Dnia 27 X 1983 roku

zmarł w Berkeley

ALFRED TARSKI

wielki logik i matematyk

Autor Delty

# SPIS TREŚCI

## NUMERU 1 (121)



**W następnym numerze:**

Kryształ helu w temperaturze pokojowej

**Nasza okładka**

przedstawia przykład parkietu. Więcej informacji na ten i inne tematy znajdziecie w naszej książce **„Czy umiecie się dziwić"** (wydanej po raz drugi przez Wydawnictwa Normalizacyjne „Alfa"). W druku jest też druga część książki nosząca tytuł **„Zobaczcie inaczej"**


„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania





Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch"
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 5126/83 M-10

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty" na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch".
3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

**Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commisionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,— nr indeksu 35723/35550


„I przyjdą fałszywi prorocy
i cuda czynić będą”

Jeśli by kierować się takim znakiem
to koniec świata
dziś byłby bliższy niż kiedykolwiek dotąd

Czyż bowiem na każdym niemal kroku
nie spotykamy gawiedzi wierzącej głęboko
że siłą parapsychiczną poruszyć można każdy ciężar
że telepatycznie wpoić można każde przekonanie
że wolny rynek uporządkuje każdą gospodarkę
że bioenergetyk zwalczy każdą chorobę

Prorocy istotnie są fałszywi
bo równocześnie istnieją
nie podniesione ciężary
nie podzielane przekonania
nie uporządkowane gospodarki
nie ustępujące choroby

I cuda rzeczywiście czynią
bo jak inaczej wyjaśnić
głębokie zainteresowanie i siłę zaangażowania
w trójkąty bermudzkie
w różdżki i ekrany przeciw ciekom wodnym
w nadspołeczny automatyzm rynku
w pozabiologiczną władzę nad organizmem

Otóż jednak istnieje inne tłumaczenie
jest nim poczucie bezsiły
i nieprawdopodobny
z instynktu samozachowawczego się wywodzący
optymizm

Gdy bowiem nic zrobić nie możemy
nie umiemy, nie mamy sił
to jakże mamy nie marzyć
o tym wielkim cudownym
NIEZNANYM
które wszystko naprawi, zaleczy, uratuje

I jakimż bestialstwem jest
otwierać przymknięte w marzeniu oczy
i brutalnie wskazywać
że ze wszystkim borykać się jednak musimy
sami
wsparci jedynym orężem
POTĘGĄ ROZUMU

I jakże prymitywna zda się ta rada
wobec lśnień narkotycznej mgły
cudownych, pozarozumowych oczekiwań

A jednak tej właśnie
prymitywnej i brutalnej drogi
życzy sobie i Wam

*DELTA*

## „Podpieramy stary dom...”

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne wydały ciekawą pozycję — podręczniki matematyki dla szkoły podstawowej wydane dla nauczycieli (jest nadruk — wydanie dla nauczycieli).

Czym różni się podręcznik np. dla klasy 5 „zwykły” od „nauczycielskiego”? Otóż, przy zachowaniu identycznego układu, w podręczniku „nauczycielskim” są rozwiązane wszystkie zadania, zamieszczone są odpowiedzi na wszystkie pytania. Jest to wykonane elegancko — rozwiązania i odpowiedzi naniesione są na tekst tak, jakby było to ręcznie długopisem zrobione. I tak przy zadaniu polegającym na uporządkowaniu danych ułamków od najmniejszego do największego są wypisane jeszcze raz te ułamki już we właściwej kolejności. Jest też dopisane, że 4 : 9 to 0,444... i inne tego rodzaju wyniki. Uzupełnione są wszelkie tabelki. Dowiadujemy się, że bok rombu nie wyznacza jego pola, słowem — żadnych wątpliwości mieć nie można.

Jak każda nowość, tak i ta inicjatywa, budzi zgrozę u nastawionych konserwatywnie. Rodzi się bowiem obawa, że wydanie „nauczycielskich” podręczników było konieczne. I, że w przeciwnym razie byłaby, nie dająca się zlekceważyć, grupa nauczycieli, którzy nie umieliby porównać wielkości ułamków czy też wypełnić każdej z przeznaczonych dla uczniów tabelek. Słowem — obawa, że część nauczycieli matematyki nie mogłaby uzyskać np. w 5 klasie oceny bardzo dobrej z matematyki.

Są i optymiści widzący w fakcie umożliwienia pracy w zawodzie nauczycielskim również takim ludziom przejaw postępującej dalszej demokratyzacji i realizację zasady równego startu dla wszystkich.

Realiści cieszą się z tej okazji, bo uczeń, który dobrze rozwiąże zadanie, nie będzie prześladowany za to przez nauczyciela, który uzyskał inny wynik.

Podręcznik „nauczycielski” zaopatrzony jest na końcu w instrukcję dydaktyczną sugerującą właściwe sposoby prowadzenia zajęć.

Nakład „nauczycielskiego” podręcznika wynosi 40 tysięcy, a więc może zaspokoić potrzeby nauczających (o ile nie zostanie w znacznej części wykupiony przez troskliwych rodziców dla ich pociech ani nie stanie się przedmiotem spekulacji).

Niewątpliwie podręcznik taki jest skrótowo, ale dobitnie przedstawionym raportem o stanie polskiej oświaty. Ale nie tylko. Jest to bowiem również raport o kierunku działań, jakie przedsiębierze resort oświaty w związku z zaistniałym stanem. Okazuje się, że nie tylko nieuświadomieni, zagubieni w skomplikowanej rzeczywistości, przygarbieni kryzysem, rozczarowani nieliczni obywatele ulegają filozofii nędzy.

Filozofię nędzy (w tym przypadku intelektualnej) głosi stosowne ministerstwo. Nauczyciele matematyki w szkołach podstawowych nie opanowali materiału, którego mają nauczać — dajmy im sposób, by mimo to uczyli. Zgódźmy się na zło, starając się równocześnie minimalizować jego skutki. Podpierajmy stemplami walący się dom — może do jutra wystarczy.

Nędza takiej filozofii (żeby kontynuować cytowanie) staje się jeszcze lepiej widoczna, gdy przypominamy sobie o decyzji kierującej do szkół nowych nauczycieli z wykształceniem tylko średnim, czy o nieobowiązkowej maturze z matematyki. Pomysł odłożenia wychodzenia z kryzysu do czasu, gdy wyjdziemy z kryzysu, okazuje się nie tylko paradoksem — jest to realizowany (przynajmniej w nauczaniu matematyki) program.

*Marek KORDOS*

## Lenistwo ukarane, czyli historia pewnego zadania

Kiedy na egzaminie wstępnym na matematykę (uniwersytet, lipiec 1983) pojawiło się zadanie treści:

*Środki sfery wpisanej w stożek i sfery opisanej na tym stożku pokrywają się. Znaleźć objętość tego stożka, jeżeli promień sfery wpisanej wynosi r;*

przy ocenie względnej trudności uznano je jednogłośnie za najłatwiejsze. Ekstremiści byli nawet zdania, że nie należy brać go pod uwagę przy ocenie całości egzaminu, a co bardziej leniwi (do których należałem) wybrali je do sprawdzania.

**Rozwiązanie zadania M 352.** Zauważmy, że cykliczne przestawienie czwórki wyjściowej (np. $(a_1, b_1, c_1, d_1) \to (c_1, d_1, a_1, b_1)$) spowoduje jedynie analogiczne przestawienie wyrazów dalszych czwórek. Zauważmy teraz, że z dokładnością do przestawień cyklicznych mamy 6 kombinacji parzystości liczb $a, b, c, d$:

$$\alpha_1 = (p, p, p, p), \quad \alpha_2 = (n, p, p, p),$$
$$\alpha_3 = (n, n, p, p), \quad \alpha_4 = (n, p, n, p),$$
$$\alpha_5 = (n, n, n, p), \quad \alpha_6 = (n, n, n, n)$$

($n$ — liczba nieparzysta, $p$ — parzysta). Wykonanie opisanej w zadaniu operacji modyfikuje parzystość składników naszej czwórki zgodnie z grafem:

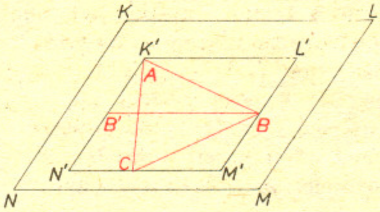
$$\begin{tikzcd}
\alpha_5 \arrow[dr] & & & & \\
& \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4 \arrow[r] & \alpha_6 \arrow[r] & \alpha_1 \arrow[loop above] \\
\alpha_2 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Widać stąd, że z dowolnej czwórki $(a, b, c, d)$ dojdziemy w najwyżej 4 krokach do czwórki liczb parzystych, a ogólniej — po najwyżej $4n$ krokach do czwórki liczb podzielnych przez $2^n$. Wystarczy teraz zauważyć, że największa z liczb $a_k, b_k, c_k, d_k$ nie może być większa od największego wyrazu czwórki początkowej, by zauważyć, że po dostatecznie dużej liczbie kroków otrzymamy same zera.

**Uwaga:** Gdy rozpatrzymy analogiczną konstrukcję dla trójek liczb, otrzymamy nieskończony cykl $(1,0,1) \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (1,0,1) \to \dots$

**Rozwiązanie zadania F 147.** Przy stałej mocy silników ruch powinien odbywać się ze stałą prędkością. W rzeczywistości prędkość chwilowa podczas ruchu „jednostajnego” oscyluje wokół prędkości średniej. W przypadku jazdy samochodem czy rowerem fluktuacje prędkości mogą być niedostrzegalne; w przypadku holowania ich skutki stają się widoczne. Niech w pewnej chwili lina holownicza zwisa (np. motorówka została przyhamowana uderzeniem fali). Prędkość holowanej łodzi maleje (wskutek działania oporów ruchu), natomiast prędkość motorówki wzrasta, gdyż ruchu jej chwilowo nie hamuje ciągnięta na linie łódź. Odległość między motorówką a łodzią rośnie i lina napina się. Powoduje to przyspieszenie ruchu łodzi i przyhamowanie motorówki — lina znów zwisa i cykl może się powtórzyć. Holowanie ze „stałą” prędkością na ogół odbywa się opisanym powyżej ruchem „szarpanym”. Czasami jednak, jak w przypadku holowania narciarza wodnego przez motorówkę, lina może pozostawać stale napięta. Od czego to zależy?

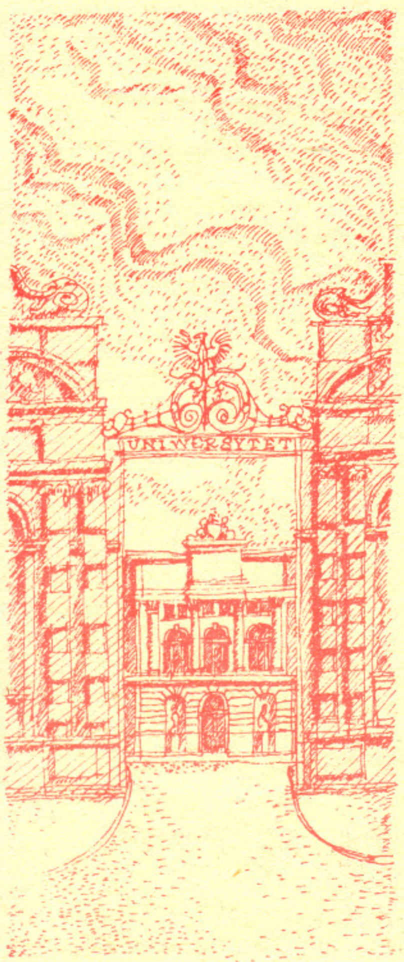
**Rozwiązanie zadania M 353.** Przesuwając boki równoległoboku *KLMN* możemy doprowadzić do tego, by na każdym boku nowego, zawartego w *KLMN* równoległoboku *K'L'M'N'* leżał wierzchołek trójkąta *ABC*.




W szczególności jeden z wierzchołków trójkąta (np. $A$) będzie się pokrywał z jednym z wierzchołków (np. $K'$) równoległoboku $K'L'M'N'$. Niech teraz wierzchołek $B$ leży na boku $L'M'$. Prowadząc odcinek $BB' \parallel K'L'$ do punktu $B'$ na odcinku $K'N'$ zauważymy, że $S_{ABC} \leqslant$

$$\leqslant S_{ABCB'} = S_{ABB'} + S_{BB'C} = \frac{1}{2} S_{K'BB'L'} + \frac{1}{2} S_{BB'N'M'} = \frac{1}{2} S_{K'L'M'N'} \leqslant \frac{1}{2} S_{KLMN},$$

co należało wykazać.




No bo w końcu:
Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś stożka da nam trójkąt oraz okrąg w niego wpisany i na nim opisany. Ponieważ środki tych okręgów (jako środki sfer, o których w zadaniu mowa), pokrywają się, trójkąt musi być trójkątem równobocznym. Wobec tego środki okręgów wpisanego i opisanego pokrywają się z punktem przecięcia wysokości i środkiem ciężkości trójkąta i mamy:

$h = 3r$. Ponieważ w trójkącie równobocznym o boku $a$ mamy $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

więc $a = \frac{2 \cdot 3r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$ i $r_{\text{podstawy}} = \frac{a}{2} = r\sqrt{3}$, zatem

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2_{\text{podstawy}} \cdot h = 3\pi r^3.$$

Można oczywiście próbować wetknąć tu i ówdzie nieco trygonometrii bądź znaleźć parę trójkątów prostokątnych i pobawić się twierdzeniem Pitagorasa. Autorowi wydawało się jednak, że sprawdzanie będzie polegało na rzucie oka na rozwiązanie, sprawdzeniu, czy wszystkie opisane wyżej kroki rozumowania i rachunków są napisane i postawieniu maksymalnej liczby punktów.
Nie doceniliśmy jednak potęgi wyobraźni. Sprawdzanie okazało się ciężką pracą, w której jedyną osłodą była rosnąca na tablicy tabelka, w której wpisywaliśmy osiągane przez autorów rozwiązań wyniki końcowe.

