



SPIS TREŚCI

NUMERU 3 (123)

Ułamki łańcuchowe <i>dr Jerzy Ryll</i>	str. 1
Monopol magnetyczny <i>mgr Jerzy Kowalski-Glikman</i>	str. 4
Zadania	str. 7
Patrz w niebo	str. 8
Teoria bałaganu <i>dr Zbigniew Plachocki</i>	str. 9
Teleskop kosmiczny <i>mgr Monika Balucińska</i>	str. 10
Mizar MSE (7)	str. 13
O Konkursie ...	str. 14
O pewnej metodzie całkowania <i>Jacek Kaleta</i>	str. 15
Klub 44	str. 16

W następnym numerze:
Anaglify

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astrofizyczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
dr hab. Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki — w-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 5282/83 T-73

WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata, ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następnego,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

O wyższości ułamków łańcuchowych nad rozwinięciami dziesiętymi

Dr Jerzy RYLL

O ułamkach łańcuchowych pisał w *Delcie* 5/1979 prof. dr Andrzej Schinzel.

[a] oznacza część całkowitą liczby a , tzn. [a] jest liczbą całkowitą i $[a] \leq a < [a] + 1$.

Dla $a = \sqrt{2}$ mamy $k_0 = 1; a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ i $k_1 = 2; a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1$ i $k_2 = 2; \dots; a_n = \sqrt{2}+1$ i $k_n = 2; \dots$

Niech $a = \frac{k}{l}$ ($k, l \in \mathbb{Z}, l > 1$). Wtedy $a - [a] = \frac{m}{l}$ i $0 < m < l$, a zatem $a_1 = \frac{l}{m}$ i $m < l$; po co najwyżej l krokach dojdziemy do liczby całkowitej.

Ładne rozwinięcie na ułamek łańcuchowy ma złota proporcja: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$

Mamy pokazać, że jeśli liczby p_i, q_i ($i = 0, \dots, m$) spełniają (1), to $\frac{p_i}{q_i} = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_i}$ ($i = 0, \dots, m$). Dla $m = 0$ i 1 jest to oczywiste. Załóżmy, że udowodniliśmy powyższe stwierdzenie dla pewnego m i dla dowolnych liczb $k_0, \dots, k_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weźmy liczby $l_0, \dots, l_{m+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i niech $k_0 = l_0, \dots, k_{m-1} = l_{m-1}, k_m = l_m + \frac{1}{l_{m+1}}$. Korzystając z założenia indukcyjnego mamy (liczby p_i i q_i są utworzone dla ciągu l_0, \dots, l_{m+1} ; dla $i \leq m-1$, są one takie same dla k_0, \dots, k_{m-1}).

$$l_0 + \frac{1}{|l_1} + \dots + \frac{1}{|l_{m+1}} = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_m} = \frac{p_{m-1}k_m + p_{m-2}}{q_{m-1}k_m + q_{m-2}} = \frac{(p_{m-1}l_m + p_{m-2})l_{m+1} + p_{m-1}}{(q_{m-1}l_m + q_{m-2})l_{m+1} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

Czytelnicy *Delty* znają doskonale rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych. Wiedzą, kiedy ułamek ma rozwinięcie skończone, wiedzą też, że liczby wymierne (i tylko one) rozwijają się w ułamki okresowe. Cóż to jednak jest ułamek łańcuchowy?

Weźmy liczbę rzeczywistą a i oznaczmy $k_0 = [a]$. Gdy a nie jest całkowita, weźmy $a_1 = \frac{1}{a - [a]}$ i postąpmy z liczbą a_1 podobnie — tzn. $k_1 = [a_1]$ i jeśli $a_1 \notin \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych), to $a_2 = \frac{1}{a_1 - [a_1]}$. Idąc tak dalej tworzymy dwa ciągi — (a_n) i (k_n) ($k_n = [a_n]; a_n = k_n + \frac{1}{a_{n+1}}$) i możemy napotkać liczbę całkowitą a_n — otrzymamy skończony ciąg k_0, \dots, k_n ; lub nie — wtedy wynikiem naszego postępowania jest nieskończony ciąg k_0, k_1, \dots liczb naturalnych (k_0 może być ujemne). W przypadku pierwszym interpretacja otrzymanego ciągu jest prosta:

$$a = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}}$$

i a jest liczbą wymierną. Ułamek po prawej stronie nazywamy ułamkiem łańcuchowym długości n . (Tu umowa — ułamek taki będziemy dla oszczędności miejsca zapisywać

$k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_n}$). Co więcej, każda liczba wymierna da się zapisać jako ułamek łańcuchowy skończony. Jak jednak interpretować ciąg nieskończony?

Liczbę wymierną $w_n = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_n}$ nazwijmy n -tym reduktem liczby a , natomiast a_n — n -tą resztą. Pokażemy, że ciąg reduktów liczby a jest do niej zbieżny. Będzie to uzasadniał zapis $a = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_n} + \dots$ oraz nazwę — ułamek łańcuchowy nieskończony — dla tego zapisu. Przedstawmy n -ty redukt w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p_n}{q_n}$ ($p_n, q_n \in \mathbb{Z}; q_n > 0$).

Wtedy ciągi (p_n) i (q_n) spełniają zależności rekurencyjne

$$(1) \quad \begin{aligned} p_n &= p_{n-1}k_n + p_{n-2}, & p_0 &= k_0, & p_1 &= k_0k_1 + 1, \\ q_n &= q_{n-1}k_n + q_{n-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= k_1. \end{aligned}$$

Zarazem dla dowolnych różnych od zera liczb rzeczywistych k_0, \dots, k_n jeśli liczby p_i, q_i ($i = 0, \dots, n$) spełniają (1), to $\frac{p_i}{q_i} = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_n}$ ($i = 0, \dots, n$). Jeśli liczby k_i ($i = 1, 2, \dots$) są naturalne i liczby p_i, q_i ($i = 0, 1, \dots$) spełniają (1), to liczby p_i, q_i ($i = 0, 1, \dots$) są względnie pierwsze.

Mamy bowiem

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = p_{n-1}(q_{n-1}k_n + q_{n-2}) - (p_{n-1}k_n + p_{n-2})q_{n-1} = -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) = \dots = (-1)^{n-1}(p_0q_1 - p_1q_0) = (-1)^n.$$

Tak więc p_n i q_n nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1.

Mamy oczywiście $a = k_0 + \frac{1}{|k_1} + \dots + \frac{1}{|k_n} + \frac{1}{|a_{n+1}}$. Ze wzoru (1) stosowanego dla ciągu $k_0, k_1, \dots, k_n, a_{n+1}$ mamy

$$a = \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}}$$

Obliczmy różnicę między liczbą a i jej n -tym reduktem

$$a - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n q_n a_{n+1} + p_{n-1} q_n - p_n q_n a_{n+1} - p_{n-1} q_n}{(q_n a_{n+1} + q_{n-1}) q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n a_{n+1} + q_{n-1}) q_n}$$

A zatem redukty parzyste są mniejsze, a nieparzyste większe od a oraz (z uwagi na nierówności $q_{n+1} < q_n a_{n+1} + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n$)

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Ze wzoru (1) wynika, iż $q_n \geq n$, a zatem $\lim \frac{p_n}{q_n} = a$. Każdej liczbie niewymiernej odpowiada więc ułamek łańcuchowy nieskończony. Ale i na odwrót — jeśli dany jest ciąg (k_n) liczb naturalnych (k_0 może być ujemne), to ciąg jego reduktów jest zbieżny (do liczby niewymiernej, oczywiście), przy czym różnym ułamkiem łańcuchowym odpowiadają różne liczby rzeczywiste (trzeba się tylko umówić, że ostatni wyraz w ułamku skończonym jest większy niż 1).

No dobrze, ale po co takie dziwolągi jak ułamki łańcuchowe? Czy rzeczywiście są pod jakimś względem lepsze od rozwinięć dziesiętnych? Otóż tak — ciąg reduktów jest wyróżniony wśród innych ciągów liczb wymiernych, zbieżnych do danej liczby rzeczywistej. Mówią o tym prawa najlepszego przybliżenia.

Oczywiście odległość dowolnej liczby rzeczywistej od zbioru liczb wymiernych jest zero — nie ma sensu mówić o najlepszym przybliżeniu wśród nich. Można natomiast szukać takiego elementu wśród liczb o mianownikach nie większych od ustalonej liczby m . Jeśli $\frac{k}{m}$ jest najbliższym a elementem tego zbioru, to nazywamy $\frac{k}{m}$ najlepszym przybliżeniem pierwszego rodzaju.

Innymi słowy $\frac{k}{m}$ musi spełniać warunek:

$$\text{Jeśli } \frac{r}{s} \neq \frac{k}{m} \text{ i } \left| \frac{r}{s} - a \right| \leq \left| \frac{k}{m} - a \right|, \text{ to } s > m.$$

Wszystkie redukty są takimi najlepszymi przybliżeniami (będzie to wynikać z dalszych rozważań). Ale nie tylko one. Poza nimi takimi przybliżeniami mogą być, lecz nie muszą, ułamki pośrednie, tzn. ułamki postaci

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_{n-1} + p_n}{q_{n-1} + q_n}, \frac{p_{n-1} + 2p_n}{q_{n-1} + 2q_n}, \dots, \frac{p_{n-1} + k_{n+1}p_n}{q_{n-1} + k_{n+1}q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Można rozpatrywać nieco inne — mocniejsze — pojęcie przybliżania. Liczbę $\frac{k}{m}$ nazywamy najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju, gdy spełnia warunek:

$$\text{Jeśli } \frac{r}{s} \neq \frac{k}{m} \text{ i } |r - sa| \leq |k - ma|, \text{ to } s > m.$$

Oczywiście każde takie przybliżenie jest przybliżeniem w poprzednim sensie, ale nie odwrotnie. Teraz można podać pełną charakteryzację reduktów danej liczby.

Każde najlepsze przybliżenie drugiego rodzaju liczby a jest jej reduktem i odwrotnie, każdy redukt jest jej najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju (jedyne oczywiste wyjątek to połowa liczby nieparzystej i jej zerowy redukt).

A oto dowód: Jeśli ułamek $\frac{l}{m}$ jest najlepszym przybliżeniem $a = k_0 + \frac{1}{|k_1|} + \dots + \frac{1}{|k_n|} + \dots$, to $\frac{l}{m} > k_0$. (Inaczej $|l \cdot a - k_0| < \left| a - \frac{l}{m} \right| \leq |ma - l|$, ale $m \geq 1$). Jeśli $\frac{l}{m}$ nie jest reduktem a , to jest zawarte między dwoma reduktami a o tej samej parzystości $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ lub jest większe

niż $\frac{p_1}{q_1}$ (ciąg reduktów parzystych rośnie, a nieparzystych maleje). W pierwszym przypadku

$$\frac{1}{q_n q_{n-1}} = \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| > \left| \frac{l}{m} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{mq_{n-1}}.$$

$\left(\frac{p_n}{q_n} \right.$ leży po innej stronie a niż $\frac{l}{m}$ i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$). A więc $m > q_n$. Z drugiej strony

$$|q_n a - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{m}{q_{n+1} \cdot m} \leq m \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{l}{m} \right| \leq m \left| a - \frac{l}{m} \right| = |ma - l|,$$

czyli $\frac{l}{m}$ nie jest najlepszym przybliżeniem. W drugim przypadku postępujemy podobnie.

Wystarczy pokazać, że ciąg reduktów ułamka łańcuchowego spełnia warunek

Cauchy'ego. (Tzn: dla każdego $\varepsilon > 0$

możemy znaleźć takie n_ε , że dla $n > n_\varepsilon$

i $k \in \mathbb{N}$ mamy $\left| \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \varepsilon$). Ale

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-1}} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \dots$$

reduktami są więc ułamki $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ używane

jako dobre przybliżenia liczby π .

Dla $a = \frac{1}{4}$ mamy $k_0 = 0$, $k_1 = 4$, a więc

redukty to $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{4}$, ułamków pośrednich

brak. Tymczasem najlepszym przybliżeniem jest np. $\frac{1}{3}$. Otóż jeśli wprowadzimy redukt

długości (-1) jako formalny iloraz $\frac{1}{0}$, tzn.

$p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, to wśród ułamków

pośrednich pojawi się $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ jest najlepszym przybliżeniem pierwszego

rodzaju liczby $\frac{1}{5}$, ale nie jest najlepszym

przybliżeniem drugiego rodzaju, bo

$$\left| 1 \cdot \frac{1}{5} - 0 \right| < \left| 3 \cdot \frac{1}{5} - 1 \right| \text{ i } 1 < 3.$$

Nieco bardziej skomplikowany jest dowód drugiej części. Chcemy pokazać, że redukt $\frac{p_N}{q_N}$ jest

najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju. Wśród ułamków $\frac{l}{m}$ o mianownikach nie większych niż q_N wybieramy ten — o najmniejszym mianowniku — dla którego wyrażenie $|ma - l|$ jest najmniejsze. Ułamek ten $\frac{l_0}{m_0}$ — jest wyznaczony jednoznacznie, jest zatem najlepszym przybliżeniem a , więc na podstawie udowodnionego poprzednio reduktu a — powiedzmy i -tym ($i \leq N$). Gdyby było $i < N$, otrzymalibyśmy sprzeczność:

$$\frac{1}{q_{N+1}} \leq \frac{1}{q_N + q_{N-1}} \leq \frac{1}{q_{i+1} + q_i} < |q_i a - p_i| \leq |q_N a - p_N| < \frac{1}{q_{N+1}}$$

(przedostatnia nierówność wynika z określenia $\frac{l_0}{m_0} = \frac{p_i}{q_i}$).

Widzieliśmy już, że $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$, ułamek łańcuchowy jest okresowy. Ułamek okresowy zawsze przedstawia pierwiastek (niewymierny) równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych (niewymierność kwadratową). Jeśli bowiem ułamek jest okresowy, to ciąg reszt (a_n) też jest okresowy, czyli $a_m = a_n$ dla $m \neq n$. A zatem

$$a = \frac{p_{n-1} a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n + q_{n-2}} = \frac{p_{m-1} a_n + p_{m-2}}{q_{m-1} a_n + q_{m-2}},$$

czyli a_n (i również a) jest niewymiernością kwadratową ($p_{n-1} q_{m-1} - p_{m-1} q_{n-1} \neq 0$).

Okazuje się, że również odwrotnie, każda niewymierność kwadratowa rozwija się w ułamek łańcuchowy okresowy. Reszty niewymierności kwadratowej a są również niewymiernościami kwadratowymi. Równania kwadratowe, których są pierwiastkami, mają współczynniki wspólne ograniczone — jest ich więc skończenie wiele. Pewne dwie reszty a_{n+k} i a_k muszą być więc równe i ułamek musi być okresowy.

