

# delta

h-9-53-10-1-s №3,4,5,6

## SPIS TREŚCI

NUMERU 5 (125)

Masa Chandrasekhara <i>doc. dr Paweł Haensel</i>	str. 1
Barbara McClintock — laureat nauk medycznych <i>prof. dr Wacław Gajewski</i>	str. 4
Trójwymiarowe różnice według Thurstona <i>dr Józef Przytycki</i>	str. 7
Powstawanie pierwiastków chemicznych <i>mgr Andrzej Majhofer</i>	str. 10
Klub 44	str. 12
Mizar MSE	str. 13
Inżynieria programowania <i>dr Janusz Gwiazda</i>	str. 14
Zadania	str. 15
Jak wygląda orbita Ziemi? <i>mgr Andrzej Majhofer</i>	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:**  
Mała Delta

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Alicja Derkowska  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
doc. dr Kazimierz Stepien  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — z-ca nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 6110/84 T-70

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę postą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnny,
- do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Osolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45; 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550



# Masa Chandrasekhara

Doc. dr Paweł HAENSEL

Współlaureatami ubiegłorocznej nagrody Nobla z fizyki zostali astrofizycy amerykańscy: Subrahmanyan Chandrasekhar z Uniwersytetu w Chicago i William A. Fowler z Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego w Pasadenie. Celem tego artykułu jest przedstawienie największego odkrycia jednego z ubiegłorocznych noblistów — S. Chandrasekhara.

S. Chandrasekhar urodził się 9 października 1910 roku w Lahore, na terenie ówczesnych Indii (obecnie Pakistan). Po skończeniu studiów na Uniwersytecie w Madrasie w Indiach przybył w 1930 roku do Cambridge w Anglii, gdzie rozpoczął pracę pod kierunkiem wybitnego angielskiego fizyka teoretyka, Ralpa H. Fowlera (nie należy go mylić z ubiegłorocznym noblistą, W. A. Fowlerem). Największego odkrycia dokonał Chandrasekhar w 1930 roku, a więc mając zaledwie 20 lat. Na podstawie rozważań teoretycznych stwierdził on istnienie maksymalnej masy — granicznej masy Chandrasekhara — dla białych karłów.

W latach dwudziestych znano trzy niezwykle gwiazdy — białe karły. Najlepiej znanym białym karłem był Syriusz B, tworzący układ podwójny z najjaśniejszą gwiazdą na niebie — Syriuszem. Obserwacje Syriusza B doprowadziły do wniosku, że ma on masę zbliżoną do masy Słońca i zadziwiająco mały promień — zaledwie 5 600 km (mniejszy od promienia Ziemi!). Oznaczało to, że średnia gęstość Syriusza B

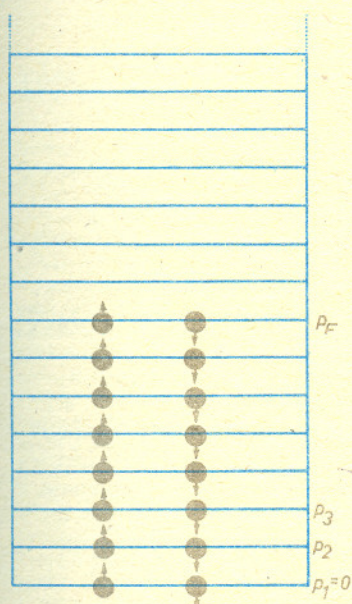
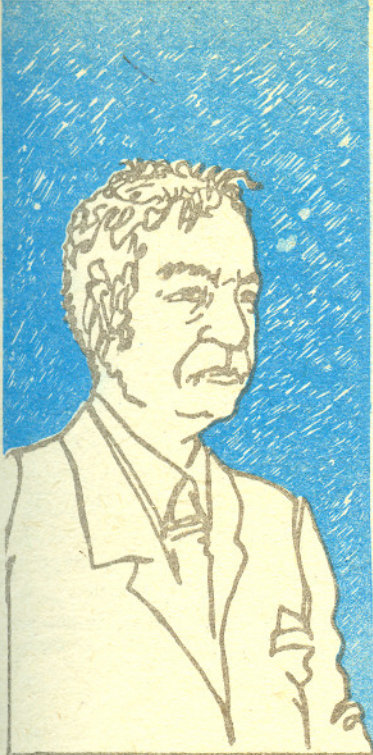
$$(1) \quad \bar{\rho} = M / \frac{4}{3} \pi R^3$$

wynosi około 3 tony na  $\text{cm}^3$ ! Jak zauważył w 1926 roku późniejszy promotor pracy doktorskiej Chandrasekhara, R. H. Fowler, materia o tak ogromnej gęstości powinna być całkowicie zjonizowana. Będzie ona mieszaniną jąder atomowych i gazu elektronów.

Ciśnienie tak gęstej materii jest wytwarzane przez lekkie i ruchliwe elektrony, sam zaś gaz elektronowy można traktować jako doskonały gaz fermionów (cząstek o spinie  $1/2$ ). W temperaturze zera bezwzględnego gaz elektronowy znajdowałby się w stanie podstawowym (o najniższej możliwej energii). Zgodnie z zasadą Pauliego elektrony zajmują wówczas stany pędowe tak, jak to jest schematycznie pokazane na rys. 1. W stanie podstawowym maksymalny pęd elektronu wynosi więc  $p_F$ ; nosi on nazwę pędu Fermiego. Wszystkie stany pędowe z  $p_i > p_F$  są puste, zaś stany z  $p_i \leq p_F$  są obsadzone. Pęd Fermiego jest związany z gęstością elektronów  $\rho_e = (\text{liczba elektronów w cm}^3) \times (\text{masa spoczynkowa elektronu})$  zależnością  $p_F = a \rho_e^{1/3}$ , gdzie  $a$  jest stałą wyliczoną teoretycznie. Maksymalna energia kinetyczna elektronu, a więc energia elektronu o pędzie  $p_F$ , to tzw. energia Fermiego,  $E_F$ . Temperaturę Fermiego,  $T_F$ , definiujemy jako  $E_F/k_B$ , gdzie  $k_B$  jest stałą Boltzmanna. Jeżeli gaz ma temperaturę  $T > 0$  K, ale temperatura ta jest znacznie mniejsza od temperatury Fermiego  $T_F$ , to mówimy, że jest on zdegenerowany. Oznacza to, że wszelkie poprawki do wielkości termodynamicznych obliczonych przy założeniu  $T = 0$  K, a wynikające z faktu, że gaz ma niezerową temperaturę, są zaniedbywalne. W typowym dla białego karła przypadku (całkowicie zjonizowany  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ) jeden elektron przypada na dwa nukleony i wobec tego, że elektron jest 1836 razy lżejszy od nukleonów, związek gęstości gazu elektronowego z gęstością materii  $\rho$  jest postaci

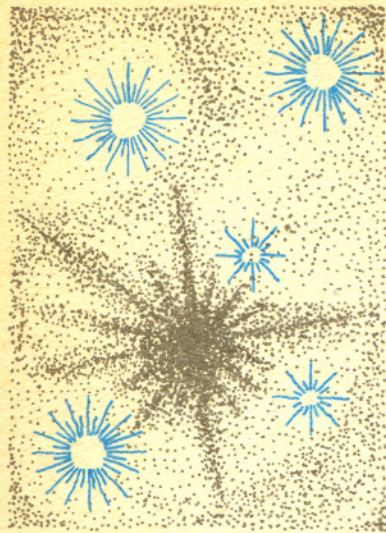
$$(2) \quad \rho_e = \frac{\rho}{2 \cdot 1836}$$

Jeżeli  $\rho = 3 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ , to nawet przy temperaturach kilku milionów stopni, charakterystycznych dla centralnej części białego karła, gaz elektronowy będzie zdegenerowany ( $T_F \approx 10^{10} \text{ K} \gg T$ ).



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie obsadzenia stanów pędowych w gazie fermionów o spinie  $1/2$ , przy  $T = 0$  K.





W swojej pracy z 1926 roku Fowler używał nierelatywistycznego wzoru na energię kinetyczną elektronów,

$$(3) \quad E_{kin} = \frac{p^2}{2m},$$

a więc zakładał, że prędkości elektronów są znacznie mniejsze od prędkości światła  $c$  ( $p_F/m \ll c$ ). Równanie stanu dla nierelatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego miało postać

$$(4) \quad P = b_1 \rho_e^{5/3}$$

tak, że wyprowadzone przez Fowlera równanie stanu dla materii we wnętrzu białego karła było postaci

$$(5) \quad P = K_1 \rho^{5/3},$$

gdzie  $K_1$  było wyliczone teoretycznie. Chandrasekhar zauważył, że w przypadku, gdy gęstość gazu elektronowego będzie dostatecznie duża, prędkość najszybszych elektronów (tych o pędzie  $p_F$ , dla których prędkość jest proporcjonalna do  $\rho^{1/3}$ ) może stać się zbyt duża na to, aby przybliżenie nierelatywistyczne było stosowne. Przecież dla  $\rho > 1 \text{ t/cm}^3$  prędkość wyliczona z nierelatywistycznego wzoru  $p_F/m$  jest większa od  $c$ ! Jest jasne, że dla tak wielkich gęstości trzeba używać ogólnego wzoru na energię kinetyczną, który daje szczególną teorię względności,

$$(6) \quad E_{kin} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2.$$

Używając tego wzoru na energię kinetyczną elektronów Chandrasekhar wyprowadził następnie poprawne równanie stanu postaci

$$(7) \quad P = K_2 f(\rho),$$

gdzie  $f$  to dość skomplikowana funkcja  $\rho$ . Stosując swoje równanie stanu rozwiązał on następnie równanie równowagi hydrostatycznej dla modeli białego karła o różnych wartościach gęstości w centrum gwiazdy,  $\rho_c$ . Dla każdej wartości  $\rho_c$  obliczył on masę gwiazdy  $M$  oraz jej promień  $R$ . Wyniki jego obliczeń, przedstawione schematycznie na rys. 2 i 3, wykazywały zdumiewającą własność: coraz gęstsze białe karły były jednocześnie coraz mniejsze (rys. 1), tak, że masa ich rosła coraz wolniej (rys. 2). Masa ta zdążyła asymptotycznie do pewnej granicznej wartości, którą nazywamy obecnie masą Chandrasekhara,  $M_{Ch}$ . Wartość  $M_{Ch}$  możemy wyliczyć zakładając, że  $E_F \gg mc^2$ , a więc  $\rho_c \rightarrow \infty$ . Dla takiego ultrarelatywistycznego (energia spoczynkowa pomijalna w porównaniu z energią kinetyczną) zdegenerowanego gazu elektronowego funkcja  $f$  w równaniu (7) przybiera prostą postać  $f = \rho^{4/3}$  tak, że

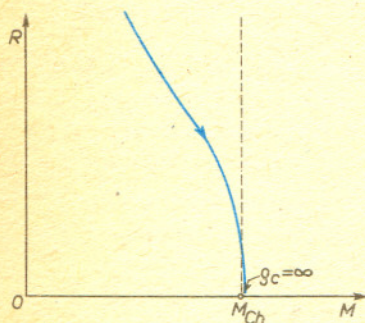
$$(8) \quad P = K_2 \rho^{4/3},$$

gdzie stała  $K_2$  może być wyliczona teoretycznie. Z rozwiniętej na początku naszego wieku teorii gwiazd politropowych opisywanych równaniami stanu

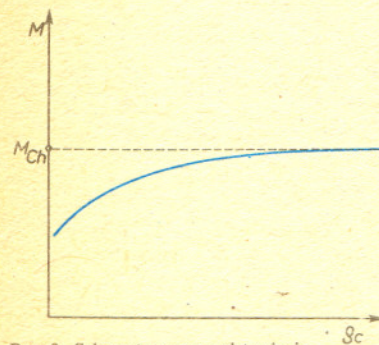
o postaci  $P = K \rho^{1 + \frac{1}{n}}$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, wiadomo, że dla  $n = 3$  każdemu promieniowi gwiazdy odpowiada jedna, niezmienna masa zależna tylko od współczynnika  $K$ . Chandrasekhar wykazał, że ultrarelatywistyczny gaz elektronowy prowadzi do politropowego równania stanu z  $n = 3$ . Kreskowanym asymptotom na rys. 2 i 3 odpowiadają więc gwiazdy politropowe z  $n = 3$  i  $K = K_2$ . Korzystając z tego wyniku teorii gwiazd politropowych otrzymujemy  $M_{Ch} = 1,44$  masy Słońca. Białe karły o masie większej od  $M_{Ch}$  nie mogą istnieć!

Żeby docenić wagę odkrycia Chandrasekhara, należy zastanowić się nad konsekwencjami istnienia granicznej masy  $M_{Ch}$  dla końcowych etapów ewolucji gwiazd. Jaki będzie los gwiazdy po całkowitym wypaleniu „paliwa” jądrowego? Jeżeli masa jej gęstego jądra zbudowanego z produktów syntezy jądrowej będzie mniejsza od  $M_{Ch}$ , to niewątpliwie zmieni się ona w białego karła. Od momentu bowiem, w którym materia we wnętrzu kurczącego się jądra gwiazdy stanie się zdegenerowana (a więc gdy  $T \ll T_F$ ), ciśnienie w nim będzie zależało tylko od gęstości. Ostateczną postacią gwiazdy po „rozplynięciu” się otoczki będzie konfiguracja w postaci kuli zdegenerowanej materii, ponieważ dalsze stygnięcie gwiazdy nie będzie mogło zmienić ciśnienia w jej wnętrzu. Jedynym obserwowalnym efektem stygnięcia będzie zmniejszanie jasności gwiazdy: biały karzeł stanie się w końcu karłem czarnym.