Oto one:
Dla przejrzystości podzielmy tabelkę na 4 części. W pierwszej podamy wyniki poprawne, choć nieco oryginalnie zapisane:

$$\frac{2}{3} \pi \frac{\sin 60^\circ}{\operatorname{tg}^3 30^\circ} r^3; \qquad \frac{9\pi}{\operatorname{tg}^2 60^\circ} r^3; \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{6}} r^3.$$

Największa grupa to wyniki typu $p \cdot \pi r^3$, podamy tylko wartości $p$ w takiej kolejności, w jakiej ukazywały się oczom sprawdzających:

$$8\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{1}{3};\ 8;\ 9;\ 5;\ \frac{25}{24};\ 1;\ \frac{3}{8};\ \frac{9}{4};\ 12;\ \frac{27}{64};\ 4;$$

$$4(\sqrt{3}-1);\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^3;\ \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5};\ \frac{1}{3} \cdot 4(\sqrt{5}+1);\ \frac{3}{16};$$

$$\frac{5}{6} \cdot \sqrt{15};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{3}(\sqrt{2}+2).$$

Wydawałoby się, skoro stożek jest bryłą obrotową, to $\pi$ powinno pojawić się w każdym rozwiązaniu. A jednak: $\frac{27}{4} r^3$ oraz $\frac{81 \cdot r^3}{4\sqrt{3}}$ rozwiały nasze złudzenia.
Pozostały wreszcie wyniki, świadczące o tym, dokąd może zaprowadzić nieskrępowana wyobraźnia: $\frac{1}{3} \pi \sqrt{3r^2} \cdot 3r$; $2\sqrt{3}\pi r^2$; $3\sqrt{3}\pi r^2$;

$$\frac{1}{3} \cdot r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \left(r + \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 60^\circ + r^2}\right);$$

$$\frac{1}{3} \pi \frac{2r^2 + 2\sqrt{3}\, r\sqrt{r^2+r} + 3r}{4}; \quad \frac{2}{3} \pi r \cdot \frac{2r^3(4r^2 - r + 1)}{(1-4r^2)^3}$$

i najpiękniejsze: $\frac{1}{3} \pi \left( \left( \frac{2r^3 + 2r}{r^2 - 1} \right)^2 - r^2 \right) \left( \frac{2r^3 + 2r}{r^2 - 1} + r \right).$

Pozostaje tylko zaproponować Czytelnikowi parę ćwiczeń umysłowych:

1. (łatwe): Znaleźć w drugiej grupie wyników ujemną objętość. Znaleźć średnią arytmetyczną tych wyników i porównać ją z wynikiem prawidłowym.
2. (trudniejsze): Dla jakich $r$ wyniki ostatniej grupy dają ujemną objętość? Ogólniej — spróbuj, Czytelniku, zbadać przebieg funkcji $V(r)$.
3. (skrajnie trudne): Spróbować dla dowolnego wyniku z grupy 3 lub 4 odtworzyć rozumowanie, które do tego wyniku doprowadziło.

*mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI*

*Profesorowi Jerzemu ZNOSKO, członkowi korespondentowi PAN,*

zadaliśmy pytanie:

# Czy Ziemia jest stara, czy młoda?

## Oto, co nam odpowiedział.

Dopiero w wieku XVIII odkryto, że przeszłość Ziemi, jej geneza i jej wiek są problemami naukowymi. Poglądy na temat wieku Ziemi ulegały ciągłej ewolucji. W średniowieczu, a nawet jeszcze w wieku XVIII nauka światowa uważała, że wiek Ziemi jest zgodny z danymi zawartymi w Biblii. Pierwszą naukową teorię dyluwializmu, czyli wielkiego potopu, opracował angielski uczony James Woodworth na przełomie XVII i XVIII wieku. Wyszedł on oczywiście z założeń biblijnych, ale nasycił je obserwacjami ściśle naukowymi. Zdawał sobie przy tym sprawę z tego, jak trudno jest podporządkować teorię dyluwializmu ramom czasowym Biblii. Uczony następnego pokolenia Louis de Buffon wyrażał pogląd, że wiek Ziemi nie może wynosić mniej niż 70 tys. lat. W owych czasach była to hipoteza bardzo zdumiewająca. Jednak już wtedy niektórzy uczeni zdawali sobie sprawę z tego, że nawet 70 tys. lat jest czasem zbyt krótkim, aby mogły w nim zajść wszystkie zdarzenia przyrodnicze, w tym także geologiczne, wynikające z nagromadzonych faktów eksperymentalnych. By mimo to nie wyjść poza ramy czasu biblijnego uczony francuski G. Cuvier zaproponował tłumaczenie przeszłości okresami przyspieszonego rozwoju — biologicznymi i geologicznymi katastrofami, które odbywając się w niewielkich przedziałach czasu mieściły bardzo wiele zdarzeń. Współczesny mu Anglik James Hutton skrytykował teorię Cuviera i wyraził przekonanie, że wiek Ziemi trzeba obliczać bez uciekania się do zdarzeń katastrofalnych. Według Huttona „Ziemia żyje i rozwija się zgodnie z normalnymi prawami fizyki i mechaniki"; „Procesy geologiczne są ze sobą związane i przechodzą jedne w drugie w określonym porządku". Uważał on, że na Ziemi niegdyś działały te same siły, co i współcześnie. Na tej podstawie Hutton nie tylko stwierdził, że Ziemia jest starsza niż to głosiła ówczesna nauka i kościół, ale także, iż Ziemia nie rozpoczęła swojego rozwoju od biblijnego potopu, i że powstała o wiele lat wcześniej.

W XIX wieku geolodzy zaczęli obserwować i stwierdzać fakty geologiczne zapisane w poszczególnych warstwach skalnych oraz stawiać pytanie: jaki czas jest potrzebny, aby np. mogła się osadzić ławica piaskowca o grubości 1 m. Zaczęto eksperymentalnie określać czas konieczny do utworzenia się obserwowanej pokrywy osadowej. Uczony szwedzki de Geer licząc w tzw. iłach warwowych z epoki lodowcowej powtarzające się na przemian warstewki jasne i ciemne, będące wynikiem sedymentacji okresu letniego i zimowego, ocenił czas trwania jednego tylko epizodu międzylodowcowego na 14 tysięcy lat. Stało się to bodźcem do rozwinięcia badań sedymentologicznych, które pozwoliły wyznaczyć czas potrzebny do powstania całej pokrywy osadowej — skał piaskowcowych, iłowcowych, wapiennych i dolomitycznych. Tą metodą geolodzy doszli do przekonania, że wiek Ziemi trzeba liczyć na wieleset tysięcy lat. Lord Kelvin na podstawie badań geochemicznych obliczył, że od powstania Ziemi nie mogło upłynąć mniej niż 20—400 mln lat.

W XX wieku B. Boltwood wykorzystując prawo rozpadu pierwiastków promieniotwórczych stworzył metodę oznaczania wieku bezwzględnego skał. Okazało się, że od chwili uformowania się skał magmowych (krystalicznych) i pierwszych skał osadowych minęło nie mniej niż 1,5 mld lat. Dzisiaj wiemy, że Ziemia jako planeta ma około 4,5 mld lat, przy czym wiek ten nie uwzględnia astronomicznego etapu jej rozwoju, tj. okresu, w którym z rozproszonej materii zaczęły się tworzyć skupiska minerałów.

Aby wyznaczyć wiek Ziemi, musimy wiedzieć, w jaki sposób powstała. Od XVIII wieku wysunięto wiele hipotez kosmogonicznych. Próbowały one tłumaczyć powstanie planet rozpadem mgławic (E. Kant, P. S. Laplace) lub słońc, wpływem innej gwiazdy lub supernowej i wreszcie koncentracją materii międzygwiezdnej, gazowej lub stałej.

W teoriach powstania Ziemi i innych planet z materii stałej w wyniku zlepiania się stałych chłodnych cząstek przyjmowano jej późniejsze stopienie np. pod wpływem ciepła pochodzącego z rozpadu pierwiastków promieniotwórczych. Założenie to było konieczne dla wyjaśnienia istnienia we wnętrzu Ziemi stref o różnej gęstości i budowie. W większości teorii przyjmowano jednak, że Ziemia powstała z gazów i par o bardzo wysokiej temperaturze. Jednocześnie z procesem ochładzania cięższe pierwiastki gromadziłyby się w środku, a lżejsze w partiach zewnętrznych planety (dyferencjacja). W trakcie dalszego stygnięcia pierwiastki mogły się ze sobą łączyć, a pary pierwiastków skraplać. Po jakimś czasie Ziemia byłaby ciekłą kulą otoczoną gazową powłoką składającą się pierwotnie z wodoru, helu, pary wodnej, dwutlenku węgla, azotu i chloru. Gdy temperatura tych gazów była wyższa od 1000°C, mogły one rozpuszczać krzem i glin. Później, przy 500°C niektóre substancje ciekłe i rozpuszczone zaczęły krzepnąć. Przełomowym momentem było obniżenie się temperatury do 374°C (temperatura krytyczna wody). Znaczna część pary wodnej uległa wtedy skropleniu i opadła na Ziemię.

W takim ujęciu możliwe jest, by wnętrze Ziemi pozostawało przez pewien czas ciekłe lub nawet gazowe.

We wszystkich wymienionych hipotezach jest ogromna luka pomiędzy stadium pregeologicznym rozwoju Ziemi i stadium geologicznym. Współczesne hipotezy dotyczące powstania i wieku Ziemi są właściwie wolne od tej wady. Za podstawę mają one coraz doskonalsze oznaczenia wieku bezwzględnego najstarszych skał oraz astrofizyczne teorie ewolucji gwiazd typu Słońca.

W latach pięćdziesiątych astrofizycy dowiedli, że Ziemia i meteoryty powstały w niskich temperaturach z mgławicy pyłowej otaczającej niegdyś Słońce. Porównanie ziemskiego i kosmicznego stopnia rozprzestrzenienia gazów szlachetnych, takich jak neon, argon, krypton i ksenon oraz gazów aktywnych, takich jak para wodna, dwutlenek węgla, azot i tlen, wykazało, że na Ziemi więcej jest gazów aktywnych i mniej gazów szlachetnych niż w Kosmosie. Ponieważ jednak wymienione gazy mają podobne ciężary cząsteczkowe, to nie jest możliwe ich rozdzielenie w polu grawitacyjnym tak, by gazy szlachetne znalazły się na zewnątrz formującej się planety.

W stałych cząstkach materii gazy aktywne mogły się natomiast chemicznie utrzymywać aż do momentu, gdy gęstość i temperatura wzrosły tak, że ich dalsze chemiczne związanie przestało być możliwe. Woda na przykład mogła być związana w minerałach uwodnionych. Ogranicza to automatycznie temperaturę powstania i akumulacji stałych cząstek do takiej, w której minerały uwodnione są trwałe. Temperatury w czasie powstania Ziemi nie mogły być też zbyt niskie. W bardzo niskich temperaturach gazy szlachetne kondensowałyby się lub byłyby adsorbowane na stałych cząstkach i ich obecna ilość na Ziemi byłaby większa niż obserwowana. Tak więc trzeba przyjąć, że temperatury, w których powstały cząstki, były zbliżone do temperatur w partiach powierzchniowych i przypowierzchniowych Ziemi.

Próbując wyjaśnić mechanizm powstawania czterech planet wewnętrznych O. Szmidt i H. Urey przyjęli, że zagęszczanie się materii w mgławicy, z której powstało Słońce i planety, doprowadziło do utworzenia dużej ilości nieregularnych skupisk materii, przede wszystkim w postaci nitek, włókien i cienkich płytek. Ich własności musiały być podobne do tych, które mają znane nam włoskowate minerały charakteryzujące się dużą sprężystością i wytrzymałością. A zatem cechy fizyczne stałych cząstek ułatwiały ich zaczepianie się i związywanie przy bezładnych zderzeniach. Powstające większe bryły były porowate i stanowiły doskonałą masę łowiącą uderzające w nią inne cząstki.

Skład akumulujących się stałych cząstek zależał głównie od temperatury pierwotnej mgławicy otaczającej Słońce. Wiadomo, że wewnątrz mgławic przy stosunkowo niskiej temperaturze nielotne cząstki stałe zawierają tlenek krzemu, krzemiany żelaza, krzemiany magnezu, siarczki żelaza, tlenki żelaza i innych metali. Ponadto cząstki te zawierają parę wodną, amoniak i wodorotlenek amonu. Jest bardzo prawdopodobne, że pierwotne ziarna masy Ziemi miały taki właśnie skład.

Temperatura narastającej masy była zasadniczym czynnikiem determinującym budowę Ziemi. Jednorodna mieszanina chłodnych cząstek musiała na pewnym etapie rozwoju Ziemi ulec stopieniu, aby nastąpił proces dyferencjacji i aby wydzieliło się jądro Ziemi.

Nagrzewanie mogło być uzależnione od przekształcania energii potencjalnej i kinetycznej cząstek w ciepło. Początkowo proces ten był mało efektywny z powodu niewielkiej masy i małych prędkości cząstek. Z biegiem czasu, w miarę zwiększania się rozmiarów Ziemi zyskiwał on coraz większe znaczenie i mógł w pewnym stadium doprowadzić do wysokiej temperatury na jej powierzchni.

Inny możliwy mechanizm nagrzewania to wyswobodzenie się energii chemicznej akumulowanych cząsteczek w reakcjach egzotermicznych. W mgławicy niskotemperaturowej czynnik ten mógł grać dużą rolę tylko w początkowym stadium akumulacji.

Nagrzewanie Ziemi mogło być też uzależnione od pracy wykonanej przy zagęszczaniu się i zderzaniu luźnego materiału. Obliczenia wykazują jednak, że czynnik ten nie mógł dać temperatury wyższej niż 1200 °C.

I wreszcie czwarta możliwość to rozpad radioaktywny. W początkowym etapie nie mógł mieć on istotnego wpływu na temperaturę Ziemi ze względu na jej jednorodny skład. Później jednak czynnik ten stał się dominujący. Dokładna analiza wymienionych możliwych mechanizmów nagrzewania Ziemi wykazuje, że w jej wewnętrznej części nagrzewanie musiało trwać od początkowego stadium akumulacji i zmieniało z biegiem czasu swoją formę. Zewnętrzna część natomiast przez długi czas miała pierwotny skład i budowę, jednak nie dłużej niż do momentu rozpoczęcia się procesów geologicznych, kiedy to skorupa ziemska musiała być już wyraźnie zdyferencjowana. Wynika to z pomiarów wieku bezwzględnego skał.

