - \sqrt{50})^{100} = 7^{100} + \binom{100}{1} 7^{99} \sqrt{50} + \binom{100}{2} 7^{98} (\sqrt{50})^2 + \dots + \binom{100}{1} 7(\sqrt{50})^{99} + (\sqrt{50})^{100} + 7^{100} - \binom{100}{1} 7^{99} \sqrt{50} + \binom{100}{2} 7^{98} (\sqrt{50})^2 + \dots - \binom{100}{1} 7(\sqrt{50})^{99} + (\sqrt{50})^{100} = 2 \cdot 7^{100} + 2 \binom{100}{2} 7^{98} 50 + 2 \binom{100}{4} 7^{96} 50^2 + \dots + 2 \cdot 50^{50}$  jest całkowita. Oznaczmy ją przez  $n$ . Mamy  $(7 + \sqrt{50})^{100} = n - (7 - \sqrt{50})^{100}$  i ponieważ  $|7 - \sqrt{50}| < \frac{1}{13}$ , więc  $(7 - \sqrt{50})^{100} < 10^{-101}$ . Wobec tego pierwsze 100 cyfr po przecinku w liczbie  $(7 + \sqrt{50})^{100}$  to dziewiątki.

# Mizar MSE (10)

== DZISIEJSZY, OSTATNI ODCINEK KURSU JEST W CALOSCI NAPISANY  
 == W MIZARZE - JEST TAKIM MALYM TEKSTEM MATEMATYCZNYM, W KTORYM  
 == POSTAWIMY SZEREG PROBLEMOW DO ROZWIAZANIA.

== W TAKIM TEKSCIE OPRO CZ WSTĘPU ORAZ TWIERDZEN I ICH FORMALNYCH  
 == DOWODOW.MOZEMY PISAC KOMENTARZE ZAWIERAJACE DODATKOWE  
 == WYJASNIENIA TEGO CO ROBINY. KOMENTARZE TAKIE SA IGNOROWANE PRZEZ  
 == MASZYNE W CZASIE ANALIZY TEKSTU. KOMENTARZ ROZPOCZYNA SIE OD  
 == DWU ZNAKOW ROWNOSC I A KONCZY SIE WRAZ Z KONCEM LINIJKI. NASTEPNA  
 == LINIA KOMENTARZA MUSI ZACZYNAĆ SIE ZNOWU OD DWU ZNAKOW ROWNOSCI.

== ROZPATRYWANA PRZEZ NAS TEORIA BĘDZIE FRAGMENTEM TEORII RELACJI  
 == DWUARGUMENTOWYCH - TO JUZ COS POWAZNIEZSzego NIZ PORZADEK  
 == LINIOWY DLA ULAMKOW.

## ENVIRON

LET R,R',R'' DENOTE RELACJA; == ROZPATRYWANE RELACJE MAJA TE SAMA  
 == DZIEDZINE I PRZECIWDZIEDZINE.  
 LET X,X',X'',Y,Y',Y'',Z,Z',Z'' DENOTE ELEMENT; == TYMI SYMBOLAMI BĘDZIEMY OZNACZALI  
 == ELEMENTY ZBIORU, NA KTORYM  
 == OKRESLONE SA NASZE RELACJE.

== ZDEFINIujemy TERAZ SPOTYKANE DOSC CZESTO W MATEMATYCE WLASNOSCI  
 == RELACJI. WYRAZENIE "MAMYCX,R,YJ" NALEZY ROZUMIEC,  
 == ZE MIEDZY X I Y ZACHODZI RELACJA R ALBO TEZ, TRAKTUJAC RELACJE  
 == JAKO ZBIOR PAR: <X,Y> NALEZA DO R.

ZWROTNOSC: FOR R ST ZWROTNA CRJ HOLDS FOR X HOLDS MAMYCX,R,XJ;  
 IZWROTNOSC: FOR R ST NOT ZWROTNA CRJ  
 EX X ST NOT MAMYCX,R,XJ;  
 PRZECIWZWROTNOSC: FOR R ST PRZECIWZWROTNA CRJ HOLDS  
 FOR X HOLDS NOT MAMYCX,R,XJ;  
 1PRZECIWZWROTNOSC: FOR R ST NOT PRZECIWZWROTNA CRJ  
 EX X ST MAMYCX,R,XJ;  
 SYMETRIA: FOR R ST SYMETRYCZNA CRJ HOLDS  
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ HOLDS MAMYCY,R,XJ;  
 1SYMETRIA: FOR R ST NOT SYMETRYCZNA CRJ  
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & NOT MAMYCY,R,XJ;  
 ASYMETRIA: FOR R ST ASYMETRYCZNA CRJ HOLDS  
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ HOLDS NOT MAMYCY,R,XJ;  
 1ASYMETRIA: FOR R ST NOT ASYMETRYCZNA CRJ  
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ;

ANTYSYMETRIA: FOR R ST ANTYSYMETRYCZNA CRJ HOLDS  
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ HOLDS X=Y;  
 1ANTYSYMETRIA: FOR R ST NOT ANTYSYMETRYCZNA CRJ  
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ & X<Y;  
 PRZECHODNIOSC: FOR R ST PRZECHODNIA CRJ HOLDS  
 FOR X,Y,Z ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,ZJ  
 HOLDS MAMYCX,R,ZJ;  
 1PRZECHODNIOSC: FOR R ST NOT PRZECHODNIA CRJ  
 EX X,Y,Z ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,ZJ &  
 NOT MAMYCX,R,ZJ;

SPOJNOSC: FOR R ST SPOJNA CRJ HOLDS  
 FOR X,Y HOLDS MAMYCX,R,YJ OR MAMYCY,R,XJ;  
 1SPOJNOSC: FOR R ST NOT SPOJNA CRJ  
 EX X,Y ST NOT MAMYCX,R,YJ & NOT MAMYCY,R,XJ;  
 ZAWIERANIE: FOR R,R' ST ZAWIERACR,R'J HOLDS  
 FOR X,Y ST MAMYCX,R',YJ HOLDS MAMYCX,R,YJ;  
 1ZAWIERANIE: FOR R,R' ST NOT ZAWIERACR,R'J  
 EX X,Y ST MAMYCX,R',YJ & NOT MAMYCX,R,YJ;  
 ROWNOSC: FOR R,R' HOLDS R=R' IFF ZAWIERACR,R'J & ZAWIERACR,R'J;

== WYRAZENIE ZAWIERACR,R'J NALEZY ROZUMIEC: R' JEST ZAWARTE W R.  
 == DLA WYGODNIEZSzego SFORMULOWANIA PEWNYCH ZADAN USTALIMY DWIE  
 == DOWOLNE RELACJE.

GIVEN P,P' BEING RELACJA;

== WPROWADZIMY PEWNE ODWZOROWANIE W DZIEDZINIE NASZYCH RELACJI.

AX1: FOR X EX Y ST ICX,YJ;  
 AX2: FOR X EX Y ST ICY,XJ;

== POWYZSZE AKSJOMATY GWARANTUJA, ZE I JEST OKRESLONA W CALYM  
 == ZBIORZE ELEMENTOW I PRZEKSZTALCA GO NA CALY TEN ZBIOR.

AX3: FOR X,Y,X',Y' ST ICX,X'J & ICY,Y'J HOLDS X=Y IFF X'=Y';

== TEN AKSJOMAT DAJE GWARANCJE, ZE NASZE ODWZOROWANIE JEST WZAJEMNIE  
 == JEDNOZANCA FUNKCJA; NASTEPNY ZAS MOWI, ZE PRZEPROWADZA ONA  
 == RELACJE P NA RELACJE P' I NA ODWROT.

AX4: FOR X,Y,X',Y' ST ICX,X'J & ICY,Y'J  
 HOLDS MAMYCX,P,YJ IFF MAMYCX',P',Y'J;

== OCZYWISCIE NIE ZDEFINIOWALISMY WSZYTKICH UZYWANYCH W MATEMATYCE  
 == WLASNOSCI RELACJI. MOZE WARTO TYLKO WSPOMNIEC, ZE RELACJE NAZYWA  
 == SIE PORZADKIEM, GDY JEST ZWROTNA, PRZECHODNIA I ANTYSYMETRYCZNA,  
 == A NAZYWA SIE ROWNOWAZNOSCIA, GDY JEST ZWROTNA, PRZECHODNIA  
 == I SYMETRYCZNA. W DALSZYM CIAGU ZAJMIEMY SIE USTALENIEM ZALEZNOSCI  
 == POMIEDZY WPROWADZONYMI WLASCIWOSCiami RELACJI.

## BEGIN

== ZACZNIEMY OD POKAZANIA, ZE RELACJA SPOJNA JEST ZWROTNA.

LEMAT1: FOR R ST SPOJNA CRJ HOLDS ZWROTNA CRJ  
 PROOF LET R BE RELACJA SUCH THAT A: SPOJNA CRJ;  
 NOW LET X BE ELEMENT;  
 THUS MAMYCX,R,XJ BY A,SPOJNOSC  
 END;  
 HENCE THESIS BY IZWROTNOSC  
 END;

== DALSZE LEMATY ZOSTAWIAMY JAKO ZADANIA DO UDOWODNIENIA PRZEZ  
 == CZYTELNIKOW.

LEMAT11: FOR R,R' ST ZAWIERACR,R'J & ZWROTNA CRJ  
 HOLDS ZWROTNA CRJ;  
 LEMAT12: FOR R,R' ST ZAWIERACR,R'J & SPOJNA CRJ &  
 ANTYSYMETRYCZNA CRJ  
 HOLDS ZAWIERACR,R'J;  
 LEMAT13: FOR R ST PRZECIWZWROTNA CRJ & PRZECHODNIA CRJ  
 HOLDS ASYMETRYCZNA CRJ;  
 LEMAT14: FOR R ST ASYMETRYCZNA CRJ HOLDS PRZECIWZWROTNA CRJ;  
 LEMAT15: FOR R,R',R'' ST ZAWIERACR',R'J & ZAWIERACR'',R'J &  
 SPOJNA CRJ & PRZECHODNIA CRJ &  
 ANTYSYMETRYCZNA CRJ  
 HOLDS PRZECHODNIA CRJ & PRZECHODNIA CRJ';

== Z LEMATU 12 WYNIKA W SZEGOLNOSCI, ZE PORZADKU LINIOWEGO (TJ.  
 == SPOJNEGO) NIE MOZNA JUZ BARDZIEJ "UPORZADKOWAC".  
 == OSTATNIE ZADANIE Z TEJ SERII JEST NIECO BARDZIEJ SKOMPLIKOWANE  
 == NIZ POPRZEDNIE; W JEGO DOWODZIE WYGODNIE BĘDZIE SKORZYSTAC Z  
 == POPRZEDNIO UDOWODNIONYCH WYTWOW.