Jeśli wprowadzić parametr  $x = \frac{p_F}{mc}$ , to gęstość w tym przypadku dana jest wzorem  $\rho = B \cdot x^3$ , a ciśnienie  $P = A \cdot [x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \operatorname{arsinh} x]$ .

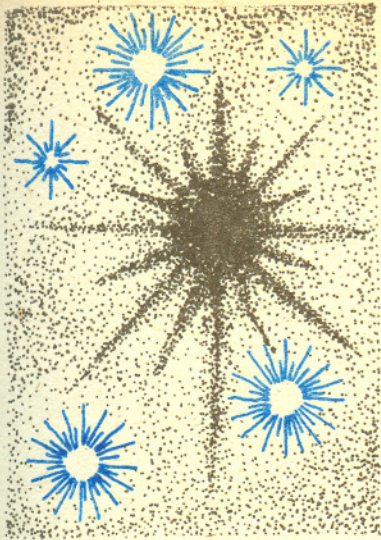


Rys. 2. Schematyczne przedstawienie związku między masą  $M$  a promieniem  $R$  dla modeli białych karłów skonstruowanych dla równania stanu danego wzorem (7). Każdy punkt krzywej odpowiada określonej wartości  $\rho_c$ , rosnącej w kierunku wskazanym strzałką. Dla  $R = 0$  i  $M = M_{Ch}$  mamy  $\rho_c = \infty$ .



Rys. 3. Schematyczne przedstawienie zależności między masą białego karła  $M$  a gęstością w jego środku  $\rho_c$ .





Treść wykładów wygłaszanych przez laureatów w czasie ceremonii wręczenia nagród publikują co roku „Postępy Fizyki”.

Jaki los spotka gwiazdę, której zdegenerowane jądro ma masę większą od  $M_{Ch}$ ? Dokładne zrozumienie kolei losu takiej masywnej gwiazdy to wynik badań przeprowadzonych wiele lat po odkryciu masy Chandrasekhara. Ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego w jej wnętrzu nie zdoła zrównoważyć siły grawitacji. W wyniku implozji zdegenerowanego jądra gwiazdy nastąpi wyzwolenie ogromnych ilości energii i odrzucenie warstw zewnętrznych. Cały proces ma charakter gigantycznego wybuchu, który może być widoczny na Ziemi jako supernowa. Kurczące się „jądro” supernowej może stać się gwiazdą neutronową o fantastycznej gęstości ponad  $10^8$  t/cm<sup>3</sup> i promieniu 10–20 km bądź skurczyć się do osobliwej postaci czarnej dziury. Gwiazda neutronowa może być końcowym, ostatecznym stadium życia gwiazdy dzięki temu, że siły ciśnienia supergęstej materii jądrowej są w stanie zrównoważyć siły grawitacji — ale tylko wtedy, gdy „jądro” powstałe w wyniku implozji ma masę mniejszą od dwóch mas Słońca. W przeciwnym przypadku gigantyczne siły przyciągania grawitacyjnego doprowadzą nieuchronnie do powstania czarnej dziury.

W 1935 roku Chandrasekhar opuścił Cambridge i przeniósł się na Uniwersytet w Chicago w Stanach Zjednoczonych. Jest profesorem tego uniwersytetu do chwili obecnej. W ciągu ponad pół wieku swojej działalności naukowej zgromadził ogromny dorobek naukowy w wielu dziedzinach astrofizyki teoretycznej. Swojego największego odkrycia dokonał jednak wtedy, gdy mając dwadzieścia lat wykazał, że prawa fizyki kwantowej mogą decydować o losie gwiazd.

Do zrozumienia istnienia granicznej masy  $M_{Ch}$  można dojść dzięki pewnym prostym oszacowaniom.

Rozważmy zależność masy i promienia białego karła od tych wielkości fizycznych, które są podstawowe dla zachowania równowagi hydrostatycznej. Równowaga ta oznacza, że w każdej chwili i w każdej jednostce objętości siły parcia równoważą siłę grawitacyjną we wnętrzu gwiazdy.

Zaniedbajmy w tej jakościowej dyskusji zmiany struktury wewnętrznej, interesować nas będą wyłącznie zmiany globalne.

Średnia gęstość we wnętrzu gwiazdy  $\rho$  jest proporcjonalna do  $\frac{M}{R^3}$ , a siła grawitacji działająca na warstwę przy jej powierzchni jest  $F_g \sim M^2/R^5$ . Siła ta ma być zrównoważona przez działające w przeciwnym kierunku ciśnienie. W przypadku nierelatywistycznym (równanie 5) jest  $P \sim \rho^{5/3} \sim \frac{M^{5/3}}{R^5}$ , a więc siła pochodząca od ciśnienia wynosi  $F_c = \frac{dP}{dR} \sim \frac{M^{5/3}}{R^6}$ . Dla danej masy gwiazdy  $M$  równowaga zostaje osiągnięta przy pewnej określonej wartości promienia  $R$ , ponieważ rozważane przez nas siły zależą od  $R$  w różnych potęgach.

Dziwna zależność promienia od masy również wynika z faktu, że siła grawitacji ( $F_g \sim M^2$ ) rośnie szybciej przy zwiększaniu masy niż siła pochodząca od ciśnienia ( $F_c \sim M^{5/3}$ ).

Rozważając białe karły o dostatecznie dużych masach stwierdzamy, że siła pochodząca od ciśnienia ulega modyfikacji (gaz jest relatywistyczny, równanie (8)) i staje się proporcjonalna do  $M^{4/3}/R^5$ . Jeśli teraz porównamy ją z siłą grawitacji, to okaże się, że zależą one od promienia gwiazdy  $R$  w jednakowych potęgach, a więc gwiazda nie może osiągnąć równowagi przez proste dopasowanie promienia: to nic nie da. Równowaga może być osiągnięta jedynie dla konkretnej wartości masy  $M_{Ch}$ , dla której  $F_g = F_c$ . Dla masy większej niż owa wartość graniczna siła grawitacji będzie zawsze większa od siły pochodzącej od ciśnienia. W sytuacji, gdy masa gwiazdy jest mniejsza od  $M_{Ch}$ , siła grawitacji będzie mniejsza od siły ciśnieniowej, gwiazda zacznie zwiększać swoje rozmiary (w wyniku braku równowagi), degeneracja zmieni się (przynajmniej w zewnętrznych częściach gwiazdy) z relatywistycznej na nierelatywistyczną, wracamy więc do przypadku poprzedniego, w którym równowaga może być osiągnięta przez dostosowanie promienia.



**Rozwiązanie zadania M 363.** Rozpocznijmy od dowolnego rozmieszczenia gości przy stole i przypuśćmy, że osoba  $A$  i jej wróg  $B$  siedzą obok siebie. ( $B$  po prawej stronie  $A$ ). Wykażemy, że znajdzie się para  $A', B'$ , siedzących obok siebie osób takich, że  $A'$  nie jest wrogiem  $A$ ,  $B'$  nie jest wrogiem  $B$  i  $B'$  siedzi po prawej stronie  $A'$ . Istotnie:  $A$  ma co najmniej  $n$  „nie-wrogów”  $A_1, \dots, A_n$ . Oznaczamy przez  $B_i$  osobę siedzącą po prawej stronie  $A_i$ . Oczywiście  $B_i \neq B_j$ , gdy  $i \neq j$  i ponieważ  $B$  ma najwyżej  $n-1$  wrogów, co najmniej jedna z osób  $B_i$  nie jest jego wrogiem. Szukaną parą jest więc para  $A_i, B_i$ . Przesadźmy teraz osoby siedzące w prawo od  $A$  i w lewo od  $B$  (będą to  $B, C_1, \dots, C_k, A'$ ) w odwrotnym porządku  $A', C_k, \dots, C_1, B$  i zauważmy, że jedynymi zmianami sąsiedztw będą  $(AB)$  i  $(A'B')$  na  $(AA')$  i  $(BB')$ :  
 $(\dots ABC_1 \dots C_k A' B' \dots \rightarrow \dots AA' C_k \dots$   
 $\dots C_1 BB')$  i liczba „wrogich” sąsiedztw zmaleje co najmniej o 1. Postępując analogicznie dalej po najwyżej  $2n$  krokach otrzymamy żądane rozmieszczenie.



## Barbara McClintock

### —laureat nauk medycznych

*Prof. dr Wacław GAJEWSKI, członek rzeczywisty PAN*



Przyznanie w 1983 roku nagrody Nobla Barbarze McClintock jest w pewnym sensie niecodziennym wydarzeniem. Młode pokolenie genetyków molekularnych, zajmujące się klonowaniem i sekwencjonowaniem DNA, zapewne słabo orientuje się, kim jest laureatka i na czym polegały jej osiągnięcia. W tym przypadku bowiem nagroda Nobla przypadła za badania wykonane prawie 40 lat temu. Warto więc przypomnieć trochę danych z życia i działalności Barbary McClintock. Urodzona 16 czerwca 1902 r., w latach 1927—40 pracuje jako cytolog i genetyk w Cornell University, gdzie duży i prężny zespół genetyków pod kierownictwem profesorów R. A. Emersona i M. M. Rhoadesa opracowywał wówczas cytogenetykę kukurydzy. Prace te w owym czasie miały duży rozgłos na świecie i potwierdzały hipotezę T. H. Morgana o lokalizacji i stałym położeniu genów w chromosomach organizmów. Dzięki wybitnym talentom cytologicznym Barbary McClintock zespół ten ustalił dokładne mapy genetyczne 10 chromosomów kukurydzy. Kukurydza stała się najlepiej genetycznie poznaną rośliną, co walnie przyczyniło się następnie do szybkiego postępu w jej hodowli — dzięki czemu Stany Zjednoczone stały się największym producentem światowym tego podstawowego składnika paszy zwierzęcej.

W tym okresie Barbara McClintock istotnie przyczyniła się do dalszego utrwalenia poglądu, iż geny zajmują stałe i ściśle określone położenie w chromosomach. Była to osoba bardzo utalentowana, świetny cytolog, jednak trudna w kontaktach, pracująca samotnie i bez reszty oddana pracy naukowej.

Barbara McClintock pracując nad kukurydzą natknęła się na dziwne i zaskakujące zjawisko: geny zwykle stałe, o określonym efekcie fenotypowym (tzn. obserwowalnym), w niektórych odmianach kukurydzy zachowywały się nienormalnie i wykazywały olbrzymią niestałość swych efektów fenotypowych. Np. gen kodujący syntezę czerwonego barwnika antocjanowego, powodujący czerwone zabarwienie ziaren kukurydzy, w odmianach owych stawał się nagle niestały. Jego działalność zostawała wyłączona i nasiona były bezbarwne — żółtawe. W trakcie rozwoju nasion mutacja ta była jednak niestała i z dużą częstotliwością gen odzyskiwał swą aktywność. W wyniku tego powstawały nasiona plamiste z licznymi czerwonymi plamami i paskami na jasnym bezbarwnym tle. Zjawisko to zaintrygowało B. McClintock i od roku 1944 zajęła się wyłącznie badaniem natury tej niestałości. Carnegie Institute w Waszyngtonie zaproponował jej w tym czasie pracę w znanym laboratorium w Cold Spring Harbor, gdzie pracowała od roku 1941 do roku 1967 i gdzie po przejściu na emeryturę pracuje do dziś jako „distinguished service member”. Od tego czasu zaczyna się długi okres jej życia prowadzący do wykrycia zaskakujących przyczyn niestałości genów kukurydzy. Wyniki tych badań były całkowicie nieoczekiwane i jak na owe czasy szokujące i nie pasujące do ówczesnych pojęć panujących w genetyce.

W licznych, niesłychanie pomysłowych doświadczeniach popartych obserwacjami cytologicznymi Barbara McClintock wykazała, że niestałość genów jest wynikiem działalności ruchomych elementów genetycznych, które mogą „przeskakiwać” z jednego miejsca w drugie w obrębie jednego chromosomu, a także z jednego chromosomu do drugiego. Gdy ruchomy element zostanie włączony do chromosomu w obrębie czy w pobliżu określonego genu, powoduje on niestałość efektów tego genu, włączając bądź wyłączając ów gen w trakcie rozwoju rośliny. Te różnice w aktywności genów związane są z ruchliwością i przenoszeniem ruchomych elementów w nowe położenia. Przy zmianach położenia elementu ruchomego — czyli przy jego transpozycji — mogą zachodzić bardzo drastyczne zmiany w strukturze chromosomów, jak np. wypadanie różnej długości odcinków chromosomu (tzw. delecje).

Przyznawaniu Nagród Nobla często towarzyszyły drobne skandale. Na przykład w 1905 roku, kiedy Henryk Sienkiewicz na zakończenie ceremonii oficjalnej wznosił toast na cześć Polski, wszyscy powstali, tylko ambasador Niemiec demonstracyjnie pozostał na swym miejscu (wzmiankę o tym incydencie znaleźliśmy w październikowym numerze pisma *La Recherche* z 1983 r.).