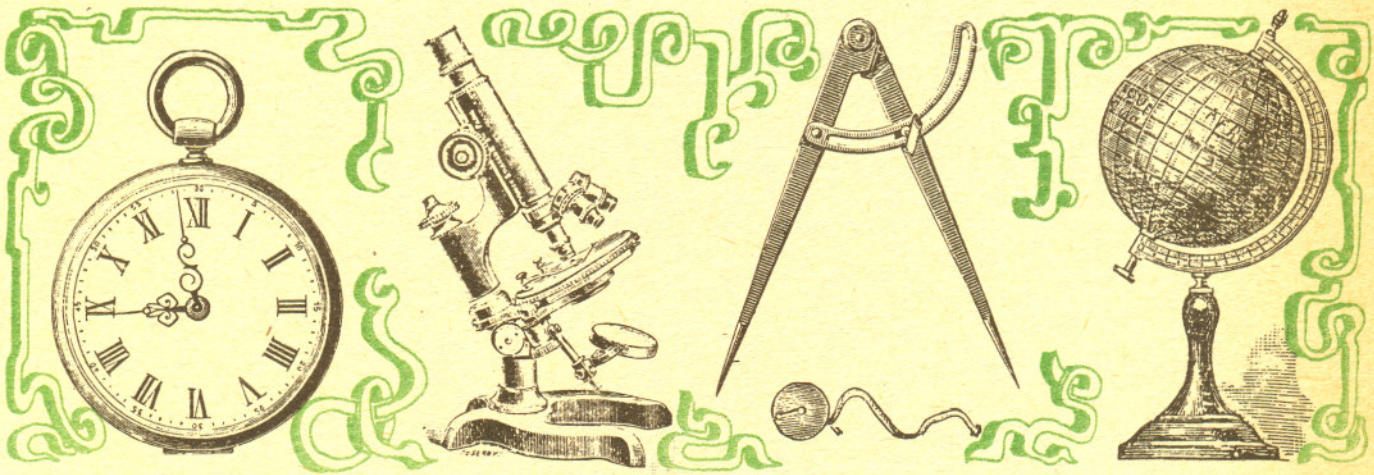
Ułamki łańcuchowe mają również wady. Rozwinięcia dziesiętne łatwo dodawać — jak jednak dodać dwa ułamki łańcuchowe, tzn. jak znaleźć trzeci ułamek łańcuchowy będący ich sumą? To pytanie pozostaje bez odpowiedzi.

Oczywiście m_0 jest wyznaczone jednoznacznie. Gdyby dla $l_0 \neq l_1$ było $\left| a - \frac{l_0}{m_0} \right| = \left| a - \frac{l_1}{m_1} \right|$, to $a = \frac{l_0 + l_1}{2m_0}$. Ułamek ten jest nieskracalny — inaczej samo a (po skróceniu) byłoby lepszym przybliżeniem a niż $\frac{l_0}{m_0} \neq a$ — zatem jest reduktu (n -tym)

liczby a . Mamy więc

$$p_n = l_0 + l_1, \quad q_n = 2m_0 = k_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

(gdzie $k_n \geq 2$), czyli dla $k_n > 2$ lub $k_n = 2$ i $n > 1$ jest $q_{n-1} < m_0$. Ale $|q_{n-1} a - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2m_0} \leq \frac{1}{2} \leq \left| \frac{l_0 - l_1}{2} \right| = |am_0 - l_0|$, co przeczy wyborowi m_0 .



Sprawozdawczość rzecz ważna, czyli $\frac{0}{0} = ?$

Oto problem, z jakim zetknęli się pracownicy w pewnym instytucie badawczym. Co miesiąc musieli wypełniać formularze dotyczące czasu i sposobu wykorzystania kosztownych urządzeń w tymże instytucie. Między innymi trzy rubryki: pierwsza — czas, przez jaki urządzenie było sprawne w ciągu miesiąca; druga — czas, przez jaki to urządzenie pracowało i trzecia, najważniejsza — stopień wykorzystania urządzenia — iloraz dwu poprzednich liczb.

Niestety, w kwietniu jeden z przyrządów był cały czas zepsuty. Dwie pierwsze rubryki nie budziły wątpliwości: 0; 0. Ale co napisać w trzeciej?

Zero — stwierdził Magister wypełniający formularz — przecież przyrząd ani chwili nie pracował.

Jeden — powiedział Docent, kierownik pracowni — przyrząd pracował cały czas, przez który był sprawny.

A może nieskończoność — zaproponował Adiunkt — niedoszły użytkownik — tyle osób chciało przy nim pracować, licznik jest więc jakby dodatni, więc przy dzieleniu przez zero wyjdzie nieskończoność.

Historię opowiedział zaprzyjaźniony matematyk, którego jeden z pracowników instytutu poprosił o pomoc.



Monopol magnetyczny

Mgr Jerzy KOWALSKI-GLIKMAN

Rozwiązanie zadania M 360. Przypuśćmy, że dla każdego x $f(x) = \cos 8x + a_7 \cos 7x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x > 0$, a więc również

$$f(x+\pi) = \cos(8x+8\pi) + a_7 \cos(7x+7\pi) + \dots + a_2 \cos(2x+2\pi) + a_1 \cos(x+\pi) = \cos 8x - a_7 \cos 7x + \dots + a_2 \cos 2x - a_1 \cos x > 0,$$

skąd

$$g(x) = \frac{f(x)+f(x+\pi)}{2} = \cos 8x + a_6 \cos 6x + \dots + a_4 \cos 4x + a_2 \cos 2x > 0.$$

Mamy, podobnie jak wyżej,

$$g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(8x+4\pi) + a_6 \cos(6x+3\pi) + \dots + a_4 \cos(4x+2\pi) + a_2 \cos(2x+\pi) = \cos 8x - a_6 \cos 6x + a_4 \cos 4x - a_2 \cos 2x > 0$$

i

$$h(x) = \frac{g(x)+g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \cos 8x + a_4 \cos 4x > 0.$$

Ostatecznie dla każdego x byłoby

$$\frac{h(x)+h\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\cos 8x + a_4 \cos 4x + \cos(8x+2\pi) + a_4 \cos(4x+\pi)}{2} = \cos 8x > 0,$$

co nie jest prawdą np. dla $x = \frac{\pi}{8}$. Wynika stąd, że dla dowolnych a_1, \dots, a_7 funkcja f musi przyjmować również wartości ujemne.

Dystrybucje $\theta(x)$ i $\delta(x)$ zdefiniowane są następująco

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} + \infty$$

$$\delta(x) = 0 \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Do drugiej całki wkład dają punkty na sferze o współrzędnych x i y równych zeru (ze względu na funkcje $\delta(x)$ i $\delta(y)$), czyli północny i południowy biegun. Wkład od bieguna północnego jest zero ze względu na występowanie funkcji $\theta(-z)$, pozostaje więc tylko wkład od bieguna południowego. W tym punkcie wektor osi z jest antyrównoległy do wektora normalnego do sfery, ich iloczyn skalarny jest więc równy -1 . Stąd druga całka jest równa $-g$.

Teoria monopola magnetycznego została stworzona przez P. A. M. Diraca w 1931 roku. W ciągu z górą 50 lat, które upłynęły od tego czasu, nie była ona nigdy tak popularna, jak obecnie. Wynika to z najnowszych odkryć fizyki teoretycznej. Dirac pokazał, jak wbudować monopole magnetyczne w teorię elektromagnetyzmu, ale przez wiele lat nie widać było powodu, aby tak rozszerzoną teorię stosować do opisu rzeczywistości. Sytuacja zmieniła się diametralnie w 1974 roku, kiedy to Rosjanin Poliakov i Holender t'Hoofst niezależnie udowodnili, że w ramach teorii, która kandydowała do miana jednolitego opisu oddziaływań elektromagnetycznych i słabych, istnieją obiekty, które można interpretować jako monopole magnetyczne. Teoria ta została co prawda później zarzucona, ponieważ okazała się być niezgodna z faktami doświadczalnymi, niemniej ze względu na swoją prostotę stanowi doskonałe „poletko doświadczalne” dla fizyków teoretyków. Okazało się zresztą, że tego typu obiekty występują we wszystkich teoriach, branych pod uwagę jako możliwe jednolite teorie oddziaływań elektromagnetycznych, słabych i silnych. Jeśli więc wierzymy w słuszność którejkolwiek z tych teorii, musimy uwierzyć w istnienie monopoli magnetycznych.

Rozpatrzmy na początek sytuację najprostszą, czyli zwykłą elektrodynamikę Maxwella. W teorii tej dobrze znane jest rozwiązanie równań Maxwella, opisujące pole punktowego ładunku elektrycznego (monopola elektrycznego):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad B = 0.$$

Zbadajmy teraz sytuację odwrotną; niech

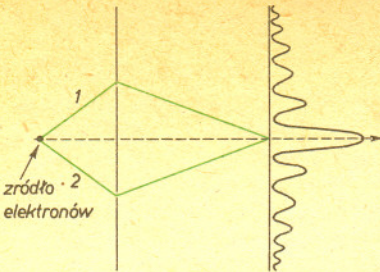
$$E = 0, \quad B = \frac{1}{4\pi} \frac{g}{r^3} \mathbf{r}.$$

Źródłem takiego pola byłaby umieszczona w początku układu współrzędnych cząstka posiadająca ładunek magnetyczny, czyli właśnie monopol magnetyczny. Podejście takie napotyka jednak od razu poważne trudności. Obliczmy bowiem $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, gdzie S jest sferą o środku w początku układu współrzędnych. Całka ta jest równa g (na mocy „magnetycznego prawa Gaussa”), ale z drugiej strony strumień pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą musi być równy zero (na mocy równań Maxwella). Widzimy więc, że pole punktowego ładunku magnetycznego nie jest rozwiązaniem równań elektrodynamiki. Dirac poradził sobie z tym kłopotem w następujący sposób. Przyjął on, że pole magnetyczne może być nieco innej postaci, mianowicie

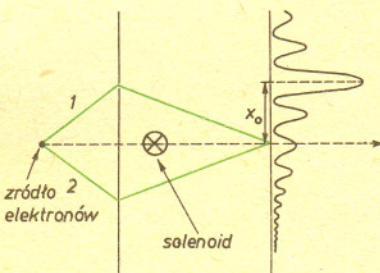
$$(1) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{g}{r^3} \mathbf{r} + g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{z},$$

gdzie \hat{z} jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż osi z . Dodatkowy człon w powyższym równaniu można sobie wyobrazić jako opisujący pole nieskończenie cienkiego solenoidu, umieszczonego wzdłuż osi z , biegnącego od $z = -\infty$ do początku układu współrzędnych. Można ten dodatek interpretować w ten sposób, że solenoid dostarcza ładunek magnetyczny do miejsca, w którym znajduje się monopol. Zauważmy, że teraz strumień pola magnetycznego przez sferę S równy jest zero. Istotnie: pierwszy człon da wkład do strumienia równy (jak poprzednio) g , natomiast, jak łatwo się przekonać na podstawie definicji „funkcji” θ i δ , całka z drugiego członu wynosi $-g$. Pole monopola magnetycznego w postaci podanej przez Diraca zgodne jest więc z równaniami Maxwella.

Wydawać by się mogło, że cena, jaką płacimy za to, jest bardzo wysoka — musimy bowiem jednocześnie wprowadzić nieskończony solenoid. Okazuje się jednak, że cena ta jest pozorna — istnieją bowiem warunki, przy spełnieniu których solenoid jest nieobserwowalny. Aby to pokazać, rozpatrzmy następujący eksperyment myślowy. Załóżmy, że strumień elektronów (lub dowolnych innych cząstek o ładunku elementarnym) dzielimy na dwie wiązki i puszczamy przez dwie szczeliny na ekran (rys. 1). Mechanika kwantowa mówi, że na ekranie zaobserwujemy obraz interferencyjny. Niech teraz za przesłoną znajduje się cienki, bardzo długi solenoid (rys. 2). Okazuje się, że wtedy (wniosek ten został potwierdzony doświadczalnie) obraz interferencyjny ulegnie przesunięciu, bo pole magnetyczne zmienia fazę funkcji falowej elektronu. Istnieją jednak



Rys. 1



Rys. 2

warunki, w których przesunięcie takie nie występuje. Wtedy, gdy spełniona jest równość

$$(2) \quad \frac{1}{2} n = \frac{e \cdot \Phi_B}{4\pi\hbar}$$

(n jest liczbą całkowitą, e — ładunek elementarny, Φ_B — strumień pola B przez powierzchnię ograniczoną torami 1 i 2) zmiana fazy wynosi $2\pi n$ i jest nieobserwowalna.

Wynik ten ma bardzo ważne konsekwencje dla teorii monopola magnetycznego. Jediną metodą obserwacji solenoidu (zwanego inaczej struną) jest badanie rozpraszania na nim cząstek naładowanych. Na mocy wzoru (1) strumień pola magnetycznego przez powierzchnię przecinającą strunę wynosi $-g$, stąd też warunek nieobserwowalności struny (2) ma postać

$$(3) \quad \frac{1}{2} n = \frac{eg}{4\pi\hbar}$$

Równanie powyższe nosi nazwę warunku kwantyzacji Diraca (słowo kwantyzacja oznacza w tym kontekście, że pewna wielkość fizyczna przyjmuje jedynie wartości będące całkowitą wielokrotnością wartości elementarnej). Warunek ten jest wnioskiem z teorii monopola Diraca. Zapewnia on nieobserwowalność struny.

Przypatrzmy się nieco dokładniej warunkowi (3). Załóżmy, że w przyrodzie istnieją cząstki mające albo ładunek elektryczny (q_i), albo magnetyczny (g_j), ale nie oba naraz. Warunek Diraca przybiera postać

$$\frac{q_i g_j}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} n_{ij} \quad (n_{ij} \text{ jest liczbą całkowitą}).$$

Ustalmy ładunek magnetyczny g_j . Wtedy wszystkie ładunki elektryczne q_i muszą być całkowitą wielokrotnością $2\pi\hbar/g_j$ i można znaleźć największy wspólny dzielnik n_{0j} liczb n_{ij} . Wtedy wszystkie ładunki elektryczne są wielokrotnościami $q_0 = n_{0j} \frac{2\pi\hbar}{g_j}$. Analogicznie można znaleźć najmniejszy ładunek magnetyczny g_0 . Oczywiście, g_0 i q_0 są jednoznacznie określone (z dokładnością do znaku) i spełniają warunek

$$\frac{g_0 q_0}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} n_0, \quad n_0 \text{ całkowite.}$$

Konkluzja, że istnienie izolowanego ładunku magnetycznego prowadzi do kwantyzacji ładunku elektrycznego, jest niezwykle ważna z punktu widzenia teorii elektromagnetyzmu. Wszystkie bowiem obserwowane w przyrodzie ładunki są całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego, a na gruncie klasycznej elektrodynamiki (bez monopoli) ten fundamentalny fakt nie ma żadnego wytłumaczenia.