Każda skała składa się z wielu minerałów, które powstały najczęściej w różnych okresach rozwoju Ziemi. Mówiąc o wieku bezwzględnym skały mamy na myśli albo czas, w którym powstał określony minerał, albo też średnią arytmetyczną wieku jej składników.

Około 20 lat temu w północnej Tanzanii znaleziono granity czarnokitowe o wieku 3,5 mld lat, a w dawnej Gujanie Francuskiej oznaczono migmatyty o wieku ponad 3,9 mld lat. Dane te zostały uzyskane w sposób o wiele mniej doskonały niż to robimy dzisiaj, ale, jak się okazało, niewiele różnią się od ostatnich wyników.

Najstarsze gnejsy biotytowe z Półwyspu Kolskiego liczą według ostatnich danych od 3,40 do 3,48 mld lat. W Ameryce Północnej cyrkony granitognejsów i migmatytów z Montany wykazują wiek 3,5 mld lat. Wiek granitów z okolicy Perth w zachodniej Australii określa się na 2,7 mld lat.

Najświeższe dane pochodzą z Grenlandii. Określenie wieku bezwzględnego gnejsów amfibolowych z okolic Godthaab dwiema niezależnymi metodami dało ten sam wynik 3,7—3,8 mld lat.

Z powyższych danych wynika wiele wniosków odnoszących się do etapu geologicznego rozwoju Ziemi. Procesy powodujące wykształcenie się wielkich pni granitoidowych w Południowej Rodezji i na Półwyspie Kolskim miały miejsce nie później niż 3,5 mld lat temu. Skały granitoidowe są przekształconymi pod wpływem dużego ciśnienia i temperatury (metamorfizm) skałami osadowymi. Zatem najstarszy cykl geosynklinalny, czyli proces obniżania się skorupy ziemskiej w pewnej strefie i gromadzenia ogromnych ilości osadów powstałych ze zwietrzenia skał krystalicznych, które następnie ulegają częściowemu metamorfizmowi, miał miejsce około 3,5 mld lat temu. Oznacza to istnienie w tym czasie zbiornika geosynkliny z już nagromadzonymi osadami podlegającymi metamorfizmowi. Trzeba więc przyjąć, że początek pierwszego cyklu geosynklinalnego, w wyniku którego powstał zbiornik, nastąpił co najmniej 4 mld lat temu.

Jeżeli pierwsze zbiorniki geosynklinalne na Ziemi były podobne do dobrze zbadanych zbiorników z ery paleozoicznej, to możliwe jest, że pojawiły się one już 4,5 mld lat temu. Do tego czasu musiała nastąpić dyferencjacja materii ziemskiej, więc nie jest to zapewne zawyżona ocena wieku Ziemi.

Z tego, że Ziemia istnieje tak długo, niektórzy wyciągają wniosek, iż zamarła ona w swoim rozwoju. Zwróćmy jednak uwagę na czynny stale wulkanizm i częste trzęsienia Ziemi, w których wyzwalają się ogromne ilości energii. Zjawiska te są dowodem na to, że wnętrze Ziemi ciągle jeszcze żyje i że trwa cykliczny proces przebudowy jej powierzchni. Przypomnijmy wielki spór o Atlantydę. Fakty na temat Atlantydy podane w przekazie Platona uważam za bardzo wiarygodne, ale nie znaleziono dotychczas jej śladów. Wobec tego albo nasza interpretacja jest nieprawidłowa, albo, co jest dopuszczalne z punktu widzenia geologii, katastrofa była tak totalna, że z Atlantydy rzeczywiście nic nie zostało.

Tego rodzaju katastrofy, choć w mniejszej skali, zdarzają się również współcześnie. Przecież katastrofalne trzęsienia w Portugalii i Chinach czy też niedawno w Chile przebudowały tam wręcz powierzchnię Ziemi, zniszczyły jeziora, zmieniły bieg rzek, depresje zostały podniesione, nieraz bardzo wysoko, a partie gór uległy obniżeniu.

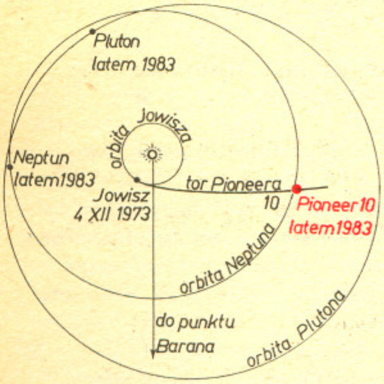
W przeszłości miały miejsce jeszcze potężniejsze kataklizmy związane z powstawaniem łańcuchów górskich. Obecny etap rozwoju Ziemi jest etapem spokojnym. Za pewien czas, nawet niezbyt długi w geologicznej skali czasu, dojdzie z pewnością do intensywnego rozwoju jednego z łańcuchów górskich. Góry nie tworzą się bowiem jednorazowo, tylko etapami o różnym nasileniu. Gwałtowne zmiany rozdzielone są okresami spokoju i niszczenia tego, co zostało stworzone. Te zniszczone struktury czasami znowu ulegają zapadnięciu, a na nich gromadzą się osady, które następnie zostają sfałdowane i wypiętrzone. Jest to źródłem obserwowanych w górach tzw. niezgodności strukturalnych.

Ruchom górotwórczym towarzyszy wulkanizm i wybijanie się z głębi Ziemi wielkich pni magmowych. Tak powstał np. Mount Blanc. Wielkie obszary kontynentów mogą znaleźć się pod wodą, a dno morskie może zostać wydźwignięte ponad powierzchnię wody. Obszar Anglii był niegdyś połączony z Francją, Belgią i Holandią. Pradolina Tamizy i pradolina Renu to obecnie dokładnie zbadany sondami podmorski kanion. Rzeki te leżały w morfologicznej depresji, która na skutek gwałtownych ruchów skorupy ziemskiej uległa dalszemu obniżeniu.

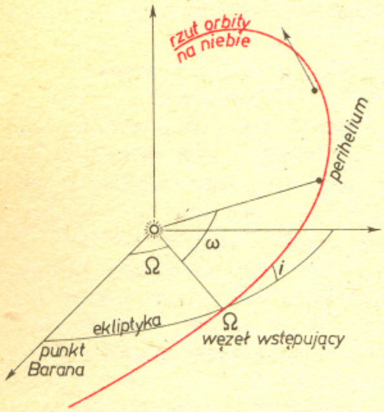
Wszystkie te zjawiska zachodzą oczywiście w geologicznej skali czasu. Geologiczna sekunda to dziesiątki tysięcy lat. Okres między fałdowaniami, w którym żyjemy, trwa od ostatniego fałdowania alpejskiego, czyli zaledwie kilka minut i również kilka minut dzieli nas od następnego okresu intensywnych ruchów górotwórczych.

# Pioneer 10 opuścił Układ Słoneczny

*Dr Tomasz KWAST*




Rys. 1




Rys. 2

Już dość dawno, bo w kwietniu 1983 r., prasa doniosła, że „amerykański próbnik kosmiczny Pioneer 10 dotarł poza orbitę Plutona i znalazł się 3 mld km od Ziemi". Wprawdzie przytoczona tu liczba nie odpowiada rzeczywistości (Pluton zbliża się do Słońca, a więc praktycznie i do Ziemi, nie bardziej niż na ok. 4,5 mld km), ale faktem pozostaje, że pierwszy aparat zbudowany przez człowieka formalnie opuścił Układ Słoneczny. Dokładniej sytuacja wygląda następująco. Pluton obiega Słońce w średniej odległości $a_P = 39{,}8$ j.a. (tzw. jednostek astronomicznych; 1 j.a. = 150 mln km jest średnią odległością Ziemi od Słońca i przez to jest wygodną i powszechnie stosowaną jednostką odległości w obrębie Układu Słonecznego). Wskutek silnego spłaszczenia orbity (jej mimośród wynosi $e_P = 0{,}255$) zbliża się do Słońca w perihelium na odległość $a_P(1-e_P) = 29{,}7$ j.a., a więc bywa bliżej Słońca, niż Neptun obiegający je po orbicie niemal kołowej o promieniu $a_N = 30{,}3$ j.a. Sytuacja taka trwa obecnie już prawie od początku 1979 r. i potrwa jeszcze kilka lat. Opuszczenie Układu Słonecznego przez sondę należy więc rozumieć w ten sposób, że znalazła się ona dalej od Słońca niż Pluton (w kwietniu) i dalej niż Neptun (w czerwcu 1983 r.) (rys. 1). Nawiasem mówiąc zarówno Neptun, jak i Pluton znajdowały się w tym czasie w zupełnie innych obszarach Układu Słonecznego niż sonda.

Warto też może przypomnieć, że Pioneer 10 wystartował z Ziemi 3 III 1972 i jako pierwsze urządzenie zbudowane przez człowieka dokonał ciasnego zbliżenia do Jowisza 4 XII 1973 przesyłając na Ziemię m.in. liczne obrazy tej planety. Po tym zbliżeniu próbnik leci już tylko pod wpływem grawitacji słonecznej po torze hiperbolicznym zmierzając ku gwiazdozbiorowi Bliźniąt.

Właśnie, a jak można się dowiedzieć, po jakiej orbicie porusza się interesujący nas obiekt? Na początek sprecyzujmy, co w ogóle rozumiemy przez „znajomość orbity" — oczywiście będziemy mieli na myśli zawsze krzywą stożkową. Intuicja podpowiada, że chcielibyśmy znać rozmiary, kształt i usytuowanie orbity w przestrzeni po to, aby móc obliczać położenia naszego obiektu w dowolnej chwili. Skądinąd wiemy, że położenie obiektu w dowolnym momencie może zostać obliczone w wyniku rozwiązania jego równań ruchu (różniczkowych) z konkretnymi warunkami początkowymi. Te właśnie warunki początkowe (trzy składowe położenia i trzy składowe prędkości ciała w chwili umownie uznanej za początkową) całkowicie określają dalszy jego ruch, mogą więc formalnie być używane jako parametry charakteryzujące orbitę. Jednak właściwie nic one nie mówią o jej mierzalnych parametrach i dlatego w astronomii stosuje się równoważne im inne sześć tak zwanych elementów orbity, mających bardzo przejrzysty sens geometryczny.

Tak więc rozmiary orbity w naturalny sposób reprezentuje jej duża półoś $a$, kształt zaś — mimośród $e$. Z kolei usytuowanie płaszczyzny orbity w przestrzeni określa się przy pomocy dwóch kątów: $i$ — nachylenia jej do płaszczyzny ekliptyki oraz $\Omega$ — długości ekliptycznej wstępującego węzła orbity. Orientację samej orbity w jej płaszczyźnie określa tzw. długość orbitalna perihelium $\omega$ (rys. 2). Wreszcie szóstym elementem jest moment $t_0$ przejścia ciała przez perihelium.

Wyznaczanie elementów orbit ciał niebieskich na podstawie ich obserwacji na niebie było kiedyś głównym problemem mechaniki nieba. Obecnie zeszło na dalszy plan, gdyż wykonywane jest standardowo i z reguły za pomocą komputerów. My jednak wyznaczymy orbitę Pioneera 10 niemal w pamięci, za to oczywiście tylko w przybliżeniu i nie z obserwacji, lecz z dość skąpych i mało dokładnych danych. Mamy mianowicie o nim następujące informacje:

— Leci prawie w płaszczyźnie ekliptyki, czyli $i = 0$.

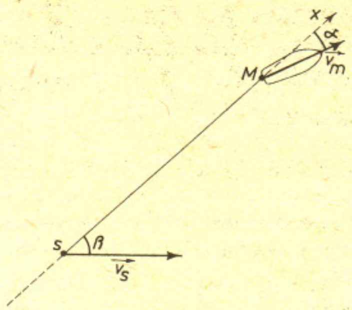
— Znamy czas i miejsce jego „startu" z Jowisza, przy czym punkt ten jest zarazem w przybliżeniu perihelium orbity. Oznacza to, że $t_0 = 4$ XII 1973, zaś w stosownym roczniku astronomicznym odczytujemy, że Jowisz (a więc i próbnik) znajdował się wtedy w odległości $q = 5{,}1$ j.a. od Słońca i w długości ekliptycznej $\Omega + \omega = 318°$.

— Z publikacji dowiadujemy się, że prędkość Pioneera 10 „w nieskończoności" wynosi $v_\infty = 11$ km/s. Stąd od razu obliczamy dużą półoś orbity $a = -GM_\odot/v_\infty^2 = -1{,}1 \times 10^{12}$ m = $= -7{,}3$ j.a. (G jest tu stałą grawitacji, $M_\odot$ masą Słońca, zaś ujemne $a$ oznacza, że orbita jest hiperboliczna) oraz mimośród $e = 1 - q/a = 1{,}7$.

W ten sposób elementy orbity mamy wyznaczone. Niestety, są one tylko orientacyjne, ponieważ we wszystkich danych mieliśmy bardzo mało „miejsc po przecinku". Położenia sondy obliczane na podstawie tych elementów będą, siłą rzeczy, obarczone sporymi błędami. Niemniej jednak zarówno obliczone przez nas elementy, jak i stosowne publikacje przedstawiają dość zgodnie orbitę Pioneera 10 w przybliżeniu jak na załączonym rysunku. Ocenia się ponadto, że średnią odległość Plutona osiągnie on gdzieś w 1986 r., 50 j.a. od Słońca w 1993, a 100 j.a. w 2013 r.

Ciekawe, z jakiej maksymalnej odległości prześle jeszcze na Ziemię informacje naukowe.

