



## SPIS TREŚCI

NUMERU 12 (120)

W setną rocznicę skroplenia powietrza <i>doc. dr Łukasz A. Turski</i>	str. 1
Jak to obliczyć — Konkurs	str. 3
Polskie przodownictwo w kriogenice <i>doc. dr Antoni Pasternak</i>	str. 4
Mizar MSE	str. 6
Koncentrat fotonowy <i>doc. dr Michał Świątek</i>	str. 7
Zadania	str. 8
Nadprzewodnictwo <i>doc. dr Eugeniusz Trojnar</i>	str. 9
Gwiazda neutronowa w laboratorium <i>dr Marta Cieplak</i>	str. 12
Patrz w niebo	str. 14
Klub 44	str. 15
Opowieść wigilijna	str. 16
Co by było, gdyby ...	str. 17

**W następnym numerze o wieku Ziemi**

**Okładkę rysowała**  
*Jolanta Pilimon-Kępińska*

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Tomasz Hofmokl  
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bogdan Paczyński  
 dr Zbigniew Płochocki  
 prof. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 doc. dr Jerzy Sawicki  
 prof. dr Zbigniew Semański  
 prof. dr Grzegorz Sitarski  
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Stefan Turnau  
 doc. dr Aniela Wołska  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 dr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
 dr inż. arch. Jacek Mazur  
 dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 4996/83 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.  
 Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

Doc. dr Łukasz A. TURSKI

Sto lat temu dwóch naukowców, z podówczas prowincjonalnego miasta monarchii austro-węgierskiej — Krakowa, dokonało odkrycia, które stało się punktem zwrotnym w rozwoju dziedziny fizyki i techniki, którą dzisiaj nazywamy kriogenicą.

9 kwietnia 1883 roku Wróblewski depešował do sekretarza Akademii Nauk w Paryżu: „Tlen skroplony zupełnie ciekły, bezbarwny, jak kwas węglowy. Za kilka dni otrzyma Pan komunikat”, a 16 kwietnia: „Azot ochłodzony, skroplony przez rozprężanie. Menisk widoczny, ciecz bezbarwna”.

Nie sposób jest przecenić rolę osiągnięcia naukowego Wróblewskiego i Olszewskiego. Czytelnik zainteresowany historią nauki powinien niewątpliwie zajrzeć do wymienionej książki Mendelssoona „The Quest for Absolute Zero” (dostępny jest przekład rosyjski) opisującej m.in. spór, nie znany większości polskich fizyków, pomiędzy Olszewskim a Dewarem. Bardzo to pouczająca i ciekawa historia.

Czytając ten specjalny „jubileuszowy” numer *Delty*, poświęcony osiągnięciu Wróblewskiego i Olszewskiego, będziesz mógł, Czytelniku, poznać kilka konkretnych faktów z dziedziny fizyki i techniki niskich temperatur. Sądzę jednak, że wypada Ci ostrzec, iż jest to dziedzina bardzo trudna. Jak powiedział odkrywca nadprzewodnictwa Kamerlingh-Onnes (Nobel 1913) zajmuje się ona „podnoszeniem kurtyny, którą ruch cieplny przy normalnych temperaturach zasłania przed nami wewnętrzny świat atomów i elektronów”. I rzeczywiście, przy bardzo niskich temperaturach decydującą rolę odgrywają rządzące tym światem prawa mechaniki kwantowej.

Od czasu prac naszych rodaków dokonał się w kriogenicie olbrzymi postęp. Co prawda tak blisko rekordowo niskich temperatur jak za czasów Wróblewskiego i Olszewskiego już nigdy potem nie byliśmy, jednakże cały czas fizyka polska zaliczała się do światowej czołówki. I tak np. w latach trzydziestych M. Wolfke (późniejszy profesor Politechniki Warszawskiej i jeden z prekursorów holografii) pracując wraz z holenderskim uczonym Keesomem wniósł duży wkład do badań nad helem II. Nieco wcześniej kilku badaczy, w tym Kamerlingh-Onnes, zauważyło, że skroplony i nadal oziębiany izotop helu  $^4\text{He}$  w temperaturze 2,18 K nagle zmienia swoje przewodnictwo cieplne. Helowi poniżej tej temperatury nadano nazwę hel II, która pozostaje w użyciu po dzień dzisiejszy. W kilka lat później Piotr Kapica odkrył nadciężkość własności helu II (Nobel 1978).

Tak się przyjęło, że prawie każdy artykuł o fizyce niskich temperatur zaczyna się od omówienia zjawiska nadciężkości. Chyba nie jest to słuszne. Mamy bowiem dzisiaj pełną świadomość tego, jaka jest istota nadprzewodnictwa, istnieje sprawnie działająca teoria tego zjawiska, nie mamy natomiast ani teorii, ani dobrych podstaw fizycznych dla zrozumienia nadciężkości helu  $^4\text{He}$ . O nadprzewodnictwie pisze w tym numerze Eugeniusz Trojnar, ja ograniczę się do kilku uwag na temat aktualnego stanu badań nad własnościami helu w niskich temperaturach.