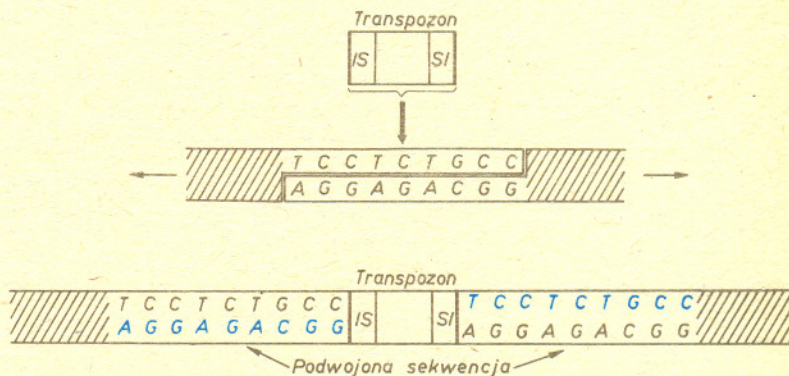




Plazmidy — autonomiczne twory zbudowane z DNA pozachromosomowego o cząsteczkach znacznie mniejszych od cząsteczki chromosomowej, zawierające własną informację genetyczną.

W ciągu 6 lat intensywnej i samotnej pracy Barbara McClintock opisała szereg różnych rodzajów elementów ruchomych, których przemieszczenia w różne pozycje chromosomów śledziła przy pomocy bardzo pomysłowych doświadczeń genetycznych. W roku 1950 na sympozjum w Cold Spring Harbor przedstawiła ona wyniki swych sześcioletnich samotnych badań. Większość słuchaczy albo w ogóle nie była w stanie śledzić owych wyników, albo pozostała bardzo sceptyczna, a niektórzy nie mogli wręcz pojąć, jak pojedyncza osoba mogła otrzymać tego rodzaju rezultaty. Co więcej, Barbara McClintock przypisywała wykrytym przez siebie ruchomym elementom genetycznym rolę w procesach różnicowania i nazwała je elementami kontrolującymi sugerując, iż włączanie i wyłączanie aktywności genów w procesach różnicowania się komórek może być także wynikiem ich działalności. Twierdzenie to niewątpliwie było trochę na wyrost i przyjęte zostało bardzo sceptycznie.

Od tego czasu, jeszcze bardziej osamotniona, pracuje nad wykrytym przez siebie zjawiskiem w przekonaniu, że jest na tropie prowadzącym do poznania zupełnie nowych i istotnych zjawisk genetycznych. To jej głębokie przekonanie zostało potwierdzone dopiero w ostatnich kilkunastu latach. Najpierw jednak genetycy pracujący z bakteriami i fagami (wirusami bakteryjnymi) w latach siedemdziesiątych wykryli analogiczne ruchome elementy genetyczne u bakterii. Był to już okres, w którym genetyka przechodziła na poziom molekularny i geny jako określone odcinki DNA można było izolować, a następnie także określać ich strukturę ustalając kolejność ułożenia — czyli sekwencję — czterech różnych rodzajów nukleotydów (T, C, A, G; tworzących komplementarne pary: A—T, G—C). Jak wiadomo, sekwencja nukleotydów wzdłuż łańcuchów DNA stanowi zakodowaną informację genetyczną przede wszystkim o syntezie białek — bezpośrednich produktów aktywności genu. W krótkim czasie opisano zauważone u bakterii dziesiątki rodzajów ruchomych elementów genetycznych. Mogą to być stosunkowo krótkie odcinki DNA, złożone z 700 do 1400 nukleotydów, które zwane są obecnie elementami (sekwencjami) insercyjnymi (IS). Mogą też one być znacznie dłuższe — zawierające od kilku do ponad 20 tysięcy nukleotydów — i nazywane są wówczas transpozonomi. Te ostatnie zostały dokładnie zanalizowane, gdyż zawierają one zwykle geny oporności bakterii na różne antybiotyki (np. ampicilinę, tetracyklinę czy kanamycynę). Dzięki tej właściwości można łatwo śledzić ich kolejne transpozycje nie tylko w obrębie jednego chromosomu bakteryjnego, ale także wtedy, gdy z chromosomów przenoszą się do plazmidów czy do DNA fagów lub też w kierunku odwrotnym.



Gdy poznano strukturę jednostek IS oraz transpozonów, można było wyjaśnić naturę procesów prowadzących do „przeskakiwania” ich w różne miejsca chromosomu czy też do odrębnych cząsteczek DNA plazmidów czy fagów. Wszelkie ruchome jednostki genetyczne mają przede wszystkim na obu końcach identyczne, powtórzone sekwencje nukleotydowe w układzie prostym (IS) lub odwróconym (SI), które są konieczne, aby cały element miał zdolność do transpozycji. Poza tym wykazano, że przy włączaniu transpozonu w nowe miejsce DNA rozpoznawana jest krótka sekwencja złożona z pięciu do dziewięciu nukleotydów. Tylko w takich miejscach transpozon może być włączony, przy czym po jego włączeniu ową krótką sekwencję odnajdujemy w dwóch kopiach





po obu stronach włączonego transpozonu. Ponieważ tego rodzaju krótkich sekwencji w cząsteczkach DNA złożonych z milionów nukleotydów (jak np. w chromosomie bakteryjnym) jest bardzo wiele, to transpozony mogą być włączane w liczne nowe pozycje — zarówno wewnątrz, jak i w sąsiedztwie bardzo różnych genów. Niektóre z większych transpozonozów zawierają oprócz genów oporności na antybiotyki także gen kodujący specjalny enzym warunkujący ich zdolność do transpozycji. Enzym ten, zwany transpozazą, rozpoznaje specyficzne sekwencje powtórzone na końcach transpozonozu, jak i krótkie sekwencje miejsca włączenia transpozonozu i, nacinając pojedyncze łańcuchy podwójnej helisy DNA na końcach rozpoznawanych sekwencji, powoduje najpierw przecięcie łańcuchów, a następnie połączenie końców transpozonozu z łańcuchami DNA biorcy. W wyniku dalszych dość złożonych procesów powiązanych z częściową replikacją DNA, następuje włączenie transpozonozu w nowym położeniu w DNA. Procesom tym towarzyszy często reorganizacja większych obszarów DNA i np. wypadanie (delecje) różnej długości odcinków DNA — co obserwowała też Barbara McClintock. Również u bakterii włączenie takich ruchomych elementów genetycznych w obrębie genu czy w jego bliskim sąsiedztwie wywołuje podobne efekty niestałości przejawiania się genów. Tak więc realność transpozonozów została udowodniona i poznano przynajmniej częściowo mechanizmy leżące u podstawy ich ruchliwości. Teraz dopiero wszyscy przypomnieli sobie prace McClintock!

Barbara Mc Clintock przypisywała transpozonom istotną rolę w procesach różnicowania się komórek i nazywała je elementami regulującymi. Te właściwości mogłyby one przejawiać jedynie u wyższych wielokomórkowych organizmów roślinnych i zwierzęcych. W ciągu ostatnich kilkunastu lat wykryto podobne lub zbliżone ruchome jednostki genetyczne — najpierw u drożdży, a następnie u muszki owocowej *Drosophila*. W ostatnich latach znaleziono je także u ssaków z człowiekiem włącznie. Wywołują one nie tylko te same zmiany w aktywności genów co u bakterii czy kukurydzy, ale mają również te same właściwości molekularne. Ich różnej długości sekwencje nukleotydowe są zawsze zakończone krótkimi sekwencjami powtórzonymi, a ich mechanizm transpozycji musi być bardzo zbliżony do transpozonozów bakteryjnych, albowiem również włączane są w miejscach krótkich 5—9 nukleotydowych sekwencji, które po włączeniu transpozonozu odnajdujemy podwojone po obu jego końcach. Obecnie w klasycznych mutantach niestałych kukurydzy opisanych przez Barbarę McClintock wykazano istnienie, wstawionych do genów, sekwencji rozmaitych transpozonozów. Transpozony występują więc w całym świecie ożywionym, od wirusów do człowieka. Wykazano nawet, że wirusy onkogenne (rakotwórcze) ptaków i ssaków — wywołujące u zwierząt różnego rodzaju raki, jak białaczki czy mięsaki — mają, po przekształceniu ich RNA w DNA, strukturę typową dla transpozonozów i są włączane do DNA chromosomów zwierzęcych w wyniku procesów zbliżonych do włączania transpozonozów bakteryjnych.

Pozostaje otwarte pytanie, czy tak powszechnie występujące w świecie ożywionym różnego rodzaju ruchome elementy genetyczne mogą rzeczywiście, jak to zakładała Barbara McClintock, odgrywać istotną rolę w procesach wzrostu i różnicowania się komórek i spełniać rolę „elementów regulujących” wzrost i różnicowanie się organizmów. Obecnie nie ma na to dowodów. Ostatnio jednak wykazano, że w procesie różnicowania się komórek produkujących przeciwciała (czynnych w procesach obrony immunologicznej zwierząt) zachodzą w chromosomach, zawierających DNA kodujące te przeciwciała, liczne, bardzo złożone reorganizacje struktury DNA; w wyniku owych zmian elementy, z których złożone są geny przeciwciał, leżące w komórkach embrionalnych daleko od siebie, znajdują się blisko siebie w komórkach zróżnicowanych — dzięki czemu następuje montowanie olbrzymiej ilości genów różnych przeciwciał z ograniczonej ilości elementów wyjściowych. W tych reorganizacjach, związanych z usuwaniem (delecją) różnych odcinków DNA, niektórzy badacze widzą procesy zbliżone do transpozycji elementów ruchomych DNA.



Rozwiązanie zadania M 362. Mamy  $376^n =$   
 $= 376^2 \cdot 376^{n-2} = 141376 \cdot 376^{n-2} =$   
 $= 141000 \cdot 376^{n-2} + 376 \cdot 376^{n-2} =$   
 $= 1000 \cdot 141 \cdot 376^{n-2} + 376^{n-1}.$

Wynika stąd, że trzy ostatnie cyfry  $376^n$  są takie same, jak trzy ostatnie cyfry  $376^{n-1}$ . Wynika stąd przez indukcję, że  $376^n$  kończy się tymi samymi cyframi, co  $376^1$ , a więc  $376^n = \dots 376$ .

Tak więc idee Barbary McClintock obecnie nikogo już nie szokują! Doczekała się ona czasu, w którym badane przez nią dziwne zjawiska u kukurydzy stały się jednym z bardziej aktualnych problemów genetyki molekularnej. Waga tych badań została właściwie oceniona przyznaniem jej nagrody Nobla w osiemdziesiątym drugim roku życia.



Medal Fieldsa jest często nazywany „Nagrodą Nobla matematyków”. Ustanowienie medalu jest bez wątpienia związane z faktem, że Alfred Nobel zdecydował się nie włączyć matematyki do nauk wartych ufundowanej przez niego nagrody. Nie ma udokumentowanych świadectw wyjaśniających to wykluczenie, ale ogólnie znana w społeczności matematyków plotka przypisuje to osobistemu konfliktowi pomiędzy Noblem a znanym szwedzkim matematykiem M. Mittag-Lefflerem. Ta legenda jest poparta listem przyjaciela J. C. Fieldsa, profesora J. L. Synge: „To od Fieldsa słyszałem o nieporozumieniach pomiędzy Noblem a Mittag-Lefflerem. Przypuszczam, że chodziło o osobistą zawiść, ... dla każdego kto widzi w matematyce „królową nauk” to wykluczenie z nagród Nobla wydaje się bardzo dziwne”. Fields był przyjacielem Mittag-Lefflera i być może to także rzuca pewne światło na motywy ustanowienia nagrody dla matematyków.

Medale Fieldsa są przyznawane przez Międzynarodową Unię Matematyczną co cztery lata z okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków (tylko w ubiegłym roku, z powodu odroczenia o rok Kongresu w Warszawie, wręczono laureatom medale w rok po ich przyznaniu). Nagroda została ustalona zgodnie z testamentem profesora J. C. Fieldsa z Uniwersytetu w Toronto. Prof. Fields pracował nad teorią funkcji algebraicznych, znany jest jednak, przede wszystkim, jako zdolny administrator nauki. J. C. Fields zmarł w 1932 r., a pierwsi laureaci zostali nagrodzeni na Kongresie w Oslo w 1936 r. Od tego czasu przyznano 27 medali Fieldsa. Utarła się tradycja, że medale przyznawane są „młodemu matematykowi”, co w praktyce oznacza wiek poniżej 40 lat.

W 1982 r. medale otrzymali Alain Connes z Francji oraz William P. Thurston i Shing-Tung Yau z USA.

Dwóch laureatów, W. Thurston i S. Yau, otrzymało medale Fieldsa między innymi za prace z zakresu topologii i geometrii różności trójwymiarowych (to znaczy przestrzeni wyglądających lokalnie jak świat, w którym żyjemy). W szczególności prace Thurstona przyczyniły się do lepszego poznania różności trójwymiarowych.

Według legendy Nobel zwrócił się do znanych matematyków z pytaniem, czy Mittag-Leffler miałby szansę dostać za swoje wyniki międzynarodową nagrodę. Po twierdzącej odpowiedzi matematyka została usunięta z dyscyplin, za które miała być przyznawana fundowana przez Nobla nagroda.