== ZAJMIEMY SIE DALEJ WLASNOSCiami ZACHOWYWANYMI PRZEZ IZOMORFIZMY.  
 == W NASZYM PRZYPADKU IZOMORFIZMEM JEST ZDEFINIOWANA WE WSTĘPIE  
 == FUNKCJA I. NA POCZATEK ROZWIAZEMY MALY PRZYKLAD.

LEMAT2: ZWROTNA CRJ IMPLIES ZWROTNA CRJ;  
 PROOF ASSUME Z1: ZWROTNA CRJ;  
 NOW LET X BE ELEMENT;  
 CONSIDER Y SUCH THAT Z2: ICY,XJ BY AX2;  
 MAMYCY,P,YJ BY ZWROTNOSC,Z1;  
 HENCE MAMYCX,P',XJ BY AX4,Z2  
 END;  
 HENCE THESIS BY IZWROTNOSC  
 END;

== CZYTELNICZY ZECHCA UDOWODNIC NASTEPUJACE LEMATY.

LEMAT21: SPOJNA CRJ IFF SPOJNA CRJ';  
 LEMAT22: NOT ASYMETRYCZNA CRJ IMPLIES NOT ASYMETRYCZNA CRJ';  
 LEMAT23: (EX X ST FOR Y HOLDS MAMYCX,P,YJ) IMPLIES  
 (EX X ST FOR Y HOLDS MAMYCY,P',YJ);  
 LEMAT24: PRZECHODNIA CRJ IMPLIES PRZECHODNIA CRJ';  
 LEMAT25: (FOR X EX Y ST MAMYCX,P,YJ) IMPLIES  
 (FOR X EX Y ST MAMYCY,P',YJ);

== PODOBNIE JAK TYCH LEMATOW DOWODZI SIE, ZE P JEST PORZADKIEM,  
 == WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY P' JEST PORZADKIEM I ANALOGICZNIE,  
 == ZE P JEST ROWNOWAZNOSCIA, WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY P' JEST  
 == ROWNOWAZNOSCIA. MOZE KTOS Z CZYTELNIKOW ZECHCE TO ZROBIC?

== CZEKAMY NA ROZWIAZANIA.

== WSZYTKICH, KTORY ZAJNTERESOWALI SIE MIZAREM I CHCIELIBY  
 == WIEDZIEC O NIM WIECEJ LUB TEZ MAJA JAKIEKOLWIEK PYTANIA Z NIM  
 == ZWIĄZANE PROSIMY O KONTAKT Z REDAKCJA LUB TEZ BEZPOSRĘDNI Z

== GRUPA M I Z A R  
 == INSTYTUT MATEMATYKI  
 == FILIA UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO W BIALYMSTOKU  
 == UL. AKADEMICKA 2  
 == 15-267 BIALYSTOK

# O tym, jak Herakles walczył z hydrą, czyli o niezupełności arytmetyki raz jeszcze

Dr Roman MURAWSKI

W 1931 r. 26-letni naówczas matematyk i logik wiedeński Kurt Gödel opublikował liczącą niewiele ponad 20 stron pracę, która miała okazać się jedną z najważniejszych prac w zakresie podstaw matematyki. Udowodnił w niej, że system arytmetyki Peano, który, jak wierzono, jest adekwatną aksjomatyzacją teorii liczb, jest niezupełny. W ten sposób okazało się, że programu Hilberta aksjomatyzacji matematyki nie da się zrealizować.

Gödel za pomocą bardzo przemyślanej metody, zwanej dziś metodą arytmetyzacji lub gödelizacji, wykorzystując pewne znane już od starożytności paradoksy (dokładniej paradoks kłamcy) zbudował zdanie, o którym udowodnił, że jest prawdziwe (tzn. stwierdza prawdziwe fakty o liczbach naturalnych), ale jest niezależne od arytmetyki Peano. Oznacza to, że zdania tego nie można ani udowodnić, ani obalić na gruncie aksjomatów Peano. Nie pomoże też nic dołączenie tego zdania jako nowego aksjomatu, bo wtedy także znajdzie się nowe zdanie nierozstrzygalne (na gruncie tej silniejszej już teorii). Nigdy więc nie uda się zbudować systemu sformalizowanego, który dowodziłby wszystkich zdań prawdziwych i tylko zdań prawdziwych o liczbach naturalnych. A zatem program Hilberta jest nierealizowalny.

Wynik Gödla pozostawiał jednak jeszcze pewien cień nadziei i nie przekreślał definitywnie zamiarów Hilberta. Otóż zdanie znalezione przez Gödla mówiło co prawda w ostatecznym rozrachunku o liczbach naturalnych, było jednak bardzo sztuczne z punktu widzenia „normalnego” (tzn. nie zajmującego się logiką i podstawami matematyki) matematyka. Można być prawie pewnym, że specjalista od teorii liczb nigdy w swych badaniach na takie zdanie nie natrafił i nigdy nie będzie pytał, czy własności liczb naturalnych, o których mówi to zdanie, istotnie mają miejsce. Nadal więc można było mieć nadzieję, że wszystkie sensowne i matematycznie interesujące zdania o liczbach naturalnych dadzą się rozstrzygnąć w systemie arytmetyki Peano. Niepokojąca jest tu oczywiście niejasność określenia „sensowny i matematycznie interesujący”, ale w praktyce sprawa okazuje się znacznie prostsza i matematycy są na ogół zgodni co do tego, czy dany problem lub dany wynik są sensowne i matematycznie interesujące.

Stan takiej niepewności co do ostatecznych losów programu Hilberta trwał dość długo. Dopiero w 1977 r. udało się pokazać, że nawet ograniczenie się do zdań sensownych i matematycznie interesujących nie może uratować programu formalistów. Otóż w tym właśnie roku J. Paris z Uniwersytetu w Manchesterze podał przykład zdania, które miało treść kombinatoryczną, było prawdziwe, ale niezależne od arytmetyki Peano. Co więcej, Paris wynalazł nową metodę uzyskiwania takich przykładów, które po opublikowaniu jego pracy (a nawet jeszcze wcześniej, gdyż wieść o jego wyniku rozniosła się lotem błyskawicy wśród logików, a odbitki jego pracy zaczęły krążyć z rąk do rąk) zaczęły się mnożyć.

Tak więc w 46 lat po wyniku Gödla pokazano, że są zdania sensowne i matematycznie interesujące, które są prawdziwe, ale niezależne od aksjomatów Peano. Ostatnie więc nadzieje uratowania programu Hilberta upadły.

Ciągle jednak jeszcze było pewne „ale”. Zdanie Parisa nie miało mianowicie treści czysto teorioliczbowej. Mówiło ono co prawda o liczbach naturalnych, ale ostatecznie traktowało o skończonych zbiorach tych liczb, a więc miało treść kombinatoryczną. Wkrótce jednak usunięto i to „ale”. Jesienią 1981 r. L. Kirby i J. Paris podali bowiem przykład zdania, które miało już treść czysto teorioliczbową, które jest prawdziwe, ale którego nie można udowodnić na gruncie aksjomatów Peano.

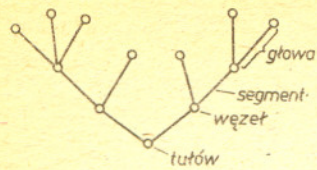
Opiszemy teraz zdanie Kirby’ego-Parisa. Niech dane będą dwie liczby naturalne  $m, n$ , przy czym  $n > 1$ . Zdefiniujemy reprezentację liczby  $m$  przy zasadzie  $n$  następująco. Najpierw napiszemy liczbę  $m$  jako sumę potęg liczby  $n$ . Np. jeżeli  $m = 266, n = 2$ , to mamy  $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$ . To samo robimy teraz z każdym z wykładników tak długo, jak tylko jest to możliwe. W naszym przykładzie otrzymamy ostatecznie:  $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$ .

Arytmetyką Peano nazywamy system sformalizowany oparty na aksjomatach podanych przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano w 1889 r. Używając współczesnej symboliki możemy je zapisać następująco: ( $S(x)$  należy traktować jako liczbę naturalną następną po  $x$ , tzn.  $x+1$ ):

$$\begin{aligned} S(x) &= S(y) \rightarrow x = y, \\ 0 &\neq S(x), \\ x+0 &= x, \\ x+S(y) &= S(x+y), \\ x \cdot 0 &= 0, \\ x \cdot S(y) &= x \cdot y + x, \\ (\varphi(0) \& \bigwedge_x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) &\rightarrow \bigwedge_x \varphi(x). \end{aligned}$$

Ostatni aksjomat, zwany aksjomatem indukcji, jest schematem nieskończenie wielu aksjomatów — dla każdej formuły  $\varphi(x)$  języka arytmetyki Peano otrzymujemy jeden aksjomat.

W arytmetyce Peano możemy mówić o zbiorach skończonych liczb naturalnych dzięki metodzie kodowania. Mając bowiem dany zbiór  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$  gdzie  $a_i$  jest liczbą naturalną oraz  $a_1 < \dots < a_n$ , możemy go jednoznacznie zakodować za pomocą liczby naturalnej  $(p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n})$ , gdzie  $p_i$  jest  $i$ -tą liczbą pierwszą. Liczbę tę nazywamy kodem zbioru  $X$ . Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że opisane kodowanie jest jednoznaczne.



Rys. 1. Matematyczna hydra lernejska

Zdefiniujemy teraz liczbę  $G_n(m)$ . Jeżeli  $m = 0$ , to niech  $G_n(m) = 0$ . Jeżeli  $m \neq 0$ , to niech  $G_n(m)$  będzie liczbą otrzymaną przez zastąpienie  $n$  w reprezentacji liczby  $m$  przy zasadzie  $n$  przez liczbę  $n + 1$  i odjęcie 1. Np.  $G_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$ . Następnie definiujemy pewien ciąg liczb naturalnych  $m_k$  (zwany ciągiem Goodsteina od nazwiska logika angielskiego, który już w 1944 r. badał takie ciągi). Kładziemy mianowicie:  $m_0 = m$ ,  $m_1 = G_2(m_0)$ ,  $m_2 = G_3(m_1)$ ,  $m_3 = G_4(m_2)$ , ... W naszym przykładzie mamy:

$$m_0 = m = 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1,$$

$$m_1 = G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38},$$

$$m_2 = G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616},$$

$$m_3 = G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000},$$

$$m_4 = G_5(m_3) = 6^{6^{6+1}} + 5 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^5 + 5 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 5 \approx 10^{200000}, \dots$$

Widzimy więc, że wyrazy ciągu  $m_k$  rosną niebywale szybko. Okazuje się jednak, że prawdziwy jest następujący, nieprawdopodobny na pierwszy rzut oka, fakt—otóż dla dowolnej liczby  $m$ , czyli niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy budować ciąg Goodsteina, istnieje taki wskaźnik  $k$ , że  $m_k = 0$ . Udowodnił to w 1944 r. właśnie Goodstein. W jego dowodzie wykorzystane są pewne własności liczb porządkowych. Czy da się ten fakt udowodnić również w arytmetyce Peano? Odpowiedź brzmi nie! Kirby i Paris udowodnili właśnie, że zdanie:  $(\bigwedge_m \bigvee_k (m_k = 0))$

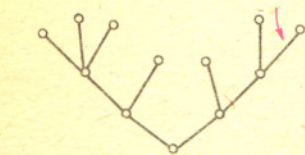
jest nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki Peano. Dowód tego faktu jest oczywiście bardzo trudny i wykorzystuje pewne własności tzw. modeli niestandardowych arytmetyki Peano, jak i pewne własności liczb porządkowych. Dodajmy tylko, że miejsca  $k$ , na których zerują się ciągi Goodsteina, są niewyobrażalnie dalekie. Można np. pokazać, że ciąg zaczynający się od liczby 4 zeruje się dopiero na miejscu o numerze  $3 \cdot 2^{402653211} - 3$ , co równa się około  $10^{121000000}$  (porównajmy to z liczbą atomów we Wszechświecie, którą szacuje się na  $10^{80}$ ).