Hel występuje w trzech izotopach:  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}$  i  $^6\text{He}$ . Hel  $^3\text{He}$  i  $^6\text{He}$  to dwa izotopy produkowane sztucznie w wyniku przemian jądrowych. Izotop  $^3\text{He}$  jest trwały, natomiast  $^6\text{He}$  ma czas życia ok. 1/3 s. Pomimo wysokiej ceny wiele laboratoriów może sobie pozwolić na doświadczenia z pokaźnymi ilościami  $^3\text{He}$ , a niektórzy nawet myślą o podobnych doświadczeniach z  $^6\text{He}$ .

To, co różni izotopy  $^3\text{He}$  i  $^4\text{He}$ , to ich spin.  $^3\text{He}$  jest fermionem, ma spin taki jak elektron i podobnie jak elektron podlega zakazowi Pauliego — prawu zabraniającemu dwu identycznym fermionom przebywania w takim samym „stanie kwantowym”. Hel  $^4\text{He}$  jest bozonem, tzn. jego spin ma wartość równą całkowitej wielokrotności  $h/2\pi$  ( $h$  — stała Plancka). Bozony nie podlegają zakazowi Pauliego, a przeciwnie, nieoddziałujące bozony mają naturę tak towarzyską, że w dostatecznie niskiej temperaturze wszystkie zaczynają „pchać się” do jednego stanu kwantowego. W efekcie makroskopowa ich ilość (tj. ilość porównywalna z ilością wszystkich cząstek w układzie) znajduje się w jednym stanie. Zjawisko to nosi nazwę kondensacji Bosego-Einsteina.

W wielu popularnych podręcznikach fizyki niskich temperatur właśnie kondensacji Bosego-Einsteina przypisuje się podstawową rolę w zjawisku nadciężkości. Niestety, są pewne teoretyczne i doświadczalne powody, by mniemać, że w układzie takim jak hel  $^4\text{He}$ , gdzie oddziaływania są dostatecznie silne, aby był on w fazie ciekłej, kondensacja Bosego-Einsteina jest mało istotna.

W tym, poświęconym kriogenicie, numerze warto wspomnieć o najstarszej metodzie uzyskiwania niskich temperatur. Do naczynia ze śniegiem lub tłuczonym lodem dodaje się, mieszając, sól kuchenną. Temperatura mieszaniny, przy dobrych proporcjach śniegu i soli, może spaść nawet do 251 K. Podobny efekt obserwuje się także dla wielu innych związków, np. KCl,  $\text{NaNO}_3$ ,  $\text{CaCl}_2$  itp. Podobno najlepsze rezultaty (218 K) można uzyskać dodając do każdego 100 gramów lodu 42 gramy  $\text{CaCl}_2$ .

Może Tobie, Czytelniku, uda się pobić ten rekord?

Szansa bowiem na to, żeby kondensacja była efektem dominującym, rośnie z maleniem oddziaływań międzycząsteczkowych. Kondensacja mogłaby mieć miejsce np. w bardzo „zimnym” gazie, gdzie oddziaływania międzycząsteczkowe są niewielkie. W dalszej części artykułu powrócimy jeszcze do tego problemu.

Mimo istotnych kłopotów fizycy nie są jednak zupełnie bezradni w „aferze” helowej. Od czasów pionierskich prac Lwa Landaua mamy całkiem sprawnie działającą fenomenologiczną teorię nadciekłości, a poza tym potrafimy wytłumaczyć zastanawiający fakt, że hel (wszystkie izotopy) pod normalnym ciśnieniem pozostaje cieczą aż do temperatury absolutnego zera. Ta własność helu jest efektem czysto kwantowym. Związana jest ona z falową naturą materii. Nawet w temperaturze absolutnego zera długość fali De Broglie’a atomu helu jest porównywalna z zasięgiem sił przyciągających dwa atomy helu do siebie. Dlatego też nieokreśloność położenia atomów wyklucza powstanie kryształu, w którym atomy musiałyby być zlokalizowane w węzłach sieci krystalicznej. Stały hel można uzyskać dopiero po przyłożeniu zewnętrznego ciśnienia rzędu kilkudziesięciu atmosfer.