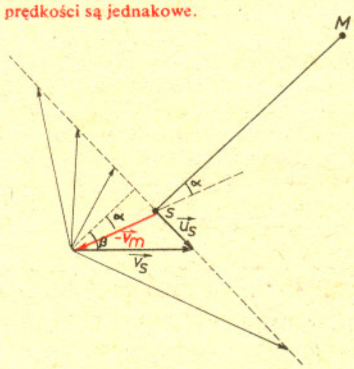
**Rozwiązanie zadania F 146.** Narciarz i motorówka w trakcie ruchu pozostają w stałej odległości, równej długości liny.




Wynika stąd, że rzuty ich prędkości na kierunek liny muszą być równe (rys. 1), a więc

$$V_{mx} = V_{sx},$$
$$V_m \cos\alpha = V_s \cos\beta,$$
$$V_s = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} V_m.$$

Sens fizyczny mają kąty z pierwszej i czwartej ćwiartki ($|\alpha|, |\beta| < 90°$).
Gdy $|\beta| > |\alpha|$, to $V_s > V_m$. Zatem gdy prędkość sportowca tworzy z liną kąt większy niż prędkość motorówki, wtedy narciarz porusza się szybciej niż holująca go motorówka; w przeciwnym przypadku porusza się wolniej, a przy równych kątach prędkości są jednakowe.




Rys. 2 przedstawia opisywaną sytuację w układzie odniesienia związanym z motorówką. W tym układzie prędkość sportowca wynosi $U_s = V_s + (-V_m)$ i musi być prostopadła do kierunku liny.

**Rozwiązanie zadania M 354.** Dzielą kwadrat na 100 prostokątów o wymiarach $1 \times \frac{1}{100}$ odcinkami równoległymi do jednego z boków zauważymy, że wewnątrz lub na brzegu jednego z tych prostokątów znajdą się trzy spośród punktów $A_1, \ldots, A_{201}$. Wystarczy teraz skorzystać z wyniku poprzedniego zadania, by zauważyć, że pole odpowiedniego trójkąta nie przekracza $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$.

# Ankieta

*Delta* ukazuje się 10 lat. Mamy już wielu stałych Czytelników, jak również niemało przypadkowych kontaktów. Chcielibyśmy dowiedzieć się od Was wszystkich, co sądzicie o *Delcie*. Pragniemy poznać Wasze opinie, co pozwoli nam na uwzględnienie wielu postulatów — i to jest cel naszej ankiety.

Forma wypowiedzi jest w zasadzie dowolna, dla redakcji byłoby jednak wygodniej, gdyby Uczestnicy ankiety odpowiedzieli na poniższe pytania, uzupełniając ewentualnie swe wypowiedzi na osobnej kartce.

Odpowiadać na pytania można w formie skreśleń, stawiania stopni (jak w szkole) itd.

Wśród Czytelników, którzy nadeślą wypełnione ankiety do 31.03.1984, będą rozlosowane nagrody rzeczowe. Oto pytania:

1. Czy *Deltę* czytasz systematycznie czy niesystematycznie*, od kiedy?

2. Gdzie ją kupujesz: w kiosku, prenumeruję, pożyczam*?

3. Kto zachęcił Cię do czytania *Delty*: kolega, nauczyciel, rodzina*,

4. Czy łatwo jest dostać *Deltę*? łatwo, przeważnie łatwo/trudno, trudno*.

5. Czy coś się pod tym względem ostatnio zmieniło? (na lepsze, na gorsze)

6. Najbardziej interesująca jest w *Delcie* matematyka, fizyka, astronomia*

7. Za dużo ukazuje się w *Delcie* artykułów z dziedziny

8. Za mało natomiast z dziedziny

9. Co sądzisz ogólnie o poziomie artykułów w *Delcie*
(a) matematyka jest: za łatwa, w sam raz, za trudna*
(b) fizyka jest: za łatwa, w sam raz, za trudna*
(c) astronomia jest: za łatwa, w sam raz, za trudna*

10. Co sądzisz o stałych działach *Delty* (poziom, tematyka itd.)?
(a) zadania z matematyki
(b) zadania z fizyki
(c) liga zadaniowa „Klub 44"
(d) Patrz w niebo

11. Jaką formę najbardziej lubisz w *Delcie*? artykuły, wywiady, drobiazgi, stałe działy*, inne (jakie?)

12. Jak oceniasz w *Delcie* pozycje z innej tematyki (biologia, informatyka)?

13. Czy wolisz numery *Delty* napisane na jeden temat czy różnorodne*?

14. Czy *Delta* jest ciekawsza, taka sama, nudniejsza niż wtedy, kiedy zaczynałeś ją czytać?

15. Jak oceniasz szatę graficzną *Delty*?
(a) okładka
(b) ilustracje
(c) układ graficzny

16. Który z artykułów publikowanych w *Delcie* najbardziej Ci się
(a) podobał
(b) nie podobał

17. Czy chciałbyś przeczytać w *Delcie* artykuł na zamówiony przez Ciebie temat?, na jaki?

18. Czy chciałbyś, żeby w *Delcie* pojawiły się nowe stałe działy? Czego mogłyby dotyczyć?

19. Czy któryś z ostatnich numerów *Delty* szczególnie Ci się
a) podobał
b) nie podobał?

20. Czego ogólnie oczekujesz w *Delcie*

21. Inne uwagi i sugestie

22. Wiek.

23. Płeć.

24. Miejsce zamieszkania (miejscowość, z zaznaczeniem: duże miasto, małe miasto, osada, wieś)

25. Zawód wyuczony lub rodzaj szkoły (i klasa)

26. Zainteresowania

* niepotrzebne skreślić

**Redakcja DELTY**
**Koszykowa 6a 00-564 WARSZAWA**

Lista
uczestników ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 8/1983

| | | |
|---|---|---|
| Ryszard Pagacz | - Zawadzkie | 44,88pkt |
| Tomasz Biegański | - Lublin | 43,51pkt |
| Andrzej Pawłowski | - Zabrze | 42,09pkt |
| Paweł Kamiński | - Warszawa | 44 + + 41,35pkt |
| Marian Roman | - Ełk | 40,63pkt |
| Artur Smolczyk | - Tarnów Op. | 38,68pkt |
| Marek Gałecki | - Milanówek | 44 + + 37,48pkt |
| Małgorzata Czerniakowska | - Gdańsk | 35,69pkt |
| Marek Prauza | - Poraj | 35,09pkt |
| Wojciech Olszewski | - Brwinów | 29,03pkt |
| Kazimierz Serbin | - Sanok | 28,59pkt |
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 28,08pkt |
| Edward Orzechowski | - Warszawa | 44 + + 26,04pkt |
| Władysław Wasiak | - Toruń | 25,33pkt |
| Jerzy Milczarek | - Gorzów Wkp. | 24,48pkt |
| Jerzy Tyszkiewicz | - Warszawa | 23,82pkt |
| Ryszard Mazurek | - Wrocław | 22,85pkt |
| Adam Stadler | - Rzeszów | 22,39pkt |
| Włodzimierz Szymczyk | - Zielonka | 22,31pkt |
| Krzysztof Jedziniak | - Katowice | 21,63pkt |
| Zbigniew Kryłow | - Sopot | 21,49pkt |
| Krzysztof Trautman | - Warszawa | 44 + + 21,43pkt |
| Janusz Prajs | - Opole | 20,02pkt |
| Zygmunt Bartkowski | - Warszawa | 19,67pkt |
| Jerzy Janowicz | - Bolesławiec | 88 + + 19,39pkt |
| Jerzy Małopolski | - Kraków | 19,18pkt |
| Krzysztof Jakubczak | - Kudowa Zd. | 18,26pkt |
| Krystyna Witek | - Ostrów Maz. | 17,50pkt |
| Dezső Gross | - Budapeszt | 17,12pkt |
| Maciej Głuszek | - Wrocław | 16,92pkt |
| Tomasz Masłowski | - Toruń | 16,68pkt |
| Anna Gluza | - Toruń | 16,37pkt |
| Andrzej Lenarcik | - Kielce | 15,38pkt |
| Krzysztof Zygan | - Lubin | 15,08pkt |
| Jacek Uryga | - Bytom | 88 + + 14,95pkt |
| Dariusz Sowizdrzał | - Szczecin | 44 + + 14,93pkt |
| Karol Jachacy | - Tłuszcz | 13,86pkt |
| Jerzy Grzywocz | - Ruda Śl. | 13,29pkt |
| Stanisław Wrzos | - Lubin | 13,22pkt |
| Tomasz Józefczyk | - Poznań | 12,78pkt |
| Józef Siwy | - Łaziska G. | 12,44pkt |
| Adam Wyrwa | - Nowy Wiśnicz | 12,39pkt |
| Zbigniew Bartold | - Gdynia | 44 + + 12,08pkt |
| Andrzej Sudoł | - Nowy Sącz | 10,80pkt |
| Henryk Mikołajczak | - Toruń | 10,18pkt |
| Krzysztof Piorun | - Warszawa | 9,36pkt |
| R. Salta | - Wrocław | 9,23pkt |
| Zbigniew Zaus | - Kraków | 8,51pkt |
| Grzegorz Kuś-Taborski | - Kraków | 8,30pkt |
| Jan Styczyński | - Szczepanki | 8,19pkt |
| Mariusz Fiszer | - Duszniki Zd. | 44 + + 8,09pkt |

Zestawienie obejmuje nazwiska wszystkich uczestników, którzy w klasyfikacji ligowej zebrali co najmniej 8 punktów.

Pan Ryszard Pagacz jest dziesiątym członkiem "Klubu 44".

Współczynniki trudności zadań:
58 - 1,40    59 - 1,92    60 - 2,14

W ciągu dwóch przeszło lat swego istnienia liga zadaniowa zdążyła okrzepnąć i obrosnąć w piórka. Rubryka „Klub 44" jest już stałą pozycją w naszym miesięczniku. Sam zaś Klub 44 — w chwili, gdy piszemy te słowa — liczy dziewięciu członków; a do momentu, gdy Czytelnicy dostaną ten numer do rąk — przekroczy zapewne dziesiątkę. Dwóch uczestników: pan Jerzy Janowicz i pan Jacek Uryga — zdążyło wykonać już po dwa czterdziestoczteropunktowe okrążenia. Co miesiąc włączają się do konkursu nowi uczestnicy z całej Polski, z wielkich i małych miejscowości.

Liga gra!

Zdecydowaliśmy się przytoczyć w pełnym brzmieniu regulamin ligi, wydrukowany dotychczas tylko raz, w numerze 9/1981. Pragniemy zwrócić uwagę na punkt 7: każde zadanie na oddzielnej kartce; to naprawdę dla nas ważne. Uczniów i studentów prosimy o dane dotyczące szkoły lub uczelni (oczywiście nie ma potrzeby powtarzać tych danych co miesiąc — wystarczy podać je raz, a później tylko sygnalizować zmiany). Miło nam będzie, jeśli również inni uczestnicy napiszą, przy okazji, parę słów o sobie (zawód, praca, inne ciekawsze dane, wedle uznania). Zdecydowanie natomiast wymagamy, aby prace były podpisane imieniem i nazwiskiem. Prac anonimowych bądź podpisanych tylko inicjałami — nie czytamy.

Prosimy o przestrzeganie terminów nadsyłania rozwiązań. Wprawdzie w roku 1982 terminy te były fikcją (i wówczas tolerowaliśmy nawet duże opóźnienia), ale był to efekt potężnego zakłócenia cyklu produkcyjnego, które, miejmy nadzieję, nie będzie się powtarzać. Obecnie (jesień '83) numery ukazują się w zasadzie terminowo, co daje około półtora miesiąca na rozwiązywanie każdej kolejnej trójki zadań. Dopuszczamy więc jedynie niewielkie, kilkudniowe opóźnienia, które mogą być spowodowane opieszałością poczty.

Jak w omówieniu sprzed roku (*Delta* 11/1982), pragniemy ustosunkować się do próśb i sugestii powtarzających się w listach naszych Czytelników. Najczęstszym życzeniem jest obszerniejsza informacja o uzyskiwanych wynikach: publikowanie bardziej rozbudowanej czołówki ligi, szczegółowe podawanie ocen itp. Musimy odmówić: raz — z powodu braku miejsca, dwa — dlatego, że nieuniknione stałyby się wówczas informacje „negatywne" (słabe wyniki niektórych uczestników), a naszym zdaniem nie powinny być one publikowane. Skłonni za to jesteśmy ogłaszać obszerną tabelę ligową, zawierającą kilkadziesiąt nazwisk, powiedzmy, raz do roku, w numerze styczniowym.

Wychodząc naprzeciw naturalnym życzeniom tych uczestników, którzy chcieliby znać swoje oceny, proponujemy formę następującą: każdy, kto przyśle nam zaadresowaną do siebie **kartkę pocztową** (nie list, nie kopertę) ze sporządzoną według podanego wzoru tabelką z numerami zadań, których oceny chce znać — otrzyma tę kartkę wypełnioną. Sugerujemy przysyłanie takich kartek nie co miesiąc, ale co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań nie trzech, ale kilkunastu zadań.

Liczne uwagi Czytelników dotyczą doboru zadań, a najczęściej powtarza się zarzut: zadanie to a to było za łatwe, wręcz niepoważne... No cóż — tak właśnie miało być. Naszym zamierzeniem była i jest duża różnorodność zadań: trudne i łatwe, poważne i niepoważne. Nasza liga chce być przede wszystkim zabawą, dostępną i atrakcyjną dla osób o bardzo różnych kwalifikacjach matematycznych — czymś pośrednim między konkursami zadaniowymi w poważnych czasopismach naukowych a kącikami łamigłówek w popularnych tygodnikach.

| *Zadanie nr* | *34* | *35* | *39* | *40* | *41* | *42* | *45* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ocena* | | | | | | | |

*Aktualne miejsce w tabeli:*

Dziękujemy Czytelnikom, którzy dostarczyli nam zadań i prosimy o dalsze. Do każdego proponowanego zadania należy dołączyć rozwiązanie (choćby skrótowe) lub informację, że autor nie zna rozwiązania. Ponieważ autorzy zadań często są też uczestnikami konkursu, wprowadzamy do punktacji ligowej zasadę, że autor zadania otrzymuje „z urzędu" ocenę 1,0, pod warunkiem, że dostarczył zadanie wraz z rozwiązaniem (nawet jeśli rozwiązanie było tylko szkicowe); gdy natomiast zamieszczamy zadanie, które zostało dostarczone bez rozwiązania, autor zadania może uczestniczyć w konkursie na zwykłych zasadach.