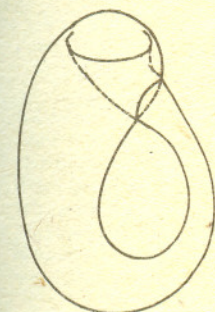
W kularach tegorocznego Kongresu Matematyków mówiło się, że bliskim otrzymania medalu Fieldsa był jeden z polskich matematyków.

Listę wszystkich poprzednich laureatów medalu Fieldsa można znaleźć w *Delcie* 1/1976 i 2/1979.

## Trójwymiarowe różności według Thurstona

Dr Józef PRZYTYCKI

Dokładniej: różność  $n$ -wymiarowa jest zbiorem spójnym (w jednym kawałku), lokalnie homeomorficznym z  $n$ -wymiarową przestrzenią euklidesową (zapewnia to jej metryzowalność) i zupełną (czyli zawiera swoje punkty skupienia). Np. płaszczyzna, sfera, koło domknięte; spośród nich tylko sfera jest  $n$ -różnością ( $n = 2$ ). Różności homeomorficzne utożsamiamy.



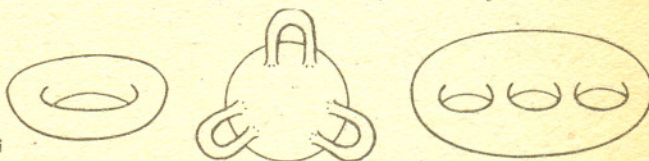
Butelka Kleina

Powierzchnia nieorientowalna to taka, która (mówiąc potocznie) ma tylko jedną stronę: wędrując po niej można znaleźć się w tym samym punkcie „do góry nogami”. Wstęga Möbiusa jest jednostronna, jest dwuwymiarową różnością, ale ma brzeg. W przestrzeni trójwymiarowej nie mieści się żadna nieorientowalna 2-różność (zwarta, bez brzegu).

Różnością  $n$ -wymiarową nazywamy przestrzeń lokalnie modelowaną przez  $n$ -wymiarową przestrzeń euklidesową. Dalej będziemy zajmować się głównie różnościami zwartymi bez brzegu — takie  $n$ -wymiarowe różności nazywać będziemy krótko  $n$ -różnościami.

Jedyną 1-różnością jest okrąg; oznaczamy go  $S^1$ .

2-różności, czyli powierzchni, jest nieskończenie wiele. Są to np. sfera ( $S^2$ ), torus ( $T^2$  — można go traktować jako sferę z doklejonym uszkiem), sfera z dwoma uszkami, z trzema itd., tzn. sfery z  $n$  uszkami.

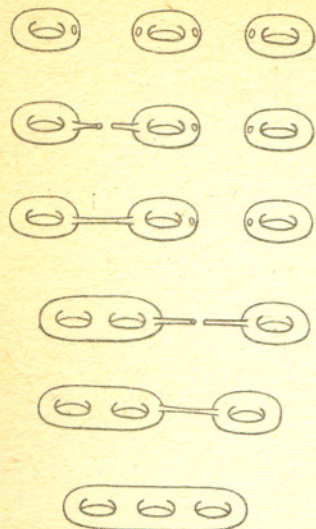


Torus i sfery z trzema uszkami

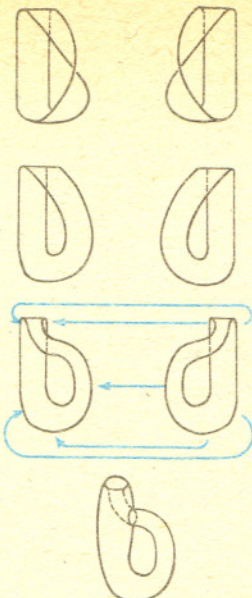
Podane przykłady to wszystkie 2-różności orientowalne. Z kolei wszystkie nieorientowalne 2-różności to płaszczyzna rzutowa  $RP^2$ , butelka Kleina (nieorientowalny torus — można go umieścić w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej tylko z samoprzecięciem) oraz powierzchnie uzyskane z tych dwóch przez doklejenie pewnej liczby uszek.

3-różności nie dają się tak łatwo sklasyfikować i „prawie do teraz” nie można było nawet oczekiwać, że będzie to wykonalne w podobny jak dla powierzchni sposób. „Prawie do teraz” znaczy do najnowszych badań W. Thurstona.





Suma spójna trzech torusów

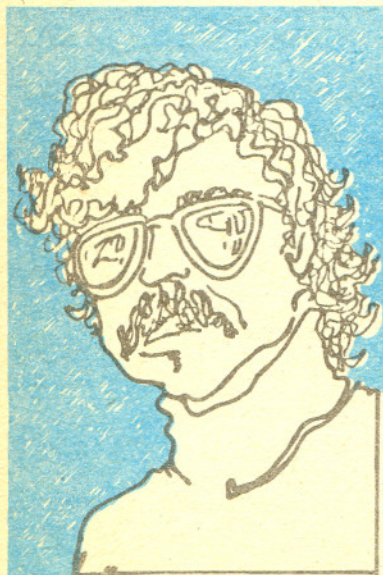


Tworząc sumę spójną dwóch płaszczyzn rzutowych korzystamy z faktu, że płaszczyzna rzutowa z wyciętym kołem jest wstęgą Möbiusa (dowód np. w *Delcie* 5/1982).

Haken jest powszechnie znany jako współautor dowodu twierdzenia o czterech barwach, mówiącego, że każdą mapę można pomalować czterema kolorami tak, by sąsiednie państwa miały różną barwę.

Oczywiście chodzi o koła (kule) w sensie określonej na rozmaiłości metryki. Łatwo zauważyć, że koła na płaszczyźnie i walcu są do pewnego promienia (jakiego?) izometryczne, a powyżej — nie; płaszczyzna i walec mają więc ten sam typ geometryczny.

Strukturę geometryczną rozmaiłości określa się nie tylko dla rozmaiłości zwartych. Na rozmaiłości niezwartej można jednak znaleźć więcej niż jedną strukturę geometryczną (np. na płaszczyźnie, na walcu).



W. Thurston urodził się 30 października 1946 r. w Waszyngtonie. Doktorat uzyskał w 1972 r. na Uniwersytecie w Berkeley, a obecnie pracuje na Uniwersytecie w Princeton.

Powróćmy do powierzchni. Jeśli przyjrzeć się im uważnie, to można zauważyć, że (poza  $S^2$ ) dadzą się one uzyskać z  $T^2$  (orientowalne) i  $RP^2$  (nieorientowalne) za pomocą operacji nazywanej sumą spójną i oznaczanej  $\#$ . Sumę spójną dwóch powierzchni tworzymy w następujący sposób: wycinamy w każdej z nich koło (i wyrzucamy te koła), a następnie sklejamy brzeg jednej dziury z brzegiem drugiej. Łatwo zauważyć, że suma spójna jakiejś powierzchni  $M^2$  i  $T^2$  to  $M^2$  z dodatkowym uszkiem. Trudniej, że  $RP^2 \# RP^2$  to butelka Kleina. Jeszcze trudniej udowodnić, że

*Każda powierzchnia orientowalna to sfera lub suma spójna pewnej liczby torusów, a każda nieorientowalna to suma spójna pewnej liczby płaszczyzn rzutowych;  $S^2$ ,  $T^2$  i  $RP^2$  nie rozkładają się już na sumę spójną innych powierzchni, a powyższy rozkład pozostałych powierzchni jest jednoznaczny.*

Sumę spójną można analogicznie określić dla rozmaiłości wyższych wymiarów. Można też dowodzić analogicznych twierdzeń. Kneser, Haken i Milnor wykazali, że 3-rozmaiłości rozkładają się jednoznacznie na sumę spójną nierozkładalnych 3-rozmaiłości. Jednak te nierozkładalne „kawałki” okazują się dużo bardziej skomplikowane niż  $T^2$  i  $RP^2$ .

Ponieważ wiadomo było, że dla 4-rozmaiłości klasyfikacja tego typu co dla powierzchni jest niemożliwa, więc sądzono, że i dla 3-rozmaiłości prostej klasyfikacji nie będzie. Sądzono jednak mylnie.

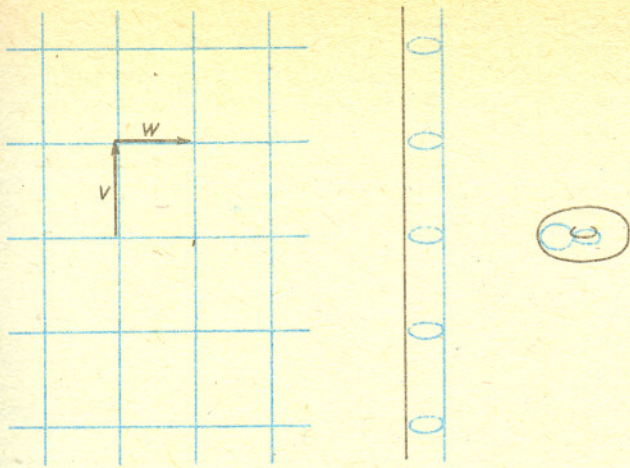
Zanim przedstawimy rezultaty Thurstona, przyjrzyjmy się jeszcze raz powierzchniom. Tym razem zajmiemy się ich strukturą geometryczną. Mówimy, że na rozmaiłości jest określona struktura geometryczna, jeśli można na niej określić jednorodną metrykę (taki sposób mierzenia odległości, że narysowane na rozmaiłości dwa koła (kule) o takich samych promieniach są izometryczne). Jeśli dwie rozmaiłości mają struktury geometryczne takie, że koła (kule) o równych promieniach nie przekraczających pewnej liczby  $r$  są na nich obu izometryczne, to mówimy, że są lokalnie izometryczne i mają ten sam typ geometryczny. Dla 2-rozmaiłości możliwe są trzy typy: powierzchnie eliptyczne (zwane też sferycznymi), paraboliczne (euklidesowe) i hiperboliczne (Bolyai-Łobaczewskiego). Oznacza to, że są one lokalnie izometryczne odpowiednio ze sferą ( $S^2$ ), płaszczyzną euklidesową ( $E^2$ ) i płaszczyzną hiperboliczną ( $H^2$ ). Zachodzi przy tym twierdzenie:

*Spośród 2-rozmaiłości  $S^2$  i  $RP^2$  mają strukturę eliptyczną,  $T^2$  i butelka Kleina — paraboliczną, a pozostałe hiperboliczną.*

Stwierdza się to przez wskazanie takich izometrii wzorcowej struktury (a więc  $S^2$ ,  $E^2$  lub  $H^2$ ), żeby po sklejeniu (wszystkich) odpowiadających sobie w tych izometriach punktów powstała dana 2-rozmaiłość.

Jak widać większość 2-rozmaiłości (nieskończenie wiele) ma strukturę hiperboliczną (innych jest tylko cztery). Aż do badań Thurstona przypuszczenie, że podobnie jest dla 3-rozmaiłości, wydawało się bezpodstawne. Thurston badając (również za pomocą komputera) wiele przykładów 3-rozmaiłości doszedł do wniosku, że musi istnieć jakaś analogia między klasyfikacją 2- i 3-rozmaiłości. Trzeba tylko rozbić 3-rozmaiłości na

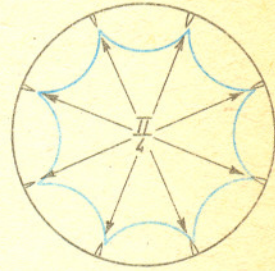




Aby uzyskać eliptyczną strukturę geometryczną płaszczyzny rzutowej, należy użyć symetrii względem środka sfery (porównaj *Delta* 5/1982 i 12/1981).

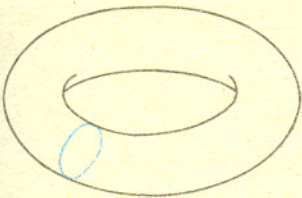
Strukturę paraboliczną torusa uzyskamy sklejając punkty odpowiadające sobie przy przesunięciach postaci  $k \cdot v + l \cdot w$  (gdzie  $v$  i  $w$  to nierównoległe wektory). Polega to na zwinieniu płaszczyzny  $E^2$  w rurkę tak, by pionowe kreski nałożyły się, a potem zwinieniu tej rurki (wąż pokryjający swój ogon), tak, by nałożyły się jej równoleżniki.

Podobnie (przez zwinianie płaszczyzny  $H^2$ ) uzyskamy hiperboliczną strukturę sfery z dwiema rączkami, jeśli „kratka”, której odpowiednie linie mają się nakładać, będzie miała „oczka” w kształcie ośmiokąta o kątach równych  $\pi/4$ . Można taki ośmiokąt wygodnie obejrzeć w modelu Poincarégo w kole. W tym modelu  $H^2$  (porównaj *Delta* 12/1981) proste są łukami okręgów prostopadłych do brzegu modelu. Pojedyncze narysowane oczko można powielić pamiętając, że symetrie w rozważanym modelu to inwersje (więcej o nich w *Delcie* 10/1983).