Okazuje się, że taki zestalony hel to jedna z najbardziej zadziwiających substancji krystalicznych. Na przykład kryształ  $^3\text{He}$  jest w pewnym sensie mniej uporządkowany niż  $^3\text{He}$  w stanie ciekłym. Związane jest to z faktem, że atomy  $^3\text{He}$  mają moment magnetyczny. Stały  $^3\text{He}$  ma momenty magnetyczne mniej uporządkowane niż ciekły i w efekcie jego sumaryczna entropia, która jest miarą chaosu w układzie, jest większa niż entropia cieczy w tej samej temperaturze. Ta przedziwna własność  $^3\text{He}$  jest wykorzystywana do osiągania bardzo niskich temperatur za pomocą adiabatycznego (przy stałej entropii) ściskania (!) helu  $^3\text{He}$ . Ideę urządzenia opartego na tym zjawisku zawdzięczamy uczniowi Landaua, Pomeranczukowi. Właśnie za pomocą takiej komórki Pomeranczuka w 1973 r. (w laboratoriach firmy Bell) po raz pierwszy uzyskano nadciekły hel  $^3\text{He}$ .

Pomimo że  $^3\text{He}$  w fazie nadciekłej znany jest dopiero od 10 lat, to jednak wiemy o nim znacznie więcej niż o  $^4\text{He}$ . Dla  $^3\text{He}$  działa bowiem, z pewnymi zmianami i ulepszeniami, teoria taka jak dla nadprzewodnictwa. Dzięki temu i dzięki wybitnym osiągnięciom doświadczalnym I. Whetheya, O. Lounaasmy i innych fizyka  $^3\text{He}$  przekształciła się w osobną wyspecjalizowaną dyscyplinę.

Niezwykle ciekawe jest to, że jest wiele nadciekłych faz  $^3\text{He}$ . Jedną z tych faz, tzw. faza A, jest cieczą nadciekłą o silnie anizotropowych (tj. zależnych od kierunku) własnościach. Znanym przykładem „normalnej” cieczy anizotropowej są ciekłe kryształy. Ponieważ z ciekłymi kryształami można wyprawiać istne „cuda” (patrz np. *Delta* 6/1982), to łatwo sobie wyobrazić co można zrobić, gdy taka ciecz jest dodatkowo nadciekłą.

Jak wspomnieliśmy wyżej, opis teoretyczny nadciekłego  $^3\text{He}$  stosuje się również do nadciekłej cieczy elektronów w nadprzewodniku. Dlatego też zainteresowano się, czy przypadkiem w jakimś metalu nie da się zauważyć także anizotropowego nadciekłego płynu elektronów. Wydaje się, że „ślady” takiego anizotropowego nadprzewodnictwa zarejestrowano w niektórych metalach ziem rzadkich.

Ostatnio fizycy niskich temperatur zaczęli poważnie myśleć i pracować nad uzyskaniem nadciekłego (może powinienem napisać nadlotnego) gazu. Jeszcze w latach pięćdziesiątych Charles Hecht zauważył, że atomowy wodór, podobnie jak i jego cięższe izotopy, pozostanie w stanie gazowym aż do temperatury zera absolutnego. Wniosek ten był wynikiem identycznego rozumowania jak to, które przeprowadziliśmy dla helu. No i wszystko byłoby dobrze, gdyby nie to, że wodór atomowy nie występuje w stanie wolnym. W normalnej ziemskiej sytuacji atomy wodoru zawsze łączą się w molekułę  $\text{H}_2$ . Reakcja tworzenia się takiej molekuły to najbardziej energoodajna reakcja chemiczna (energia wiązania molekuły  $\text{H}_2$  wynosi ok. 432 tys. J/mol). Trzeba więc uważać, by nie wyprodukować za dużo wodoru atomowego, bo gdyby zrekombinował, trzeba byłoby budować laboratorium od nowa.

Występujący w przyrodzie wodór molekularny nie jest ciekawy z punktu widzenia fizyki niskich temperatur, bowiem skrapla się w „wysokiej temperaturze” kilkudziesięciu kelwinów, a potem krystalizuje. Jak więc wyprodukować wodór atomowy? Otóż w cząsteczce  $\text{H}_2$  spiny elektronów ustawione są antyrównolegle. Aby zapobiec rekombinacji, trzeba ustawić spiny elektronów w tym samym kierunku. Taka sztuczka może się udać, jeżeli atomowy wodór umieścimy w bardzo silnym zewnętrznym polu magnetycznym. Wtedy spiny nie będą mogły się odwrócić i ustawić względem siebie antyrównolegle, co jest konieczne dla utworzenia molekuły. Utworzenie takiego spolaryzowanego wodoru to jeszcze nie koniec. Okazuje się, że trzeba coś zrobić ze ściankami naczynia, w którym ten gaz się znajduje. Pole magnetyczne skutecznie zapobiega niszczeniu uporządkowania spinów podczas nieuniknionych zderzeń pomiędzy atomami wodoru, nie zapobiega jednak niszczeniu uporządkowania podczas zderzeń atomów wodoru ze ściankami naczynia. Holenderski fizyk Isaak Silvera otrzymał kilka miesięcy temu nagrodę firmy Hewlett-Packard przyznaną przez Europejskie Towarzystwo Fizyczne właśnie za