Dziś już nikt (prawie) nie wierzy w czystą elektrodynamikę. Przyjmuje się raczej, że stanowi ona część pewnej ogólniejszej teorii, zwanej teorią wielkiej unifikacji, która opisuje elektromagnetyczne, słabe i silne oddziaływania cząstek elementarnych w sposób jednolity. W teoriach tych jest także miejsce na obiekty, które oglądane z dużej odległości wyglądają jak monopole magnetyczne.

Spróbujmy w dużym uproszczeniu opisać, na czym rzecz polega. Wyobraźmy sobie n pól podobnych do pola elektromagnetycznego oddziałujących ze sobą w ten sposób, że każde z nich jest źródłem pozostałych. Spośród tych n pól tylko pole elektromagnetyczne jest wyróżnione, ponieważ jako jedyne ma nieskończony zasięg działania; zasięg działania pozostałych pól jest porównywalny z rozmiarami cząstek elementarnych.

W najprostszym modelu mamy do czynienia z sześcioma polami. Są to pola W^+ i W^- (tzw. naładowane bozony pośrednie) oraz pola Φ_1 , Φ_2 i Φ_3 (tzw. pola Higgsa). Wszystkie pięć ma skończony zasięg. Szóste interpretujemy jako pole elektromagnetyczne o zasięgu nieskończonym.

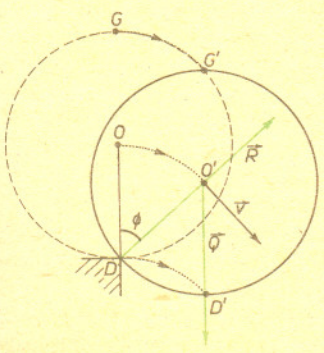
Zasięg działania pól W i Φ jest ograniczony do odległości rzędu 10^{-15} cm. Można więc wyobrazić sobie konfigurację pól taką, że poza obszarem o takim promieniu (zwanym rdzeniem) występować będzie jedynie pole elektromagnetyczne. W kontekście teorii monopola magnetycznego interesujące jest pytanie, czy możliwa jest taka konfiguracja pól w rdzeniu, aby w dużej ($\gg 10^{-15}$ cm) odległości od niego pole elektromagnetyczne miało postać jak dla monopola magnetycznego? Czy taka konfiguracja pól będzie stabilna?

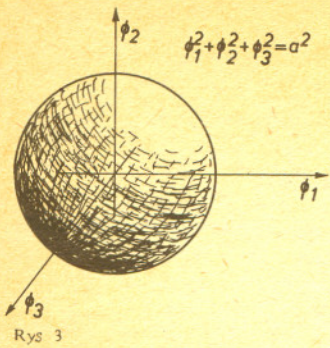
Odpowiedź na oba pytania jest twierdząca, a rozwiązania równań pola spełniające powyższe warunki podali Poliakow i t'Hooft. Obiekt opisany przez nich zasługuje w pełni na nazwę



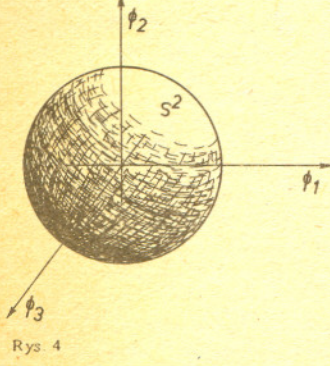
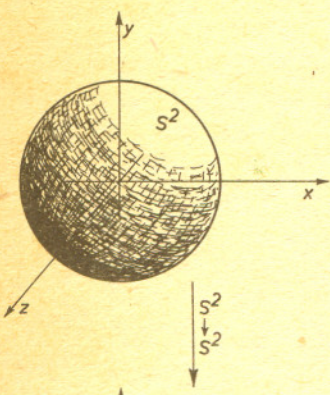
Rozwiązanie zadania F 149. Kula wykonuje ruch postępowy, a każdy jej punkt porusza się po okręgu o promieniu równym promieniowi kuli.

W układzie odniesienia związanym z Ziemią na kulę działają siły: ciężkości Q i reakcji od stołu R (rys.). Ich momenty względem środka kuli są zerowe, więc ruch jest ruchem postępowym; wszystkie punkty mają identyczne przyspieszenia, prędkości i doznają identycznych przemieszczeń. Podczas ześlizgiwania się prędkości muszą być w każdej chwili prostopadłe do prostej łączącej środek kuli z punktem zetknięcia z blatem (w przeciwnym razie nastąpi utrata kontaktu ze stołem). Tak więc poszczególne punkty kreślą okręgi, które pokazano na rysunku linią kropkowaną dla trzech punktów: dolnego D , środkowego O i szczytowego G . Środek kuli porusza się tak samo, jak ciało ześlizgujące się ze szczytu sfery bez prędkości początkowej. Jak wiemy, jest to ruch zmienny i przy kącie $\varphi = \arccos 2/3$ (łatwym do wyznaczenia z II zasady dynamiki i zasady zachowania energii) reakcja znika i kula odrywa się od stołu.

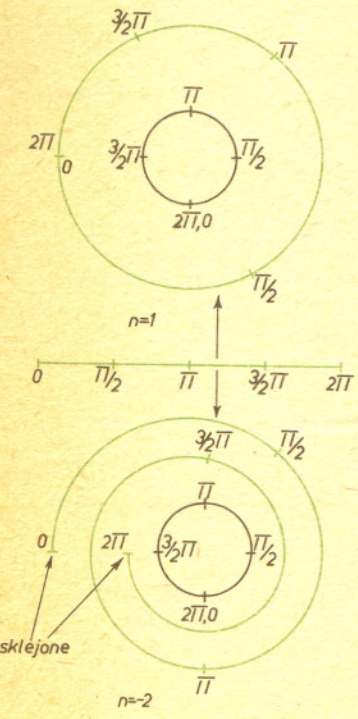




Rys 3



Rys 4



Rys 5

monopola magnetycznego. Rzeczywiście, ze względu na to, że wymiary rdzenia są bardzo małe, makroskopowy miernik zarejestruje punktowe źródło pola magnetycznego.

Monopol Poliakowa — t'Hoofta ma kilka interesujących własności, które odróżniają go od monopola Diraca. Przede wszystkim jest to cząstka złożona z bardziej fundamentalnych obiektów. W fizyce znamy wiele obiektów złożonych, ale monopol t'Hoofta—Poliakowa jest pod tym względem wyjątkiem. Jego stabilność zagwarantowana jest przez zupełnie inne prawa niż te, które zapewniają trwałość jąder atomowych, atomów itp. Prawa te, zwane topologicznymi prawami zachowania, odnoszą się raczej do fizyki klasycznej niż kwantowej i związane są ze strukturą pól Higgsa.

Aby rozwiązanie opisujące monopol magnetyczny było fizycznie interesujące (tzn. mogło reprezentować obiekt występujący w przyrodzie), musi mieć ono skończoną energię. Innymi słowy, gęstość energii pola musi dążyć dostatecznie szybko do zera, gdy oddalamy się od monopola. Dla pól W gęstość energii jest zero tylko gdy wartość pola jest zero (tak jak w przypadku pola elektromagnetycznego). Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku pól Φ . Ich gęstość energii znika, jeśli te pola są stałe w przestrzeni oraz gdy spełniony jest warunek

$$(\Phi_1)^2 + (\Phi_2)^2 + (\Phi_3)^2 = a^2 = \text{const.}$$

Tak więc możliwe konfiguracje pól Higgsa o najniższej energii można przedstawić za pomocą sfery dwuwymiarowej o promieniu a w przestrzeni, w której współrzędnymi są Φ_1, Φ_2 i Φ_3 (rys. 3).

Zauważmy teraz, że nieskończoność w fizycznej przestrzeni trójwymiarowej można także uważać za sferę dwuwymiarową. Oznacza to tyle, że z początku układu współrzędnych do nieskończoności możemy oddalać się w którymkolwiek z wielu kierunków, a każdy z nich odpowiada jednoznacznie pewnemu punktowi na sferze dwuwymiarowej.

Ponieważ żądamy, aby granica gęstości energii pól Φ w nieskończoności była równa zero (aby energia monopola była skończona), widzimy, że granica tych pól w nieskończoności wyznaczona jest przez pewne odwzorowanie $S^2 \rightarrow S^2$ (S^2 — sfera dwuwymiarowa; rys. 4).

Odwzorowania $S^2 \rightarrow S^2$ można sklasyfikować w rodziny numerowane liczbami całkowitymi. Aby to zobaczyć, rozważmy uproszczoną sytuację odwzorowań $S^1 \rightarrow S^1$ (S^1 — okrąg), które można sobie wyobrazić w następujący sposób (rys. 5). Rozcinamy pierwszy okrąg w dowolnym punkcie i powstały odcinek nawijamy na drugi. Po nawinięciu dwa końce musimy z powrotem skleić. Każdemu sposobowi nawinięcia odcinka na okrąg przyporządkujemy liczbę całkowitą n , mówiącą ile razy owinęliśmy kółko wewnętrzne. Liczba ta jest ujemna, jeśli kierunek nawijania jest przeciwny niż zwrot umownie wybrany na kółku wewnętrznym; $n = 0$, jeśli cały okrąg odwzorowujemy w jeden punkt, łatwo zauważyć, że nie można w sposób ciągły przejść od odwzorowania oznaczonego liczbą n do innego, oznaczonego liczbą m , jeśli tylko $n \neq m$. Sytuacja w przypadku odwzorowań $S^2 \rightarrow S^2$ jest zupełnie analogiczna.

Wróćmy do monopoli. Z powyższego rozumowania wynika, że konfiguracja pól Higgsa, a więc i konfiguracja monopola określona jest całkowitą liczbą n . Okazuje się, że liczba ta związana jest z ładunkiem monopola — zachodzi bowiem równość

$$\frac{1}{2} n = \frac{eg}{4\pi\hbar}$$

Ponadto monopol Poliakowa — t'Hoofta jest stabilny. Jeśli bowiem rozpadłby się na bardziej elementarne obiekty, to n musiałoby ulec zmianie, a to jest niemożliwe. Zwróćmy jednak uwagę, że monopol jest stabilny w sensie klasycznym, co bynajmniej nie gwarantuje stabilności względem procesów kwantowych. Mógłby on ulegać rozpadowi na skutek tzw. zjawiska kwantowego tunelowania (podobnego do mechanizmu rozpadu α niektórych jąder atomowych). Opisane powyżej warunki stabilności noszą nazwę topologicznych praw zachowania.

Monopol Diraca może mieć zupełnie dowolną masę. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku monopola Poliakowa—t'Hoofta. Łatwo to zrozumieć zauważając, że monopol ten jest układem złożonym z cząstek o określonej masie. Z analizy wymiarowej wynika więc, że masa monopola Poliakowa—t'Hoofta powinna być proporcjonalna do masy cząstki W . Ścisłe rachunki pokazują, że współczynnik proporcjonalności jest ograniczony od dołu przez odwrotność stałej struktury subtelnej $\frac{1}{\alpha} = 137$.

Wszystko, co zostało powiedziane powyżej, przenosi się bez większych zmian na przypadek monopoli opisywanych przez teorie wielkiej unifikacji. Monopole opisywane przez teorie tego typu różnić się mogą jednak np. masami. Dlatego też doświadczalne odkrycie monopoli magnetycznych i zbadanie ich właściwości dałoby możliwość wybrania spośród wielu teorii kandydujących do miana teorii wielkiej unifikacji tej, która rzeczywiście opisuje świat.

O skutkach hamowania

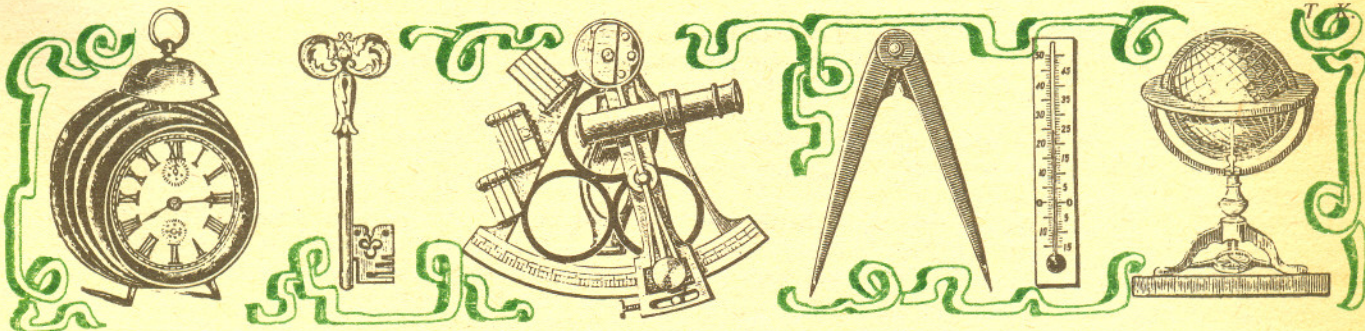
Cóż innego może być skutkiem hamowania, jeśli nie zmniejszanie prędkości pojazdu, ewentualnie aż do jego zatrzymania? — po to przecież w ogóle się hamuje.

Skoro tak, to zobaczymy, co dzieje się ze sztucznym satelitą obiegającym Ziemię po okręgu i lekko hamowanym np. przez rozrzedzoną atmosferę. Tu akurat ważne jest, by hamowanie było słabe — chodzi o to, aby w każdej chwili satelita poruszał się według praw Keplera, w szczególności stale prawie po okręgu.

Zauważamy od razu, że spodziewane zmniejszanie prędkości pociągnie za sobą spadanie satelity ku Ziemi, co zapewne skomplikuje przebieg lotu. No właśnie! Natomiast z całą pewnością możemy przewidzieć, że satelita przebijając się przez górne warstwy atmosfery (choćby bardzo rozrzedzone) traci energię, która w przypadku ruchu po orbicie zamkniętej jest

ujemna (i wynosi $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$, gdzie m oznacza masę satelity, v — jego prędkość, r — odległość od środka Ziemi, M — masę Ziemi, G — stałą grawitacji). Promień orbity r związany jest z energią zależnością $r = -GMm/2E$, a więc malenie (ujemnej od samego początku) energii powoduje malenie promienia orbity. Ale prędkość na kołowej orbicie o tym promieniu wynosi $v = \sqrt{G(M+m)/r}$, co wynika np. z trzeciego prawa Keplera. Stąd widzimy już, że maleniu r towarzyszy wzrost v , czyli lekko hamowany satelita przyspiesza!