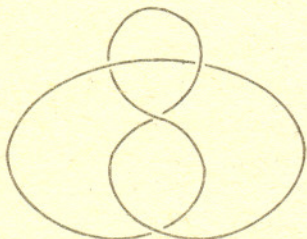


Powierzchnia  $M^2$  jest nieścieśnialna w  $M^3$ , gdy każda pętla nie dająca się ściągnąć do punktu w  $M^2$  nie da się też ściągnąć do punktu w  $M^3$ .

Nieściągalna pętla na torusie



Rozmaitość hiperboliczna ma objętość. Okazuje się ona użytecznym niezmiennikiem przy próbach klasyfikacji 3-rozmaitości. Thurston i Jorgensen (duński matematyk pracujący w USA) wykazali, że objętości 3-rozmaitości tworzą dobrze uporządkowany podzbiór liczb rzeczywistych dodatnich. W szczególności istnieje rozmaitość o najmniejszej objętości. Thurston skonstruował rozmaitość o objętości około 0,98 (w naturalnej jednostce długości — w przestrzeni hiperbolicznej i eliptycznej taka jednostka istnieje, a w parabolicznej, np. euklidesowej, nie) i sądzi, że mniejszej objętości uzyskać się nie da. Dowodu na to jednak nie ma. Pozostaje też pytanie, jaka jest rozmaitość o drugiej, trzeciej itd. objętości. Przykład Thurstona otrzymuje się z węzła ósemkowego (przedstawionego na rysunku) przez wycięcie jego otoczenia i wklejenie go z powrotem, ale w inny sposób.



„kawałki” mniej skomplikowane niż to gwarantuje rozkład na sumę spójną.

Tworząc sumę spójną dwóch powierzchni sklejaliśmy je wzdłuż okręgu ( $S^1$ ). Analogicznie 3-rozmaitości skleja się wzdłuż sfer ( $S^2$ ). Zauważmy, że suma spójna powierzchni to ich sklejenie wzdłuż jedynej możliwej 1-rozmaitości. Przy sklejanju 3-rozmaitości korzystać możemy nie tylko z  $S^2$ , ale i innych 2-rozmaitości. W 1977 r. amerykańscy matematycy W. Jaco i P. Shalen oraz niezależnie Niemiec K. Johannson znaleźli rozkład 3-rozmaitości wzdłuż torusów ( $T^2$ ). Co więcej, udowodnili, że rozkład 3-rozmaitości wzdłuż torusów nieścieśnialnych jest jednoznaczny.

Thurston wysunął następującą hipotezę:

*Jeśli 3-rozmaitości rozłożymy wzdłuż sfer i nieścieśnialnych torusów, to otrzymane kawałki mają strukturę geometryczną.*

Podobnie jak 2-rozmaitości, owe kawałki mogą mieć strukturę eliptyczną (ze sklejanja  $S^3$ ), paraboliczną (ze sklejanja  $E^3$ ), hiperboliczną (ze sklejanja  $H^3$ ). Thurston wykazał, że w wymiarze 3 jest osiem istotnie różnych struktur geometrycznych, a struktura hiperboliczna jest najważniejsza.

Hipoteza Thurstona zawiera w sobie liczącą już 80 lat i ciągle nie dowiedzioną hipotezę Poincarégo:

*Jeżeli w 3-rozmaitości każda pętla jest ściągalna do punktu, to rozmaitość ta jest homeomorficzna z  $S^3$ .*

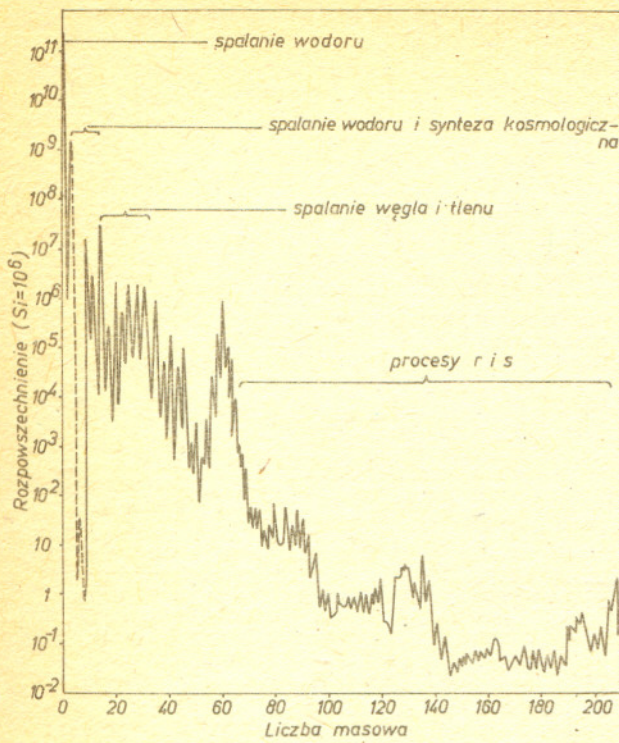
Thurston wykazał słuszność swojej hipotezy w wielu istotnych przypadkach, na przykład jeśli rozmaitość  $M^3$  zawiera powierzchnię nieścieśnialną różną od  $S^2$ . Ten fragment hipotezy nazywany bywa Twierdzeniem Monstrum i jego dowodu prawie nikt do końca nie rozumie.

W styczniu 1982 r. Thurston ogłosił, że potrafi udowodnić swoją hipotezę dla następnej dużej klasy 3-rozmaitości — dla tych, które mają pewne specjalne symetrie. Do pełnego dowodu hipotezy wiele jednak jeszcze brakuje.

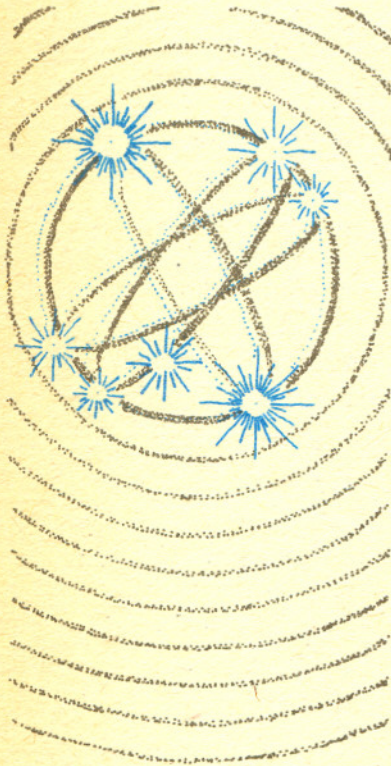


# Powstawanie pierwiastków chemicznych

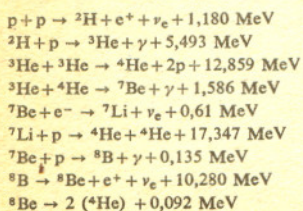
Mgr Andrzej MAJHOFER



Od końca XIX wieku fizycy usiłują wyjaśnić obserwowaną częstość występowania pierwiastków chemicznych w Przyrodzie. Poszukiwania korelacji rozpowszechnienia pierwiastka z jego miejscem w układzie okresowym zakończyły się niepowodzeniem, którego przyczyną stała się jasna po odkryciu jądra atomowego i jego składników: neutronu i protonu. Odpowiedzi należało szukać w zrozumieniu mechanizmów reakcji jądrowych i ich związku z ewolucją Wszechświata. Doskonalone jednocześnie metody obserwacyjne pozwalały badać coraz odleglejsze obszary Wszechświata i na tej podstawie wyznaczać względne rozpowszechnienie izotopów. Wyniki przedstawia wykres. Większość materii stanowią wodór i hel. Częstość występowania innych pierwiastków maleje ze wzrostem masy atomowej poza lokalnymi maksimami w pobliżu  $A = 60$  (najstabilniejsze jądra — żelazo, nikiel),  $A = 90$  i  $A = 130$  (jądra silnie związane o „magicznych” liczbach neutronów  $N = 50$  i  $N = 82$ ) oraz wyraźnym minimum dla jąder litu, berylu i boru.



Cykl p-p

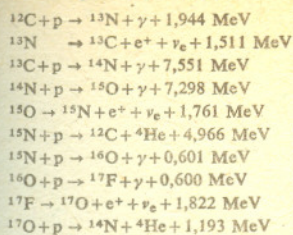


W 1948 roku Ralph Alpher, Hans Bethe i George Gamow rozwinęli teorię powstawania jąder atomowych we wczesnych fazach ewolucji Wszechświata tuż po Wielkim Wybuchu (tak zwana teoria alfa-beta-gamma). Przyjęli oni, że w początkowym stadium ewolucji Wszechświata wypełniony był fotonami i neutronami. Gdy wraz z rozszerzaniem się Wszechświata malały temperatura i gęstość materii, neutrony zaczęły rozpadać się na protony i elektrony (rozpad  $\beta^-$ ); następujące potem oddziaływanie neutronów i protonów doprowadziło do powstawania deuteru i trytu. Jądra cięższe w teorii alfa-beta-gamma miały powstawać w wyniku przyłączania kolejnych neutronów i dalszych przemian  $\beta^-$ . W Przyrodzie nie występują jednak stabilne jądra atomowe o liczbach masowych 5 i 8 i wobec tego zaproponowany mechanizm mógł wyjaśnić co najwyżej syntezę helu.

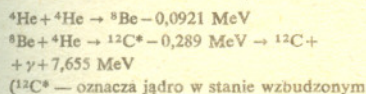
Konkurencyjną teorię wysunęli w 1957 roku Margaret i Geoffrey Burbidge, William Fowler i Fred Hoyle (tak zwana teoria  $B^2FH$ ). Rozwinęli oni wcześniejsze pomysły Hansa Bethego (z lat 1938—40), który uważał syntezę helu z wodoru za źródło energii gwiazd, i przyjęli, że jądra pierwiastków cięższych od wodoru tworzone są w reakcjach jądrowych zachodzących wewnątrz gwiazd i wyrzucane są w przestrzeń kosmiczną w czasie wybuchów supernowych. Autorzy teorii  $B^2FH$  dokładnie przeanalizowali kilka podstawowych typów procesów podając warunki ich występowania i oceniając czasy trwania. Wykorzystali przy tym ówczesną wiedzę o strukturze jąder atomowych i mechanizmach reakcji jądrowych (dane o energiach wiązania, czasach życia i przekrojach czynnych na reakcje wychwytu neutronu lub protonu). Potrafili w ten sposób odtworzyć krzywą rozpowszechnienia izotopów. Badania prowadzone w następnych latach potwierdziły słuszność teorii  $B^2FH$  w odniesieniu do ciężkich izotopów, okazało się jednak, że za jej pomocą nie można odtworzyć częstości występowania pierwiastków najlżejszych  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  i  ${}^7\text{Li}$ . Robert Wagoner, William Fowler i Fred Hoyle wrócili więc w pracy opublikowanej w 1967 roku do hipotezy syntezy pierwotnej (we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata — nazywana również syntezą kosmologiczną). Zbadali oni procesy, które mogły zachodzić w gęstej i gorącej materii przed wytworzeniem się gwiazd, uwzględniając wpływ oddziaływania promieniowania oraz zderzeń między protonami, neutronami i powstającymi jądrami. Rozwinęli w ten sposób starą teorię alfa-beta-gamma i uzupełnili obraz ewolucji Wszechświata w pierwszych minutach jego istnienia. Tak powstała akceptowana



Cykl CNO



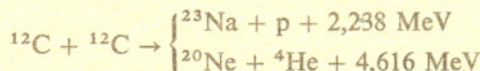
Proces  $3\alpha$



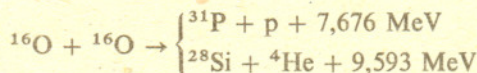
William A. Fowler urodzi\u0142 si\u0119 w Pittsburghu (Pensylwania) w 1911 roku, doktoryzowa\u0142 si\u0119 w 1936 w California Institute of Technology, w kt\u00f3rym pracuje do dzi\u015b.

dzi\u015b teoria wi\u0105\u017c\u0105ca powstawanie izotop\u00f3w pierwiastk\u00f3w chemicznych z teori\u0105 Wielkiego Wybuchu i modelami gwiazd.