Rekordowo niską temperaturę uzyskano w styczniu bieżącego roku w Instytucie Fizyki Ciała Stałego Uniwersytetu Tokijskiego metodą rozmagnesowania jądrowego. W kriostacie wypełnionym 200 litrami helu udało się obniżyć temperaturę do 30  $\mu\text{K}$ . Artykuł o metodzie rozmagnesowania jądrowego, która jest współczesnym odpowiednikiem metody rozprężania adiabatycznego stosowanej w eksperymentach Wróblewskiego i Olszewskiego, zamieścimy w jednym z następnych numerów *Delt*.



badania nad długoczasowym utrzymywaniem atomowego, spolaryzowanego wodoru. Udaje się to zrobić — i w ten sposób wracamy do początku tego artykułu — pokrywając ścianki naczynia nadciekłym  $^4\text{He}$ . Jednak dopiero za jakiś czas będzie można udzielić odpowiedzi na pytanie, czy w spolaryzowanym atomowym wodorze, po jeszcze większym ochłodzeniu (osiągane obecnie temperatury są rzędu dwustu kilkudziesięciu milikelwinów, przy polach magnetycznych rzędu 7 tesli), zachodzi zjawisko kondensacji Bosego-Einsteina. Ponieważ oddziaływania pomiędzy atomami wodoru są bardzo słabe, sytuacja jest tu bardziej korzystna niż w helu  $^4\text{He}$ . Taki skondensowany nadciekły gaz przejawiałby wiele nowych efektów, między innymi dlatego, że ma moment magnetyczny. Jestem przekonany, że badania nad spolaryzowanym wodorem umożliwią nie tylko głębsze zrozumienie roli kondensacji Bosego-Einsteina w zjawiskach nadciekłości, ale i dalszy rozwój fizyki niskich temperatur.

Fizyka niskich temperatur, ta stworzona i rozwijana na potrzeby laboratoryjne, zaczęła w ciągu ostatnich kilkunastu lat odgrywać też znaczną rolę w astrofizyce. Punktem zwrotnym w tej „astrofizycznej fizyce niskich temperatur” było odkrycie pulsarów. Wkrótce po tym odkryciu wysunięto hipotezę, że pulsary są gwiazdami neutronowymi i że materia neutronowa w ich wnętrzu jest w stanie nadciekłym. Neutrony to fermiony, można więc do płynu neutronowego w pulsarach stosować tę samą teorię co do płynu elektronowego w metalach. Okazuje się, że w ten sposób można wytłumaczyć wiele obserwacji, między innymi zjawisko tzw. trzęsień gwiazd neutronowych. Od kilku lat w laboratoriach pracuje się nad zbudowaniem w warunkach ziemskich modelu pulsara. Wykorzystuje się przy tym własności nadprzewodników i nadciekłego helu  $^4\text{He}$ . W jednym z takich eksperymentów biorą udział młodzi fizycy z Polski. O przebiegu prac możesz się dowiedzieć w Czytelniku z artykułu Marty Ciepłak w tym numerze *Delta*. Czytając ten artykuł warto pamiętać, że u początków rozwoju fizyki niskich temperatur leżało doświadczenie przeprowadzone sto lat temu w Krakowie.

## Jak to obliczyć — Konkurs

Uwagę Johna Smitha zwrócił neon reklamowy supermarketu. Miał dziwną treść. Ni mniej ni więcej, tylko 7.11. Zaintrygowany wszedł do obszernego hallu.

— O co chodzi? — zapytał, w gruncie rzeczy bez sensu, witającego go sprzedawcę.

— To proste. Od 7 rano do 11 wieczór. Tak handlujemy — usłyszał w odpowiedzi.

Istotnie, było to proste. Wiedział, co chciał wiedzieć i właściwie mógł już wyjść. Ale, skoro się już weszło do sklepu ... Wybrał z obfitej zaopatrzonej półki cztery produkty i niemal natychmiast usłyszał głos kasjera.

— Płaci pan 7.11.

— Co? Za to? — zapytał.

— 7 dolarów i 11 centów za zakupione towary — odpowiedź była precyzyjna.

— Bo takie są godziny otwarcia sklepu, co? — zdumiał się John.

— Nie. Po prostu odnotowałem ceny poszczególnych towarów, pomnożyłem i wyszło 7.11 — wyjaśnił kasjer.

— Panie, toż to trzeba dodać, a nie pomnożyć!

— Istotnie, przepraszam — palce kasjera znów zastukały w klawisze podręcznego komputerka — płaci pan 7.11.

— To są kpiny! — oburzył się John.

— Ale skąd, proszę sprawdzić.

Po sprawdzeniu okazało się, że kasjer, a właściwie jego komputer, oba razy nie popełnił błędu.