Oczywiście nie będzie tak w nieskończoność. Satelita w miarę obniżania lotu będzie wchodził w coraz gęstsze warstwy atmosfery, opór powietrza będzie coraz silniejszy, wreszcie prawa Keplera przestaną opisywać jego ruch i satelita w bardzo stromym locie ulegnie już autentycznemu hamowaniu, z tym że przy tej prędkości powoduje to jego zniszczenie.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 358. Malejący ciąg liczb dodatnich (x_1, x_2, \dots) spełnia dla każdego n nierówność:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1.$$

Wykazać, że dla każdego n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} < 2.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 359. W prostokącie o powierzchni 5 leży 9 wielokątów W_1, \dots, W_9 , z których każdy ma powierzchnię 1.

Wykazać istnienie takiej pary W_i, W_j , że powierzchnia $W_i \cap W_j$ nie jest mniejsza niż $\frac{1}{9}$.

Rozwiązanie na str. 12

M 360. Czy można tak dobrać współczynniki a_1, a_2, \dots, a_7 , by dla każdego $x \in R$

$$\cos 8x + a_7 \cos 7x + a_6 \cos 6x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x > 0?$$

Rozwiązanie na str. 4

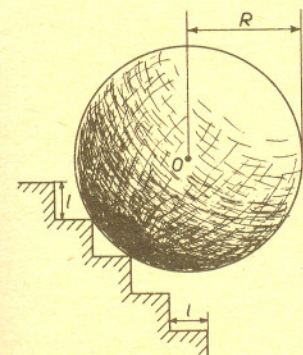
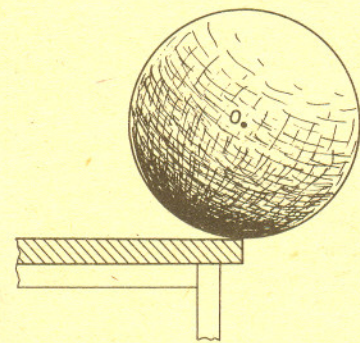
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 149. Jednorodna kula spoczywa na krawędzi stołu w położeniu równowagi nietrwałej (patrz rysunek). W pewnej chwili kula zaczyna ześlizgiwać się bez tarcia. Jaki będzie jej ruch do chwili utraty kontaktu z blatem i kiedy to nastąpi?

Rozwiązanie na str. 5

F 150. Jednorodna kula o promieniu R ześlizguje się ze schodów wzdłuż linii największego spadku. Stopnie mają identyczne długości i wysokości $L (L \ll R)$. Zakładając, że ruch się ustali wyznaczyć końcową prędkość kuli. Tarcie nie występuje, zderzenia ze stopniami są doskonale niesprężyste.

Rozwiązanie na str. 12



Ci z Was, którzy czytają „Patrz w niebo” od pięciu lat, domyślają się już zapewne, że chodzi przeważnie o patrzenie w niebo nocą. Bo przecież chodzi o to, żeby zobaczyć gwiazdy. Niektórzy jednak twierdzą (choć sami nie widzieli), że czasem, w specjalnych warunkach (np. z dna studni) można również zauważyć gwiazdy (ciała niebieskie) w dzień.

Pogląd ten znany był już w starożytności. M.in. największy filozof Grecji pisał: „Kto osłania oczy ręką lub patrzy przez rurę, nie odróżni ani lepiej, ani gorzej różnic między kolorami, lecz będzie widział na dalszą odległość. W każdym bądź razie z dziury i ze studni ludzie nieraz widzą gwiazdy”. (Arystoteles, O rodzeniu się zwierząt, tłum. P. Siwek, PWN Warszawa 1979 BKF, księga 5, I, str. 217).

E. W. Maunder w książce „The Astronomy of the Bible” (1908) przytacza legendę tłumaczącą, skąd mędrcy ze Wschodu prowadzeni przez gwiazdę będąc w Betlejem wiedzieli, że tam właśnie narodził się Mesjasz: „Mówi się, że kiedy osiągnęli Betlejem prawdopodobnie około południa, jeden z nich poszedł do studni przy karczmie, aby naciągnąć wody. Patrząc w dół do studni zauważył gwiazdę odbijającą się w wodzie. Mogła to być wskazówka, że gwiazda była dokładnie ponad głowami i jej powtórna obserwacja w tych niezwykłych warunkach była wystarczającym potwierdzeniem, że dotarli oni do właściwego miejsca”.

Studnia ta istnieje podobno do dzisiaj i ludzie mówią, że kto spojrzy do tej studni, a jest czystego serca, może zobaczyć w niej gwiazdy.

Jedną z podstawowych konsekwencji teorii Kopernika było istnienie paralaksy gwiazd. W XVI, XVII i XVIII wieku wielu astronomów próbowało wyznaczyć paralaksy gwiazd — niestety, bez powodzenia. Jednym z problemów był tu fakt, że należało zmierzyć położenie gwiazdy dwukrotnie w odstępie pół roku. Jednak jeśli w danym momencie gwiazda góruje o północy, to za pół roku będzie górować w południe.

Projektodawcy Królewskiego Obserwatorium w Greenwich sto lat po śmierci Kopernika postanowili wykorzystać „możliwość” obserwacji gwiazd w dzień w celu wyznaczania ich paralaks uwzględniając w projekcie budynku istnienie specjalnego kominu o wysokości prawie 27 m. Obserwowano przez niego w nocy gwiazdę γ Dra górującą prawie dokładnie w zenicie nad Greenwich. Po pół roku w dzień gwiazdy nie dało się zauważyć. Pierwszą paralaksę (gwiazdy 61 Cyg) wyznaczył dopiero Bessel w 1838 roku.

Aby odpowiedzieć na pytanie: czy można zobaczyć gwiazdę w dzień, omówimy najpierw zagadnienie ogólniejsze: jak słabą gwiazdę można zaobserwować gołym okiem. Typowe, zdrowe oko w dobrych warunkach patrząc na całe niebo w czasie bezksiężycowej nocy może zarejestrować gwiazdę 6,1 wielkości gwiazdowej. Przyjmuje się, że widoczne gołym okiem są gwiazdy do 6 wielkości, aczkolwiek bardzo wprawni obserwatorzy widzą gwiazdy do prawie 7^m. Teoretyczny zasięg oka w ekstremalnie dobrych warunkach (m.in. właśnie przez rurę — jak pisał Arystoteles) wynosi 7^m7. Dwaj wytrawni astronomowie (Curtis i Russell) mogli w takich warunkach zauważyć gwiazdy do 8^m5. D. W. Hughes w artykule o zasięgu ludzkiego wzroku wspomina o „wspaniałym nocnym wzroku tych dwóch dżentelmenów”. Graniczna wielkość gwiazdowa, jaką może zarejestrować gołe oko ludzkie, zależy przede wszystkim od jasności tła nieba. Jasność gwiazdy 8^m5 przekracza jasność nocnego nieba o 5,4%. Liczba ta jest bardzo bliska tzw. granicznemu kontrastowi odróżnianemu przez oko (5%).



Obliczenia wykazują, że czyste dzienne niebo jest tak jasne, że oko ludzkie patrząc na cały nieboskłon może zarejestrować jedynie obiekty jaśniejsze niż -3^m5 w zenicie i -2^m5 do 15° nad horyzontem.

Tylko Wenus i Mars bywają jaśniejsze (Wenus do -4^m3 , Mars do -2^m8). Przy założeniu, że w specjalnych warunkach (m.in. oczywiście po adaptacji wzroku, przez komin itd.) wzrok może być czulszy o ok. 2^m5 (podobnie jak w przypadku nocy), uzyskujemy w zenicie graniczną wartość -1^m . Dochodzą tu jedynie Jowisz (do -2^m5) i najjaśniejsza gwiazda — Syriusz (-1^m4).

Rozważmy jeszcze jeden argument. Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że przez przypadkowo wybrany komin zauważymy w czasie pogodnej nocy choć jedną gwiazdę! Otóż — jeśli stosunek wysokości do średnicy kominu wynosi 100, to w polu widzenia zaobserwujemy 1 gwiazdę jaśniejszą niż 6^m w co 30 kominie! Jeśli stosunek ten wynosi 30, prawdopodobieństwo zwiększa się do $\frac{1}{3}$, ciągle jednak nie można twierdzić, że przez przypadkowo wybrany wysoki komin widać gwiazdy w nocy. A co dopiero w dzień!

Wielu astronomów próbowało potwierdzić naocznie ten wniosek. Żaden ze współczesnych nie mógł zobaczyć gwiazd przez komin, z szybu kopalni itd.

Amerykański astronom Hynek znalazł taki komin, nad którym w południe górowała Wega (0^m0). Komin miał 72 m wysokości i 5 m średnicy. Zaprowadził tam grupę studentów astronomii. Dokładnie w południe wszyscy uważnie obserwowali zenit, niektórzy nawet przez lornetki. Nikt nie dostrzegł tej jasnej gwiazdy — niebo było zbyt jasne.

Tak więc jedynym sposobem na zobaczenie gwiazdy w dzień przez komin pozostaje umieszczenie lusterka na jego szczycie. Jeśli lusterko jest odpowiednio skierowane — na pewno zobaczymy Słońce. Tak właśnie pracują teleskopy słoneczne, a układ zwierciadeł na ich szczycie nazywa się celostatem.

Propozycja: Teoria bałaganu

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

Bałagan jest stanem powszechnym. Więcej — nieuchronnym. Przynajmniej w pewnych zjawiskach, którymi zajmuje się fizyka. Nic też dziwnego, że fizycy jako pierwsi i jak dotychczas jedyni, już dawno zdali sobie z tego sprawę i stworzyli teorię bałaganu. Fundamentem fizycznej teorii bałaganu jest druga zasada termodynamiki. Pozwala ona wysnuć szereg kryteriów określających m.in. warunki równowagi chaosu i porządku, stopień nieuchronności bałaganu, poziom jego produkcji w wyniku świadomie realizowanych procesów, jak też rodzaj i wysokość ceny, jaką trzeba płacić za robienie porządków. Brzmi to zachęcająco, więc do rzeczy.

Zgodnie z ustaleniami fizyki każdy przedmiot to społeczeństwo atomów. Organizację społeczeństwa zapewniają różnego rodzaju oddziaływania (i wewnętrzne, i zewnętrzne), którym towarzyszy wzajemna wymiana — a to energii, a to pędu, a to innych dóbr (fizycznych). Wymiany te podlegają bezwzględny rygorom — zasadom zachowania, w myśl których jeśli jeden coś zyskał, to jedynie kosztem kogoś innego.

Niezależnie od tego, ku czemu zmierza całe atomowe społeczeństwo, jego członkowie są mniej lub bardziej żywotni każdy na własną rękę — w ramach indywidualnych możliwości, rzecz jasna. Atomy poruszają się nieustannie i — wskutek ciągłych wymian różnych rzeczy między sobą, a przez to nieustannie zmieniających się lokalnych warunków — chaotycznie. Im przy tym więcej kombinacji, tym większe szanse (i tym większego) chaosu.

Społeczną miarą intensywności tych indywidualnych dążeń jest temperatura układu: im wyższa temperatura ciała, tym średnio ruchliwsze są jego atomy. Natomiast społeczną miarą bałaganu w państwie atomowym jest entropia: im większy chaos, tym większa entropia.

Otóż sformułowanie II zasady termodynamiki jest lapidarne: każdy układ atomowy, który jest całkowicie izolowany od jakichkolwiek wpływów zewnętrznych, sam może tylko produkować entropię; czyli: niemożliwe są samorzutne procesy zmniejszające entropię układu izolowanego (jest to sformułowanie Clausiusa). Oczywiście — produkować i produkować, aż wreszcie osiągnie się stan maksymalnego, możliwego w danych warunkach, chaosu. W takim stanie społeczeństwo atomowe wciąż tętni życiem, atomy indywidualnie wciąż oddziałują ze sobą i wymieniają się, czym się da, ale społeczeństwo jako całość osiągnęło kres możliwości swej ewolucji, czyli — maksymalny możliwy (w danych warunkach) pułap entropii. Dopóki więc w ciele bałagan się powiększa, dopóty jego atomy mogą pocieszać się: jeszcze się rozwijamy, jeszcze ku czemuś zmierzamy. Z chwilą bowiem, gdy bałagan powiększyć się już nie da, zostaje im tylko nadzieja na zmianę warunków określających maksymalny pułap entropii, czyli — na ingerencję lub jakąś pożyczkę z zewnątrz.

Stan maksymalnego chaosu fizycy nazywają ... wewnętrzną równowagą (termodynamiczną) układu, jako że jest on (dynamicznym) kompromisem między dwoma głównymi konkurentami: temperaturą (czyli — średnią intensywnością chaotycznych ruchów indywidualnych atomów) oraz oddziaływaniami międzyatomowymi, mającymi moc porządkujących więzów społecznych. Generalnie: im wyższa temperatura, tym słabsze więzy, czyli — wyższy górny pułap bałaganu. I odwrotnie: im niższa temperatura (spokojniejsze

atomy), tym niższy dopuszczalny pułap chaosu. Odbierając więc atomowemu społeczeństwu energię obniżamy jego temperaturę, a tym samym zmniejszamy entropię. Jaki jest kres takich zabiegów? Minimalna możliwa temperatura ciała to zero bezwzględne. W tym stanie także entropia jest równa zeru (jest to treść III zasady termodynamiki). Cóż za perspektywa — idealny porządek, ni cienia bałaganu. Niestety, jest to stan niemożliwy, gdyż im bliżej zera bezwzględnego, tym większego wymaga to wysiłku. Zero bezwzględne to po prostu nieskończenie wielki wysiłek, a to nierealne (i czy się opłaca?). Idealnego porządku w społeczeństwie atomowym zaprowadzić się więc nie da. Trzeba zatem pogodzić się z mniejszym lub większym bałaganem. Tym bardziej że porządki wymagają wysiłku, a bałagan sam się zrobi nawet bez żadnych naszych zabiegów. A cóż dopiero, jak się do tego przyłożymy! Na co pod tym względem możemy liczyć (pesymiści: co nam grozi?)? Zależność między temperaturą a maksymalnym możliwym poziomem entropii (w danych warunkach) nie jest, niestety, prosta. Kiedy ogrzewamy zimny lód, rośnie powoli jego temperatura (i entropia), ale wiązania wciąż decydują o powiązaniu atomów w ciało stałe. Podczas topnienia pewne typy wiązań zostają zerwane, temperatura wszak nie zmienia się, ale entropia przyrasta skokowo — woda to też układ powiązanych atomów, ale w sposób znacznie mniej uporządkowany w porównaniu z lodem. Grzejąc wodę dalej zwiększamy jej temperaturę (i entropię), aż wreszcie podczas wrzenia znowu następuje rewolucja: zerwane zostają wiązania i powstaje para wodna — zbiorowisko indywiduów atomowych o tej samej temperaturze, ale znowu o znacznie wyższym pułapie entropii. Dla każdego konkretnego układu istnieje temperatura, po przekroczeniu której następuje zerwanie (niektórych lub nawet wszystkich) więzów porządkujących atomowe społeczeństwo; czyli — radykalne podwyższenie pułapu entropii albo jeszcze inaczej — skokowe przejście (rewolucja) ze stanu nisko — do stanu wysokoentropowego.