Zgodnie z t\u0105 teori\u0105 w ci\u0105gu kilku pierwszych minut istnienia Wszechwiata w czasie jego ekspansji i stygni\u0119cia usta\u0142i\u0142 si\u0119 obserwowany, obecnie stosunek liczby atom\u00f3w helu i wodoru. Dalsza synteza helu z wodoru by\u0142a wynikiem „spalania” wodoru w gwiazdach w procesie p — p lub z udzia\u0142em j\u0105der w\u0119gla i azotu jako katalizator\u00f3w w tak zwanym cyklu CNO. Po wypaleniu wodoru, gdy na skutek zapadania grawitacyjnego wzrasta g\u0119sto\u015b\u0107 i temperatura, rozpoczyna si\u0119 spalanie helu (proces  $3\alpha$ ). Produkowane j\u0105dra w\u0119gla  $^{12}\text{C}$  mog\u0105 przy\u0142czaj\u0105c dalsze cz\u0105stki  $\alpha$  tworzy\u0107 j\u0105dra  $^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$  i  $^{32}\text{S}$ . Gdy temperatura wzro\u015bnie ponad  $8 \cdot 10^8 \text{ K}$ , rozpoczyna si\u0119 „spalanie” w\u0119gla g\u0142\u00f3wnie poprzez reakcje:



Powy\u017cej  $2 \cdot 10^9 \text{ K}$  rozpoczyna si\u0119 „spalanie” tlenu



Dalszy wzrost temperatury i g\u0119sto\u015bci prowadzi do zwi\u0119kszenia szybko\u015bci zachodz\u0105cych reakcji rozszczepiania ju\u017c istniej\u0105cych i syntezy ci\u0119\u017cszych j\u0105der. Ustala si\u0119 w\u00f3wczas r\u00f3wnowaga odpowiadaj\u0105ca zwi\u0119kszeniu liczby najci\u0119\u017ciej zwi\u0105zanych j\u0105der; mo\u017cna w ten spos\u00f3b wyja\u015bni\u0107 lokalne maksimum krzywej rozpowszechnienia pierwiastk\u00f3w dla  $A \approx 60$ . W rozwa\u017canych dotychczas procesach poza coraz ci\u0119\u017cszymi pierwiastkami produkowana jest r\u00f3wnie\u017c ogromna ilo\u015b\u0107 energii. Synteza j\u0105der ci\u0119\u017cszych ni\u017c \u017celaza i niklu wymaga dostarczenia energii, mo\u017ce jednak zachodzi\u0107 we w\u0119trzu gwiazdy. W teorii  $\text{B}^2\text{FH}$  dzieje si\u0119 to g\u0142\u00f3wnie w procesach przy\u0142czania neutron\u00f3w. W procesie powolnego wychwytu neutron\u00f3w (proces s od angielskiego slow — powolny) j\u0105dro przy\u0142acza neutron, a nast\u0119pnie podlega przemianie  $\beta^-$ ; wielokrotne powtarzanie tego procesu mo\u017ce doprowadzi\u0107 do powstania izotop\u00f3w a\u017c do  $^{209}\text{Bi}$  — dalsz\u0105 syntez\u0119 uniemo\u017cliwia szybki rozpad  $\alpha$  produkt\u00f3w. W obecno\u015bci bardzo du\u017cych strumieni neutron\u00f3w mo\u017cliwy staje si\u0119 bardzo szybki wychwyty kilku do kilkunastu neutron\u00f3w mi\u0119dzy przemianami  $\beta^-$  — powstaj\u0105 w\u00f3wczas j\u0105dra o du\u017cym nadmiarze neutron\u00f3w (proces r od rapid — szybki). T\u0142umaczy on powstawanie pierwiastk\u00f3w do uranu i toru w\u0142\u0105cznie.

Wyja\u015bnienie obserwowanego rozpowszechnienia izotop\u00f3w wymaga\u0142o rozpatrzenia wielu proces\u00f3w zachodz\u0105cych r\u00f3wnolegle w warunkach bardzo odleg\u0142ych od dost\u0119pnych w laboratoriach. Konieczno\u015b\u0107 dok\u0142adnej znajomo\u015bci mas i czas\u00f3w \u017cy\u0107a j\u0105der nie wyst\u0119puj\u0105cych naturalnie na Ziemi od wielu lat wskazuje kierunki bada\u0144 teoretycznych i eksperymentalnych.

W 1983 roku Szwedzka Akademia Nauk przyzna\u0142a nagrod\u0119 Nobla z fizyki prof. Williamowi Alfredowi Fowlerowi — jednemu z g\u0142\u00f3wnych tw\u00f3rc\u00f3w przedstawionej wy\u017cej teorii.



**Rozwi\u0105zanie zadania F 152.** Oznaczmy:  $M_s, M_z, m$  — masy: S\u0142o\u015bca, Ziemi, satelity,  $v_1, v_2$  — pr\u0119dno\u015b\u0107 Ziemi przed i po wyrzeleniu satelity,  $r, R$  — promie\u0144 Ziemi i jej orbity,  $G$  — sta\u0142a grawitacji.

Zasada zachowania energii dla wszystkich trzech cia\u0142 g\u0142osi

$$\frac{m}{2} (v + v_2)^2 + \frac{M_z}{2} v_2^2 - \frac{GM_z m}{r} = \frac{GM_s m}{R} = \frac{M_z}{2} v_2^2,$$

a zasada zachowania p\u0119du

$$m(v + v_2) + M_z v_2 = m\sqrt{2}v_2 + M_z v_2.$$

$\sqrt{2} v_2$  jest tu pr\u0119dno\u015bci\u0105 ucieczki od S\u0142o\u015bca z orbity Ziemi.

Eliminuj\u0105c z tych r\u00f3wna\u0144  $v_2$  dostajemy

$$v = [(3 - 2\sqrt{2})v_2^2 + v_1^2]^{1/2} = 16,65 \text{ km/s},$$

gdzie  $v_u = \sqrt{2GM_z/r}$  jest pr\u0119dno\u015bci\u0105 ucieczki z powierzchni Ziemi — tzw. drug\u0105 pr\u0119dno\u015bci\u0105 kosmiczn\u0105. Tak znaleziona pr\u0119dno\u015b\u0107  $v$  zwana jest trzec\u0105 pr\u0119dno\u015bci\u0105 kosmiczn\u0105.



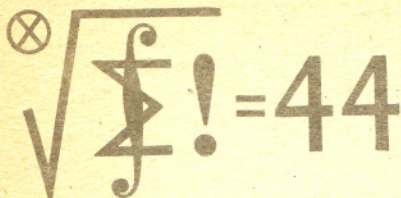
**Rozwi\u0105zanie zadania M 364.** Poszukiwanym kwadratem jest kwadrat  $AA_1BB_1$  z przek\u0105tn\u0105  $AB$ . Mamy w nim  $AA_1 + AB + AB_1 + AA = 1 + \sqrt{2}$ .

Gdy teraz  $A$  le\u017cy na boku  $MN$ , a  $B$  le\u017cy na dowolnym boku kwadratu  $MNPQ$  o boku  $a$ , mamy:

$$AM + AN = a, AP \geq a, AQ \geq a. \text{ R\u00f3wnocze\u015bnie gdy } AP \leq AQ, \text{ to } AB \leq AQ \leq \leq NQ = a\sqrt{2}, \text{ czyli } a \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ i}$$

$AM + AN + AP + AQ \geq 2a + AQ \geq \sqrt{2} + AB = (\sqrt{2} + 1) \text{ i w ostatnim wzorze r\u00f3wno\u015bci mog\u0105 zachodzi\u0107 tylko, gdy } AP = a \text{ i } AQ = AB, \text{ a wi\u0119c gdy } A = N, B = Q.$





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 85, 86, 87

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1984

85. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $m$ , dla których odpowiedź na następujące pytanie jest jednoznaczna: Ile prostych poprowadzono na płaszczyźnie, jeśli wiadomo, że zbiór wszystkich punktów przecięcia tych prostych składa się z  $m$  punktów?

86. Obliczyć objętość największego czworościanu, który można umieścić w dwunastościanie foremnym o danej krawędzi  $a$ .

87. a) Czy prawdą jest, że jeśli  $f: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow R$  jest dowolną funkcją taką, że dla każdej liczby  $a \in \langle 0, 1 \rangle$  istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a+n)$  i jej wartość nie zależy od wyboru  $a$ , to istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)?$$

b) Czy odpowiedź na pytanie a) zmieni się, jeśli dodatkowo założyc, że funkcja  $f$  jest ciągła?

Zadanie 87 przysłał pan Marek Gałecki z Milanówka.

Rozwiązania zadań z numeru 1/1984

Przypominamy treść zadań:

73. Dane są liczby dodatnie  $x_1, \dots, x_n$ . Niech  $s = x_1 + \dots + x_n$ ,  $s_k = s - x_k$ . Dowieść, że  $s_1^{-1} + \dots + s_n^{-1} > (n+1)s^{-1}$ .

74. Z talii 52 kart wybrano 13 kart. Niech  $N = \binom{52}{13}$ . Czy jest możliwe  $N$ -krotne wykonanie operacji zastąpienia jednej z 13 kart jedną z pozostałych 39 kart tak, by po  $N$  ruchach wrócić do konfiguracji wyjściowej i żeby żaden otrzymany po drodze zestaw 13-kartowy nie powtórzył się?

75. W 1984 punktach sfery o promieniu  $R$  umieszczono równe masy tak, że środek masy otrzymanego układu pokrywa się ze środkiem sfery. Obliczyć sumę kwadratów wzajemnych odległości tych punktów.

73. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną mamy  $g = \left(\prod s_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum s_k = \frac{n-1}{n} s$  oraz  $g^{-1} = \left(\prod s_k^{-1}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum s_k^{-1}$ . Stąd  $\sum s_k^{-1} \geq n g^{-1} \geq n \cdot \frac{n}{n-1} s^{-1} > (n+1)s^{-1}$ .

74. Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnimy twierdzenie: Dla każdej liczby  $k \leq n$  istnieje ustawienie wszystkich  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego w ciąg  $X_1, \dots, X_N$  (gdzie  $N = \binom{n}{k}$ ), w którym każde dwa sąsiednie zbiory, a także ostatni z pierwszym, mają dokładnie  $k-1$  elementów wspólnych; przy tym można żądać, by  $X_1$  i  $X_N$  były z góry zadanymi podziorami (o  $k-1$  wspólnych elementach). Dla  $n = 52$ ,  $k = 13$  dostajemy stąd twierdzącą odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem  $n$ . Dla  $n = 1, 2, 3$  teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy prawdziwość twierdzenia dla pewnego  $n \geq 3$  i niech  $E$  będzie zbiorem  $(n+1)$ -elementowym. Ustalmy  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$  (gdy  $k = 1$  lub  $k = n$  lub  $k = n+1$ , dowód jest banalny) i niech  $A, Z$  będą  $k$ -elementowymi podziorami  $E$  takimi, że  $P = A \cap Z$  jest zbiorem  $(k-1)$ -elementowym. Tak więc  $A = P \cup \{a\}$ ,  $Z = P \cup \{z\}$ ,  $a \neq z$ . Usuńmy ze zbioru  $P$  pewien (dowolnie wybrany) element  $p$  i zastąpmy go przez dowolny element  $q$  spoza  $P$ , różny od  $a$  i od  $z$  (zbiór  $E - P$  ma  $(n+1) - (k-1) \geq 3$  elementów, więc takie  $q$  istnieje); otrzymany zbiór oznaczmy przez  $Q$ . Zbiory  $P$  i  $Q$  mają  $k-2$  elementów wspólnych i nie zawierają elementów  $a$  i  $z$ .

Weźmy pod uwagę  $n$ -elementowy zbiór  $E - \{z\}$ . Z założenia indukcyjnego można ustawić wszystkie  $k$ -elementowe podzbiory tego zbioru w ciąg  $X_1, \dots, X_N$  spełniający warunki twierdzenia, a także można ustawić wszystkie jego  $(k-1)$ -elementowe podzbiory w podobny ciąg

$Y_1, \dots, Y_M$  (tu  $N = \binom{n}{k}$ ,  $M = \binom{n}{k-1}$ ), żądając przy tym, by  $X_1 = P \cup \{a\}$ ,  $X_N = Q \cup \{a\}$ ,

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

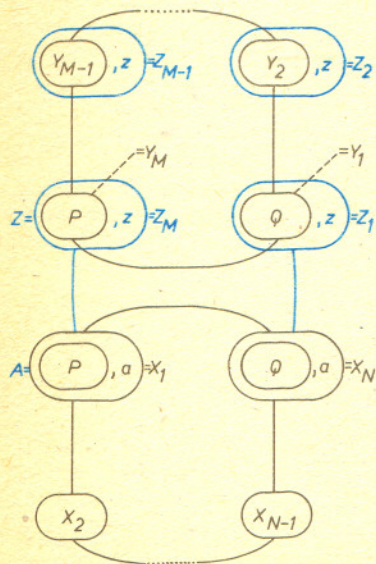
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 11/1983

Marek Prauza	- Poraj	46,02pkt
Małgorzata Czerniakowska-Gdańsk		43,88pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	42,55pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	36,74pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	36,56pkt
Jacek Uryga	- Bytom	36,02pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	34,23pkt
Wojciech Olszewski	- Brwinów	32,90pkt

Współczynniki trudności zadań:

67 - 2,53	68 - 1,34	69 - 2,81
-----------	-----------	-----------

Pan Marek Prauza jest czternastym członkiem "Klubu 44".





$Y_1 = Q, Y_M = P$ . Niech  $Z_i = Y_i \cup \{z\}$ . Ciąg zbiorów  $X_1, \dots, X_N, Z_1, \dots, Z_M$  zawiera wszystkie  $k$ -elementowe podzbiory zbioru  $E$ ; każde dwa sąsiednie mają  $k-1$  elementów wspólnych, ponadto  $X_1 = A, Z_M = Z$  są zadanymi na początku zbiorami (rysunek). Kończą to dowód indukcyjny.