Jakie ceny miały produkty zakupione przez Johna Smitha? To właśnie jest pytanie naszego konkursu

## jak to obliczyć

Oczekujemy odpowiedzi. Najbardziej elegancką (zdaniem redakcji) wydrukujemy, a czterem spośród autorów prawidłowych rozwiązań prześlemy nagrody książkowe.

Odpowiedzi prosimy przysyłać pod adresem redakcji do 15 lutego 1984 roku.



Rozwiązanie zadania M 350. Z równości  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  mamy

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) = \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) = \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \dots (2^2 + 1) \times \\ &\quad \times (2^1 + 1)(2^1 - 1). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że jeżeli  $k < n$ , to  $2^{2^k} + 1$  dzieli

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^n} + 1) - 2 \text{ i } NWD((2^{2^n} + 1), (2^{2^k} + 1)) \text{ dzieli } 2.$$

Liczby  $2^{2^k} + 1$  i  $2^{2^k} + 1$  są jednak nieparzyste i wobec tego ich wspólnym dzielnikiem może być tylko 1, co kończy dowód.

# Polskie przodownictwo w kriogenice

Doc. dr Antoni PASTERNAK

W 100-lecie skroplenia składników powietrza — tlenu i azotu — przez Karola Olszewskiego i Zygmunta Florentego Wróblewskiego tyle się o nich pisze, że nie ma konieczności przedstawiania ich życiorysów.

Od początku swoich studiów i działalności naukowej obaj uczeni pracowali z gazami, ucząc się: — Olszewski, jako demonstrator u prof. Czarniańskiego, techniki ich skraplania oraz uzyskiwania i utrzymywania niskich temperatur; — Wróblewski w czasie wykonywania swojej pracy naukowej na stopień docenta u Kundta w Strasburgu — pracy z wysokimi ciśnieniami.

Spotkali się z końcem roku 1882, a współpracę rozpoczęli w lutym 1883 r. Ich doświadczenie szybko zaowocowało. Już 5 kwietnia 1883 r., a następnie 13 kwietnia tego roku donieśli Akademii Umiejętności o skropleniu w stanie statycznym (z meniskiem) tlenu i azotu. Powodzenie uzyskali dzięki genialnie prostym modyfikacjom w pracy z aparatem Cailleteta, który Wróblewski przywiózł z podróży naukowej, przed objęciem profesury. W oryginalnym, najlepszym w owym czasie aparacie Cailleteta do skraplania gazów gaz spręża się w pionowej, grubościennej kapilarze szklanej, za pomocą rtęci pod ciśnieniem i następnie szybko rozpręża. Oziębiony gaz (lub ciecz) oziębia rtęć, powoduje nawet jej krzepnięcie, co utrudniało lub wręcz uniemożliwiało pracę.

W doświadczeniu Olszewskiego i Wróblewskiego kapilarę zagięto w dół (patrz rysunek) i koniec kapilary oziębiono etylenem wrzącym w próżni, dającym temperaturę  $-130^{\circ}\text{C}$ . To przesądziło o powodzeniu.

Współpraca obu uczonych zakończyła się po skropleniu tlenu i azotu. Dalsze doświadczenia, dotyczące skraplania i zestalania gazów wykonywali osobno. Różnica w pracy polegała na tym, że — jak pisał Olszewski — „Wróblewski początkowo eksperymentował z niewielkimi ilościami skroplonych gazów, a przy określaniu niskich temperatur prawie zawsze używał termoelementów, co przy poniżaniu temperatury wymagało ekstrapolacyjnych przeliczeń”.

To ostatnie, najprawdopodobniej, spowodowało, że źle oceniając temperaturę wziął Wróblewski mgiełkę zanieczyszczeń za skroplony wodór. W tym samym, 1884 roku, skroplił Olszewski wodór w stanie dynamicznym uzyskując mgiełkę, ale nie ciecz z meniskiem. Statyczne skroplenie wodoru przeprowadził dopiero Dewar w roku 1898. W tym tylko jednym przypadku wyniki prac Olszewskiego i Wróblewskiego różniły się.