Z drugiej strony wzrost entropii ponad dopuszczalną (w danych warunkach) miarę zawsze zwiększa temperaturę — atomy stają się bardziej nerwowe, bardziej skłonne do zrywania więzów społecznych, a nawet — do rewolucji.

Aby natomiast obniżyć poziom atomowego bałaganu, trzeba atomy uspokoić, czyli — obniżyć temperaturę (choć nie zawsze wprost, czasem trzeba jeszcze podgrzać, a potem jeszcze silniej ostudzić — zależnie od warunków, rodzaju atomowego społeczeństwa, jego stanu oraz rodzaju uporządkowania, jakie jest celem tego zabiegu).

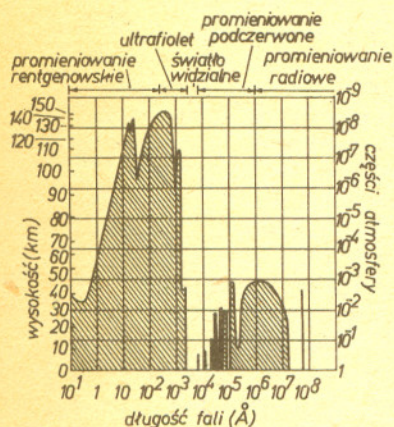
Jednakże ogrzewanie (lub chłodzenie) układu oznacza działanie na układ, bo jest to przecież dostarczanie (lub odbieranie) energii układowi. Co tu mówi II zasada termodynamiki? Wyobraźmy sobie, że układ i działające nań otoczenie możemy zamknąć w nowych granicach, które nowy, powiększony układ uczynią izolowanym. W tym większym układzie entropia może być tylko produkowana. Jeśli więc w którejś części układu robimy porządek (zmniejszamy entropię), to tym samym robimy więcej bałaganu, którym kogoś lub coś innego obarczamy.

Ale też odwrotnie, jeśli zauważymy w naszym układzie podejrzenie wysoki wzrost entropii, ponad wszelką dopuszczalną normę — to z pewnością gdzieś obok (lub nawet wśród nas) robią naszym kosztem porządku. Bownie zgodnie z II zasadą termodynamiki każde porządki wymagają wysiłku (energii) i zawsze zwiększają bałagan. Problem polega tylko na tym, co z tym bałaganem zrobić, gdzie, jak i komu go upchnąć. Można, oczywiście, starać się, by porządkowanie przynosiło jak najmniej entropii, i to osadzonej w formach możliwie jak najmniej dokuczliwych. Warto jednak pamiętać, że entropii raz wyprodukowanej zniweczyc się już nie da, i jeśli nie chce się w niej utonąć, można ją tylko gdzieś, jakoś, komuś ...

Teleskop kosmiczny

Mgr

Monika BAŁUCIŃSKA



Rys. 1. Atmosferyczna absorpcja promieniowania elektromagnetycznego. Kontur ograniczający od góry zakreślony powierzchnią wskazuje granicę, gdzie natężenie promieniowania przy danej długości fali spada o połowę. Długość fali podana jest w angstromach ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$).

Profesor C. R. O'Dell był również zaangażowany w amerykańską pomoc polskim astronomom przy budowie i wyposażeniu Centrum Astronomicznego im. M. Kopernika — PAN w Warszawie z okazji jubileuszu kopernikowskiego.

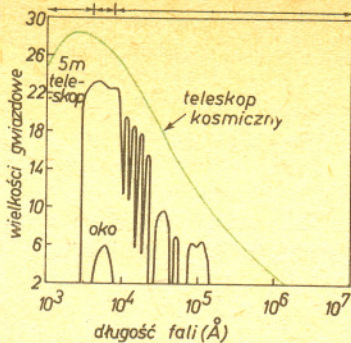
Atmosfera, niczym kokon otulająca naszą planetę, stwarza wyjątkowe warunki do rozwoju życia na Ziemi. Równocześnie jednak jest grubą zastoną, znacznie ograniczającą możliwość poznania Wszechświata. Promieniowanie elektromagnetyczne docierające do nas ze wszystkich stron jest rozpraszane i pochłaniane w ziemskiej atmosferze. Fale krótkie (niebieskie) chętniej ulegają rozproszeniu na niewielkich rozmiarów cząsteczkach powietrza. (Grube „ziarna” kurzu, pyłu i innych zanieczyszczeń również powodują rozproszenie docierającego do Ziemi promieniowania, ale już bez specjalnej selekcji ze względu na długość fali.) Właśnie rozpraszanie w atmosferze sprawia, że mieszkańcy przemysłowych miast żyją pod szarym niebem, w obszarach wolnych od zapylenia niebo ma kolor błękitny, a w pogodne dni możemy oglądać czerwone zachody Słońca. Ten efekt uwidacznia się również przy obserwacjach astronomicznych. Ciała niebieskie wydają nam się bardziej czerwone niż są w rzeczywistości. Warstwy atmosfery przepuszczają tylko część promieniowania. Z powierzchni Ziemi mamy możliwość obserwacji tylko przez tzw. okno optyczne, a także częściowo podczerwone i radiowe. Promieniowanie ultrafioletowe, rentgenowskie oraz gamma pochłaniane jest już w górnych warstwach atmosfery przez azot i tlen. Niewielka ilość ozonu (trójatomowa cząsteczka tlenu) „wygryza” promieniowanie w tzw. paśmie Hartleya (od ok. $0,24 \mu\text{m}$ do ok. $0,3 \mu\text{m}$). Obszar absorpcyjny pary wodnej (H_2O) i dwutlenku węgla (CO_2) wypada w podczerwieni. Fale o długościach przekraczających 1 metr, odbite od atmosfery, również nie docierają do powierzchni Ziemi. Dodatkową przeszkodą przy obserwacjach astronomicznych są ruchy mas powietrza, spowodowane różnym nagraniem warstw atmosfery. Odbija się to na ostrości obrazu, który drży i rozmywa się, co w znacznym stopniu ogranicza „zasięg” teleskopów. Wspomniane zjawiska spowodowały, że astronomowie włożyli wiele wysiłku, aby możliwe były obserwacje spoza ziemskiej atmosfery.

Początki należą do rakiet V-2 zdobytych w czasie II wojny światowej przez aliantów. Przewiezione potem do Stanów Zjednoczonych służyły do transportowania aparatury pomiarowej na duże wysokości. Początkowe wyniki dotyczące przede wszystkim Słońca (ze względu na łatwość lokalizacji obiektu) były tak rewelacyjne, że zachęciły do dalszych badań. Stwierdzono m.in. istnienie korony wokół Słońca o temperaturze ok. 1,5 miliona K, będącej źródłem promieniowania rentgenowskiego. Od tej pory przeprowadzono setki eksperymentów za pomocą rakiet, balonów, samolotów i satelitów, które wynosiły w przestrzeń aparaturę naukową zdolną do odbioru sygnałów w różnych zakresach promieniowania elektromagnetycznego.

Astrofizyka teoretyczna burzliwie rozwijająca się w ostatnich latach stawia coraz większe wymagania w stosunku do obserwacji astronomicznych. Stało się jasne, że aby rozstrzygnąć wiele sporów, astronomowie muszą dysponować niezwykle precyzyjnym i czułym teleskopem.

Pomysł budowy kosmicznego obserwatorium zrodził się na początku lat sześćdziesiątych wśród amerykańskich astronomów, ale dopiero w 1971 roku rozpoczęto szczegółowe studia dotyczące budowy takiego teleskopu. Poważnym problemem było zdobycie zarówno funduszy, jak i znakomitych astronomów zdolnych poświęcić swój czas i częściowo karierę naukową na pracę organizacyjną, która, jak się okazało, miała trwać kilkanaście lat. Pierwszy problem rozwiązał Kongres amerykański zatwierdzając w 1977 roku plan finansowy budowy teleskopu (ok. 750 mln \$) oraz Europejska Agencja Kosmiczna (ESA) godząc się na 15% udział w kosztach w zamian za możliwość korzystania (w tym samym procencie) z wyników uzyskanych przez kosmiczne obserwatorium. Pewne trudności sprawiało dobranie odpowiedniego zespołu kierującego naukowymi planami obserwatorium. Ta dziwna sytuacja nie wynikała z faktu, że astronomów nagle przestało interesować to niezwykle przedsięwzięcie, ale spowodowana była zwykłym brakiem czasu. Początek lat siedemdziesiątych obfitował w liczne odkrycia i intensywne badania m.in. kwazarów, pulsarów i promieniowania tła, tak że niewielu astronomów zdecydowanych było na rezygnację ze swej dotychczasowej pracy. Na czele naukowego zespołu kierującego przygotowaniem stał profesor C. R. O'Dell z University of Chicago. Termin uruchomienia obserwatorium na orbicie wokół Ziemi jest ustalony na 1986 rok.

Całe obserwatorium mieścić się będzie w cylindrze, którego długość niewiele przekracza 13 metrów, a średnica wynosi prawie 4,5 metra. Zostanie ono umieszczone przez wahadłowiec na orbicie położonej 500 km nad powierzchnią Ziemi, a nachylonej do płaszczyzny równika pod kątem $28^\circ,5$. Przewiduje się, że obserwatorium będzie pracować co najmniej 15 lat. Przy tak długim okresie eksploatacji niezbędne staną się remonty i konserwacja urządzeń. Będą tego dokonywać co 2,5 roku (w razie awarii części) astronauty pracujący na wahadłowcu. W sytuacjach, gdy awaria będzie zbyt poważna, całe obserwatorium może być sprowadzone na Ziemię w celu dokonania reperacji. Zasadniczą częścią obserwatorium kosmicznego jest teleskop o średnicy głównego zwierciadła ok. 2,4 m (dokładnie 94 cale). Przy jego użyciu uzyskać będzie można obraz źródła punktowego ze zdolnością rozdzielczą $0,1''$ (dla porównania zdolność rozdzielcza 5 metrowego teleskopu na Mount Palomar wynosi $1,0''$). Taki rezultat uzyskano dzięki bardzo precyzyjnemu wyszlifowaniu zwierciadła, które z założenia powinno być paraboloidą obrotową, a odstępstwa od tej teoretycznej figury są mniejsze niż $2,5 \times 10^{-6} \text{ cm}$ (gdyby powierzchnię zwierciadła powiększyć do rozmiarów Warszawy, wówczas odchylenie od



Rys. 2. Czulość i zdolność rejestracji obrazu przez teleskop kosmiczny porównane są z możliwościami pięciometrowego teleskopu oraz ludzkiego oka. Na osi poziomej odłożona jest długość fali, natomiast na pionowej osi w jednostkach wielkości gwiazdowych przedstawione są jasności najslabszych obiektów, których obraz można zarejestrować odpowiednio przy pomocy teleskopu kosmicznego, pięciometrowego teleskopu oraz ludzkiego oka. Wzrost o 1 wielkość gwiazdową odpowiada spadkowi jasności o czynnik ok. 2,5.

Zdolność rozdzielcza spektrografu $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$,
gdzie λ — długość fali, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ jest
różnicą długości fali między najbliższymi
położonymi rozdzielonymi liniami widmowymi
w spektrografie (w okolicach dł. λ).

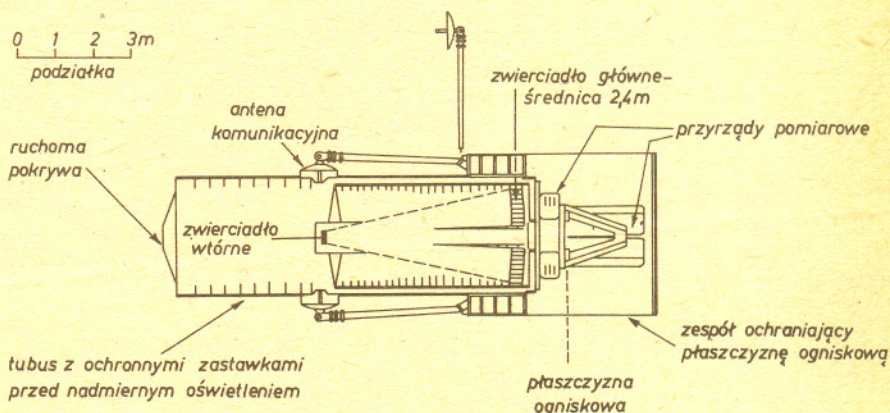
średniej powierzchni nie byłyby większe od 1,5 mm). Lustro wykonane jest ze specjalnego rodzaju szkła o bardzo małym współczynniku rozszerzalności termicznej. Zwierciadło będzie odbijać fale w bardzo szerokim zakresie od 1150 Å (daleki ultrafiolet) do 1 mm (daleka podczerwień) (na rys. 2 porównano ten zakres czulości do zakresu pięciometrowego teleskopu i ludzkiego oka).

Przedstawię teraz niektóre parametry przyrządów, co, mam nadzieję, przekona Czytelników o wyjątkowej klasie tych urządzeń.

Oko szerokokątnej kamery uczulone jest na promieniowanie o długości fali od 1150 Å do 11000 Å. Dzięki systemowi 48 kolorowych filtrów uzyskamy informację o barwach badanego źródła. Kamera ta wymaga jednak niskiej i stałej temperatury. Umieszczona zatem będzie w specjalnym termosie chłodzonym do -95 stopni Celsjusza. Przewiduje się, że za pomocą tej kamery będziemy mogli zobaczyć punktowe obiekty do 28 wielkości gwiazdowej, czyli prawie 100 razy słabsze niż obserwowane do tej pory pięciometrowym teleskopem (patrz rys. 2). W urządzeniach zapewniających właściwą orientację teleskopu zwykle stosowany system żyroskopowy okazał się zbyt mało-dokładny, jak na wymagania stawiane kosmicznemu teleskopowi. Precyzyjna pozycja ustalana będzie dodatkowo za pomocą jasnych gwiazd znajdujących się w polu widzenia instrumentu, których współrzędne z bardzo dużą dokładnością wyznaczane są przy użyciu teleskopów na Ziemi. Oczekuje się takiej stabilności układu, że możliwa będzie obserwacja źródła w ciągu 10 godzin z dokładnością wyznaczenia pozycji do $0',01$.