Za pomocą metod użytych przez Kirby'ego i Parisa do dowodu nierozstrzygalności wyżej opisanego zdania można też wykazać nierozstrzygalność w arytmetyce Peano innego zdania, które związane jest z mitologią (to wyjaśnia tytuł artykułu). Otóż, jak pamiętamy, Herakles po zabiciu, w napadzie szału, żony i dzieci, odzyskał rozum i udał się do wyroczni delfickiej po radę, jak ma odpokutować swą zbrodnię. Pytia kazała mu iść do Myken i zaciągnąć się na służbę u króla Eurysteusa. Tam miał wykonać dla niego 12 prac. Eurysteus polecił mu m.in. zabić hydrę lernejską. Jak wyglądał ten potwór? Matematyka i tu przychodzi nam z pomocą. Możemy ją sobie wyobrazić jako bestię przypominającą kształtem coś, co w matematyce nazywa się drzewem skończonym (rys. 1).

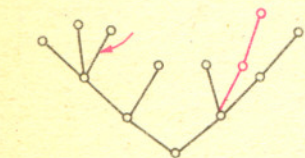
Walka między Heraklesem a hydrą przebiega teraz następująco. W każdym kroku tej walki Herakles odcina hydrze jedną głowę. Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady: jeśli w kroku  $n$ -tym (czyli  $n$ -tym cięciem miecza) Herakles odciął jakąś głowę, to z węzła odległego o jeden segment od głowy uciętej wyrasta  $n$  kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła osiągniętego przez cofnięcie się o jeden segment (rys. 2).

Herakles zwycięży, jeśli po pewnej skończonej liczbie kroków, czyli cięć mieczem, z hydry zostanie tylko tułów. Oczywiście może on odcinać głowy w dowolnej kolejności. Strategią nazwiemy funkcję określającą, którą głowę ma odciąć na danym etapie walki z hydrą, a strategią zwycięską nazwiemy taką strategią, która pozwala Heraklesowi wygrać z każdą hydrą. Otóż okazuje się, że każda strategia jest dla Heraklesa strategią zwycięską, czyli ucinając głowy dowolnej danej hydrze w jakikolwiek sposób Herakles zawsze zwycięży!

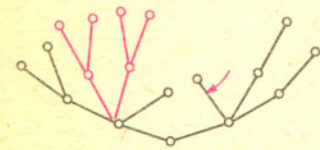
Popatrzmy na tę walkę jeszcze trochę inaczej. Hydrę możemy zakodować za pomocą liczby naturalnej (matematyk okazuje się więc mieć jeszcze większą przewagę nad hydrą niż Herakles, może ją bowiem zredukować do zwykłej pojedynczej niegroźnej liczby!). To pozwoli nam mówić o walce Heraklesa z hydrą w języku arytmetyki Peano. Nie możemy, niestety, mówić w tym języku o dowolnych strategiach, ale możemy mówić o strategiach efektywnych (dających się zakodować). Rozważmy zatem zdanie „Každą strategią efektywną jest zwycięską dla Heraklesa”. Jest ono oczywiście słabsze od zdania głoszącego,



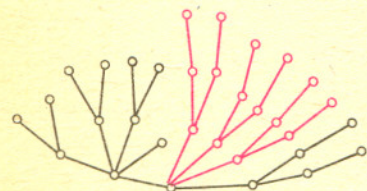
po 1-szym cięciu mieczem



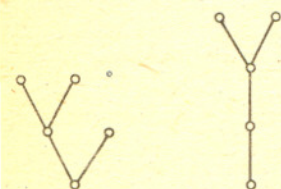
po 2-gim cięciu mieczem



po 3-cim cięciu mieczem



Rys. 2. Pierwsze ciosy mieczem; strzałka wskazuje, którą głowę uciną Herakles; linia przerywaną zaznaczone są świeżo wyrosłe fragmenty.



Rys. 3. Niech Czytelnik sam przekona się o śmiertelności pierwszych hydr. Zwracamy jednocześnie uwagę, że istnienie strategii zwycięskiej dla dowolnej hydry można dość łatwo udowodnić — dowód w numerze (Red.).

że każda strategia jest zwycięska, o którym to zdaniu wiemy już, że jest prawdziwe. Otóż okazuje się, że nawet tak osłabionego stwierdzenia nie potrafimy rozstrzygnąć na podstawie aksjomatów Peano. Arytmetyka Peano jest więc za słaba, by dowodzić pewnych, skądinąd prawdziwych, faktów dotyczących walki Heraklesa z hydrą. Gdyby więc nasz umysł funkcjonował na takiej samej zasadzie, na jakiej dowodzi się twierdzeń w systemie Peano, to nigdy byśmy się nie dowiedzieli, czy Heraklesowi udało się pokonać hydrę czy nie.

Opuśćmy jednak uroczy świat mitologii i wróćmy jeszcze na chwilę do matematyki. Znalezienie przykładów zdań sensownych i interesujących z matematycznego punktu widzenia, a niezależnych od arytmetyki Peano ma oprócz pokazania całkowitej nieralizowalności programu Hilberta inne jeszcze, tym razem pozytywne znaczenie. Wzmacnia ono mianowicie nadzieje na to, że za pomocą tych nowych metod, które pozwalają dowodzić niezależności od arytmetyki Peano pewnych konkretnych zdań o treści teoriolizbowej, uda się również powiedzieć coś np. o wielkim twierdzeniu Fermata czy innych wielkich, a otwartych jak dotąd problemach teorii liczb. Może są one niezależne od arytmetyki Peano i do ich rozstrzygnięcia używać trzeba silniejszych środków niż te, które są dostępne w elementarnej teorii liczb? A czy są one rozstrzygalne na gruncie teorii mnogości? Czy też są od niej niezależne? Pozytywna odpowiedź na ostatnie pytanie, tzn. pokazanie ich nierozstrzygalności w teorii mnogości byłoby wynikiem o wielkiej doniosłości filozoficznej. Dowodziłoby bowiem ich absolutnej nierozstrzygalności, tzn. nierozstrzygalności za pomocą jakichkolwiek metod i środków dostępnych w matematyce.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 365.** Wykazać, że jeżeli ściany czworościanu mają równe pola, to są trójkątami przystającymi.

Rozwiązanie na str. 3

**M 366.** Znaleźć 100 cyfr liczby  $(7 + \sqrt{50})^{100}$  następujących po przecinku.

Rozwiązanie na str. 3

**M 367.** Obliczyć sumę

$$\left[ \frac{n+1}{2} \right] + \left[ \frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[ \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

([a] oznacza część całkowitą a, czyli największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą a).

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 153.** W zamkniętym naczyniu umieszczonym w próżni znajduje się mieszanina cząsteczek tlenu i tej samej liczby cząsteczek helu. Jaki jest skład gazu wypływającego z naczynia w chwilę po zrobieniu w ścianie niewielkiego otworu?

Rozwiązanie na str. 16



# delta mata delta



Camelopardalus.

Auriga.

Perfeus.

TRIANGULUM

MAJUS

MINUS

MUSCA.

Aries.

## Firmament

Stojąc w pogodną noc pod wygwieżdżonym niebem ma się nieodparte wrażenie, że znajdujemy się w środku ogromnej kulistej czaszy, do której przymocowane są wszystkie gwiazdy. Skądinąd wiemy, że żadnej czaszy, „sfery niebieskiej”, nie ma, ale czy można się o tym naocznie przekonać? Otóż można, aczkolwiek nie dosłownie naocznie. Mianowicie Ziemia w ciągu sześciu miesięcy wykonuje pół obiegu wokół Słońca, a więc przemieszcza się w przestrzeni na drugi koniec średnicy swojej orbity, czyli o ok. 300 mln km. Gdyby gwiazdy „siedziały” na owej domniemanej czaszy, nic praktycznie by się nie zmieniło, jeżeli jednak znajdują się one w rozmaitych od nas odległościach, to bliższe z nich powinny pozornie przesunąć się na tle dalszych — zupełnie jak bliskie drzewa na tle dalszych, gdy idziemy przez las. Te przesunięcia (nazywane „paralaksami rocznymi”) właśnie się obserwuje i mierzy, co jest nawet sposobem na wyznaczanie odległości gwiazd. Jednak paralaksy roczne nawet najbliższych gwiazd są bardzo małe i dające się zmierzyć dopiero z użyciem bardzo precyzyjnych przyrządów. Okazało się bowiem, że odległości nawet tych najbliższych gwiazd setki tysięcy razy przekraczają rozmiary orbity ziemskiej. Dlatego pierwszy pomiar paralaksy gwiazdy udało się wykonać dopiero w 1838 r. (Bessel).

## Cyfry ujemne

Ktoś mógłby powiedzieć, że nie ma żadnych cyfr ujemnych; cyframi są tylko 0, 1, 2, ..., 9. Jest ich dziesięć, a na dodatek wszystkie (oprócz zera) są dodatnie.

$$739 = 1\bar{3}4\bar{1} = 1\bar{2}79 = \dots$$

ile różnych zapisów może mieć liczba?

Aby się o tym przekonać, zauważmy, że nie musimy teraz odróżniać dodawania od odejmowania.

Rzeczywiście:

$$121 - 34 = 121 + \bar{34}, \quad 2345 - \bar{342} = 2345 + 342 \text{ itd.}$$

Zysk z tego taki, że możemy teraz dodawania i odejmowania wykonywać w jednym „słupku”, co zostało pokazane obok.



$$\begin{array}{r} 871 \\ \times 589 \\ \hline 1131 \\ 1131 \\ 4524 \\ \hline 1131 \\ \hline = 1513021 \\ = 513019 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7488 : 96 = 1\bar{3}5\bar{1}\bar{2} : 10\bar{4} = 1\bar{2}\bar{2} = 78 \\ \begin{array}{r} 104 \\ 0391 \\ \hline = 211 \\ 208 \\ \hline 0192 \\ = 212 \\ 208 \\ \hline 000 \end{array} \end{array}$$

dzieląc w ten sposób 513019 przez 589 przekonacie się, że i tutaj nie wszystko jest proste

A może umiecie wskazać jeszcze jakieś zalety używania ujemnych cyfr? Napiszcie.