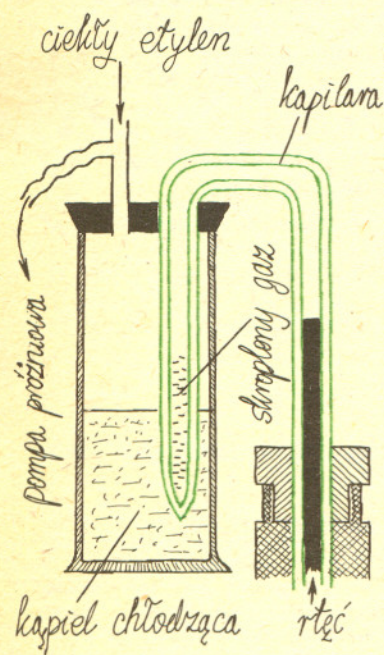
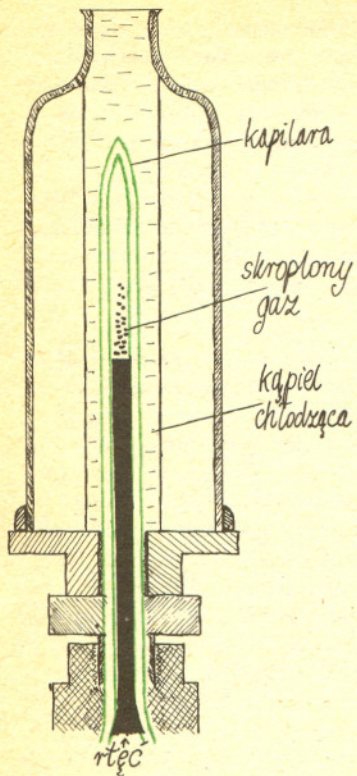
W 1888 roku zginął w tragicznym wypadku Wróblewski. Jedynym przedstawicielem kriogeniki w Krakowie został Olszewski. Dzięki swoim eksperymentatorskim zdolnościom stworzył on ośrodek kriogeniczny przodujący w świecie, śmiało można powiedzieć — szkołę.

Smoluchowski pisał: „... nie było niczego w dziedzinie skraplania gazów, na czym by się Olszewski nie znał. Z powodu braku w Krakowie odpowiednich pracowników pomocniczych, zdolnych mechaników i pomocników technicznych, musiał on sam nauczyć się toczyć, lutować, wydymać ze szkła itd., a wszystko to musiał opanować lepiej, niż mógł to zrobić ktokolwiek inny w Krakowie”.

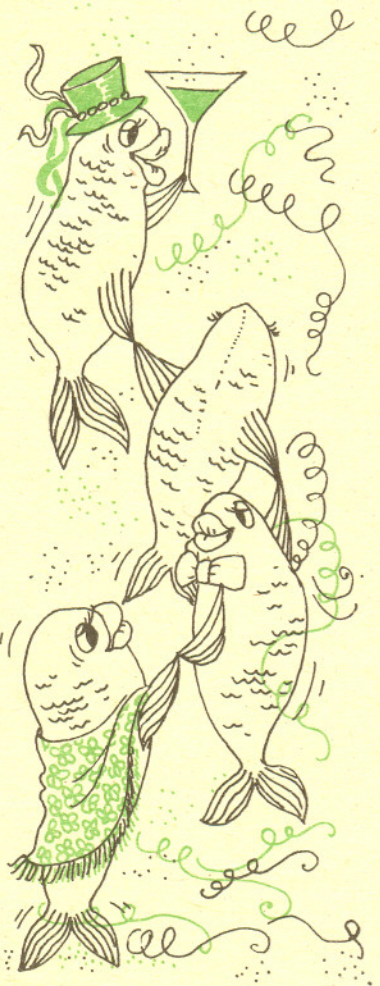
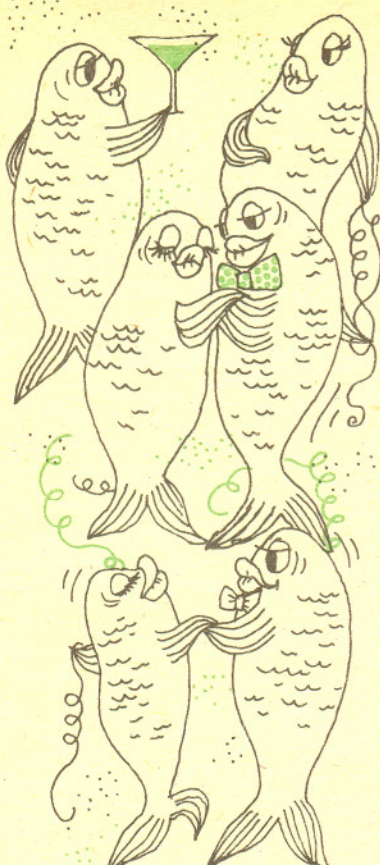
Olszewski budował coraz to lepsze i wydajniejsze aparaty do skraplania tlenu, azotu, powietrza, do destylacji ciekłego powietrza, kriostaty. Przez długi czas jego pracownia była jedyną w świecie, w której otrzywać i utrzymywać można było temperaturę  $-225^{\circ}\text{C}$ . Jemu, a nie bliżej będącemu Dewarowi, dał w 1894 r. Ramsay nowo odkryty gaz szlachetny — argon — do skroplenia i zbadania właściwości. Wyniki otrzymał już po niecałym miesiącu.