Kamera rejestrująca obrazy słabych obiektów zbudowana jest przez europejski zespół inżynierów. Jest to urządzenie uzupełniające pracę szerokokątnej kamery. Wprowadzie uczulone jest na fale z węższego zakresu długości (od 1200 Å do 5000 Å), ale za to uzyskuje niezwykłą rozdzielczość kątową do 0,007 sekundy łuku. Oznacza to, że używając tej kamery można byłoby przeczytać artykuł w *Delcie* z odległości ok. 30 km. Warto dodać, że źródła radiowe lokalizowane są z jeszcze większą zdolnością rozdzielczą.

Spektrograf przeznaczony do obserwacji słabych źródeł o nie najwyższej zdolności rozdzielczej ($\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \sim 10^2 - 10^3$) będzie mógł mierzyć polaryzację światła oraz rejestrować zmiany jasności jasnych źródeł w czasie nawet 10 milisekund. Spektrograf ultrafioletowy będzie jednym z lepszych spektrografów używanych do tej pory. W zakresie fal od 1100 Å do 3200 Å osiągnąć może zdolność rozdzielczą $1,0 \times 10^5$. „Szybki” fotometr swą nazwę zawdzięcza możliwości rejestracji zmian natężenia promieniowania docierającego do odbiornika w odcinkach czasowych 10 mikrosekund. Szczególnie użyteczny będzie przy badaniu zmian jasności zwartych obiektów, takich jak czarne dziury, gwiazdy neutronowe czy białe karły, ponieważ charakterystyczny czas potrzebny, aby sygnał z prędkością światła przebył drogę równą rozmiarowi np. gwiazdy neutronowej, jest właśnie rzędu 10 mikrosekund.



Rys. 3. Schemat teleskopu kosmicznego.

Obserwatorium kosmiczne z racji niezwykłej precyzji urządzeń, jak i miejsca, skąd przeprowadzone będą badania, stwarza astronomom niezwykłą szansę.

Fundamentalnym problemem dla kosmologów jest wyznaczenie odległości do dalekich galaktyk. Jedną z dokładniejszych metod jest tzw. metoda cefeid, oparta na zależności okresu zmian blasku gwiazd pulsujących (cefeid) od ich jasności absolutnej. Dla wielu odległych galaktyk, które przez ziemskie teleskopy widoczne są jak mgiełki z zaznaczoną tylko strukturą, ta metoda była bezużyteczna. Poprawiając znacznie jakość obrazu można będzie odróżnić pojedyncze gwiazdy i znajdując cefeidy wyznaczyć odległość. Oko szerokokątnej kamery skierowane będzie m.in. na gromadę galaktyk Virgo i Coma. Obserwacje te wiążą się z wyznaczeniem tzw. stałej Hubble'a,

Rozwiązanie zadania M 358. Ponieważ $x_n > 0$, mamy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} < \sum_{k=1}^{n^2+2n} \frac{x_k}{k} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=m}^{(m+1)^2-1} \frac{x_k}{k}.$$

Ponieważ ciąg (x_1, x_2, \dots) maleje, mamy

$$\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{x_k}{k} \leq x_{m^2} \left(\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{1}{k} \right) = x_{m^2} \left(\sum_{k=m^2}^{m^2+m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m^2+m}^{m^2+2m} \frac{1}{k} \right) \leq x_{m^2} \left(\frac{m}{m^2} + \frac{m+1}{m^2+m} \right) = x_{m^2} \cdot \frac{2}{m}$$

i ostatecznie

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} < \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{x_k}{k} \leq \sum_{m=1}^n \frac{2x_{m^2}}{m} \leq 2.$$

która charakteryzuje prędkość ekspansji Wszechświata, a jej odwrotność daje informację o czasie, jaki dzieli nas od Wielkiego Wybuchu. Badania widm galaktyk, ich przesunięć ku czerwieni, jasności oraz rozmiarów mają kluczowe znaczenie przy wyborze modelu ewolucji Wszechświata.

Kwazary, punktowe źródła przypominające gwiazdy, a emitujące promieniowanie przewyższające swą mocą promieniowanie jasných galaktyk, są wciąż obiektami tajemniczymi. Ogromne przesunięcia ku czerwieni widm kwazarów, jeśli wiązać je z prędkością ucieczki po Wielkim Wybuchu, świadczą, że obserwujemy obiekty z bardzo wczesnych okresów ich życia. W programie badań przewidziana jest identyfikacja słabych kwazarów i pomiary przesunięć ku czerwieni ich widm. Wyniki te porównane będą z obserwacjami aktywnych jąder galaktyk w celu weryfikacji dotychczasowych teorii.

Planowane są badania bardzo dalekich radioźródeł, których współrzędne wyznaczono z bardzo dużą dokładnością, a nie zdołano znaleźć ich optycznych odpowiedników.

Wprawdzie Galaktyka tworzy naszą najbliższą okolicę, kryje jednak wiele tajemnic. Nie wiemy na przykład, czy w jądrze naszej Galaktyki znajduje się pojedyncze, bardzo masywne ciało o nieznanym charakterze (może czarna dziura?), czy też wiele mniej masywnych obiektów. Gromady kuliste — ogromne skupiska gwiazd są tematem wielu teoretycznych rozważań. Szczególnie interesujące jest zagadnienie, co dzieje się w centralnych ich częściach, czy następuje segregacja gwiazd ze względu na ich masy, czy też w sposób równomierny rozłożone są w całej gromadzie. Obserwacje spoza ziemskiej atmosfery pozwolą zobaczyć pojedyncze gwiazdy w bardziej centralnych częściach. Badaniom poddane będą również obszary zjonizowanego wodoru (tzw. obszary HII) oraz mgławice planetarne w celu uzyskania informacji o ich składzie chemicznym, rodzaju promieniowania oraz o charakterze obiektów centralnych. Ciemna chmura w gwiazdozbiórze Byka podejrzewana jest o to, że w jej centrum formują się nowe gwiazdy. Ruchy materii związane z tworzeniem się takiej gwiazdy jak Słońce są na tyle szybkie, że zmiany powinny być obserwowane w ciągu kilkunastu lat trwania pracy teleskopu. Daje to niezwykłą okazję obserwowania „na gorąco” procesu formacji oraz przekonania się, czy utworzy się dysk stwarzający potencjalną możliwość powstania układu planetarnego. Osobnym planem objęte są badania Układu Słonecznego. Obserwowane będą atmosfery planet, przede wszystkim Jowisza i Saturna, w celu weryfikacji teorii powstawania wirów i plam, jakie zaobserwowano w czasie ostatnich misji Voyagera. Jeden z czterech galileuszowych satelitów Jowisza, Io, jest dość niezwykłym obiektem. Widoczne są wokół niego delikatne chmurki zawierające m.in. sól, potas i siarkę prawdopodobnie z aktywnego wulkanu. Część badań dotyczyć będzie rozkładu masy wewnątrz planet oraz struktury ich powierzchni. Okazją będzie możliwość dokładniejszego przyjrzenia się kometom (może nawet komete Halleya, jeśli termin rozpoczęcia pracy przez teleskop nie będzie opóźniony), a szczególnie zbadaniu struktury ich centralnych części. Planuje się również poszukiwania innych układów planetarnych. Światło odbite przez typową planetę jest ok. 100 milionów razy słabsze niż światło dochodzące z centralnej gwiazdy. Bardzo dokładne pomiary pozycji „podejrzenie” ruszających się gwiazd stwarzają szansę sukcesu. Te anomalne ruchy mogą właśnie być spowodowane oddziaływaniem grawitacyjnym gwiazdy z planetą.

Przedstawione plany eksperymentów są tylko sygnalizacją możliwości wykorzystania czasu przeznaczanego na obserwacje. Dalsze propozycje ciągle napływają i pozostaje tylko czekać na moment umieszczenia teleskopu na orbicie wokółziemskiej oraz na pierwsze wyniki.

Rozwiązanie zadania F 150. Kula, podobnie jak w zadaniu 149, ześlizguje się ze stopnia ruchem postępowym. Wzrasta przy tym energia kinetyczna, która następnie jest częściowo tracona podczas zderzenia niesprężystego. Gdy ruch jest ustalony, na każdym schodku odtwarza się sytuacja ze stopnia poprzedniego.

Jeśli kula ma po ześlizgnięciu się ze schodka n -tego prędkość v_n , to wskutek zderzenia niesprężystego znika jej składowa $v_n \sin \beta$ i ześlizgiwanie z $(n+1)$ -go stopnia rozpoczyna się z prędkością u_n (rys.). Oczywiście $u_n = v_n \cos \beta$.

Zapisując zasadę zachowania energii dla ześlizgiwania się kuli z n -tego stopnia mamy:

$$\frac{mv_{n-1}^2}{2} + mgL = \frac{mv_n^2}{2}.$$

Ale $u_n = v_n \cos \beta = v_{n-1} \cos \beta = u_{n-1}$, więc

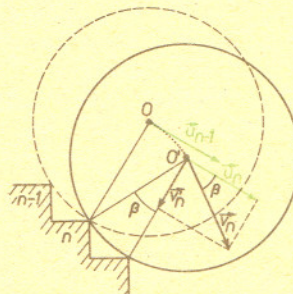
$$u^2 + 2gL = \frac{u^2}{\cos^2 \beta};$$

$$\text{uwzględniając że } \sin \frac{\beta}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{R}$$

otrzymuje się po prostych przekształceniach wynik:

$$u = \frac{R^2 - L^2}{\sqrt{2R^2 - L^2}} \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

Gdy dodatkowo skorzysta się z założenia $L \ll R$, otrzyma się ostatecznie $u = R\sqrt{g/L}$.



Rozwiązanie zadania M 359. Przypuśćmy, że przecięcie każdej pary wielokątów W_i i W_j ma powierzchnię mniejszą niż $\frac{1}{9}$. Wynika stąd, że wielokąt $U_k = W_k - (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{k-1})$ ma powierzchnię większą niż $1 - \frac{k-1}{9}$. Wynikałoby stąd, że w naszym prostokącie leżą rozłączne wielokąty U_1, U_2, \dots, U_9 o sumie pól większej niż $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{1}{9} = \frac{45}{9} = 5$, co przeczy założeniu, że pole prostokąta jest równe 5. Wynika stąd, że dla pewnej pary W_i, W_j mamy $S_{W_i \cap W_j} \geq \frac{1}{9}$ c.n.d.

Przypominamy:

Każdy, kto nadesłanie pod adresem redakcji rozwiązanie wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem, otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

```
FOR X,Y EX Z ST NWEX,ZJ & NWCY,ZJ
PROOF LET X',Y' BE ULAMEK#
A: NWEX',Y'J IMPLIES THESIS
PROOF
ASSUME NWEX',Y'J#
THEN NWEX',Y'J & NWCY',Y'J BY ZWROTNOSC#
HENCE THESIS
END#
NWCY',X'J IMPLIES THESIS
PROOF
ASSUME B: NWCY',X'J#
NWCX',X'J BY ZWROTNOSC#
HENCE THESIS BY B
END#
HENCE THESIS BY A,SPOJNOSC
END#
```

Mizar MSE (7)

W dotychczas przedstawianych dowodach wszędzie tam, gdzie krok dowodowy wymagał uzasadnienia, używaliśmy powołań na przesłanki (**by**, **then**, **hence**), gdyż to wystarczało. Czasem jednak jakiegoś faktu pomocniczego — takiego małego „lematu” — tą drogą nie można uzasadnić, bo albo nie wiemy jak tego dokonać, albo moduł sprawdzający Mizara (checker) i tak by tego nie zaakceptował. Cóż wtedy? Oczywiście, należy zbudować dowód dla takiego faktu.

Mizar MSE pozwala na budowanie dowodów wewnątrz innych dowodów. Zasady konstruowania tych wewnętrznych są takie same jak dowodów głównych. Objasnijmy to na następującym, sztucznym przykładzie, gdzie teza jest koniunkcją dwu faktów, których mogliśmy dowodzić oddzielnie.

```
(FOR X EX Y ST NWEX,YJ & X<>Y) & (FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y)
PROOF
THUS FOR X EX Y ST NWEX,YJ & X<>Y
PROOF LET X' BE ULAMEK#
CONSIDER Y' SUCH THAT
A': X'<>Y' & NWEX',Y'J BY NIEOGRANICZONOSC#
THUS EX Y ST NWEX',YJ & X'<>Y BY A'
END#
THUS FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y
PROOF LET X' BE ULAMEK#
CONSIDER Y' SUCH THAT
A'': X'<>Y' & NWCY',X'J BY NIEOGRANICZONOSC#
THUS EX Y ST NWCY',X'J & X'<>Y BY A''
END#
END#
```

Dowodzoną tezę wyjściową wykazaliśmy w dowodzie przez kolejne konkluzje obu jej członów (które zrobiliśmy w „ciemno”), przy czym dla każdej z nich przedstawiliśmy dowód. Oczywiście w dowodach wewnętrznych możemy używać symbolu **thesis**, który w tym przypadku odnosi się do tezy tego wewnętrznego dowodu. Znaczenie **thesis** dowodu głównego żyje wtedy swoim odrębnym życiem (nie zmienia się). Co więcej, w naszym przykładzie drugi wewnętrzny dowód możemy wyeliminować pisząc go jako fragment dowodu głównego. Mamy bowiem wtedy udowodnić po prostu drugi z członów wyjściowej koniunkcji, co po pierwszej konkluzji jest właśnie treścią **thesis** w dowodzie głównym. Popatrzmy.

```
(FOR X EX Y ST NWEX,YJ & X<>Y) & (FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y)
PROOF
THUS FOR X EX Y ST NWEX,YJ & X<>Y
PROOF LET X' BE ULAMEK#
CONSIDER Y' SUCH THAT
A': X'<>Y' & NWEX',Y'J BY NIEOGRANICZONOSC#
THUS THESIS BY A'
END#
LET X' BE ULAMEK#
CONSIDER Y' SUCH THAT
A'': X'<>Y' & NWCY',X'J BY NIEOGRANICZONOSC#
THUS THESIS BY A''
END#
```

Podkreśliśmy jeszcze raz, że dwukrotne wystąpienie **thesis** za każdym razem odnosiło się do innego dowodu i znaczyło co innego. W następującym przykładzie również wielokrotnie posłużymy się symbolem **thesis**, i choć tym razem w każdym przypadku oznaczać będzie ono takie same zdanie, to w dwu przypadkach z innych powodów niż w trzech pozostałych. Dowiedzmy, że dla dowolnych dwu ułamków istnieje ułamek niemniejszy od każdego z nich.