To prawda, ale przecież można by określić sobie i cyfry ujemne — odpowiadające  $-1, -2, \dots, -9$  i wynaleźć dla nich stosowne oznaczenia, np.  $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}$ . I zapisywać liczby również z ich użyciem, np.  $\bar{127}$  to ta sama liczba co  $-127$ ,  $1\bar{2}3\bar{1} = 1000 - 200 + 30 - 1 = 829$ ,  $\bar{3}2\bar{1}5 = -2805$  itd. Jak widać, teraz liczby możemy zapisywać nie tylko jednym sposobem. Ale czy ten luksus daje jakieś istotne korzyści? Oczywiście!

$$\begin{aligned} 2381 - 1592 + 2017 - 278 &= \\ = 2381 + \bar{1}5\bar{9}\bar{2} + 2017 + \bar{2}7\bar{8} &= \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2381 \\ \bar{1}5\bar{9}\bar{2} \\ 2017 \\ \bar{2}7\bar{8} \\ \hline = 3472 = 2528 \end{array}$$

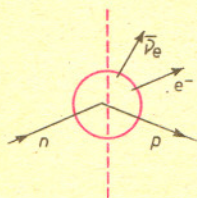
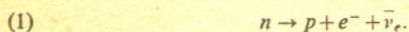
Możliwość zapisywania liczby wieloma sposobami pozwala też „zaoszczędzić” na znajomości tabliczki mnożenia — wystarczy znać ją tylko „do pięciu”, a mnożyć i dzielić wszystkie liczby. Po prostu zapiszemy mnożone czy dzielone liczby tak, by w ich zapisie występowały tylko cyfry  $\bar{4}, \bar{3}, \dots, 4, 5$  i dopiero wtedy wykonamy działanie.

# Odkrycie „ciężkiego światła”

Dr Barbara BADELEK

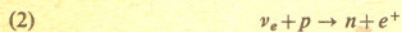
Czy wiecie, ile waży światło? Światło to strumień fotonów — obiektów, które nigdy nie spoczywają, a (w próżni) poruszają się najszybciej we Wszechświecie. Przenoszą one wiadomości o wzajemnym istnieniu (oddziaływaniu) ciał mających ładunek elektryczny i znajdujących się nawet nieskończenie daleko. Ładunki elektryczne nieruchome są źródłem oddziaływań elektrostatycznych, a poruszające się (czyli prądy) — magnetycznych. Długi łańcuch odkryć doświadczalnych i przemyśleń teoretycznych doprowadził w XIX wieku do zrozumienia, że magnetyzm i elektryczność to dwa różne sposoby objawiania się tego samego oddziaływania. Nazwano je elektromagnetycznym. Na przełomie XIX i XX wieku wydawało się, że siły elektromagnetyczne i grawitacyjne są jedynymi fundamentalnymi siłami przyrody. Zbadanie struktury jądra atomu zmieniło ten pogląd narzucając potrzebę wprowadzenia nowego oddziaływania wiążącego nukleony. Zostało ono nazwane oddziaływaniem silnym. Zauważona wkrótce potem nietrwałość jąder atomowych (tzw. przemiana  $\beta$ ) kazała obraz ten uzupełnić wprowadzeniem tzw. oddziaływania słabego. Odpowiednie siły, poza tym, że są bardzo słabe w porównaniu z np. elektromagnetycznymi, są również niezwykle krótkozasięgowe (zasięg jest rzędu  $10^{-16}$  cm, czyli 0,001 średnicy protonu). Te dwie własności powodują, że nie mogą one wiązać cząstek w układy podobne do atomów czy jąder atomowych.

Oddziaływania słabe są trudne do badania, bo najczęściej maskują je wielokrotnie silniejsze oddziaływania elektromagnetyczne i silne (te ostatnie są około  $10^{17}$  razy silniejsze!). Do niedawna najłatwiejszym sposobem obserwacji oddziaływań słabych było badanie rozpadów jąder atomowych i cząstek elementarnych. Typowym przykładem jest rozpad  $\beta$  jądra, podczas którego neutron przekształca się na proton, elektron i antyneutrino elektronowe:



Rys. 1. Za pomocą takiego diagramu można zobrazować rozpad nukleonu. Po lewej stronie kreski przerywanej przedstawiona jest sytuacja przed rozpadem, a po prawej — po rozpadzie.

Zgodnie z tak zwaną zasadą krzyżowania mówiącą, że identycznie powinny być opisywane procesy, w których dowolną cząstkę przenosimy na drugą stronę równania reakcji i jednocześnie zamieniamy ją na antycząstkę, z procesem (1) związana jest reakcja



będąca również procesem słabym.

Doświadczalne badanie reakcji (2) stało się niedawno możliwe dzięki wytworzeniu wiązek neutrin. Neutrino są jedynymi

cząstkami elementarnymi, które oddziałują tylko siłami słabymi. Jak dotąd obserwuje się trzy rodzaje neutrin:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ . Są one spokrewnione odpowiednio z elektronem ( $e$ ), mionem ( $\mu$ ) i tauonem ( $\tau$ ) — cząstkami oddziałującymi tylko słabo i elektromagnetycznie (siły grawitacyjne między cząstkami można zawsze pomijać). Wymienione cząstki, noszące wspólną nazwę leptonów (od greckiego słowa leptos — drobny, lekki), są z doskonałą dokładnością punktowe — np. promień elektronu jest mniejszy niż  $10^{-16}$  cm. Cząstki oddziałujące silnie (hadrony) różnią się od leptonów tym, że posiadają strukturę — są zbudowane z niewielkiej liczby tzw. kwarków. Słabe rozpady tych cząstek — to słabe rozpady kwarków, np. reakcję (1) można zapisać



albo



( $q$  oznacza kwark,  $\bar{q}$  — antykwark).

Już na początku lat trzydziestych Enrico Fermi rozważał możliwość unifikacji, czyli jednolitego opisu sił słabych i elektromagnetycznych. Zgodnie ze sformułowaną wcześniej teorią oddziaływanie elektromagnetyczne między dwiema cząstkami naładowanymi polega na wysłaniu przez jedną z cząstek fotonu, który następnie pochłaniany jest przez drugą cząstkę. W ten sposób foton może przenosić między cząstkami energię i pęd.

Z punktu widzenia fizyki klasycznej swobodna cząstka nie może wyemitować lub pochłonąć innej cząstki, ponieważ w takim procesie naruszona byłaby albo zasada zachowania energii, albo zasada zachowania pędu. W mechanice kwantowej sytuacja jest odmienna. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga w ciągu krótkiego czasu  $\Delta t$  energia może nie być zachowana, a minimalny rozrzut dopuszczalnych jej wartości spełnia równość  $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$ , gdzie  $\hbar$  jest stałą Plancka.

Na przykład swobodny elektron może wysłać foton (tzw. foton wirtualny) naruszając zasadę zachowania energii pod warunkiem, że w czasie krótszym niż  $\hbar/\Delta E$  zostanie on z powrotem pochłonięty przez ten sam elektron albo inną cząstkę naładowaną. Niezachowanie energii  $\Delta E$  może być dowolnie małe, bo foton ma zerową masę. Wirtualne fotony o bardzo małej energii mogą więc żyć dowolnie długo, a co za tym idzie mogą być zaabsorbowane nawet bardzo daleko od miejsca emisji; zasięg oddziaływań elektromagnetycznych jest nieskończony.

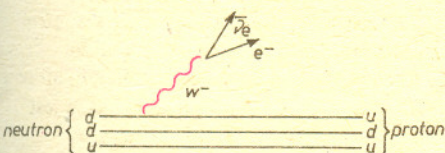
W podobny sposób próbowano opisywać oddziaływanie słabe. Załóżmy, że polega ono na wymianie między cząstkami naładowanymi „słabym ładunkiem” odpowiednika fotonu. Jeśli taki „słaby foton” jest cząstką o niezerowej masie  $M$ , to minimalna wartość niezachowania energii  $\Delta E \approx Mc^2$ . Z zasady nieoznaczoności wynika, że taka wirtualna cząstka musi zostać pochłonięta po czasie nie dłuższym niż  $\frac{\hbar}{Mc^2}$ , a więc zasięg

oddziaływania może być bardzo mały, jeśli tylko masa „słabego fotonu” jest odpowiednio duża. Ponadto powinny istnieć „słabe fotony” naładowane elektrycznie, aby mogły (np. w reakcji (2)) przekazać ładunek elektryczny od protonu do elektronu. Tak więc, już w latach trzydziestych wiadomo było, że jednolity opis oddziaływań słabych i elektromagnetycznych wymaga istnienia obok fotonu także cząstki naładowanej, około 100 razy cięższej od protonu. Eksperymentatorzy nie dysponowali jednak w owych czasach odpowiednio dużymi akceleratorami, aby taką cząstkę wyprodukować. Trudności mieli również teoretycy, bo teoria z „ciężkim fotonem” dawała czasami wyniki niesensowne (np. nieskończoną wartość energii).

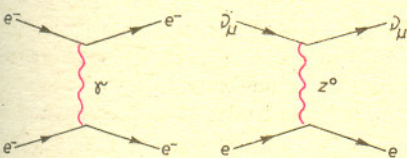
Problem odżył w pracach teoretycznych lat sześćdziesiątych i na początku siedemdziesiątych. W 1979 roku Nagrodę Nobla z fizyki otrzymali teoretycy: Sheldon Glashow, Abdus Salam i Steven Weinberg za sformułowanie (w 1971 roku) teorii oddziaływań elektrosłabych. W teorii tej kwarki są równie elementarne jak leptony, chociaż te pierwsze obserwuje się tylko wewnątrz hadronów, a wszystkie procesy słabe opisuje się zakładając istnienie trzech cząstek ciężkich (mających różną od zera masę spoczynkową) odpowiedzialnych za przenoszenie oddziaływań słabych. Obiekty te (oznaczono je  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ ) miały być bozonami o spinie 1, przy czym bozon neutralny elektrycznie byłby również „słabo”. Opis teoretyczny oddziaływań przenoszonych za pomocą fotonu i cząstek  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  jest w tym modelu identyczny. Model przewidywał także istnienie nowego kwarku i jeszcze jednej ciężkiej cząstki, tzw. cząstki Higgsa oraz istnienie takich procesów słabych, w których nie zmienia się natura oddziałujących cząstek. Cząstki Higgsa dotychczas nie znaleziono, a jeśli chodzi o pozostałe przewidywania, to rok 1973 przyniósł pierwszą obserwację procesu

$$(4) \quad \nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$$

zachodzącego poprzez wymianę bozonu  $Z^0$ , a rok 1974 — odkrycie nowego kwarku nazwanego powabnym (Burt Richter i San Ting — Nagroda Nobla w 1976 r.). Ciężkie światło, czyli bozony  $W^+$ ,  $W^-$  i  $Z^0$  wymykały się jednak doświadczeniu.