Niektóre z przesłanych nam zadań mają tę wadę, że są zwykłymi „podręcznikowymi" zadaniami z kursu uniwersyteckiego. Mają one wprawdzie i elementarne rozwiązania, i mogłyby być dostępne, a przy tym ciekawe i trudne dla uczniów szkół średnich oraz dla innych uczestników bez wykształcenia matematycznego. Ale jednocześnie byłyby to zupełnie standardowe zadania dla uczestników będących studentami. Z tego względu nie bardzo się one nadają do naszej ligi. Zresztą, błędu tego nie udało się i nam uniknąć i kilkakrotnie zdarzyło się nam zamieścić zadanie tego typu.

Gdy już o błędach mowa — dziękujemy tym Czytelnikom, którzy zwrócili uwagę na błędy w naszych rozwiązaniach. Uwagi najczęściej dotyczyły „wpadki" w numerze 9/1982 (błędnie wydrukowane zadania 32 i 33 ⇒ niewłaściwe rozwiązania w numerze 1/1983); przepraszaliśmy już za to Czytelników (*Delta* 2/1983).

Wytknięto nam też pomyłkę w rozwiązaniu zadania 24, wydrukowanym w numerze 8/1982; powinno tam być: $z_2 = x_1 - 1$, $z_3 = x_2 - 1$ oraz oszacowanie liczby $2S$ z góry i z dołu przez liczby $q^2 \pm q - 6$.

Pragniemy tu zaznaczyć, że rozwiązania, które drukujemy, to najczęściej tylko szkice (oszczędność miejsca!). Bywają w nich pominięte różne szczegóły, czasem dość istotne; nierzadko sami nie wystawilibyśmy sobie maksymalnej oceny. Ale uważamy te szkice za wystarczające do tego, by Czytelnicy mogli odtworzyć pełne rozwiązanie z wszystkimi detalami. Tu uwaga: nie uważamy za lukę ani usterkę, gdy w zadaniu konstrukcyjnym lub „łamigłówkowym" (zadaniu, w którym należy dać przykład jakiegoś obiektu lub metody) rozwiązanie ogranicza się do podania samej odpowiedzi (żądanego przykładu). W jednym z listów zarzucono nam, że to za mało, że należy objaśnić tok poprzedzającego rozumowania. Mimo że rozprawka taka mogłaby być dość ciekawa, nie należy ona do rzeczy. Dać przykład — to dać przykład. Tak samo w zadaniach „na dowodzenie" rozwiązanie polega na podaniu dowodu w jego ostatecznym kształcie, bez opisywania drogi, która doń prowadziła.

Poświęcimy teraz trochę uwagi ciekawszym z dotychczasowych zadań ligowych. W omówieniu naszym znajdą się te zadania, które przez nielicznych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi lukami — ocena $\geqslant$ 0,8 pkt) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z naszym rozwiązaniem.

**Zadanie 7** [Czy $(\bigwedge_x \lim_n f(x/n) = 0) \Rightarrow (\lim_{x\to 0} f(x) = 0)$?] okazało się, jak dotychczas, najtrudniejsze (współczynnik trudności WT = = 3,82). Jedyne poprawne rozwiązanie, i to różne od naszego, przysłał A. Lenarcik (patrz *Delta* 11/1982).

**Zadanie 11** [Równanie $W(x) = py$ w liczbach całkowitych] (WT = 3,14) rozwiązał poprawnie tylko M. Fiszer.

# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

**Zadania nr 73, 74, 75**

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1984

**73.** Dane są liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$. Niech $s = x_1 + \ldots + x_n$ oraz niech $s_k$ będzie sumą wszystkich $x_i$, z pominiętym składnikiem $x_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Dowieść, że $s_1^{-1} + \ldots + s_n^{-1} > (n+1)s^{-1}$.

**74.** Z talii 52 kart wybrano 13 kart. Niech $N = \binom{52}{13}$. Czy jest możliwe (chodzi oczywiście o możliwość „teoretyczną", nie „czasową" czy „techniczną") $N$-krotne wykonanie operacji polegającej na zastąpieniu jednej z 13 kart jedną z pozostałych 39 kart tak, by po $N$ operacjach (ale nie wcześniej) wrócić do konfiguracji wyjściowej i żeby żadne dwa zestawy 13-kartowe, spośród wszystkich otrzymywanych po drodze, nie były identyczne?

**75.** W 1984 punktach sfery o promieniu $R$ umieszczono równe masy tak, że środek masy otrzymanego układu pokrywa się ze środkiem sfery. Obliczyć sumę kwadratów wzajemnych odległości tych punktów.

Zadanie **75** przysłał nasz Czytelnik, pan Jarosław Cel z Końskich.

*Redaguje*
*dr Marcin E. KUCZMA*

**Regulamin**

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą Klub 44.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 3 zadania w każdym numerze, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru $n$ należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania zadań z nr 11/1984 upływa 31 stycznia 1985). W numerze $n+4$ podawane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Na kopercie prosimy umieszczać dopisek: Klub 44.
8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność logiczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustalaną według następującej zasady: jeżeli $N$ oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, a $S$ oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3\frac{S}{N}$.
Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane. Z chwilą osiągnięcia łącznej sumy 44 punktów uczestnik staje się członkiem Klubu 44.
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.
14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.
15. Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian Regulaminu.

---

**Zadanie 15** [Samochodem przez pustynię] (WT = 3,58). Zadowalającego rozwiązania nikt nie podał; jedynie Z. Kryłow znalazł strategię optymalną, ale bez dowodu optymalności.
**Zadanie 17** [W wielokąt wypukły można wpisać kwadrat] (WT = 2,80). Maksymalną ocenę otrzymał tylko J. Janowicz, za odesłanie do literatury (tw. Sznirelmana, słuszne dla dowolnej krzywej zamkniętej, niekoniecznie wypukłej); własnego poprawnego rozwiązania nikt z Czytelników nie podał.
**Zadanie 20** [Wielościan wypukły pomalowany dwoma kolorami] (WT = 3,77). Brak pełnego rozwiązania; jedna poprawna odpowiedź na jedno z pytań postawionych w zadaniu: M. Suchenek.
**Zadanie 21** [Błąd w dowodzie implikacji: różniczkowalność ⇒ ciągłość pochodnej] (WT = 3,23). Tylko R. Drabik i M. Suchenek.
**Zadanie 13 i 25** [Zbieżność ciągu $x_n = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n}$] oraz zadanie 46 (patrz niżej) tworzyły pewien cykl. Zadania 13 [przypadek $a > 1$] (WT = 3,61) nie rozwiązał prawidłowo nikt. Zadanie 25 [przypadek $0 < a < 1$] (WT = 3,55) — tylko J. Uryga.
**Zadanie 29** [Rozkład kwadratu na trójkąty ostrokątne] (WT = 2,37). Dużo dobrych rozwiązań. M. Gałecki podał rozkład na 8 części i pokazał (dowód dość długi), że na mniej części się nie da.
**Zadanie 35** [Jakie skończone, nie zawarte w prostej, zbiory $Z$ na płaszczyźnie mają własność: jeśli dwie proste przechodzące (każda) przez 2 punkty $Z$ przecinają się, to punkt przecięcia $\in Z$?] (WT = 2,87). Rozwiązanie prawidłowe: T. Biegański, M. Gałecki, P. Kamiński, K. Trautman, J. Uryga. Efektowne rozwiązanie K. Trautmana (szkic): Weźmy trójkąt o wierzchołkach $A, B, C \in Z$, o najmniejszej możliwie wysokości $h_C$; wówczas prosta $AB$ nie zawiera innych punktów zbioru $Z$ (sprawdzenie łatwe). Przypuśćmy, że poza prostą $AB$ leżą jeszcze co najmniej dwa punkty $P, Q \in Z$. Jeśli $PQ \parallel AB$, to $ABPQ$ musi być równoległobokiem i $Z = \{A,B,P,Q,S\}$, gdzie $S$ jest środkiem tego równoległoboku; a jeśli $PQ \nparallel AB$, to wszystkie punkty $Z$, z wyjątkiem jednego z punktów $A$, $B$, muszą leżeć na prostej $PQ$ (pomijamy nietrudne szczegóły sprawdzenia).
**Zadanie 39** [Rozkład jedynki na sumę odwrotności różnych liczb nieparzystych] (WT = 2,67). Dużo dobrych przedstawień. Dowody tego, że minimalną liczbą składników jest 9, podali M. Gałecki, E. Orzechowski, M. Roman, K. Trautman.
**Zadanie 40** [Co można powiedzieć o zespolonych pierwiastkach wielomianu $\Sigma a_k z^k$, gdy $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$?] (WT = 2,71). Tylko T. Biegański, M. Czerniakowska, J. Uryga uzyskali tezę: $|z| \leqslant 1$.
**Zadanie 43** [W czworościanie $ABCD$: $A_n \in \overline{AD}$, $A_nD = AD/n$ i analogicznie określamy punkty $B_n$, $C_n$; $P_n = \text{pł}(A_n, B_{n+1}, C_{n+2}) \Rightarrow$ istnieje prosta zawarta we wszystkich płaszczyznach $P_n$] (WT = 2,90). Wiele ciekawych metod. Sporo ładnych rozwiązań geometrią analityczną (najzgrabniej — K. Trautman, z uogólnieniem na $k$-wymiarową przestrzeń afiniczną). Niektórzy (A. Gluza, M. Roman) wykorzystują analityczny warunek współpękowości, inni (Z. Zaus) — pojęcie dwustosunku. R. Pagacz stosuje rachunek wektorowy. A oto szkic rozwiązania, które podał A. Smolczyk: Niech $X$ będzie punktem przecięcia

## Rozwiązania zadań z numeru 9/1983

Przypominamy treść zadań:

61. Czy równanie $x^3+y^3+z^3 = 13579^2$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?
62. Wykazać, że w dowolnym trójkącie znak wyrażenia $2R+r-p$ zależy od tego, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
63. Rozszyfrować dodawanie. Znaleźć rozwiązanie:
a) w którym DWA jest liczbą możliwie największą;
b) w którym najwięcej razy występuje cyfra wyrażająca wiek ligi.

$$\begin{array}{r} \mathrm{DWA} \\ \mathrm{LATA} \\ \mathrm{TRWA} \\ +\mathrm{LIGA} \\ \hline \mathrm{DELTY} \end{array}$$

**61.** Użyjemy kongruencji modulo 9. Łatwo sprawdzić, że sześcian dowolnej liczby całkowitej przystaje do 0 lub $\pm 1$ (mod 9). Zatem dla dowolnej trójki liczb całkowitych $x$, $y$, $z$ zachodzi relacja $x^3+y^3+z^3 \equiv r$ (mod 9), gdzie $r \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Ponieważ $m = 13579 \equiv -2$ (mod 9), więc $m^2 \equiv 4$ (mod 9). Wobec tego równanie $x^3+y^3+z^3 = m^2$ nie ma rozwiązań całkowitych.

**62.** Niech $A$, $B$, $C$ oznaczają miary kątów danego trójkąta $ABC$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = x,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = y,\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = z,\ x+y = s,\ 1-xy = t.$$

Zgodnie ze znanymi wzorami

$$z = \operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \frac{t}{s},\quad \sin C = \frac{2z}{1+z^2} = \frac{2st}{s^2+t^2},$$

$$\sin A + \sin B = \frac{2x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2} = \frac{2s(2-t)}{s^2+t^2}.$$

Z zależności geometrycznych w trójkącie $ABO$ (gdzie $O$ jest środkiem koła wpisanego) wynika, że

$$AB = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{r}{x}+\frac{r}{y} = \frac{rs}{1-t},$$

a ze wzoru sinusów dla trójkąta $ABC$ dostajemy

$$AB = 2R\sin C = \frac{4Rst}{s^2+t^2}.$$

Przyrównanie prawych stron otrzymanych wyrażeń daje

$$r = \frac{4Rt(1-t)}{s^2+t^2}.$$

Ponieważ wreszcie

$$p = R(\sin A+\sin B+\sin C) = \frac{4Rs}{s^2+t^2},$$

po niedługich rachunkach dostajemy

$$2R+r-p = \frac{2R(s-t)(s+t-2)}{s^2+t^2} = -\frac{2R(x+y)(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Różnica $1-x$ jest dodatnia, zerowa, ujemna odpowiednio, gdy kąt $A$ jest ostry, prosty, rozwarty. Podobnie jest z czynnikami $1-y$ i $1-z$.

$$\text{Zatem } 2R+r-p \begin{cases} < 0 & \text{dla trójkąta ostrokątnego} \\ = 0 & \text{dla trójkąta prostokątnego} \\ > 0 & \text{dla trójkąta rozwartokątnego} \end{cases}$$

**63.** a) Z zapisu działania wynika, że DELTY < 30000, więc D = 1 lub D = 2. Aby zmaksymalizować DWA, celowe jest poszukiwanie rozwiązania, w którym D = 2, a W jest cyfrą dużą. Próba z W = 9 szybko prowadzi do sprzeczności. Próba z W = 8, po rozpatrzeniu kilku możliwości, prowadzi do rozwiązania (a).
b) Tym razem A = 2, skąd Y = 8 oraz D = 1. Dysponując tak bogatą informacją szybko i bez trudu znajdujemy odpowiedź (b).
Uwaga. Litery R oraz I pojawiają się jako składniki jednej tylko kolumny — są więc zamienne. I tak zamienne są w rozwiązaniu (a) cyfry 0 i 1, a w rozwiązaniu (b) cyfry 3 i 9.

| (a) | (b) |
|---|---|
| 284 | 152 |
| 9474 | 6242 |
| 7084 | 4352 |
| 9134 | 6902 |
| 25976 | 17648 |

---

prostych $A_1B_2$ i $A_nB_{n+1}$ (proste te przecinają się — to łatwe). Na mocy twierdzenia Menelausa (patrz *Delta* 5/1983), zastosowanego do trójkąta $A_1B_2D$ przeciętego prostą $A_nB_{n+1}$, zachodzi równość $DA_n \cdot A_1X \cdot B_2B_{n+1} = A_nA_1 \cdot XB_2 \cdot B_{n+1}D$, z której wykorzystując określenie punktów $A_n$ i $B_{n+1}$ otrzymuje się po krótkich rachunkach: $A_1X = 2\,B_2X$. Zatem położenie punktu $X$ nie zależy od $n$; punkt ten należy do wszystkich płaszczyzn $P_n$. Podobnie $Y$, punkt przecięcia prostych $A_1C_3$ i $A_nC_{n+2}$, jest wspólny dla wszystkich $n$ i należy do wszystkich $P_n$. Prosta $XY$ jest szukaną prostą.