Jest to dość typowy sposób korzystania z przesłanki będącej alternatywą (tutaj otrzymywanej niejawnie z aksjomatu spójności). Pokazujemy wtedy, że dowodzona teza wynika tak z jednego, jak i drugiego jej członu. Gdyby alternatywa miała więcej członów, to musielibyśmy oczywiście zrobić to dla każdego jej składnika.

Stosowanie dowodów wewnętrznych jest wygodne przy dowodzeniu tez zawierających spójnik zdaniowy równoważności (**iff**). W Mizarze MSE takiej tezy musimy dowodzić wykazując, że zachodzi koniunkcja dwu implikacji; mianowicie, że pierwszy człon równoważności implikuje drugi, oraz że drugi jej człon implikuje pierwszy. Spójrzmy na prosty przykład

```
FOR X,Y HOLDS NWEX,YJ & X<>Y IFF NOT NWCY,XJ
PROOF LET X',Y' BE ULAMEK#
THUS NWEX',Y'J & X'<>Y' IMPLIES NOT NWCY',X'J BY ANTYSYMETRIA#
THUS NOT NWCY',X'J IMPLIES NWEX',Y'J & X'<>Y'
BY SPOJNOSC,ANTYSYMETRIA
END#
```

Kolejność wykazywania tych implikacji jest istotna i musi być taka jak wyżej. Jest to wymóg checkera. W tym prostym przykładzie obyliśmy się jeszcze bez dowodu wewnętrznego, ale w następnym użyjemy dowodu zagnieżdżonego dwukrotnie.

```
FOR X,Y HOLDS
(EX Z ST NWEX,ZJ & NWCZ,YJ & X<>Z & Z<>Y) IFF (X<>Y & NWEX,YJ)
PROOF LET X,Y BE ULAMEK#
THUS (EX Z ST NWEX,ZJ & NWCZ,YJ & X<>Z & Z<>Y)
IMPLIES (X<>Y & NWEX,YJ)
PROOF
GIVEN Z SUCH THAT
A: NWEX,ZJ AND B: NWCZ,YJ AND C: X<>Z AND Z<>Y
THUS X<>Y
PROOF ASSUME X=Y# THEN NWEX,ZJ & NWCZ,YJ BY A,B#
THEN Z=X BY ANTYSYMETRIA#
HENCE CONTRADICTION BY C
END#
THUS NWEX,YJ BY PRZECHODNOSC,A,B
END#
THUS THESIS BY GESTOSC
END#
```

W tym przykładzie **thesis** oznaczało właśnie tę drugą implikację wymaganą do dowodu równoważności (bo pierwsza, już dowiedziona, była przedmiotem częściowej konkluzji).

W następnym odcinku pokażemy, jak można eliminować dowody przez pewną konstrukcję, będącą w wielu przypadkach odpowiednikiem dowodu, choć bez jawnego napisania, jakiej tezy dowodzimy.

```
MIEDZY: FOR X,Y,Z HOLDS MCX,Y,ZJ IFF NWEX,YJ & NWCY,ZJ
```

Zadania. Rozszerzmy nasz wstęp dotyczący ułamków o następujący aksjomat (będący w istocie definicją predykatu M — „leżenia między”).

Proszę teraz udowodnić następujące tezy:

```
T20: FOR X,Y HOLDS X<>Y IFF (NOT NWEX,YJ OR NOT NWCY,XJ)
T21: FOR X,Y,Z,X' ST MCX,Y,ZJ & MCX',Y',ZJ HOLDS MCX,X',ZJ
T22: FOR X,Y,Z,X',Y' ST MCX,X',YJ & MCY',Y',ZJ
HOLDS MCX,Y,ZJ & MCX',Y',Y'J
```

W numerze 6/1983 zaprezentowaliśmy pewne zadanie o prostej Eulera w trójkącie. Nie umieliśmy wtedy tego zadania rozwiązać. Co więcej, sformułowaliśmy pewną hipotezę zastrzegając się, że nie chciało się nam dokładnie jej przemyśleć, ale chyba jest prawdziwa ...

Naszym Czytelnikom „się chciało”! A oto meritum sprawy.

Trzy charakterystyczne punkty każdego trójkąta: punkt przecięcia się wysokości (H), środkowych (S) i symetralnych O leżą na jednej prostej. Zwana jest ona prostą Eulera trójkąta. Tylko trójkąt równoboczny nie ma jednoznacznie wyznaczonej prostej Eulera, gdyż w nim $H = S = O$. Współliniowości tych punktów dowodzi się łatwo. Trzeba tylko spostrzec, że jednokładność o środku S i skali $-\frac{1}{2}$ przeprowadzi punkt H na O (rys. 1).

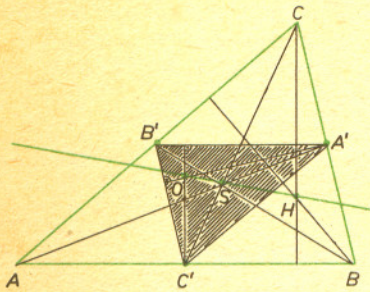
Ponieważ punkt, jego obraz i środek jednokładności leżą zawsze na jednej prostej, więc H , S i O są współliniowe. Co więcej, $HS = 2 \cdot SO$.

Postawione przez nas zadanie brzmiało: skonstruować trójkąt, w którym prosta Eulera ma zadane położenie względem podstawy AB , np. przecina ją pod danym kątem. Rozwiązania, wraz z dość obszernymi komentarzami, przysłali nam: Dariusz Olszewski i Piotr Żuchowski (XIV L. O., Warszawa), Jacek Ossowski ze Stargardu Gdańskiego; Stanisław Wróbel z Mroczenia w województwie kaliskim i Krzysztof Jedziniak z Katowic; Piotr Bernatowicz z Zambrowa i Tomasz Rawlik z Gliwic.

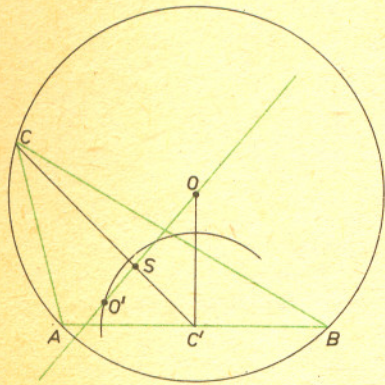
Oto jak można skonstruować trójkąt, w którym dana prosta będzie prostą Eulera (rys. 2).

Środek C' odcinka AB potraktujmy jak wierzchołek $\triangle A'B'C'$ będącego obrazem $\triangle ABC$ przy jednokładności o nieznanym jeszcze środku i skali $-\frac{1}{2}$. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają wspólną prostą Eulera. Odcinek $C'O'$ ma długość równą połowie promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC . W związku z tym środek O' okręgu opisanego na $\triangle A'B'C'$ leży w przecięciu okręgu o środku C' z prostą E , a wobec tego punkt S — w jednej trzeciej odcinka $O'O$. Gdy znajdziemy punkt S , wyznaczenie szukanego trójkąta ABC jest natychmiastowe. Zadanie ma na ogół dwa rozwiązania, wbrew naszej uprzedniej sugestii, że zawsze jedno. Konstrukcja ta da się też wykonać, gdy dana prosta jest równoległa do podstawy.

M. SZ.



Rys. 1



Rys. 2

Kilka słów o Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki

Drodzy Czytelnicy,

pragniemy jeszcze raz przypomnieć Wam o ciągle trwającym Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. Konkurs ten, organizowany od 1978 roku przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i redakcję *Delty*, co roku przynosi plon w postaci ciekawych prac, a czasami nawet zupełnie nowych wyników!

Regulamin konkursu podaliśmy w styczniowym numerze.

Początkowo nazywał się on Konkursem Prac Maturalnych z Matematyki, ale wspólnie z ówczesnymi uczestnikami doszliśmy do wniosku, że przygotowanie się do matury jest już dość absorbujące i na ogół brak wtedy czasu na spokojne zgłębianie problemów nie objętych programem szkolnym. Zmieniliśmy więc regulamin i nazwę, co spowodowało napływ prac pisanych przez uczniów klas drugich i trzecich liceów, techników i zasadniczych szkół zawodowych.

Przypomnijmy dotychczasowych laureatów:

Rok 1978. Paweł Domański (Poznań) „Uogólnione ciągi Fibonacciego”. Praca ta została opublikowana w *Delcie* nr 1 (61)

w 1979 roku. W tym samym numerze naszego pisma możecie obejrzeć reprodukcję medalu przyznanego w wersji złotej, srebrnej i brązowej.

Rok 1979. Dorota Kuchta i Piotr Ponikowski (Wrocław) „Równania diofantyczne pierwszego stopnia”.

Rok 1980. Zbigniew Jelonek (Kraków) „O prostych i płaszczyznach współstożkowych”.

Rok 1981. Jarosław Wróblewski (Wrocław) „Wokół kongruencji w pierścieniu liczb algebraicznych całkowitych”.

Rok 1982. Mariusz Skałba (Krosno) „O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb”.

Rok 1983. Jacek Kaleta (Świdnica) „Twierdzenie o pewnej szczególnej metodzie całkowania”. Publikujemy ją w tym numerze.

Patrząc na powyższy skrót można by sądzić, że uczniowie biorący udział w konkursie interesują się głównie teorią liczb, algebrą i analizą. Tak jednak nie jest. Bywały prace z geometrii,

rachunku prawdopodobieństwa, równań różniczkowych i ich zastosowań, a także (ostatnio coraz częściej) wykorzystujące możliwości, jakie dają komputery. Zajrzyjcie do następujących numerów *Delty*: 8/1978, 11/1979, 1/1981, 2/1982, 1/1983.

Publikowaliśmy w nich wyniki kolejnych konkursów, podawaliśmy tytuły wyróżnionych prac oraz nazwiska autorów i ich nauczycieli. Zobaczycie, że napływały i były wyróżniane prace konkursowe ze wszystkich stron kraju, zarówno z dużych ośrodków, jak i z małych miejscowości. Ta powszechność zawsze bardzo nas cieszyła.

Zachęcamy Was do przejrzenia starych numerów *Delty*, w których publikowaliśmy wyniki nagrodzone złotymi medalami. Pozwoli to Wam zorientować się, jaki poziom osiągnęli najlepsi. Czasami jednak prace są nagradzane medalami lub wyróżniane dyplomami nie tylko za otrzymany wynik, ale za oryginalną metodę, ciekawy pomysł lub wyjątkowo staranne i wszechstronne opracowanie.

Bardzo serdecznie zapraszamy wszystkich zainteresowanych do udziału w naszym konkursie. Mile widzimy wszelkie samodzielne prace; wcale nie muszą one wybiegać daleko w tak zwaną matematykę wyższą. Nie musicie studiować opasłych tomów — starajcie się natomiast zgłębić zagadnienie, które wydaje się Wam ciekawe, poproście nauczycieli o wskazanie literatury i przyslijcie nam wyniki swej pracy. Czekamy.

Redakcja

O pewnej metodzie całkowania

Jacek KALETA

Do napisania tej pracy skłoniła mnie chęć znalezienia całki nieoznaczonej funkcji

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(bez uwzględnienia stałej całkowania). Nie chodziło mi o dokładny wzór, ale o wzór przybliżony i dość dokładny dla dużego przedziału zmienności x . Powyższa funkcja ma pewne podobieństwo do funkcji e^x . Czy więc i ich całki nie mogłyby być podobne? Zapiszmy

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = A_0(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

gdzie A_0 jest pewną funkcją zmiennej x . Różniczkując obie strony mamy:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = (A_0'(x) - x \cdot A_0(x)) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

$$1 = A_0'(x) - x \cdot A_0(x).$$

Przyjmując, że A_0' jest prawie równe zeru, otrzymujemy rozwiązanie przybliżone

$$\tilde{A}_0(x) = -\frac{1}{x}.$$

Drugi krok jest podobny:

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = A_1(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Różniczkując mamy

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = A_1'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + A_1(x) \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{x}(-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$1 = A_1'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + A_1(x) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right).$$

Przyjmując ponownie, że A_1' jest bliskie zera, otrzymujemy rozwiązanie przybliżone

$$\tilde{A}_1(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Następny krok daje

$$\tilde{A}_2(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - 2}.$$

Nietrudno zauważyć, iż liczniki i mianowniki kolejnych funkcji \tilde{A}_1 i \tilde{A}_2 są bardzo podobne, czyli są one bliskie jedności. Nie popełnimy więc dużego błędu, jeżeli zapiszemy

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx -\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_a^b$$

lub

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx -\frac{1}{x} \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_a^b.$$

Ten i inne przykłady doprowadziły mnie do następującej metody obliczania całek niektórych funkcji.

Dla danej funkcji f określamy rekurencyjnie ciąg funkcji C_n :

$$C_0 \equiv 1, \quad C_{n+1} = \frac{f}{\left(f \cdot \prod_{j=0}^n C_j\right)'}$$

(Funkcja f musi spełniać pewne warunki po to, żeby funkcje C_n były dobrze określone powyższym wzorem — zakładamy dalej, że te warunki są spełnione).

Twierdzenie 1. Jeśli $C_{m+1} \equiv 1$, to $\int f(x) dx = \left(\prod_{j=0}^m C_j(x)\right) \cdot f(x)$.

Na przykład niech $f(x) = x^n$. Wtedy

$$C_0(x) = 1,$$

$$C_1(x) = \frac{x^n}{(1 \cdot x^n)' } = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x}{n},$$

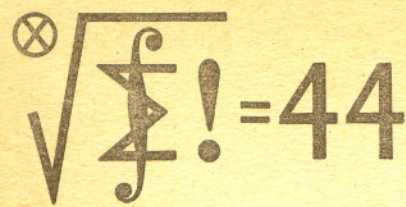
$$C_2(x) = \frac{x^n}{\left(1 \cdot \frac{x}{n} \cdot x^n\right)' } = \frac{x^n}{\frac{n+1}{n} x^n} = \frac{n}{n+1},$$

$$C_3(x) = \frac{x^n}{\left(1 \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot x^n\right)' } = \frac{x^n}{\frac{n+1}{n+1} x^n} = 1$$

i stąd $\int x^n dx = 1 \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot 1 \cdot x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Twierdzenie 2. Jeśli ciąg $\prod_{j=0}^n C_j$ jest zbieżny (jednostajnie) do funkcji F , to $\int f(x) dx = F(x) \cdot f(x)$.