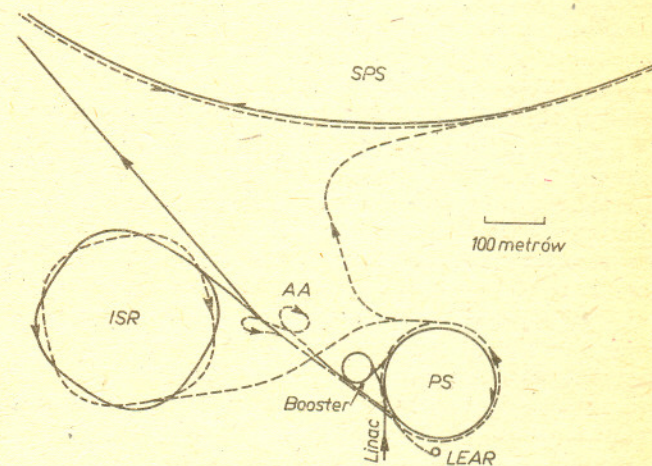
Rys. 2. Ten sam proces co na rys. 1 z uwzględnieniem bozonu pośredniego i struktury kwarkowej protonu i neutronu.



Rys. 3. Słabe oddziaływanie przez wymianę bozonu  $Z^0$  i podobny proces elektromagnetyczny.

Przeszkody były natury technicznej. Przewidywano bowiem, że poszukiwane bozony są mniej więcej sto razy cięższe od protonu, a tak wielkiej masy nie daje się wyprodukować przy użyciu żadnego z istniejących akceleratorów konwencjonalnych (tzn. takich, w których wiązka rozprędzonych cząstek uderza w nieruchomą tarczę). Zauważmy, że jeśli  $W$  istnieje, to prawdopodobieństwo zajścia reakcji (3b) powinno osiągnąć maksimum przy energii w układzie środka masy zderzających się  $q$  i  $\bar{q}$  odpowiadającej masie cząstki  $W$ . Wobec niemożliwości skonstruowania tarczy z mezonów  $\pi$  najobfitszym źródłem oddziaływań kwark-antykwar $\bar{q}$  są zderzenia proton-antyproton. Jednak pęd kwarku to zaledwie 1/6 pędu protonu — energia w układzie środka masy  $p\bar{p}$  powinna więc być równa około  $6 m_W \approx 600$  GeV. Oznaczałoby to konieczność przyspieszenia wiązki antyprotonów do energii 200 000 GeV, podczas gdy najwyższa energia osiągnięta dziś przez wiązki antyprotonów wynosi około 400 GeV. Rozwiązaniem tej trudności jest zastosowanie zderzających się czołowo wiązek protonów i antyprotonów. Energia w układzie środka masy jest wtedy sumą

laboratoryjnych energii  $p$  i  $\bar{p}$ . Powstaje jednak nowy problem: jak uzyskać dużą świetlną wiązkę, czyli odpowiednio wysoką liczbę zderzeń na jednostkę czasu i jednostkę przekroju wiązki (pamiętajmy, że proton ma promień  $10^{-13}$  cm, takie same są rozmiary antyprotonu — jak tu wcelować jednym w drugi?). Trudność tę udało się pokonać dzięki wynalazionej w 1968 r. w CERNie metodzie stochastycznego „chłodzenia” wiązki, tzn. redukcji przypadkowego ruchu cząstek w wiązce tak, że koncentrują się one w wymaganym miejscu przestrzeni i wokół wymaganej wartości pędu.



Rys. 4. Schemat systemu połączeń tuneli, którymi biegają wiązki cząstek w CERNie. Wiazki protonów zaznaczone są linią ciągłą, a antyprotonów — przerywaną. Linac i Booster są urządzeniami nadającymi początkową energię protonom przed wpuśczeniem ich do PS. ISR jest akceleratorem zderzających się wiązek  $pp$  lub  $p\bar{p}$  o energii 31 GeV każda, LEAR — pierścieniem akumulującym antyprotony o energii do 3,5 GeV. A oto objaśnienie skrótów

- PS — Proton Synchrotron,
- AA — Antiproton Accumulator,
- SPS — Super Proton Synchrotron,
- ISR — Intersecting Storage Rings,
- LEAR — Low Energy Antiproton Ring.

W 1978 r. zatwierdzono w CERNie program badań nad oddziaływaniami  $p\bar{p}$  wielkiej energii, którego głównym celem było znalezienie bozonów przenoszących słabe oddziaływanie. W ramach tego programu opracowano następującą metodę otrzymywania wiązek przeciwbieżnych  $p\bar{p}$ . Protony o energii 28 GeV z Synchrotronu Protonowego (PS) w zderzeniach ze spoczywającą tarczą produkują antyprotony, które następnie przesyłane są do specjalnie w tym celu zbudowanego Akumulatora Antyprotonów (AA). Podlegają tam „chłodzeniu” i kumulowaniu tak długo, aż wiązka osiągnie żadaną gęstość. Wtedy przechodzą powtórnie do PS i po przyspieszeniu do energii 26 GeV przesyłane są do SPS, w którym krążą w kierunku przeciwnym do protonów i są, podobnie jak protony, przyspieszane do energii 270 GeV. Wiazki  $p$  i  $\bar{p}$  przecinają się następnie w dwóch miejscach pozwalając badać zderzenia  $p\bar{p}$  przy całkowitej energii w układzie środka masy równej 540 GeV (odpowiada to wiązce antyprotonów o energii 155 000 GeV padającej na nieruchomą tarczę protonową!).

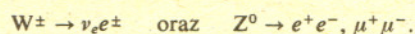
Sercem całego projektu jest AA. Wiazka antyprotonów wyprodukowana w nim zawiera około  $10^{12}$  cząstek — dziesiątki tysięcy razy więcej niż jakakolwiek wiązka  $\bar{p}$  otrzymana przedtem. „Cykl produkcyjny” trwa 120 godzin i wymaga wstrzyknięcia 180 000 porcji antyprotonów do komory, w której panuje próżnia — ciśnienie wynosi  $10^{-10}$  tora!

Używane urządzenia pomiarowe są niezwykle skomplikowane. Dla przykładu, jeden z detektorów waży ponad 2000 ton i zawiera aparaturę (m.in. komory dryftowe o całkowitej powierzchni 0,5 ha) służącą do identyfikacji oraz pomiaru kierunków pędów i energii cząstek powstających w zderzeniach. Architektami przedsięwzięcia byli Simon van der Meer (odkrycie metody „chłodzenia” wiązki i budowa AA) oraz Carlo Rubbia (przystosowanie SPSu do pracy w układzie zderzających się wiązek i budowa największego detektora). Oczywiście praca setek ludzi złożyła się na to, że gigantyczny projekt zadziałał sprawnie. Na przykład przy jednym z eksperymentów pracuje 135 fizyków i 12 laboratoriów Europy i USA.

Pierwsze zderzenia  $p\bar{p}$  zaobserwowano w SPS w lipcu 1981 r., a w dniach 20 i 21 stycznia 1983 r. na seminariach w CERNie ogłoszono zaobserwowanie zdarzeń zgodnych z założeniem powstania i rozpadu naładowanych bozonów W. Podobna wiadomość dotycząca  $Z^0$  podana została 27 maja 1983 r.

Zarejestrowano wiele setek tysięcy oddziaływań  $p\bar{p}$  wybierając „na gorąco” tylko takie, które spełniały narzucone z góry warunki konieczne dla powstania W i Z. Aparatura rejestrowała średnio 4 przypadki na sekundę, a stanowiło to zaledwie promil wszystkich oddziaływań. Świetlność wiązek osiągnęła  $1,6 \cdot 10^{29} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ , co oznacza, że tyleż zderzeń  $p\bar{p}$  miało miejsce w sekundzie w  $1 \text{cm}^2$  przekroju zderzających się wiązek. Informacja o pojedynczym zdarzeniu, zebrana przez wszystkie

detektory, mogłaby wypełnić pokaźnej grubości książkę! Gigantyczna i niezwykle trudna analiza oddziaływań, prowadzona przy użyciu wielkich maszyn cyfrowych, pozwoliła wyłowić 87 zdarzeń, w których wyprodukował się bozon  $W^\pm$  oraz 16 zdarzeń produkcji bozonu  $Z^0$  (stan w sierpniu 1983 r.). Obie cząstki zidentyfikowano przez ich rozpady



W przypadku  $W^\pm$  były to takie zdarzenia, w których wśród wielu dziesiątek cząstek — produktów rozpraszania  $p\bar{p}$  znajdował się też elektron o dużym pędzie poprzecznym (w stosunku do kierunku lotu  $p\bar{p}$ ). Jednocześnie w zdarzeniu występował duży deficyt pędu (tzn. pęd wypadkowy wszystkich produktów reakcji znacznie różnił się od zera) o kierunku pokrywającym się z kierunkiem lotu elektronu i o przeciwnym zwrocie. Ten brakujący pęd był oczywiście wizytówką neutrino — por. reakcja (3b).

Zmierzone masy rozpadających się obiektów wynosiły:

$$m_W \approx 81 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{i} \quad m_Z \approx 93 \text{ GeV}/c^2.$$

Błędy statystyczne są rzędu 2%, a systematyczne — 3%. Analiza jest jeszcze w toku.

Wszystkie własności odkrytych cząstek są zgodne z przewidywaniami teorii oddziaływań elektroślabych dla bozonów pośrednich. Istnienie „ciężkiego światła” zostało potwierdzone. Wagę tego odkrycia trudno przecenić. Równa się ono rangą największym osiągnięciom w historii nauki.



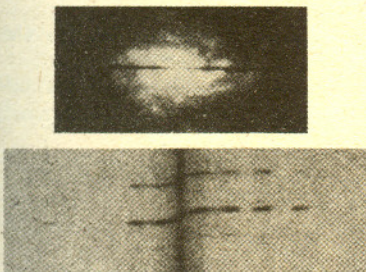
Dość prosto doradzić Heraklesowi zwycięski sposób walki (tzn. pokazać, że istnieje wygrywająca strategia). Powinien on walczyć rozważnie, ale i odważnie. Rozważnie — czyli najpierw powinien ścinać głowy najdalsze od tułowia, odważnie rzucać się w gęszcz głów — wśród najdalszych wybierać te, których najwięcej wyrasta z jednego węzła. Przypuśćmy, że hydra ma wysokość  $n$ , największa liczba głów wyrastających z jednego węzła na wysokości  $n-1$  równa jest  $m$  i takich węzłów jest  $k$ . Po odcięciu po jednej głowie z każdego takiego maksymalnego węzła zmniejszymy maksymalną liczbę głów wyrastających z jednego węzła na wysokości  $n-1$  o 1. Kontynuując to postępowanie  $m$ -krotnie (za każdym razem obcinamy po jednej głowie z węzłów maksymalnych na wysokości  $n-1$ ) zmniejszymy wysokość hydry o 1. Widać, że po skończonym czasie hydra zniknie.