W 1895 r. niezależnie od siebie Linde (Monachium) i Hampson (Londyn) w oparciu o zjawisko Joule'a-Thomsona (oziębienie gazu przy przepychaniu przez wąskie otworki) zmienili metodę skraplania gazów, a w szczególności powietrza. Olszewskiemu unowocześnienie aparatury udało się, dzięki subwencji, dopiero w 1900 r. W tym też roku Olszewski odkrył inwersję zjawiska Joule'a-Thomsona dla wodoru. Okazało się, że wodór przy przepychaniu przez otworki oziębia się jak inne gazy dopiero poniżej  $-80^{\circ}\text{C}$ . To odkrycie ułatwiło mu budowanie wydajnych aparatów do skraplania wodoru, oryginalnych, ponieważ Dewar, który skroplił wodór w stanie statycznym, swojej aparatury nie opisał.

Autorytet Olszewskiego pozostał niezachwiany aż do jego śmierci w 1915 r., mimo że inne laboratoria kriogeniczne, lepiej wyposażone, miały duże sukcesy. W 1908 r. Kamerlingh-Onnes skroplił hel, którego Olszewskiemu nie udało się skroplić z powodu zbyt małych ilości gazu, jakie miał do dyspozycji.



Zmodyfikowana przez Wróblewskiego i Olszewskiego część aparatu Cailleteta; wyżej, dla porównania, dawny wygląd tej części.



Niech o jego autorytecie świadczą urywki z kilku spośród setek listów do niego. Wiele z nich dotyczy zastąpienia aparatury Lindego do skraplania powietrza aparatem Olszewskiego.  
 „... Braki w aparaturze Lindego odczułem również i ja (...) i wobec tego pozwalał sobie prosić o uprzejme podanie, gdzie można nabyć ten opisywany przez Pana przyrząd ...” (M. Wien, Aachen, 1903).

„... Zamierzamy naszą instalację Lindego zastąpić aparaturą Pańskiego systemu”. (W. Herz, Wrocław, 1907).

„... Zdecydowałem się zamiast zwykłego przyrządu do skraplania powietrza sprowadzić Pański uniwersalny aparat ...” (Emich, Graz, 1905).

Podobnie piszą prof. Lang (Wiedeń, 1906) i jego następca, prof. Lecher w 1911 r., profesor Haber w 1913 r. (Berlin-Dahlem).

Analogiczna opinia dotyczy aparatu Olszewskiego do skraplania wodoru.

„... Chciałbym (...) zamówić przyrząd do skraplania wodoru rzeczywiście dobry (...) i pozwalam sobie uprzejmie prosić o zawiadomienie mnie, gdzie mógłbym nabyć jeden z Pańskich znakomitych przyrządów” (prof. H. Erdman, Berlin 1909 r.).

„... Udało mi się uruchomić przyrząd do skraplania wodoru (...) wczoraj próbowaliśmy skroplić po raz pierwszy wodór, co od razu dało dobre wyniki”. (K. Fischer, Monachium, 1905).

Jak szeroko znane były aparaty Olszewskiego świadczy list do amerykańskiego konsulatu w Warszawie od firmy Herman A. Holz z Nowego Jorku: „... przed wojną istniała w Krakowie firma, wytwarzająca bardzo ładne aparaty do skraplania gazów takich jak powietrze, wodór etc ...” Było to w 1932 r.!

Ostatnie lata życia poświęcał Olszewski pracom dotyczącym skraplania helu, ale już jego wcześniejsze prace dotyczące tego zagadnienia zyskały uznanie. Kamerlingh-Onnes w 1896 r. pisał: „... Będąc w posiadaniu Pańskiej wspaniałej rozprawy o próbie skroplenia helu (...) czuję się zobowiązany do pogratulowania jak najbardziej serdecznego wyników Pańskich badań (...) Może wyda się to nie na miejscu, aby uczeń gratulował mistrzowi, ale ...”

Symptomatycznym jest, że w 1913 r., a więc w 5 lat po skropleniu helu przez Kamerlingh-Onnesa, Haber zwrócił się nie do niego, lecz do Olszewskiego: „... wielkie postępy, jakie zyskał Pan w dziedzinie skraplania gazów, skłaniają mnie do prośby, aby mi Pan powiedział, czy nie myślał Pan nad zbudowaniem skraplacza do helu”. W dwa miesiące później Haber oferuje Olszewskiemu kilka m<sup>3</sup> helu.

Zbudowanie skraplacza helu było jedynym zagadnieniem, na które nie wystarczyło Olszewskiemu życia. Śmierć jego w 1915 r. przeszła prawie niepostrzeżenie wskutek szalejącej wojny.