Artykuł jest skrótem pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1983 roku.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 1/1984.

Zadania nr 79, 80, 81

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1984

79. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych) układ równań:

$$2v = u + \frac{1}{u} \quad 2x = v + \frac{1}{v} \quad 2y = x + \frac{1}{x} \quad 2u = y + \frac{1}{y}$$

80. Łatwo pokryć płaszczyznę nie zachodzącymi na siebie przystającymi wypukłymi czworokątami lub sześciokątami. Czy istnieje podobne pokrycie płaszczyzny (tzw. parkietaż) przez przystające wypukłe:

a) pięciokąty, b) siedmiokąty, c) ośmiokąty? Czy zmienia się odpowiedź na te pytania, jeśli nie będziemy żądać wypukłości?

81. Liczby naturalne a, b spełniają warunki: $a \equiv -1 \pmod{b}$, $b \equiv 1 \pmod{2}$. Niech $c_n = a^{b^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dowieść, że dla każdego n liczba c_{n+1} jest podzielna przez bc_n .

Zadanie 81 przysłał pan Andrzej Pawłowski z Zabrze.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 10/1983

Tomasz Biegański	- Lublin	47,53pkt
Małgorzata Czerniakowska-Gdańsk		42,54pkt
Marek Prauza	- Póraj	41,87pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	32,87pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	32,01pkt
Jerzy Miłozarek	- Gorzów Wlkp	31,30pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	30,08pkt

Współczynniki trudności zadań 64, 65, 66: 3,15 3,65 2,39

Pan Tomasz Biegański jest trzynastym członkiem "Klubu 44".

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 11/1983

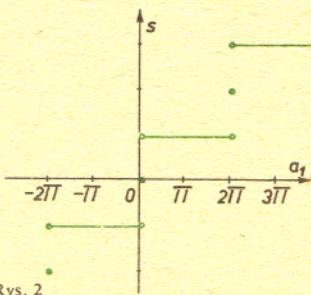
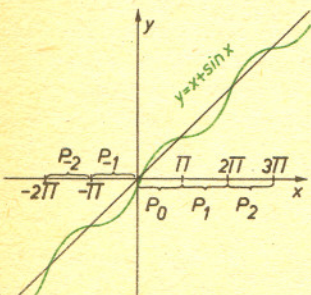
Przypominamy treść zadań:

57. Wyrazy szeregu $\sum a_n$ spełniają zależność: $a_n = \sin(a_1 + \dots + a_{n-1})$. Wykazać zbieżność tego szeregu i przedyskutować zależność jego sumy od wartości wyrazu początkowego a_1 .

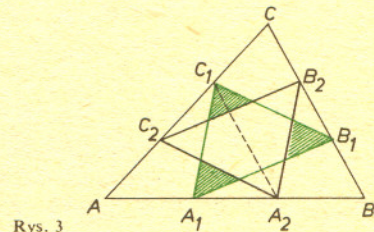
68. Boki AB, BC, CA trójkąta ABC o danym polu S podzielono na trzy równe części punktami $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, jak pokazuje rysunek 3. Obliczyć pole części wspólnej trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$.

69. Do turnieju pucharowego przystąpiło 1024 uczestników: 128 zawodowców (Z) (numery startowe 8, 16, 24, ...), reszta to amatorzy (A). W pojedynku Z z A , Z zwycięża z prawdopodobieństwem 0,6. System rozgrywek: nr 1 walczy z nr 2, nr 3 z nr 4 itd. W drugiej rundzie zwycięzca meczu 1/2 walczy ze zwycięzcą meczu 3/4 itd. Czy bardziej prawdopodobne jest zdobycie pucharu przez Z , czy przez A ?

67. Oznaczmy przez x_1, x_2, \dots sumy częściowe rozpatrywanego szeregu: $x_n = a_1 + \dots + a_n$. Z założenia $x_n - x_{n-1} = a_n = \sin x_{n-1}$. Zatem $x_n = f(x_{n-1})$, gdzie $f(x) = x + \sin x$. Granicą ciągu (x_n) może być tylko punkt stały funkcji f , czyli liczba postaci $k\pi$ (k całkowite). Punkty te dzielą oś rzeczywistą na przedziały $P_k = (k\pi, (k+1)\pi)$. Z przebiegu funkcji f wynika (rysunek 1), że jeśli $x \in P_k$, to także $f(x) \in P_k$, przy czym $f(x) > x$, gdy k jest parzyste, a $f(x) < x$, gdy k jest nieparzyste. Jeśli więc a_1 równa się jednej z liczb $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), to (x_n) jest ciągiem stałym, o wyrazach równych tej liczbie. Jeśli natomiast a_1 należy do jednego z przedziałów P_k , to (x_n) jest ciągiem ograniczonym i monotonicznym, więc zbieżnym. Gdy k jest parzyste, ciąg (x_n) jest rosnący, a jego granicą (czyli sumą szeregu $\sum a_n$) jest prawy koniec przedziału P_k , czyli liczba $(k+1)\pi$. Gdy k jest nieparzyste, wartością graniczną jest lewy koniec przedziału P_k , czyli liczba $k\pi$. Rysunek 2 przedstawia zależność sumy $s = \sum a_n$ od wartości wyrazu początkowego a_1 .



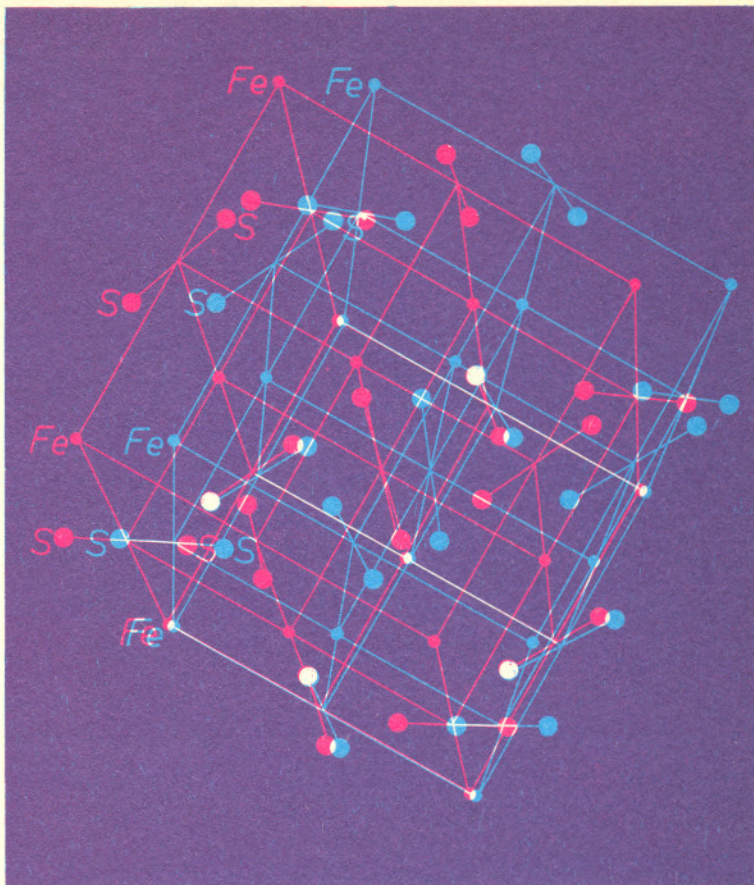
68. Trójkąty $T_1 = A_1B_1C_1$ i $T_2 = B_2C_2A_2$ są przystające, a ich odpowiednie boki są równoległe (są bowiem parami równoległe do środkowych trójkąta ABC). Brzeg trójkąta T_2 odcina od trójkąta T_1 trzy małe trójkąty narożne (na rysunku 3 zaznaczone kolorowo); są one podobne do T_1 , z uwagi na wspomnianą równoległość boków. Odcinki C_1A_1 i A_2C_2 są środkowymi w trójkącie AA_2C_1 , więc dzielą się w stosunku 2 : 1, wobec czego mały trójkąt przy wierzchołku A_1 ma wymiary liniowe trzykrotnie mniejsze od T_1 , a pole dziewięciokrotnie mniejsze od pola T_1 ; tak samo trójkąciki w narożach B_1 i C_1 . To, co zostaje z trójkąta T_1 po odcięciu tych trzech trójkącików — czyli sześciokąt $H = T_1 \cap T_2$ — ma zatem pole równe $2/3$ pola T_1 . Pozostaje zauważyć, że pole każdego z trójkątów $C_1AA_1, A_1BB_1, B_1CC_1$ równa się $(2/9)S$, tak, że pole T_1 równa się $S - 3(2/9)S = (1/3)S$ i ostatecznie pole H równa się $(2/9)S$.



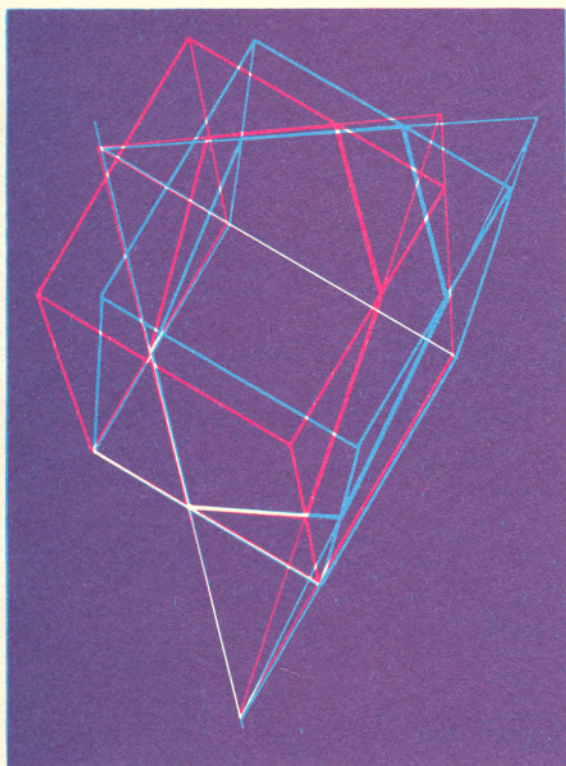
69. Po trzech rundach rozgrywek pozostaje w turnieju 128 uczestników, po jednym z każdej „ósemki” zestawionej z numerów startowych 1—8, 9—16, 17—24 itd. Prawdopodobieństwo tego, że z danej ósemki awansuje do dalszych bojów Z wynosi $0,6^3$ (konieczność wygrania trzech pierwszych meczów). W każdym meczu czwartej rundy walczy więc para rywali w jednym z czterech możliwych zestawień: ZZ, ZA, AZ, AA ; prawdopodobieństwa tych zestawień równe są odpowiednio p^2, pq, qp, q^2 , gdzie $p = 0,6^3, q = 1 - p$. W pierwszym i czwartym przypadku nie ma wątpliwości, czy zwycięzcą będzie Z czy A ; w drugim i trzecim przypadku Z zwycięży z prawdopodobieństwem 0,6. Wobec tego zwycięzcą dowolnego meczu czwartej rundy — a więc uczestnikiem piątej rundy — będzie Z z prawdopodobieństwem $p^2 + 2pq \cdot 0,6 = p(6 - p)/5$. Analogiczna sytuacja powtórzy się w każdej dalszej rundzie: na dowolnym miejscu startowym w n -tej rundzie rozgrywek stanie Z lub A , przy czym prawdopodobieństwo tego, że będzie to Z , zależy tylko od n . Oznaczmy je przez p_n ; zatem $p_4 = 0,6^3 = 0,216$, a $p_5 = p_4(6 - p_4)/5$. Powtarzając przeprowadzone wyżej rozumowanie dostajemy wzór rekurencyjny $p_{n+1} = p_n(6 - p_n)/5$. Po dziesięciu rundach pozostaje niepokonany tylko jeden uczestnik — triumfator turnieju. Prawdopodobieństwo, że jest to Z wynosi $p_{11} =$ (z wzoru rekurencyjnego) $= 0,517 \dots$

Oto recenzja książki H. Vuiberta *Les Anaglyphes géométriques* (za *Mathematical Gazette* z 1913 roku). Jedną z największych ciekawostek Wystawy Przyrządów i Modeli Matematycznych zorganizowanej w Cambridge z okazji Kongresu Matematycznego była wspaniała seria „Anaglifów”, czyli „Plastografów” różnych figur matematycznych. Efekt stereoskopowy powstaje w nich, gdy oglądamy dwukolorowe rysunki przez szkła pochłaniające. Ogólną metodę znalazł W. Rollman w roku 1853. Metoda ta wzbudziła nagle zainteresowanie i dopiero w latach 1891—1895 Duhauron opatentował „Znaki, fotografie i tablice stereoskopowe do oglądania bez stereoskopu w pełnym świetle dziennym”. Ale trudności przy sporządzaniu rysunków — wymagały one więcej niż zwykłej perspektywy — hamowały rozpowszechnienie tej metody.

Świat matematyczny, a szczególnie jego część zainteresowana nauczaniem, jest więc bardzo wdzięczny panom H. Richardowi i H. Vuibertowi za stworzenie i wystawienie w Cambridge tak wspaniałej kolekcji. Cieszymy się też, że ukazuje się ona w wydaniu książkowym. Broszura zawiera 16 stron opisu i 16 anaglifów. Zostały one tak wybrane, by pokazać zastosowania zarówno w szkolnej geometrii, jak i w geometrii sferycznej, krystalografii i fizyce.



Piryt



Sześciokątny przekrój sześcianu

Szczególnie polecamy anaglify: dwunastościanu gwiaździstego (str. 23), sześciokątnego przekroju sześcianu (str. 2), różnych kryształów (str. 29, 30). Jesteśmy przekonani, że bardzo niska cena (1 szyling i 6 pensów) i piękne rysunki zapewnią książce powodzenie.

Zapewne nie wszyscy Czytelnicy *Delty* zapoznali się z pięknymi rysunkami w recenzowanej książce (nam się to również nie udało). Dziś prezentujemy dwa z rekomendowanych w recenzji rysunków. Większą ich liczbę (kilkadziesiąt) znajdziecie, Czytelnicy, w numerze 4 *Delty*. Do numeru będą dołączone stosowne okulary (kupując numer sprawdźcie, czy są do niego włożone) pozwalające oglądać (również zamieszczone tu) rysunki jako trójwymiarowe. Tamże przepis, jak samemu wykonywać takie rysunki. Całość za bardzo niską cenę 20 zł (ok. 2 pensów). Anaglify będą też i w następnych numerach.