Zwróćmy uwagę, że udowodnione zdanie: dla każdej hydry istnieje strategia wygrywająca, wynika z aksjomatów Peano — oczywiście po odpowiednim zakodowaniu hydr jako liczb naturalnych. Dowód zdania: dla każdej hydry każda strategia jest wygrywająca — niezależnego od aksjomatów Peano — jest oczywiście bardziej skomplikowany.

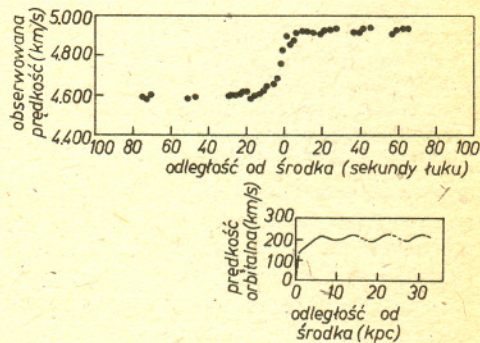
Jednym z problemów, nad którymi pracują astronomowie zajmujący się obiektami pozagalaktycznymi, jest wyznaczanie mas galaktyk. Zadanie to wygląda na bardzo ambitne, bo jak „zważyć” galaktykę odległą o miliony parseków, która przy obserwacjach przez największe teleskopy jawi się nam jako drobna plamka. Otóż okazuje się, że można tego dokonać w zasadzie w bardzo prosty sposób. W zasadzie — bo dopiero w ciągu ostatnich kilku lat okazało się, że galaktyki są znacznie bardziej masywne niż dotychczas przypuszczano.

Receptura pomiaru masy jest następująca:

1. Fotografujemy widmo galaktyki tak, by uzyskać osobno wkład od jej różnych części (rys. 1). Linie widmowe są tu dziwnie poprzesuwane. Łatwo domyślić się, że jest to spowodowane zjawiskiem Dopplera: galaktyka obraca się wokół osi — linie widmowe pochodzące od gwiazd, które na skutek tego ruchu zbliżają się do nas, są przesuwane ku fioletowi i przeciwnie — linie od gwiazd oddalających się są poczerwienione. Otrzymujemy więc zależność  $V(\theta)$ , gdzie  $\theta$  jest odległością kątową między danym punktem a środkiem galaktyki.



Rys. 1. Pomiar krzywej rotacji galaktyki NGC 2998. Z lewej strony u góry galaktyka oraz sposób ustawienia szczeliny spektrografu (czarny poziomy pasek). Niżej przedstawiona jest część widma w okolicy emisyjnej linii wodorowej serii Balmera  $H_{\alpha}$ . Z prawej wykreślono kształt zakrzywienia tej linii jako funkcji kąta  $\theta$ . Na dole wykres  $V(r)$ .



2. Wyznaczamy średnie przesunięcie ku czerwieni całej galaktyki, aby korzystając z prawa Hubble'a wyznaczyć jej odległość. Znając odległość  $d$  galaktyki możemy uzyskać zależność  $V(r)$ , gdzie  $r$  jest odległością danego punktu od jej środka. Korzystamy tu oczywiście ze związku  $r = d \sin \theta$ .

3. Korzystamy z twierdzenia, że siła grawitacyjna działająca na ciało poruszające się wewnątrz sferycznie symetrycznej warstwy kulistej znika, a siła pochodząca od warstwy znajdującej się wewnątrz orbity danego ciała jest równa sile wywieranej przez masę punktową równą masie warstwy i znajdującą się w środku symetrii. A więc na ciało o masie  $m$  poruszające się z prędkością  $V(r)$  po orbicie kołowej o promieniu  $r$  wokół centrum kulistej galaktyki działają siły grawitacyjna i odśrodkowa

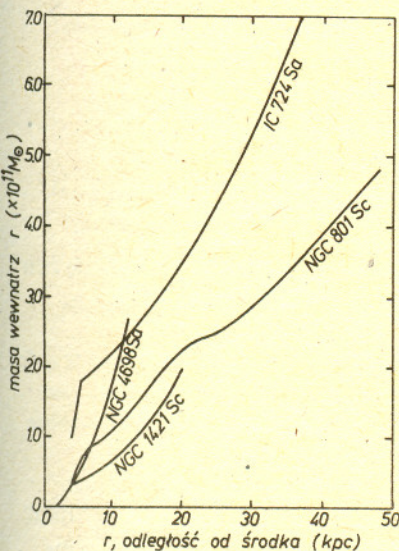
$$\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mV^2(r)}{r}$$

gdzie  $M(r)$  jest częścią masy galaktyki zawartą w kuli o promieniu  $r$ . Stąd

$$M(r) = \frac{rV^2(r)}{G} \quad \text{lub} \quad V(r) = \left( \frac{GM(r)}{r} \right)^{1/2}$$

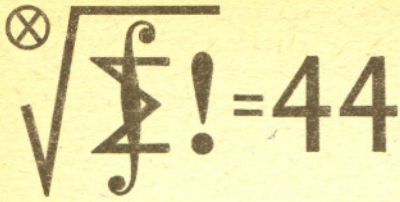
Z tego wzoru wynika, że znając funkcję  $V(r)$  znamy jednocześnie  $M(r)$ . Rozpatrzmy trzy przypadki:

- a) *punktowa masa centralna* — wtedy  $V(r) \sim r^{-1/2}$  jest to np. keplerowski ruch planet Układu Słonecznego.
- b) *ciało o stałej gęstości* —  $M(r) \sim r^3$  i  $V(r) \sim r$  — tego typu zależność obserwujemy czasem w centralnych częściach niektórych galaktyk (np. NGC 4605).
- c) *stała prędkość* —  $V(r) = \text{const}$  — zależność tego typu jest często spotykana w jasnych galaktykach spiralnych; oznacza to, że  $M(r)$  rośnie z  $r$  (rys. 2), mimo że gęstość materii maleje. Konsekwencją tej obserwacji jest wniosek, że mimo iż jasność powierzchniowa maleje wraz ze wzrostem odległości od centrum galaktyki — wkład do całkowitej masy od każdej kolejnej warstwy kulistej jest taki sam i nie bardzo wiadomo, gdzie ta płaska część krzywej prędkości załamuje się.



Rys. 2. Funkcja  $M(r)$  dla czterech galaktyk spiralnych.

Wnioski z tych tak prostych obserwacji zostały wyciągnięte dopiero w ostatnich latach. Okazuje się, że galaktyki są znacznie większe i bardziej masywne niż dotychczas przypuszczano na podstawie obserwacji rozkładu jasności powierzchniowej. Ciemna składowa otaczająca galaktyki (halo) nie daje się — na razie — odkryć innymi metodami. Możliwe, że jej składnikami są obiekty, które nigdy nie świeciły jasno w żadnej dziedzinie widma (mogą to być planety, czarne dziury, może neutrino, grawitony, monopole (?)).



# Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 12/1983

Małgorzata Czerniakowska-Gdańsk	47,47pkt
Artur Smolczyk - Tarnów Op.	45,68pkt
Jerzy Janowicz - Bolesławiec	43,48pkt
Tomasz Rawlik - Gliwice	43,07pkt
Jaeczek Uryga - Bytom	42,76pkt
Włodzimierz Szymczyk-Zielonka	38,56pkt
Jerzy Małopolski - Kraków	37,82pkt
Wojciech Olszewski - Erwinów	36,49pkt

Współczynniki trudności zadań 70, 71, 72:  
2,28    3,15    1,31

Z radością i bardzo serdecznie witamy  
w naszym Klubie pierwszą Panią.  
W chwili obecnej Klub 44 liczy szesnastu  
członków - a raczej: szesnaścioro.  
Numery 15 i 16 - to pani Czerniakowska  
i pan Smolczyk.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkieł rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/1984

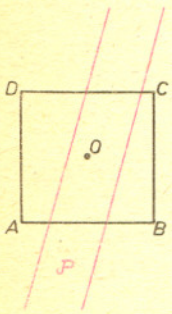
Przypominamy treść zadań:

76. Dany jest kwadrat o boku  $a$ . Poprowadzić dwie proste równoległe w odległości równej zadanej liczbie  $d \leq a$  tak, by część kwadratu zawarta między nimi miała maksymalne pole. Obliczyć to pole.

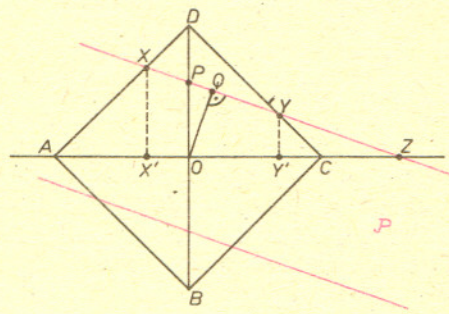
77. Jaka jest największa liczba części, na które 20 okręgów może podzielić sferę?

78. Dowieść, że  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

76. Przy ustalonym kierunku prostych, ograniczających pas  $\mathcal{P}$  o szerokości  $d$ , pas ten zakryje największą część kwadratu  $ABCD$ , gdy środek  $O$  tego kwadratu będzie leżał w połowie odległości między prostymi; dostrzegamy to, przesuwając cały pas równoległe z położenia, gdy kwadrat leży w całości po jednej stronie tego pasa, do położenia, gdy znajdzie się po drugiej jego stronie. Wystarczy więc ograniczyć uwagę do prostych przebiegających w odległości  $d/2$  od punktu  $O$ . Dalej, można założyć, że pas  $\mathcal{P}$  przykrywa pewne dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu (np.  $A$  i  $C$ ) — w przeciwnym razie sytuacja wygląda jak na rysunku 1 i obracając pas  $\mathcal{P}$  wokół punktu  $O$  aż do napotkania wierzchołków  $A$  i  $C$  zwiększamy pole części zakrytej przez  $\mathcal{P}$ .



Rys. 1



$$OP=t \quad OQ=d/2 \\ PQ=\sqrt{t^2-d^2/4}$$

Rys. 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Położenie „górnej” prostej ograniczającej pas  $\mathcal{P}$  jest wyznaczone (z dokładnością do symetrii względem przekątnej  $BD$ ) przez jej punkt przecięcia z tą przekątną, czyli punkt  $P$ . Przyjmijmy więc za zmienną odległość

$OP = t$ . Zakres zmienności  $t$ : od  $d/2$  (gdy pas jest równoległy do przekątnej  $AC$ ) do  $T = ad/\sqrt{4a^2-2d^2}$  (skrajnej wartości, przy której pas  $\mathcal{P}$  jeszcze przykrywa punkt  $C$ ).