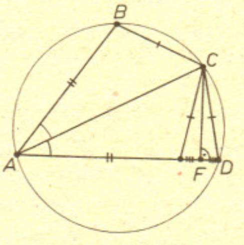
**Zadanie 46** [Liczba pierwiastków równania $a^x = \log_a x$] (WT = = 3,39) rozwiązali prawidłowo: R. Pagacz, K. Trautman, J. Tyszkiewicz, J. Uryga, W. Wasiak.

**Zadanie 49** [Parzyste i nieparzyste liczby w trójkącie Pascala] (WT = 3,20). Dość dużo poprawnych rozwiązań; większość z nich, tak jak i nasze, wykorzystuje fakt, że liczba nieparzystych elementów $n$-tego wiersza trójkąta Pascala jest postaci $2^m$ — nie precyzując, jaki jest wykładnik $m$.
Kilku autorów (M. Gałecki, J. Janowicz, P. Kamiński, R. Mazurek, T. Rawlik) znalazło wartość $m$: jest to liczba jedynek w dwójkowym rozwinięciu liczby $n$.

**Zadanie 50** [W czworokącie $ABCD$, wpisanym w koło, $BC = CD \Rightarrow 2\,AC > AB+AD$] (WT = 1,56) nie sprawiło uczestnikom konkursu żadnych trudności. Bardzo dużo prawidłowych rozwiązań, w większości opartych na rachunkach trygonometrycznych albo wykorzystujących twierdzenie Ptolemeusza. Warto wszakże odnotować proste i elementarne rozwiązania czysto geometryczne, które podali M. Fiszer i J. Tyszkiewicz (rys. 1) oraz D. Gross i M. Kmita (rys. 2).

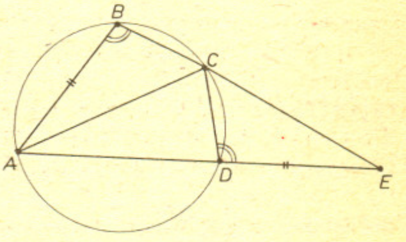
**Zadanie 52** [Wierzchołki łamanej zamkniętej $Ł$ można ponumerować kolejno $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ tak, by dla każdego $m \leqslant n$ mieć $A_0A_1+\ldots+A_{m-1}A_m \geqslant (m/n) \cdot$ długość $Ł$] (WT = = 2,82) zostało rozwiązane poprawnie przez dość wielu uczestników. Ale tylko dwóch (P. Kamiński, A. Pawłowski) zauważyło i napisało, że sprowadza się ono prosto do wcześniejszego zadania 31: oznaczając długości kolejnych boków przez $d_1, \ldots, d_n$ (startując z dowolnego miejsca) i przyjmując $a_i = d_i-(1/n) \cdot$ długość $Ł$ oraz $a_{i+n} = a_i$ otrzymujemy ciąg okresowy $(a_i)$, w którym $a_1+\ldots+a_n = 0$; w myśl zadania 31 istnieje numer $k$ taki, że $a_k+\ldots+a_l \geqslant 0$ dla wszystkich $l \geqslant k$, skąd łatwo wynika teza zadania 52.

**Zadanie 54** [Czy zbiór wypukły, nie zawierający półprostej, musi być ograniczony?] (WT = 3,56) bezbłędnie rozwiązał tylko J. Prajs. Rozwiązania z niewielkimi lukami podali W. Wasiak i M. Fiszer, z większymi — jeszcze kilku uczestników.
Za rok, w przybliżeniu, zamieścimy podobne omówienie, obejmujące dalsze zadania. Tymczasem zachęcamy Czytelników do włączenia się do ligi, „starych” uczestników — do kontynuowania zabawy, a wszystkim będziemy wdzięczni za listy z wszelkiego rodzaju uwagami na temat ligi zadaniowej „Klub 44”




$AC > AF = \dfrac{AB+AD}{2}$

Rys. 1




$DE \overset{df}{=} AB \qquad \Delta ABC = \Delta EDC$

$2AC = AC+CE > AD+DE = AD+AB$

Rys. 2

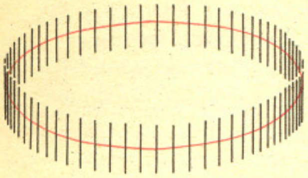
# Wszystko już było

*Dr Michał SZUREK*

Bezpośrednią przyczyną napisania tego artykułu stał się następujący fragment wydanej w 1981 r. książki „Wiązki wektorowe na zespolonych przestrzeniach rzutowych" trzech niemieckich autorów:

*Twierdzenie Grothendiecka o rozszczepianiu ma długą historię. Jest faktycznie równoważne z twierdzeniem o holomorficznych macierzach odwracalnych, co zauważył Seshadri (1957). Takie zaś twierdzenie było udowodnione przez Birkhoffa w 1913 r., ale naprawdę było już znane Plemeljowi w 1908 r. i Hilbertowi w 1905. W. D. Geyer zauważył, że Dedekind i Weber udowodnili je — w algebraicznej wersji — w 1882 r. W tej formie może też być znalezione w „Teorii liczb" Hassego jako lemat Witta.*

Wspomniane twierdzenie Grothendiecka pochodzi z 1956 r. i należy już do klasyki geometrii algebraicznej i geometrii przestrzeni analitycznych. Głosi, że każda wiązka holomorficzna wektorowa na zespolonej prostej rzutowej (= sferze Riemanna) jest sumą prostą wiązek jednowymiarowych. Postaram się dalej wytłumaczyć sens nagromadzonych terminów.
Aleksander Grothendieck należy do tytanów nowoczesnej matematyki, a jego działalność wpłynęła w rewolucyjny sposób na kilka dyscyplin tej nauki. Z drugiej zaś strony wspomniana praca Dedekinda i Webera z 1882 roku to słynna stustronicowa „Teoria funkcji algebraicznych jednej zmiennej". Zawarte tam są nowożytne podstawy co najmniej trzech gałęzi matematyki: algebraicznej teorii liczb, geometrii algebraicznej i algebry abstrakcyjnej. Przeglądając ją dzisiaj dziwimy się, że warto było pisać o rzeczach tak dobrze znanych.
Czy możliwe jest jednak, że odkrycie genialnego Grothendiecka ma w gruncie rzeczy sto lat? Udało mi się dotrzeć do źródeł: cytowanych prac Birkhoffa i Dedekinda z Weberem. Birkhoff formułuje twierdzenie prawie tak, jak my tutaj (w końcowej części artykułu), ale przedtem pisze:

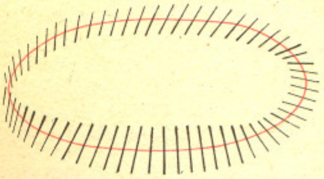


Rys. 1

*Doszedłem wpierw do twierdzenia stanowiącego uogólnienie twierdzenia o rozkładzie funkcji na szereg Laurenta poprzez badanie punktów osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych. Niniejszy artykuł zawiera kompletną postać twierdzenia, a dowód oparty jest na teorii równań całkowych Fredholma. Wydaje się, że twierdzenie jest samo w sobie ciekawe niezależnie od zastosowań, jakie ma w teorii równań różniczkowych liniowych zwyczajnych. Podam je w następnym artykule następującym bezpośrednio po tym.*

Przeczytajmy jeszcze, co piszą Dedekind i Weber:

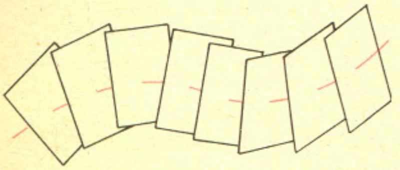
*Wszystkie różniczki drugiego rzędu dadzą się przedstawić liniowo ze stałymi współczynnikami poprzez p odpowiednio wybranych różniczek drugiego rzędu, przez różniczki pierwszego rzędu i różniczki właściwe.*



Rys. 2

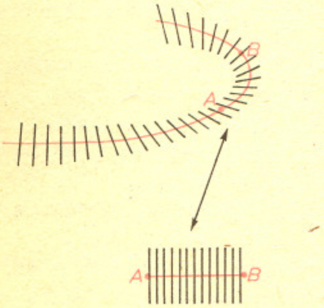
Dla specjalisty jest oczywiste, że jest to tylko inne sformułowanie twierdzenia Grothendiecka cytowanego na początku i twierdzenia Birkoffa, które będzie sformułowane dalej. Wprawdzie twierdzenie Dedekinda i Webera dotyczy tylko różniczek (= wiązek) algebraicznych drugiego rzędu, ale za to na dowolnej powierzchni Riemanna (dla prostej rzutowej niezmiennik $p$ wynosi 0), nadto użyta metoda jest ogólna — widocznie autorzy nie czuli potrzeby badania wyższych różniczek.

Czy więc „wszystko już było"? Tak, tu zdecydowanie tak.



Rys. 3

Postarajmy się teraz wniknąć w treść twierdzenia Dedekinda-Webera-Birkhoffa-Grothendiecka, mamy prawo je tak nazwać, prawda? Wyjaśnimy najpierw pojęcie wiązki. Wyobraźmy sobie, że do każdego punktu krzywej (dajmy na to, okręgu) doklejono odcinek „mniej więcej" prostopadle. Można to zrobić tak jak na rys. 1 otrzymując powierzchnię boczną walca. Mówimy, że powierzchnia boczna walca tworzy wiązkę trywialną nad okręgiem.
Ale odcinki możemy doklejać do okręgu jeszcze w inny sposób, przekręcając każdy z nich o pewien kąt tak, żeby po objechaniu okręgu dookoła doklejany odcinek obrócił się o 180°. Co dostaniemy? Znaną każdemu wstęgę Möbiusa (rys. 2). Zobaczyliśmy ją tu jako pewną wiązkę odcinków nad okręgiem. Moglibyśmy skręcać doklejane odcinki tak, by otrzymać „paski Möbiusa" skręcone o dowolny kąt $k \cdot 180°$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ — za każdym razem dostając inną wiązkę odcinków. Podobnie można sobie na przykład wyobrażać wiązkę płaszczyzn nad krzywą jako schody czy wachlarz (rys. 3).




Rys. 4

To, co jest najbardziej istotne w pojęciu wiązki: nie różnią się one od siebie lokalnie. Każdy fragment wstęgi Möbiusa jest łatwo deformowalny do fragmentu powierzchni bocznej walca, ale cała wstęga do całej powierzchni walca już nie. W definicji wiązki żądamy właśnie, by „lokalnie" była ona powierzchnią boczną walca.

Precyzyjnie: by w otoczeniu $U$ każdego punktu bazy $X$ wiązka dawała się utożsamić z $U \times F$, gdzie $F$ jest zbiorem wklejanym (zwanym włóknem wiązki). Wyjaśni to rysunek 4.
Włókno (wklejany zbiór) $F$ decyduje oczywiście o typie wiązki. Dla walca i wstęgi Möbiusa był nim odcinek, dla schodów z rys. 3 płaszczyzna. Gdy $F$ jest prostą, mówimy o wiązce liniowej, gdy przestrzenią wektorową $n$-wymiarową — o $n$-wymiarowej wiązce wektorowej. Ale bardziej istotnym czynnikiem klasyfikującym wiązki jest typ funkcji przejścia.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{Wiązka nad } U \arrow[dl, "\text{ograniczenie}"'] \arrow[dr, "\text{ograniczenie}"] & \\
\text{Wiązka nad } U_1 \arrow[d, "\substack{\text{utożsamienie,}\\ \text{o którym mowa}\\ \text{w definicji wiązki}}"] & & \text{Wiązka nad } U_2 \arrow[d] \\
U_1 \times F \arrow[d, "\substack{\text{ograniczenie}\\ \text{na } U_1 \cap U_2}"] & & U_2 \times F \arrow[d, "\substack{\text{ograniczenie}\\ \text{na } U_1 \cap U_2}"'] \\
(U_1 \cap U_2) \times F \arrow[rr, "(u,f) \longmapsto (u,G(f))"'] & & (U_1 \cap U_2) \times F
\end{tikzcd}
$$

$G: F \to F$ *jest funkcją przejścia*

Jak zwykle wiążemy tu z przekształceniem liniowym

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

jego macierz (tablicę współczynników)

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \\
a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \\
a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

Zbiory $U$, nad którymi wiązka jest już postaci $U \times F$, mogą na siebie zachodzić. Co się więc dzieje nad $U_1 \cap U_2$? Nad tą częścią wspólną mamy *dwa* utożsamienia — raz wiązkę utożsamiamy z kawałkiem $U_1 \times F$, drugi — z kawałkiem $U_2 \times F$, na części wspólnej te dwa utożsamienia *nie muszą* być takie same. Mogą się różnić — właśnie o funkcję przejścia. Można to zobrazować diagramem.

Funkcja przejścia $G$ działa więc na włóknie $F$ transformując je w pewien sposób. „Poglądowo" można powiedzieć, że w punkcie $x \in U_1 \cap U_2$ stoi dwóch obserwatorów: jeden z kraju $U_1$, w którym panuje Reguła Utożsamiania Nr 1, drugi z kraju $U_2$, w którym obowiązuje Reguła Nr 2.
Funkcja przejścia $G : F \to F$ przelicza „obserwacje" z układu „$U_1$" na „$U_2$", tłumaczy jednemu z nich to, co mówi drugi.