75. Oznaczmy:  $O$  — środek kuli,  $A_1, \dots, A_m$  — wybrane punkty sfery ( $m = 1984$ ).  $O$  jest środkiem ciężkości układu  $A_1, \dots, A_m$ , więc  $\sum_i \overline{OA}_i = O$ . Szukana wartość równa się

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j} |A_i A_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\overline{A_i A_j})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\overline{OA_j} - \overline{OA_i})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (R^2 - 2\overline{OA_i} \cdot \overline{OA_j} + R^2) = \\ &= \sum_{i,j} (R^2 - \overline{OA_i} \cdot \overline{OA_j}) = m^2 R^2 - \sum_i \sum_j \overline{OA_i} \cdot \overline{OA_j} = m^2 R^2 - \left(\sum_i \overline{OA_i}\right) \left(\sum_j \overline{OA_j}\right) = m^2 R^2. \end{aligned}$$

## Mizar MSE (9)

Zbliżamy się do końca naszego kursu. Poznaliśmy już wszystkie konstrukcje językowe w Mizarze MSE. Dzisiaj pokażemy pewne techniki dowodzenia stosowane w przypadku występowania zdań alternatywnych. Zrobimy to na przykładach, które wcześniej rozwiązywaliśmy inaczej.

W przypadku, gdy chcemy dowodzić implikacji, której następnikiem jest zdanie alternatywne, możemy — i to jest wygodne — zastosować dowód nie wprost. Tak zrobiliśmy w odcinku 4. Możemy również postąpić nieco inaczej. Kiedy bowiem alternatywa jest prawdziwa? Wtedy, gdy co najmniej jeden z jej składników jest prawdziwy. Zatem jeżeli w trakcie dowodu założymy, że jeden ze składników dowodzonej alternatywy jest fałszywy i wykażemy, że drugi wtedy jest prawdziwy, to uważamy alternatywę za dowiedzioną. Weźmy przykład (por. odcinek 4)

```
FOR X,Y,Z ST NWCX,YJ & X<Y & NWCZ,XJ HOLDS NWCY,ZJ
PROOF
LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT A: NWCX,YJ
ASSUME NOT NWCZ,YJ
THEN NWCY,ZJ BY SPOJNOSC
HENCE NWCX,ZJ BY PRZECHODNIOSC,A
END
```

O tym, jak korzystamy z faktu wyrażonego za pomocą alternatywy, wspominaliśmy już w odcinku 7. Jeżeli pewna teza wynika tak z jednego, jak i z drugiego członu pewnej (uzyskanej bądź założonej) alternatywy, to uważamy tę tezę za prawdziwą. Takie rozumowanie nazywamy dylematem. Alternatywa mówiąca, że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe jest aksjomatem klasycznego rachunku logicznego. Prawo to nazywają prawem wyłączonego środka — trzeciego wyjścia nie ma, stąd łacińskie *tertium non datur*.

Pokażemy teraz, jak dla przykładu z odcinka 4 zbudować dowód wprost, korzystając z prawa wyłączonego środka. Musimy się zgodzić, że każde dwie nazwy (np. nazwy zmiennych) albo odnoszą się do tego samego przedmiotu, albo do dwu różnych — innej możliwości nie ma.

```
FOR X,Y,Z ST NWCX,YJ & X<Y & NWCZ,XJ HOLDS NOT NWCY,ZJ
PROOF
LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
A: NWCX,YJ AND B: X<Y AND C: NWCZ,XJ
D: NOW ASSUME D': Z=X
NOT NWCY,XJ BY A,B,ANTYSYMETRIA
HENCE NOT NWCY,ZJ BY D'
END
E: NOW ASSUME E': Z<X
THEN NOT NWCX,ZJ BY C,ANTYSYMETRIA
THEN E'': Z<Y BY A
NWCZ,YJ BY A,C,PRZECHODNIOSC
HENCE NOT NWCY,ZJ BY E'',ANTYSYMETRIA
END
THUS THESIS BY D+E
END
```

Powyższy dowód można znacznie skrócić. Checker Mizara MSE akceptuje również taki dowód wprost powyższego zdania:

```
FOR X,Y,Z ST NWCX,YJ & X<Y & NWCZ,XJ HOLDS NOT NWCY,ZJ
PROOF
LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
A: NWCX,YJ AND B: X<Y AND C: NWCZ,XJ
NOT NWCY,XJ BY A,B,ANTYSYMETRIA
HENCE NOT NWCY,ZJ BY C,PRZECHODNIOSC
END
```

Następny (tj. ostatni) odcinek poświęcimy zadaniom z zupełnie innej dziedziny niż nasze nieograniczenie, gęsto i liniowo uporządkowane ułamki. Ale to za miesiąc.

Dzisiaj jeszcze czujemy się w obowiązku podać pewną charakterystykę modułu sprawdzającego Mizara MSE (checkera). Wejście w techniczne szczegóły opisujące, jak odbywa się samo sprawdzanie w maszynie wymagałoby pewnie odrębnego kursu. Stąd podamy te wiadomości o checkerze, których można było i tak się domyślić oglądając dotychczasowe przykłady. A więc:

1. Każda tautologia rachunku zdań (jeśli jej maszynowy zapis zmieści się w komputerze) jest akceptowana przez checker bez dodatkowego uzasadnienia, a każde zdanie nie będące tautologią nie jest przez checker akceptowane. Każde zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora wymaga uzasadnienia.
2. Sprawdzając wynikanie wniosku z przesłanek checker uwzględnia jedynie te, które wymieniono po **by** oraz pochodzące z zahaczenia (**then, hence**).
3. Relacja równości ( $=$ ) jest przez checker automatycznie traktowana jako relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia.
4. Spójnik zdaniowy „równoważność” jest przez checker traktowany jako koniunkcja dwu implikacji.
5. Checker (na ogół) nie akceptuje wnioskowań, jeśli wśród przesłanek znajduje się więcej niż jedno zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego.
6. Następujące dwie reguły wnioskowania klasycznego rachunku logicznego checker stosuje nieproszony:  
 $a$  — prawo abstrahowania od konkretności,  
 $b$  — prawo przechodzenia od ogólnego do szczególnego przypadku.

### Zadania:

```
T26: FOR X,Y,Z ST X<Y & Y<Z & Z<X
HOLDS (MEX,Y,ZJ OR MCX,Z,YJ) IFF (NWCX,ZJ & NWCY,YJ)
T27: FOR X,Y EX X',Y' ST MEX',X',Y'J & MCX',Y',Y'J
T28: (EX X ST X=X) IMPLIES (EX X,Y,Z ST X<Y & Y<Z & X<Z)
```



*Dr Janusz GWIAZDA*

Do niedawna programiści uważali siebie i swoją profesję jeśli nawet nie za coś w rodzaju powołania, to na pewno za rodzaj sztuki. Tym szlachetniejszej, że wywodzącej się nieomal wprost z matematyki. Sztukę konstruowania programów uprawiano z mniejszym lub większym powodzeniem, ale zawsze z zamglonymi oczyma i rozwichrzoną czupryną.

Próby traktowania informatyki po prostu jako działu matematyki były obiecujące. W tym też kierunku skłaniali się ci, którzy w rozwoju metod numerycznych, teorii automatów, algorytmów itp., upatrywali rozwiązania problemu (przed którym stawał zawsze każdy autor programu) jak upewnić się, że zbudowany program jest już poprawny.

Inni, którym matematyka nie była tak bliska, skłonni byli raczej poszukiwać praktycznych metod weryfikacji programów, sposobów praktycznego postępowania eliminującego błędy.

Jedni i drudzy wiedzieli już bowiem, że rzeczą ludzką jest mylić się i programy z niewykrytymi błędami są zjawiskiem naturalnym.

Po zastanawiająco krótkim, bo dziesięcioletnim okresie sporów między tymi skrajnymi tendencjami, wpływ czasu i pewna konieczność (o której dalej wspomnimy) rozstrzygnęły już chyba, że programowanie, rzetelne programowanie, jest mieszaniną szczypty artystycznego natchnienia i wielu, wielu garści dobrego rzemiosła. Nic w tym nowego — w każdej dziedzinie ludzkiej działalności da się te dwa elementy odnaleźć, co najwyżej proporcje mieszaniny są inne. Spory zresztą wcale nie były akademickie, miały bowiem istotne znaczenie praktyczne nie tylko dla technik programowania i związanych z nimi wszelakich rutyn organizacyjnych, lecz także dla sposobów kształcenia informatyków, doboru ludzi do zawodu itp.

Rozwijano niemal równolegle, choć niezależnie, dwie drogi: jedna z nich to mozolne poszukiwanie metod formalnego (a więc tak beznamytnego jak tylko matematyka potrafi) dowodzenia poprawności programów; druga droga to gromadzenie (nawarstwiającej się w wyniku obserwacji i doświadczeń) wiedzy o sposobach pracy programistów i technikach organizatorskich doskonalących tę pracę.

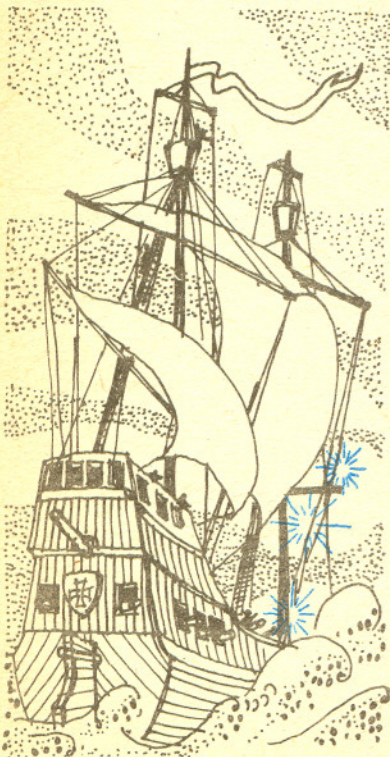
Pojawienie się mikroprocesorów postawiło problem niezawodności programów w nowym, dramatycznym świetle. Okazało się bowiem, że dowodzenie poprawności programów może się po prostu opłacać.

Do tej pory dowody (znacznie dłuższe niż sam program i od niego zwykle mniej zrozumiałe) budziły raczej wesołość praktyków, jako nieszkodliwe dziwactwa matematyków. Im samym było zresztą również nieswojo, że wymyślają coś tak niepraktycznego. Mikroprocesor jednak, któremu dla pewnych zastosowań wbudowuje się program na stałe (np. dla sterowania pralką) może być — i często jest — powielany w kilkuset tysiącach egzemplarzy. Wyobraźmy sobie, że program na stałe wbudowany w setki tysięcy pralek ma błąd — plałta firmy jest murowana. Okazuje się więc, że dla takich zastosowań formalny dowód poprawności programu (mimo iż znacznie kosztowniejszy od samego programu) jest nie tylko opłacalny, ale i konieczny.

Czy wobec tego już dziś każdy program dla komputera ma również dowód swojej poprawności? Wręcz przeciwnie. Po pierwsze: sposoby dowodzenia są jeszcze zbyt kosztowne. Po drugie: nie tak znowu wielu ludzi umie to robić. A wreszcie: nie zawsze przecież warto to robić (budując, powiedzmy, płot wokół działki nie przeprowadza się obliczeń statycznych, a przy kopaniu studni też raczej korzysta się z różdżkarza, niż z badań geologicznych i jakoś najczęściej wodę się ma).

Co więcej, sama poprawność nie wystarczy. Potrzebne jest jeszcze coś. W poważniejszych, kosztownych przedsięwzięciach informatycznych wymaga się obecnie, przy budowaniu oprogramowania, stosowania standardowych technik postępowania i dokumentowania pracy — to zaś wszystko razem (łącznie z dowodami niezawodności elementów) nie jest niczym innym jak inżynierskim postępowaniem. Jednym z zaleceń inżynierii (każdej, a nie jedynie programowania) jest wymaganie precyzji przy opisie — dokumentowaniu powstałej konstrukcji.

Programiści (jeszcze w znacznej liczbie artyści) dokumentacji programów nie znosili, uważając je za nużącą i całkowicie zbędną biurokrację. Na ogół też udawało się im (i udaje) w mniejszym czy większym stopniu od tego wykręcać. Nauczyciele programistów, mówiący o potrzebie dokumentowania, też raczej robili to z przekonania o potrzebie dobrych manier, niż absolutnej konieczności.







## Prawa Murphiego w informatyce

*Jeżeli cokolwiek może być zrobione  
źle, to na pewno będzie.*

*Każdy sprawdzony i działający  
program zawiera przynajmniej jeden  
błąd.*

Zdarzają się jednak przypadki, które wskazują na konieczność inżynierskiego (także rutynowego, a nie tylko z polotem) postępowania przy konstruowaniu programów. Jeden z takich przypadków miał miejsce w wojnie o Falklandy (czy Malwiny — jak kto woli). W eskadrze brytyjskiej mianowicie płynęły dwa supernowoczesne niszczyciele. Okrety, o których mówiono, że bronione są niezawodnie nie tylko masą urządzeń strzelających, lecz także że sterowanie tym całym precyzyjnym żelastwem przez komputery przewyższa wszystko, co mogliby zrobić ludzie, jest bowiem niezawodne — poprawne. Jakiż był więc szok, gdy w pierwszym starciu z lotnictwem zrzucającym torpedy okazało się, że jeden z niszczycieli został trafiony i zatonął, drugi zaś, poważnie uszkodzony, również przestał uczestniczyć w walce.

Analiza przyczyn takiej klęski (na szczęście zresztą nie ukrywana) pokazała na tyle dobitnie czym jest brak pełnego inżynierskiego postępowania przy budowie programów sterujących obroną, że nawet nieskłonna do wydatków z budżetu Pani Thatcher wyasygnowała kilkaset milionów funtów dla brytyjskich fakultetów kształcących informatyków. Okazało się bowiem, że obrona przeciwtorpedowa, a raczej program nią sterujący uważał zbliżającą się torpedę za tzw. przyjacielską (torpedy były francuskie) i statek nie reagował ani manewrami, ani próbami zniszczenia torpedy.