Naszym zadaniem jest zmaksymalizować pole czworokąta  $ACYX$ , czyli zminimalizować pole trójkąta  $DXY$ . Wprowadźmy oznaczenia:  $OX' = x$ ,  $OY' = y$ ,  $OZ = z$ . Wówczas  $XX' = AX' = a/\sqrt{2}-x$ ,  $YY' = CY' = a/\sqrt{2}-y$ . Zachodzą proporcje  $XX' : ZX' = YY' : ZY' = PO : ZO = PQ : OQ$ , które w terminach symboli  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  przybierają postać

$$\frac{a/\sqrt{2}-x}{z+x} = \frac{a/\sqrt{2}-y}{z-y} = \frac{t}{z} = \frac{\sqrt{t^2-d^2/4}}{d/2}$$

Otrzymany układ pozwala wyrazić  $x$ ,  $y$ ,  $z$  przez  $t$ . Dostajemy:

$$x = \frac{d(a/\sqrt{2}-t)}{d+\sqrt{4t^2-d^2}}, \quad y = \frac{d(a/\sqrt{2}-t)}{d-\sqrt{4t^2-d^2}}$$

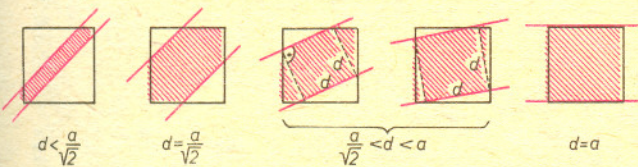
Pole trójkąta  $DXY$  równa się

$$\frac{1}{2} DX \cdot DY = \frac{1}{2} (\sqrt{2}OX')(\sqrt{2}OY') = xy = \frac{d^2(a/\sqrt{2}-t)^2}{2d^2-4t^2}$$

Oznaczmy to wyrażenie przez  $f(t)$ . Pochodna  $f'(t)$  równa się zeru dla  $t = t_0 = d^2/(\sqrt{2}a)$ , jest dodatnia dla  $t > t_0$ , ujemna dla  $t < t_0$ . Należy teraz sprawdzić, czy wartość  $t_0$  należy do dziedziny  $f$ , czyli do przedziału  $I = \langle d/2, T \rangle$ . Nierówność  $t_0 \leq T$ , czyli  $d\sqrt{4a^2-2d^2} \leq \sqrt{2}a^2$ , jest spełniona automatycznie — jest bowiem równoważna nierówności  $(a^2-d^2)^2 \geq 0$ . Zatem  $t_0$  może należeć do  $I$  lub leżeć na lewo od  $I$ :

1° Gdy  $d < a/\sqrt{2}$ , czyli gdy szerokość pasa jest mniejsza od połowy długości przekątnej kwadratu, wówczas  $t_0 \notin I$ , funkcja  $f$  jest w  $I$  rosnąca i przyjmuje minimum  $f_{min} = (\sqrt{2}a-d)^2/4$  dla  $t = d/2$ ; odpowiada to ustawieniu pasa  $\mathcal{P}$  równoległe do przekątnej kwadratu.

2° Gdy  $d \geq a/\sqrt{2}$ , wówczas  $t_0 \in I$  i funkcja  $f$  przyjmuje minimum  $f_{min} = (a^2 - d^2)/4$  dla  $t = t_0$ ; odpowiada to ustawieniu pasa  $\mathcal{P}$  pod kątem  $\alpha = \arccos(a/\sqrt{2}d)$  do kierunku przekątnej; nietrudno sprawdzić, że punkty przecięcia krawędzi pasa z brzegiem kwadratu są wtedy też wierzchołkami pewnego kwadratu. W miarę, jak szerokość pasa wzrasta, kierunek optymalnego ułożenia pasa „przekręca się” od kierunku przekątnej do kierunku boku, jak to pokazuje rysunek 3.



Rys. 3

Maksymalna wartość pola części kwadratu przykrytej przez pas  $\mathcal{P}$  równa się

$$a^2 - 2f_{min} = \begin{cases} d(\sqrt{2}a - d/2) & \text{gdy } d < a/\sqrt{2} \\ (a^2 + d^2)/2 & \text{gdy } d \geq a/\sqrt{2} \end{cases}$$

## Jak zmierzyć promień Ziemi za pomocą zegarka?

W jednym z numerów czasopisma *American Journal of Physics* znaleźliśmy opis bardzo prostej metody zmierzenia promienia Ziemi. Do wykonania pomiaru należy posiadać zegarek z sekundnikiem, znać swój wzrost oraz znaleźć się w bezchmurny dzień nad całkowicie spokojnym morzem (dwa ostatnie warunki szczególnie trudno spełnić nad Bałtykiem). Obserwujemy moment zachodu Słońca leżąc na plaży. Kiedy wstaniemy, będziemy mogli zaobserwować zachód Słońca po raz drugi. Znajomość różnicy czasów  $\tau$  między dwoma zaobserwowanymi zachodami pozwoli nam wyznaczyć promień Ziemi. Znając czas  $\tau$  możemy wyznaczyć kąt  $\alpha$  (rys.) — to znaczy kąt między ostatnimi widzianymi promieniami obserwowanych zachodów Słońca (czas  $\tau$  wynosi około 10 s, jest więc dość łatwy do zmierzenia).

Mamy teraz  $\alpha = \frac{2\pi}{T}\tau$ , gdzie  $T$  — czas trwania pełnego obrotu Ziemi (doba),

oraz  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R+h}$ ,  $h$  — różnica wysokości punktów obserwacji.

Ponieważ  $\frac{\tau}{T}$  i  $\frac{h}{R}$  są bardzo małe, możemy w przybliżeniu przyjąć  $\sin \alpha \approx \alpha$  oraz

$$2Rh + h^2 \approx 2Rh, \text{ co daje } \frac{2\pi}{T}\tau = \sqrt{\frac{2h}{R}}, \text{ skąd } R = \frac{h}{2\pi^2} \left(\frac{T}{\tau}\right)^2.$$

Powyższe rozumowanie odpowiada pomiarowi wykonanemu na równiku w dniu równonocy. Jeśli obserwacji dokonujemy na szerokości geograficznej  $\varphi$  i w dniu, w którym deklinacja Słońca wynosi  $\delta$  (kąt między płaszczyzną równika i kierunkiem do Słońca), powinniśmy wzór na  $R$  zmodyfikować. Po analogicznych przybliżeniach otrzymujemy

$$R = \frac{hT^2}{2\pi^2 \tau^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta)}$$

Opisana metoda pozwala zmierzyć  $R$  z dokładnością do kilku procent. Wbrew pozorom jednak dokładne wykonanie pomiaru nie jest takie proste, gdyż bardzo wiele czynników wprowadza błędy systematyczne.

Dla tych, którzy znajdą czas i odpowiednie warunki, ogłaszamy konkurs na najlepiej wykonany pomiar — opis powinien zawierać podanie dokładnej metody wyznaczenia  $\tau$  i  $h$  oraz dyskusję wszystkich czynników powodujących powstawanie błędów.

Wymieniamy przykładowo kilka możliwych problemów do przedyskutowania:

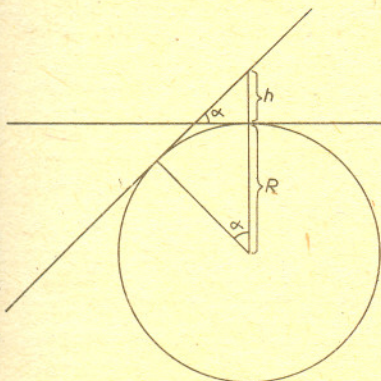
- trudność zmierzenia  $h$  od poziomu morza,
- długofalowe drganie powierzchni morza,
- występowanie refrakcji astronomicznej.

Najciekawszy opis wydrukujemy.

77. Niech  $k_n$  będzie największą liczbą części, na jakie  $n$  okręgów może podzielić sferę. Przypuśćmy, że mamy na sferze  $n+1$  okręgów i wybierzmy jeden z nich. Pozostałe  $n$  okręgów dzieli sferę na  $k$  części  $B_1, \dots, B_k$ ,  $k \leq k_n$ . Wyróżniony okrąg może mieć z tamtymi okręgami najwyżej  $2n$  punktów wspólnych. Punkty te dzielą go na  $m$  łuków,  $m \leq 2n$ . Każdy z tych łuków rozcina dokładnie jeden z obszarów  $B_i$  na dwie części i w ten sposób liczba obszarów wzrasta o  $m$ , czyli równa się  $k+m \leq k_n + 2n$ . Oszacowanie to jest słuszne dla dowolnego zbioru  $n+1$  okręgów na sferze, a zatem  $k_{n+1} \leq k_n + 2n$ . Jeśli w powyższym rozumowaniu ograniczymy uwagę do okręgów kół wielkich, to wszystkie napisane nierówności staną się równościami, bo  $(n+1)$ -szy okrąg musi wtedy przeciąć każdy z pozostałych  $n$  okręgów w 2 punktach. Wynika stąd wzór rekurencyjny  $k_{n+1} = k_n + 2n$ . Ponieważ  $k_1 = 2$ , więc przez indukcję  $k_n = n^2 - n + 2$ .

W szczególności  $k_{20} = 382$ .

$$78. \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$





## Jak szeroka może być wstęga Möbiusa

Jeśli dwa koła jakiejś maszyny zostaną połączone pasem transmisyjnym w kształcie wstęgi Möbiusa, pas będzie się ścierał jednakowo po „obu stronach”.

Firma Goodrich Company nabyła patent na tego rodzaju zastosowanie wstęgi Möbiusa: U.S. Patent 2784834 12 marca 1957.

Kątem między odcinkami  $KL$  i  $MN$  leżącymi w przestrzeni nazywamy kąt  $KLN'$ , gdzie odcinek  $LN'$  powstaje przez przesunięcie równoległe odcinka  $MN$ .

Wstęga Möbiusa to sklejony prostokątny pasek papieru, którego końce przed sklejeniem obróciliśmy o  $180^\circ$  (rys. 1).

Przypuśćmy, że pasek ma szerokość 1. Jasne jest, że im będzie dłuższy, tym łatwiej będzie otrzymać z niego wstęgę Möbiusa. Naszym zadaniem jest wyznaczenie takiej liczby  $\lambda$ , że przy pasku dłuższym od  $\lambda$  uda się skleić wstęgę, a przy krótszym nie.

Ważne jest, czy wstęga może mieć zagniecenia. Jeśli się na to zgodzimy, to rozwiązaniem będzie  $\lambda = 0$ . Wystarczy bowiem złożyć pasek w harmonijkę (parzystą liczbę razy), obrócić jeden koniec o  $180^\circ$  i skleić odpowiednie punkty (rys. 2). Jeśli nie chcemy mieć zagnieceń, odpowiedź jest inna

Pokażemy, że  $\lambda \in \left[ \frac{\pi}{2}, \sqrt{3} \right]$  — lepszego oszacowania nie znamy i dokładniejsze wyznaczenie  $\lambda$

wyda się być dosyć trudne.