Takie funkcje przejścia muszą być związane z każdą parą zbiorów $U$, nad którymi wiązka jest trywialna — jeżeli tylko zbiory te mają niepustą część wspólną; mamy więc do czynienia z całą kolekcją funkcji przejścia $G_{ij}$, wszystkie działają z $F$ do $F$, a konkretne $G_{ij}$ wiąże lokalne sklejenie wiązki z $U_i \times F$ z jej lokalnym sklejeniem z $U_j \times F$. Oczywiście $G_{ij} = G_{ji}^{-1}$ oraz

$$(*) \qquad G_{jk} \cdot G_{ij} = G_{ik}$$

dla wszystkich wskaźników $i, j, k$, dla których $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Ta ostatnia równość stwierdza bowiem, że przejście od układu współrzędnych na $U_i$ do układu współrzędnych na $U_j$, a potem na $U_k$ da się zastąpić przez proste przejście z $U_i$ na $U_k$.

Funkcje przejścia $G_{ij}$ mogą być różne nad różnymi punktami $u$ bazy, tj. przestrzeni, nad którą określona jest wiązka. Możemy napisać: $G_{ij} = G_{ij}(u)$, $u \in U_i \cap U_j$. I właśnie w zależności od tego, jakiej klasy, jakiego typu są funkcje

$$u \to G_{ij}(u),$$

mamy różne typy wiązek; ciągłe (= topologiczne), gdy są to funkcje ciągłe, różniczkowalne — gdy $G_{ij}$ są różniczkowalne względem $u$, holomorficzne (= analityczne), algebraiczne itd. Reasumując, z naszych określeń wynika, że wiązka jest podana (określona), gdy

1) podane jest włókno $F$ i zbiory $U_i$, na których wiązka ma być postaci $U_i \times F$,

2) wybrane są funkcje przejścia $G_{ij}$: $F \to F$, gdzie $i, j$ są takie, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Jak już powiedzieliśmy, wiązka nazywa się *wektorowa* (rzeczywista czy zespolona), jeżeli $F$ jest przestrzenią $R^n$ czy $C^n$. Funkcjami przejścia takich wiązek są funkcje liniowe $R^n \to R^n$ czy $C^n \to C^n$, na które można patrzeć jak na macierze (por. uwaga na marginesie).

Twierdzenie Grothendiecka dotyczy, jak widzieliśmy, wiązek holomorficznych na zespolonej prostej rzutowej $P^1$ i stwierdza, że każda taka wiązka jest sumą prostą wiązek jednowymiarowych (liniowych). Nie tłumacząc dokładnie pojęcia sumy prostej wiązek pokażemy tylko, jakie funkcje przejścia ma wiązka będąca sumą prostą wiązek jednowymiarowych (zgodnie z 1) i 2) wyżej nasze określenie może być potraktowane jako definicja).

Otóż funkcje przejścia takiej wiązki mogą być wybrane w postaci

$$
G_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_{ij}^2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & g_{ij}^n \end{pmatrix},
$$

gdzie $(g_{ij}^1)$, $(g_{ij}^2)$, ..., $(g_{ij}^n)$ są funkcjami przejścia wiązek jednowymiarowych, a więc niezerowymi przekształceniami liniowymi $C \to C$.
Takie przekształcenia są postaci $z \to az$, gdzie $a \in C$ jest niezerową liczbą zespoloną. Jak widzieliśmy $G_{ij} = G_{ij}(u)$, zatem także $a = a(u)$.
A więc — wyjaśnia twierdzenie Grothendiecka — dla każdej wiązki holomorficznej na prostej rzutowej można wybrać funkcje przejścia będące możliwie najprostszej postaci

$$
(\overset{*}{*}) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},
$$

gdzie wielkości $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zależą (holomorficznie) tylko od współrzędnej $u$ prostej rzutowej.

W naszych coraz bardziej skomplikowanych rozważaniach możemy poczynić jedno uproszczenie. Określając holomorficzne wiązki wektorowe na prostej rzutowej możemy użyć tylko dwóch zbiorów otwartych $U_1$ i $U_2$, pierwszy z nich złożony z wszystkich punktów właściwych ($u \neq \infty$), drugi z punktów $u \neq 0$, za to wraz z $u = \infty$. Do określenia wiązki wystarczy wtedy jedna macierz, bo warunek (*) dotyczy trzech zbiorów. Moglibyśmy skrócić artykuł nie wspominając w ogóle o (*), stracilibyśmy jednak pewną perspektywę. W każdym jednak razie holomorficzna


wiązka wektorowa na zespolonej prostej rzutowej (czy też: na sferze Riemanna) jest wyznaczona przez jedną macierz o współczynnikach będących funkcjami holomorficznymi przy $z \neq 0$ i $z \neq \infty$. Musimy jeszcze zanalizować, kiedy różne funkcje przejścia dają tę samą wiązkę. Twierdzenie będące tematem artykułu powiada bowiem, że dla każdej $n$-wymiarowej wiązki można znaleźć funkcje przejścia postaci (*). Otóż, jak łatwo zrozumieć, dwa wybory funkcji przejścia $G_{ij}$ oraz $G'_{ij}$ dają tę samą wiązkę, gdy na każdym $U_i$ da się zgodnie zmienić układ współrzędnych w każdym włóknie $F \stackrel{*}{=} C^n$ tak, by jeden „nabór" funkcji przejścia przeszedł na drugi. Sposób zmiany ma ponadto zależeć holomorficznie od współrzędnej $u$ na prostej rzutowej. Korzystając z jednego z podstawowych faktów algebry liniowej (o zmianie macierzy przekształcenia przy zmianie układu współrzędnych) dochodzimy do takiego wniosku:

twierdzenie Grothendiecka jest równoważne stwierdzeniu, że dla każdej macierzy $(g_{ij})$ o współczynnikach holomorficznych poza zerem i nieskończonością istnieją macierze $(G_{ij})$ i $(G'_{ij})$ takie, że

$$(G_{ij})\cdot(g_{ij})\cdot(G'_{ij})$$

jest macierzą postaci

$$\begin{pmatrix} u^{k_1} & & & 0 \\ & u^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u^{k_n} \end{pmatrix},$$

przy czym $G_{ij}$ są funkcjami holomorficznymi dla $z \neq \infty$, a $G'_{ij}$ — holomorficznymi przy $z \neq 0$. I w prawie takiej postaci twierdzenie nasze pojawiło się u Birkhoffa w 1913 roku.

Nie napiszemy już, dlaczego twierdzenie Dedekinda-Webera wyraża to samo, co twierdzenie Birkhoffa (jeżeli tylko ograniczyć się do nieco węższego przypadku algebraicznego). Musielibyśmy bowiem znacznie wydłużyć artykuł wprowadzając Czytelnika w podstawy współczesnej (tak jest: współczesnej) geometrii algebraicznej. Warto jednak zdać sobie sprawę z co najmniej dwóch faktów. Pojęcie wiązki wektorowej zostało wprowadzone w późnych latach czterdziestych, no, może wczesnych pięćdziesiątych, XX wieku. Pokazaliśmy jednak, jak związane jest ono z bardziej „konkretnymi" pojęciami matematyki. Redukcja sformułowania z początku artykułu do przytoczonego przed chwilą twierdzenia Birkhoffa odbyła się na tej samej drodze, jaką szedł rozwój dyscypliny. W tym artykule opisaliśmy tę drogę w przeciwnym kierunku: od rzeczy znanych nam dzisiaj do sposobu patrzenia na te same rzeczy dawniej.

I druga uwaga. Zarówno Dedekind i Weber, jak i Birkhoff zdawali sobie sprawę, że ich twierdzenie jest „ważne" i że ma i będzie miało wiele zastosowań i uogólnień. I rzeczywiście od około dziesięciu lat holomorficzne wiązki wektorowe badają równie dobrze matematycy, jak i fizycy przenosząc twierdzenie Grothendiecka na ogólniejsze przestrzenie oraz stosując wyniki we współczesnych teoriach fizycznych. Doprawdy, wszystko już było...

# Zadania

*Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI*

**M 352.** Z czwórki $a_1, b_1, c_1, d_1$ liczb naturalnych tworzymy nową czwórkę $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$. Wykazać, że powtarzając tę operację dojdziemy po pewnym czasie do czwórki $(a_n, b_n, c_n, d_n) = (0, 0, 0, 0)$.
Rozwiązanie na str. 2

**M 353.** Trójkąt $ABC$ leży wewnątrz równoległoboku $KLMN$. Wykazać, że $S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} S_{KLMN}$.
Rozwiązanie na str. 3

**M 354.** W kwadracie o boku 1 wybrano 201 punktów tak, że żadne trzy spośród nich nie są współliniowe. Wykazać, że znajdą się wśród nich trzy wierzchołki trójkąta o polu nie większym od $\frac{1}{200}$.
Rozwiązanie na str. 7

*Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ*

**F 146.** Sportowiec na nartach wodnych może poruszać się szybciej niż ciągnąca go motorówka. Jak to wyjaśnić?
Rozwiązanie na str. 7

**F 147.** Obserwując holowanie jednostek pływających (np. ciągnięcie łodzi przez motorówkę) można zauważyć, że lina holownicza napina się jedynie chwilami, na ogół zaś zwisa. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 2

# Mizar MSE (5)

Poznaliśmy już wiele różnych konstrukcji Mizara. Wiemy jak budować zdania, jak zapisywać ich uzasadnienia, czy to przez powołanie się na odpowiednie przesłanki, czy to przez dowód. Wiemy też, jak przygotować wstęp do tekstu i sam tekst w Mizarze. Dzisiaj poznamy pewne konwencje, które pozwalają skrócić zapis. Czytelnicy zauważyli zapewne, że ilekroć wprowadzamy pewien obiekt, to oprócz nadania mu symbolicznej nazwy np. *x*, *y*, *z* musimy jeszcze dodać „kim" on jest: ułamkiem, punktem, prostą, zbiorem itp. Zapewne wszyscy pamiętają, jak to w szkolnych podręcznikach geometrii pisano: „punkty będziemy oznaczać dużymi literami *A*, *B*, *C*, ..., a proste małymi *k*, *l*, *m*, ...". Podobnej rezerwacji nazw można również dokonać we wstępie do tekstu w Mizarze MSE. Nazywamy to predeklaracją i piszemy:

```
LET X,Y DENOTE ULAMEK
```

Po takiej rezerwacji nazw w dalszym ciągu tekstu zamiast pisać długo:

```
FOR X BEING ULAMEK EX Y BEING ULAMEK ST NW[X,Y]
```

możemy napisać krócej:

```
FOR X EX Y ST NW[X,Y]
```

Nie musimy już przy każdej zmiennej związanej pisać, czym ona jest, gdyż w predeklaracji określiliśmy, co oznaczamy jakimi symbolami. Predeklaracja symboli nie działa jednak w stosunku do obiektów wprowadzanych w dowodzie przez **let**.
W konstrukcji **let** *x* **be** ... musimy typ *x* podać explicite.

Znając już konstrukcję predeklaracji wstęp do teorii liniowego porządku wśród ułamków możemy zapisać tak:

```
ENVIRON
LET X,Y,Z,X',Y',Z' DENOTE ULAMEK;
ZWROTNOSC: FOR X HOLDS NW[X,X];
PRZECHODNIOSC: FOR X,Y,Z ST NW[X,Y] & NW[Y,Z] HOLDS NW[X,Z];
ANTYSYMETRIA: FOR X,Y ST NW[X,Y] & NW[Y,X] HOLDS X=Y;
SPOJNOSC: FOR X,Y HOLDS NW[X,Y] OR NW[Y,X];
```

A rozszerzenie tegoż wstępu, tak jak zrobiliśmy w odcinku 2 (*Delta* 10/1983) będzie takie:

```
GIVEN A,B,C,D,E BEING ULAMEK;
Z1: A<>D;  Z2: NW[A,C];  Z3: NW[B,C];  Z4: NW[C,D];  Z5: NOT NW[A,E];
```

A teraz podamy rozwiązania zadań z odcinka 2:

```
BEGIN
T1: NW[A,D] BY Z2,Z4,PRZECHODNIOSC;
T2: NW[B,D] BY Z3,Z4,PRZECHODNIOSC;
T3: NW[A,A] BY ZWROTNOSC;
T4: NOT NW[D,A] BY Z1,T1,ANTYSYMETRIA;
T5: NOT (A=C & C=D) BY Z1,Z2,Z4;
T6: NOT C=E BY Z2,Z5;
T7: EX X ST NW[X,X] BY T3;
```

W przypadku zadania T7′ musimy wprowadzić pewne dodatkowe kroki w rozumowaniu, mianowicie:

```
  L1: NW[E,A] BY Z5,SPOJNOSC;
  L2: NW[E,C] BY Z2,L1,PRZECHODNIOSC;
T7': NW[E,D] BY L2,Z4,PRZECHODNIOSC;
```

Pewna konwencja pozwala nam na uniknięcie wprowadzania etykiet L1 i L2. Mianowicie

```
  NW[E,A] BY Z5,SPOJNOSC;
THEN NW[E,C] BY Z2,PRZECHODNIOSC;
THEN T7': NW[E,D] BY Z4,PRZECHODNIOSC;
```

Słówko **then** oznacza, że do przesłanek uzasadnienia należy dołączyć zdanie występujące bezpośrednio przed zdaniem uzasadnianym. To poprzedzające zdanie może być jedyną przesłanką, na którą się powołujemy i wtedy w ogóle nie piszemy **by**. Użycie **then** nie zawsze jest dozwolone. Dotyczy to sytuacji, gdy bądź nie ma poprzedniego zdania (np. zaraz po **begin** lub **proof**), bądź nie jest jasne, które zdanie jest poprzednim.
Np. wewnątrz dowodu po wieloczłonowym założeniu:

```
ASSUME THAT A: NW[A,B]  AND  B: NW[B,A];
```

nie możemy napisać:

```
THEN A=B BY ANTYSYMETRIA;
```

gdyż nie jest jasne, na które z założeń (*A*, *B* czy oba) chcemy się powołać. Podobnie po wieloczłonowym założeniu postaci:

```
LET X BE ULAMEK SUCH THAT A: NW[A,X]  AND  NW[D,X];
```

użycie **then** jest niedozwolone. Po deklaracji zmiennej bez warunków, a więc np.:

```
LET X BE ULAMEK;
```

nie możemy użyć **then**, gdyż ta konstrukcja w ogóle nie „zostawia" zdania. Natomiast takie odwołania przez **then** są poprawne:

```
ASSUME NOT NW[X,Y]; THEN NW[Y,X] BY SPOJNOSC;
```