Co ma do tego inżynieria oprogramowania? Otóż ma. Obsługa statku, jeszcze przed starciem z lotnictwem, wiedziała o ewentualności użycia „przyjacielskich” torped. Nie była jednak w stanie zmodyfikować programu sterującego obroną — był skonstruowany „artystycznie”, jego dokumentacja prawdopodobnie też.

Zazwyczaj programiści, otrzymując zadanie poprawienia lub zmodyfikowania nie przez siebie napisanego programu, proponują napisanie go od nowa. Powodem jest olbrzymia trudność w rozszyfrowaniu konstrukcji — najczęściej niestety (jak już było powiedziane) pobieżnie lub wręcz błędnie opisanej.

Pewnym usprawiedliwieniem zadziwiającego, wydawałoby się, zjawiska, jakim jest niechęć do dokumentowania (w tak jeszcze świeżej dziedzinie jak informatyka), niech będzie fakt budzący moje szczere zdumienie, że i w innych, zdawałoby się inżyniersko ugruntowanych dziedzinach zdarza się to wcale nierzadko. Ot, choćby stałe kłopoty z wykopkami ulicznymi przy budowie arterii komunikacyjnych — nikt nie wie dokładnie, gdzie podczas kopania natrafi na kable, przewody gazowe czy kanalizacyjne.

*Najwcześniej w pół roku od  
rozpoczęcia użytkowania programu  
zostaje w nim wykryty najpoważniejszy  
błąd.*

*Liczba błędów niewykrywalnych jest  
nieskończona, w przeciwieństwie do,  
z definicji ograniczonej, liczby błędów  
wykrywalnych.*

*Najpotrzebniejsze dane są zawsze  
najtrudniej dostępne.*

*Złożoność programu rośnie, aż  
przekroczy możliwości programisty,  
który go używa.*



## Zadania

*Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI*

**M 362.** Wykazać, że dowolna potęga liczby 376 kończy się cyframi 376.  
Rozwiązanie na str. 6

**M 363.** Każda z  $2n$  osób na zebraniu towarzyskim ma wśród obecnych najwyżej  $n-1$  wrogów. Czy można posadzić wszystkich za okrągłym stołem tak, by nikt nie siedział obok swego wroga?  
Rozwiązanie na str. 3

**M 364.** Odległość między punktami  $A$  i  $B$  na płaszczyźnie wynosi 1. Zbudować taki kwadrat o bokach zawierających  $A$  i  $B$ , by suma odległości od  $A$  do wierzchołków tego kwadratu była najmniejsza z możliwych.  
Rozwiązanie na str. 11

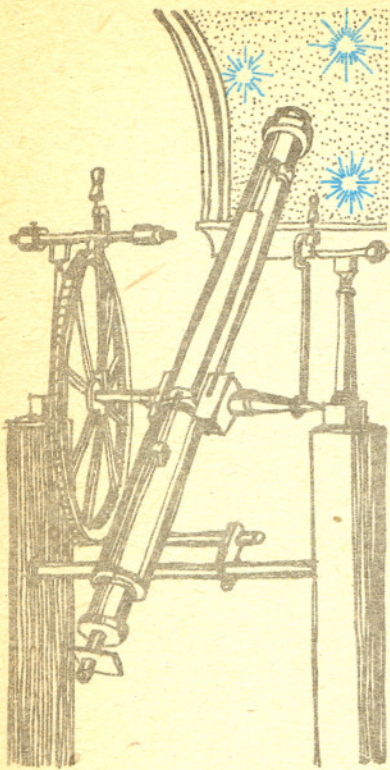
*Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ*

**F 152.** Z jaką minimalną prędkością  $v$  względem Ziemi należy wystrzelić sztucznego satelitę, aby opuścił Układ Słoneczny?  
Rozwiązanie na str. 11



# Jak wygląda orbita Ziemi?

Mgr Andrzej MAJHOFER



Każdy, kto zna prawa Keplera, bez trudu odpowie na tytułowe pytanie — oczywiście Ziemia porusza się po elipsie, w której ognisku znajduje się Słońce. Można dodać jeszcze prosty argument za tym, że elipsa ta bardzo mało różni się od okręgu — mianowicie brak wyraźnych zmian rozmiarów kątowych tarczy słonecznej. Można jednak dość łatwo obliczyć, na ile elipsa ta różni się od okręgu.

Niech punkty  $A$  i  $B$  na rysunku odpowiadają położeniu Ziemi w momentach odpowiednio równonocy wiosennej (ok. 21 marca) i jesiennej (ok. 23 września). Z drugiego prawa Keplera wynika, że czas ruchu Ziemi od  $A$  do  $B$  ( $t_{AB}$ ) jest dłuższy niż od  $B$  do  $A$  ( $t_{BA}$ ), ponieważ w pierwszym przypadku promień wodzący Ziemi zakreśla większe pole niż w drugim. Oznacza to, że wiosna i lato razem trwają dłużej niż jesień i zima. Różnica ta wynosi ok. 7 dni, a więc efekt jest wyraźny. Powiążemy to z parametrami orbity ziemskiej.

We współrzędnych biegunowych równanie elipsy ma postać (oznaczenia jak na rysunku):

$$(*) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi},$$

gdzie  $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  jest tzw. mimośrodem elipsy określającym jej stopień spłaszczenia.

Z zasady zachowania momentu pędu (lub inaczej ze wspomnianego drugiego prawa Keplera) wiadomo, że prędkość kątowa i promień wodzący związane są zależnością

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = J = \text{const.}$$

Podstawiając tu (\*) dostajemy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{(a(1-e^2))^2 (1+e\cos\varphi)^2},$$

skąd po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$t_{AB} = C \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2},$$

gdzie  $C = (a(1-e^2))^2/J$ .

Skoro mimośród  $e$  określający odstępstwo orbity od kształtu kołowego jest mały (dla okręgu  $e = 0$ ), to z dokładnością do wyrazu liniowego względem  $e$  jest

$$\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2} = 1 - 2e\cos\varphi,$$

a więc

$$t_{AB} = C \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - 2e\cos\varphi) d\varphi = C(\pi + 4e),$$

$$t_{BA} = C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2e\cos\varphi) d\varphi = C(\pi - 4e).$$

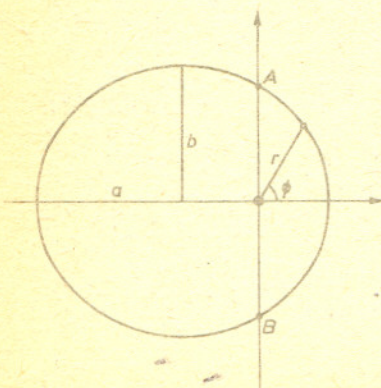
Stąd

$$\frac{t_{AB} - t_{BA}}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{4e}{\pi}$$

i ostatecznie

$$e = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta T}{T} = 0,015.$$

W rzeczywistości mimośród orbity ziemskiej  $e = 0,0167$ . Jedną przyczyną tej rozbieżności są oczywiście zastosowane tu uproszczenia rachunkowe. Druga, bardziej ukryta, polega na tym, że linia łącząca równonocne położenia Ziemi tworzy z dużą osią orbity kąt  $77,5^\circ$ , a nie prosty, jak przedstawiono na naszym rysunku.





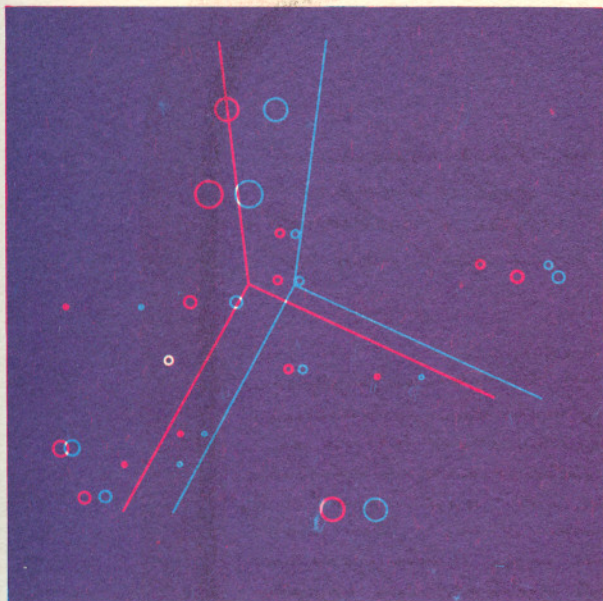
Ci z Was, którzy zachowali kolorowe okulary zamieszczone w poprzednim numerze *Delta*, mogą odkryć jeszcze jedną ich dziwną właściwość. Zakładając okulary na nos można będzie dziś zobaczyć naszą Galaktykę z boku. *Delta* umożliwia Wam już dzisiaj to, czego jeszcze pewnie przez setki lat nie zapewnią cywilizacji zdobywcze techniki.

Spójrzcie na rys. 1. Zaznaczono na nim widoczne gołym okiem gwiazdy znajdujące się w promieniu ok. 7 parseków ( $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ lat świetlnych}$ ), średnice kropek są proporcjonalne do logarytmów całkowitych jasności obiektów. Słońce znajduje się w początku układu współrzędnych. Z tego rysunku widać, że położenia gwiazd są właściwie przypadkowe, trudno jest zauważyć jakkolwiek strukturę. Ale przecież obszar tu przedstawiony zajmuje jedynie nieco więcej niż jedną miliardową objętości całej Galaktyki.

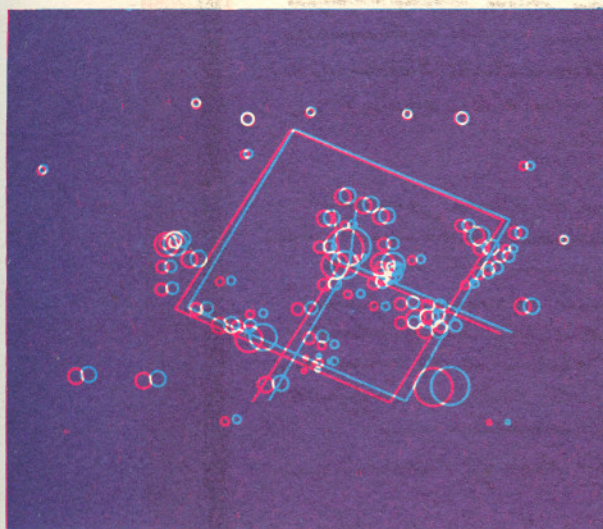
Na rysunku 2 widać już, że Galaktyka jest płaska. Przedstawia on rozkład bliskich tzw. asocjacji — potężnych skupisk setek młodych gwiazd. Asocjacje związane są ze strukturą spiralną Drogi Mlecznej. Średnice kropek na tym rysunku są proporcjonalne do logarytmów liczby zawartych w nich gwiazd. Największa z nich odpowiada ponad tysiącowi obiektów. Asocjacje gwiazd należą do tzw. skrajnej populacji I — oznacza to, że należą do klasy najmłodszych obiektów w Galaktyce — ich wiek oceniany jest na kilka — kilkanaście milionów lat.

Natomiast gromady kuliste należą do populacji II. Tysiąc razy starsze niż asocjacje, nie wykazują widocznej koncentracji ku płaszczyźnie Galaktyki. Rozkład niektórych bardziej znanych gromad kulistych przedstawiono na rysunku 3.

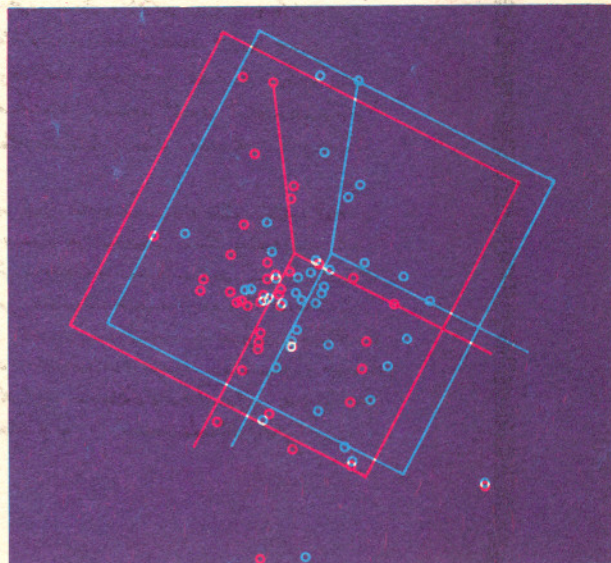
dr Tomasz CHLEBOWSKI



Rys. 1. Rozkład najbliższych jasnych gwiazd. Najjaśniejsza z nich jest ok. 30 razy jaśniejsza niż Słońce, najślabsza jest czterokrotnie słabsza niż nasza dzienna gwiazda, znajdująca się tu i na następnych rysunkach w początku układu współrzędnych.



Rys. 2. Młode asocjacje gorących gwiazd typu O.



Rys. 3. Gromady kuliste w naszej Galaktyce; najmasywniejsze z nich zawierają ok. miliona gwiazd.