Powierznię, którą możemy uzyskać z płaskiej kartki papieru bez zagniatania, nazwijmy powierzchnią *rozwijalną*. Jest to np. powierzchnia z rys. 3, walec, stożek. Nie będziemy wchodzić w szczegóły klasyfikacji takich powierzchni — wymienimy tylko pewne, potrzebne nam dalej własności. Są one intuicyjnie oczywiste.

Odcinek, który leży całkowicie na powierzchni i nie jest zawarty w żadnym dłuższym odcinku o tej własności, nazywamy *tworzącą*. Każdy punkt powierzchni nie leżący na jej brzegu jest punktem wewnętrznym jakiejś tworzącej.

Punkt, który jest punktem wewnętrznym dwóch różnych tworzących, nazywamy *punktem płaskim* — pewne jego otoczenie jest bowiem płaskie.

Jeśli punkt wewnętrzny powierzchni jest końcem pewnej tworzącej, to przechodzi przez niego jedyna nie kończąca się w nim tworząca o końcach należących do brzegu powierzchni. Oddziela ona obszar płaski od niepłaskiego (w pewnym jej otoczeniu — rys. 3).

Pokażemy, że jeśli wstęga Möbiusa ma być powierzchnią rozwijalną, to  $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$ . Nawińmy

kilkakrotnie na wstęgę o długości  $l$  i szerokości 1 pasek papieru. Zaznaczmy na nim obszary płaskie i tworzące wstęgi na pozostałych obszarach. Po rozwinięciu otrzymamy wzór o okresie  $2l$ . Co więcej, druga połowa okresu powstaje z pierwszej przez przesunięcie o  $l$  i odbicie względem linii środkowej (rys. 4). Dorysujmy tworzące przechodzące przez punkty płaskie tak, by przez każdy punkt przechodziła dokładnie jedna tworząca i została zachowana wyżej opisana okresowość.

Dowolną tworzącą  $AB$  odbijmy względem linii środkowej i przesunijmy o  $l$ . Otrzymamy tworzącą  $CD$ , przy czym  $AC + BD = 2l$ . Przy nawijaniu na wstęgę Möbiusa odcinki  $CD$  i  $BA$  pokrywają się — a więc odcinek  $AB$  tworzy z  $CD$  kąt  $180^\circ$ . Jeśli będziemy przesuwac punkt  $E$  od  $A$  do  $C$ , to kąt między tworzącą  $EF$  (z narysowanej przez nas rodziny) a  $AB$  będzie się zmieniał w sposób ciągły od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ . Dla ustalonego  $n$  wybierzmy takie tworzące  $A_k B_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ),

by kąt między  $AB$  i  $A_k B_k$  był równy  $\frac{k}{n} 180^\circ$  (rys. 5). Oczywiście kąt między  $A_{k-1} B_{k-1}$  i  $A_k B_k$

nie jest mniejszy niż  $\frac{180^\circ}{n}$ .

Wykażemy, że żadna z sum  $A_k A_{k+1} + B_k B_{k+1}$  (gdzie  $A_0 = A, B_0 = B; A_n = C, B_n = D$ ) nie jest mniejsza od  $a_{2n}$  — długości boku  $2n$ -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Załóżmy, że  $A_{k+1} B_{k+1} \leq A_k B_k$  (rys. 6). Odcinek  $A_k E$  jest przesunięciem równoległym  $A_{k+1} B_{k+1}$ ,  $A_k F = A_k H = 1$  ( $F \in A_k E, H \in A_k B_k$ ),  $GF \parallel B_k E$  ( $G \in A_k B_k$ ), łuk  $B_{k+1} E$  jest przesunięciem równoległym łuku  $A_{k+1} A_k$ . Mamy ( $\overline{XY}$  oznacza odległość punktów  $X$  i  $Y$  zmierzoną po zaznaczonym łuku):  $\overline{A_k A_{k+1}} + \overline{B_k B_{k+1}} = \overline{EB_{k+1}} + \overline{B_k B_{k+1}} \geq \overline{EB_k} \geq \overline{FG} \geq \overline{FH} \geq a_{2n}$ .

Ostatnia nierówność wynika z tego, iż  $\angle FA_k H \geq \frac{180^\circ}{n}$ .

A zatem  $2l = AC + BD \geq n \cdot a_{2n}$ . Ale to ostatnie wyrażenie — połowa obwodu  $2n$ -kąta foremnego — zbiega do połowy długości okręgu, czyli  $\pi$ . Mamy więc żadaną nierówność  $l \geq \frac{\pi}{2}$ .

Aby wykazać, iż  $\lambda \leq \sqrt{3}$ , wystarczy podać sposób sklejania wstęgi z paska o długości większej od  $\sqrt{3}$ . Sposób ten jest przedstawiony na rysunkach 7 i 8.

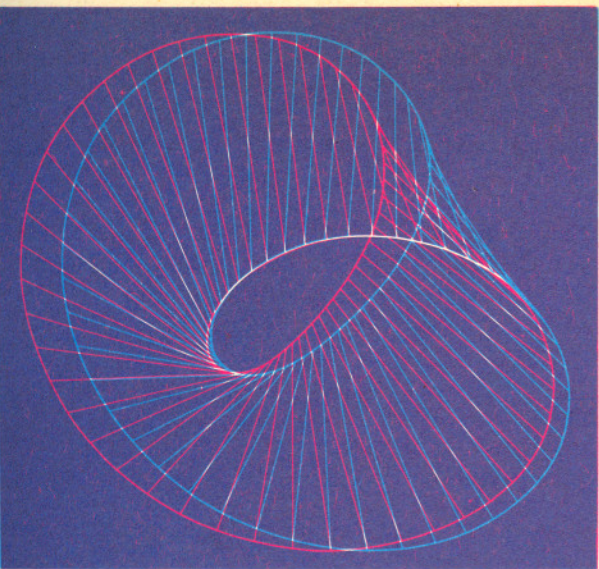
Nic więcej nie potrafimy powiedzieć o liczbie  $\lambda$ . Trudność polega na tym, iż we wstędze Möbiusa pasek nie może przenikać przez siebie, przecinać się. Tymczasem w oszacowaniu —  $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$

nie korzystaliśmy z tego warunku. Co więcej, jeśli dopuścimy samoprzecinanie się, to z paska dłuższego od  $\frac{\pi}{2}$  uda się skleić wstęgę. Aby pokazać, że  $\lambda > \frac{\pi}{2}$ , musimy wykorzystać położenie

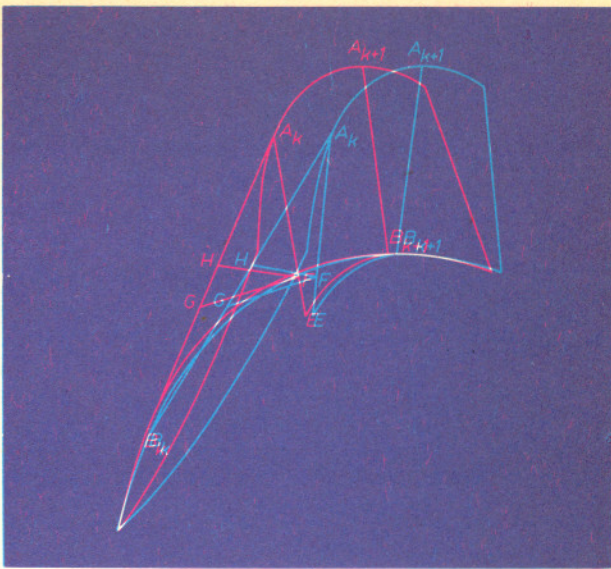
wstęgi w przestrzeni trójwymiarowej. Zadania tego typu są zwykle bardzo trudne. Z drugiej strony, aby wykazać, że  $\lambda < \sqrt{3}$ , trzeba znaleźć nową konstrukcję wstęgi, co wydaje się nieprawdopodobne.

(na podstawie artykułu w miesięczniku *Kwant* 1/1979).

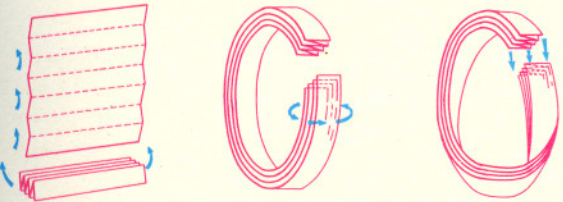
J. R.



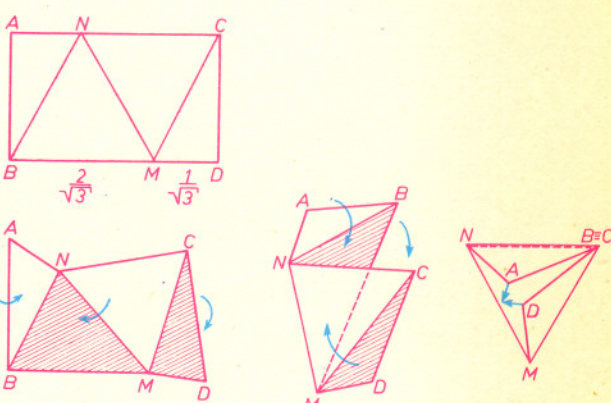
Rys. 1



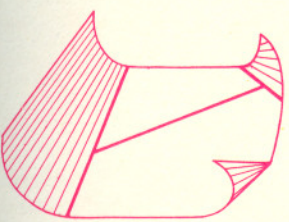
Rys. 6



Rys. 2



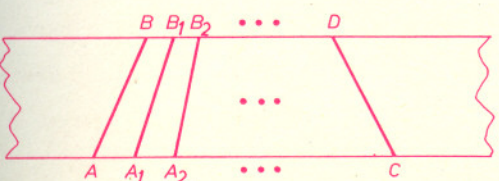
Rys. 7



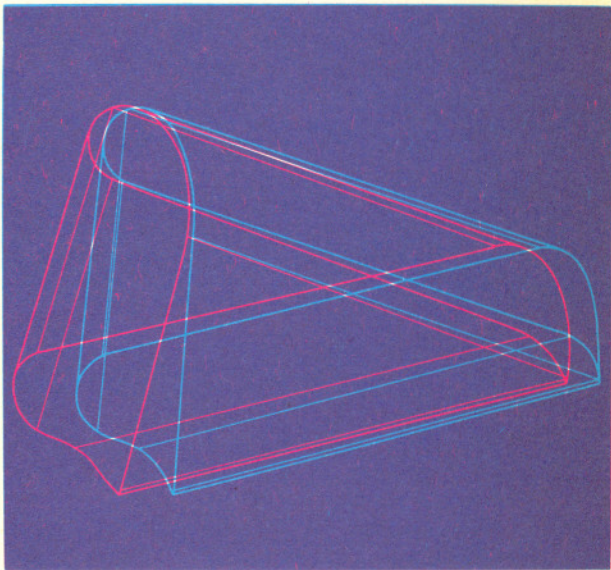
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 8