Konkluzja w dowodzie jest również pewnym zdaniem, które wymaga uzasadnienia. Jedną z przesłanek może być również poprzednie zdanie. Wtedy jednak nie piszemy **thus**, lecz **hence**, co znaczy, że dokonaliśmy „zahaczenia", tj. odwołaliśmy się do poprzedniego zdania. Możemy zatem zamiast

```
A: NOT NW[C,D] BY .?.; THUS CONTRADICTION BY A,Z4;
```

napisać

```
NOT NW[C,D] BY .?.; HENCE CONTRADICTION BY Z4;
```

A teraz o jeszcze jednym udogodnieniu. W poprzednich dwu odcinkach, gdy omawialiśmy dowody, wielokrotnie używaliśmy zwrotu „to, co zostało do udowodnienia". Otóż to „coś" zawsze było zdaniem, ale znaczyło co innego w różnych miejscach dowodu. Zaraz na początku po **proof** była to po prostu cała dowodzona teza. W przypadku implikacji po założeniu poprzednika do udowodnienia pozostawał następnik. W Mizarze na oznaczanie tego „czegoś", co mamy jeszcze udowodnić, by zakończyć dowód, używamy słowa **thesis**. Oczywiście zdanie kryjące się za **thesis** może zmienić się w czasie dowodu po każdym: założeniu (**assume**), deklaracji obiektu (**let**) oraz konkluzji (**thus**, **hence**). Weźmy przykłady

```
NW[E,A] IMPLIES NW[E,D]
 PROOF
```

W tym miejscu **thesis** oznacza po prostu wyjściową tezę. Natomiast po założeniu:

```
ASSUME NW[E,A];
```

**thesis** oznacza NW [*e*, *d*] i nie zmieni się po kroku pomocniczym:

```
THEN NW[E,C] BY Z2,PRZECHODNIOSC;
```

A teraz zamiast konkludować NW [*e*, *d*] napiszemy:

```
 HENCE THESIS BY Z4,PRZECHODNIOSC
END;
```

w przypadku dowodzenia zdania ogólnego:

```
FOR X HOLDS NW[X,X]
 PROOF
```

Tutaj **thesis** oznacza jeszcze wyjściową tezę. Po wprowadzeniu pewnego dowolnego obiektu:

```
LET X1 BE ULAMEK;
```

**thesis** jest równa zdaniu NW [*x*1, *x*1]. Nie zmieni się po

```
NW[X1,X1] OR NW[X1,X1] BY SPOJNOSC;
```

i dowód możemy zakończyć

```
 HENCE THESIS
END;
```

gdyż NW [*x*1, *x*1] wynika z poprzedniego zdania.
A jak wygląda **thesis** po ostatniej konkluzji w poprawnym dowodzie, kiedy dowód jest już w istocie zakończony? Wtedy **thesis** oznacza pewne specjalne zawsze prawdziwe zdanie (**not contradiction**). Oczywiście nie musimy go dowodzić. Symbolem **thesis** możemy posłużyć się również w przypadku dowodu nie wprost.

```
FOR X,Y,Z ST NOT NW[X,Y] & NOT NW[Y,Z] HOLDS X<>Z
 PROOF
  LET X',Y',Z' BE ULAMEK SUCH THAT
   A: NOT NW[X',Y'] & NOT NW[Y',Z'];
```

w tym miejscu dowodu **thesis** znaczy $x' <> z'$.
Załóżmy więc, że to nieprawda:

```
 ASSUME NOT THESIS;
 HENCE CONTRADICTION BY A,SPOJNOSC
END;
```

Zakładając **not thesis** założyliśmy w istocie **not** $x' <> z'$, czyli

$x' = z'$. Po tym założeniu pozostała do udowodnienia sprzeczność, treścią **thesis** było **contradiction**, i mogliśmy napisać konkluzję **hence thesis** z takim samym skutkiem jak **hence contradiction**. Posługując się **thesis** możemy znacznie skrócić zapis dowodu, gdy mamy udowodnić tezę kwantyfikatorem szczegółowym.

```
FOR X EX Y ST NW[X,Y]
PROOF
  LET X' BE ULAMEK;
   NW[X',X'] BY ZWROTNOSC;
  HENCE THESIS
 END;
```

Użyte w konkluzji **thesis** znaczyło tyle co **ex** $y$ **st** NW $[x', y]$, które dla checkera wynika z poprzedniego zdania.

Zadania

Pozostajemy we wstępie napisanym w tym odcinku; możemy korzystać ze zdań Z1—Z5 oraz pozostałych już dowiedzionych. Proszę uzasadnić, że

```
T14: FOR Z HOLDS NW[Z,A] OR (NW[A,Z] & NW[Z,D]) OR NW[D,Z];
T15: FOR X EX Y ST X<>Y                                   ;
T16: FOR X ST NW[X,A] HOLDS NOT NW[D,X]                   ;
```

```
A OTO TYPOWE BLEDY W ROZWIAZANIACH ZADAN Z DELTY NR 10:
 - NIE NALEZY UZYWAC INNYCH PREDYKATOW OD TYCH, DLA KTORYCH
   ZOSTALA PODANA AKSJOMATYKA. NIE BYLO AKSJOMATOW DOTYCZA-
   CYCH PREDYKATU LT I KOMPUTER NIE WIE, CO TEN PREDYKAT ZNACZY.
 - ALTERNATYWA BEDACA ARGUMENTEM IMPLIKACJI MUSI BYC UJETA W NA-
   WIASY OKRAGLE. ALTERNATYWA, IMPLIKACJA I ROWNOWAZNOSC MAJA
   TE SAMA SILE WIAZANIA.
 - POPRAWNE LOGICZNIE UZASADNIENIA:
    T7: EX X BEING ULAMEK ST NW[X,X] BY ZWROTNOSC;
    T7'': NW[E,D] BY T1,Z5,PRZECHODNIOSC,SPOJNOSC:
   SA DLA CHECKERA ZBYT SKOMPLIKOWANE. TRZEBA WPROWADZIC POMOC-
   NICZE TWIERDZENIA, JAK TO ZROBIONO W TEKSCIE, LUB NP:

    A: NW[E,A] BY Z5,SPOJNOSC;
    T7': NW[E,D] BY A,T1,PRZECHODNIOSC;

    B: NOT NW[D,E] BY T1,Z5,PRZECHODNIOSC;
    T7': NW[E,D] BY B,T1,SPOJNOSC;

   A DLA T7 UZYC T3.
                                         Z.TRYBULEC
```

**Przypominamy**

Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

*dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI*

## Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki


Złoty medalista narysowany przez przewodniczącego Jury

Skrót zwycięskiej pracy zamieścimy w nr 3/1984.

Jury w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel Ministerstwa Oświaty i Wychowania, dr Jerzy Bednarczuk, dr Alicja Derkowska, dr Marek Kordos, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, prof. dr Wojciech Żakowski na posiedzeniu w dniu 24.08.1983 r. biorąc pod uwagę temat pracy, jej wykonanie oraz przebieg obrony postanowiło przyznać:

1) Złoty medal i nagrodę w wysokości zł 5.000. — Jackowi Kalecie z LO w Świdnicy za pracę „Twierdzenie o pewnej szczególnej metodzie całkowania";

2) Srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 5.000. — Wojciechowi Wałeckiemu z XIV LO w Warszawie za pracę „O błonach mydlanych";

3) Brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 4.000. — Henrykowi Łukomskiemu z ZSZ w Gliwicach za pracę „Negacje liczb $n$-cyfrowych oraz otrzymywanie wyników negacji w układzie dziesiątkowym bez zamiany na układ dwójkowy";

4) Wyróżnienie i nagrodę w wysokości zł 2.000. — Marcinowi Kotulskiemu z III LO we Wrocławiu za pracę „Przekształcenia afiniczne przestrzeni w ujęciu wektorowym";

5) Dyplom uczestnictwa w finale Dariuszowi Baranowi z II LO w Dąbrowie Górniczej za pracę „Zastosowanie teorii grafów w rozwiązywaniu zagadnień fizycznych";

6) Dyplom uczestnictwa w finale Mariuszowi Gąsowskiemu z LO w Sokółce za pracę „Kilka uwag na temat grup ilorazowych";

7) Nagrody pieniężne po 2.000 zł — nauczycielom uczestników finału: Leszkowi Stefańskiemu, Andrzejowi Walatowi, Zbigniewowi Zwierzyńskiemu, Franciszkowi Ferdekowi, Marii Mizgale, Teresie Kozłowskiej.

## Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału. Oto regulamin:

**1.** Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.

**2.** W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

**3.** Konkurs składa się z eliminacji i finału.

**4.** W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.

**5.** Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

**6.** Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

**7.** Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.

**8.** Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

**9.** Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

**10.** Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.

**11.** Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

**12.** Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

**13.** Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

## Patrz w niebo

Pierwszy aparat zbudowany przez Człowieka minął orbity najdalszych znanych planet Układu Słonecznego i „poszybował” w przestrzeń międzygwiazdową. Nie znaczy to jednak, że próbnik ten opuścił już granicę Układu Słonecznego. Jesteśmy nawet pewni, że nie, ale również nie potrafimy powiedzieć, kiedy to nastąpi, ponieważ nie znamy rozmiarów tego obszaru. Wielkość ta zależy oczywiście od definicji rozmiarów Układu Słonecznego. Jeśli są one wyznaczone przez średnie orbity najdalszych znanych planet, to Pioneer wkrótce opuści już granice naszego układu. Ale kto wie, czy nie istnieją dalsze planety? Dotychczas nie ma na to żadnych przekonujących dowodów, jednak istnieją przesłanki, które spędzają sen z oczu poszukiwaczom sensacji.

Pluton został odkryty po wskazaniu na niebie miejsca hipotetycznego ciała, które mogłoby zakłócać ruch znanego już wtedy od ponad 80 lat Neptuna.

Jednak kilka lat temu odkryto księżyc Plutona. Odkrycie to pozwoliło na dokładne wyznaczenie masy ostatniej planety i stwierdzenie, że... to nie tylko Pluton zakłóca ruch Neptuna, bo ma za małą masę. Poszukiwania rozgorzały na nowo, choć bez wielkich nadziei — kolejna planeta może być tak słabo widoczna, że zarejestrowanie jej najczulszymi kamerami będzie niemożliwe.

Aby ułatwić znalezienie ewentualnie istniejącego Transplutona, astronomowie próbują wyznaczyć jego położenie, aby było ono zgodne z wynikami analizy zakłóceń ruchów Neptuna i Plutona. Nie jest to zadanie łatwe, ponieważ Neptun jeszcze nie obiegł Słońca nawet raz po odkryciu, natomiast Pluton nie pokonał nawet ćwierci swojej drogi dookoła naszej gwiazdy; orbity tych planet znane są więc z ograniczoną dokładnością.

Inną metodą może być statystyczne badanie orbit komet. Jeśli stwierdzilibyśmy, że istnieje gdzieś okolica, w której po opuszczeniu znanej nam części Układu Słonecznego wyraźnie zbaczają one ze swojego eliptycznego toru przed kolejnym powrotem w pobliże Słońca — moglibyśmy podejrzewać istnienie w tym miejscu planety przyciągającej grawitacyjnie zapędzające się w jej okolice komety.

Wielokrotnie już pojawiały się informacje, że poszukiwana planeta powinna znajdować się w tym czy innym miejscu. Do odkrycia — bo jedynie bezpośrednia obserwacja może być odkryciem — dotychczas nie doszło.

Jeśli nawet nie istnieje żadna transplutonowa planeta, to i tak granice Układu Słonecznego mogą być znacznie dalej. Niektóre komety oddalają się od Słońca na odległości tysiące razy większe niż średnia odległość Plutona (39,5 jednostki astronomicznej, j.a.). Kometa 1863 VI oddali się prawdopodobnie na odległość 120 tysięcy j.a., by potem znowu przelecieć tuż obok naszej gwiazdy.

Odległość ta to 45% odległości Słońca od najbliższej gwiazdy Proximy Centauri. Można więc powiedzieć, że Układ Słoneczny sięga rozmiarami tak daleko, dopóki przyciąganie grawitacyjne innych gwiazd nie staje się znaczące dla ruchu dalekich komet. Pioneer jednak wcześniej czy później i tę odległość pokona.

*dr Tomasz CHLEBOWSKI*

## *Delta* na ICM



W kuluarach odbywającego się w sierpniu 1983 r. w Warszawie Międzynarodowego Kongresu Matematyków była spora wystawa wydawnictw. Reprezentowane na niej było kilkanaście największych firm z całego świata (Polskę reprezentowało PWN), a do tego *Delta*. Choć brzmi to śmiesznie, wcale jednak śmiesznie nie wyglądało. Nasze stoisko cieszyło się ogromną popularnością wśród uczestników Kongresu. Nasi „subiekci”: Jerzy Bednarczuk, Ewa Chojnacka i Małgorzata Zalewska (choć wspomagani) mieli przez ponad tydzień, po osiem godzin dziennie, pełne ręce roboty. I nie tylko ręce, bo uczestnicy i goście Kongresu żądali licznych wyjaśnień (byli i tacy, którzy prosili o tłumaczenie całych artykułów). Prezentowaliśmy *Deltę*, *Małą Deltę*, *Czy umiecie się dziwić*, *Biblioteczkę Delty* oraz plan lekcji i plakat z Zygmuntem Janiszewskim.

Rozdawaliśmy *Deltę* i *Małą Deltę* z ostatniego roku oraz plakat (poza nami tylko Springer coś rozdawał). Księgarnia PKiN sprzedawała (i sprzedała) to, co zostało z nakładów *Biblioteczki*. Na stoisku reklamował też swój system (kurs jest w *Delcie* od września) zespół Mizara.

Koledzy z innych stoisk oferowali współpracę swoich wydawnictw. Zobaczymy, może coś z tego będzie.