Pracownia w czasie wojny uległa dewastacji i dopiero w czasie profesury Tadeusza Estreichera, byłego asystenta Olszewskiego, została przywrócona do dawnego stanu, głównie dzięki pracy Edmunda Kurzyńca. W latach 1939—40 miała zostać unowocześniona, ze skraplaniem helu włącznie. I znowu wojna zniszczyła laboratorium. Pracownicy Zakładu Chemii Nieorganicznej UJ uratowali z narażeniem życia aparaty Olszewskiego, a mechanikowi Zakładu, Ludwikowi Calikowskiemu udało się rozebrać i ukryć cenny kompresor wodorowy.

Po wojnie autor wraz ze Zdzisławem Wojtaszkiem i wspomnianym mechanikiem Calikowskim zrekonstruowali aparaturę wodorową w budynku Chemii przy obecnej ulicy Olszewskiego. Przy użyciu lekko zmodyfikowanego aparatu Olszewskiego autor skraplał wodór używając go (wspólnie z Z. Wojtaszkiem) w swoich pracach naukowych jako kąpeli chłodzącej.

Instalacji tej nie udało się umieścić w nowym gmachu Instytutu Chemii UJ. Aparaty Olszewskiego znajdują się w Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego.



Rozwiązanie zadania M 351. Zauważmy, że w każdym pionowym, poziomym lub ukośnym rzędzie szachownicy znajduje się 0 lub 2 pola zakreślowane na rysunku. Wynika stąd, że liczba zakreślowanych pól ze znakiem — zmienia się za każdym ruchem o 0 lub 2, a ponieważ na początku gry było jedno takie pole, zawsze więc będzie ich liczba nieparzysta, a więc niezerowa.


### Przypominamy

Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — lepiej większą — z naklejonym znacznikiem, otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

## Mizar MSE (4)

W poprzednim odcinku naszkicowaliśmy, jak w Mizarze MSE zapisuje się dowody. Ten opisany już sposób dowodzenia nazywa się dowodzeniem wprost. W przypadku dowodu implikacji zakładamy w nim bowiem najpierw prawdziwość poprzednika i usiłujemy wykazać prawdziwość następnika.

Inna technika dowodzenia to dowód nie wprost, czyli przez sprowadzenie do sprzeczności. Tutaj, w przypadku implikacji po założeniu jej poprzednika zamiast dowodzić następnika, zakładamy „przekornie” jego negację. Jeżeli z takich założeń uda się wywnioskować nieprawdę, to uważamy wyjściową implikację za dowiedzioną. Co to znaczy wywnioskować nieprawdę? W praktyce oznacza to najczęściej wywnioskowanie zdania będącego zaprzeczeniem jednego z poprzednio uzyskanych zdań. By dopełnić formalności w dowodzie, tę wywnioskowaną nieprawdę musimy zaznaczyć odpowiednią konkluzją (w tym odcinku, jak i poprzednio, korzystamy ze wstępu do zadania o liniowym porządku dla ułamków, por. część 2, *Delta* 10/1983).

```
NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NWCA,BJ AND B: NWCC,DJ;
  ASSUME C: NOT NWCA,BJ;
  THUS CONTRADICTION BY A,C
END;
```

Użyte w konkluzji dowodu słowo **contradiction** jest w Mizarze MSE specjalnie traktowanym symbolem.

Jest ono oznaczeniem pewnego zdania zawsze fałszywego — „reprezentującego” wszystkie zdania fałszywe — takiego „abstrakcyjnego”, „zestandardyzowanego” fałszu. Oczywiście **not contradiction** jest zdaniem zawsze prawdziwym. (Mądrzej, to co jest oznaczane przez **contradiction** jest nazywane stałą logiczną **falsum**, czyli po polsku fałsz. A po angielsku **contradiction** znaczy sprzeczność).

Dowód nie wprost można od razu zacząć od założenia negacji dowodzonego zdania i wykazać, że to prowadzi do sprzeczności.

```
NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ) OR NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NOT (NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ) OR NWCA,BJ);
  B: NWCA,BJ & NWCC,DJ BY A;
  C: NOT NWCA,BJ BY A;
  THUS CONTRADICTION BY B,C
END;
```

W taki sposób możemy postępować bez względu na kształt dowodzonego zdania. Weźmy tezę z pierwszego przykładu:

```
NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ
PROOF
  ASSUME A: NOT (NWCA,BJ & NWCC,DJ IMPLIES NWCA,BJ);
  B: NWCA,BJ & NWCC,DJ & NOT NWCA,BJ BY A;
  THUS CONTRADICTION BY B
END;
```

(Czytelnicy zechcą zauważyć, że we wszystkich powyższych przykładach dowodzone w istocie tego samego).

A jak udowodnić nie wprost tezę zaczynając się od kwantyfikatora ogólnego? Niestety, w tym miejscu naszego kursu z założenia negacji zdania ogólnego nie potrafimy jeszcze w pełni skorzystać. Zatem, pierwszy krok zrobimy jak w dowodzie wprost. Weźmiemy mianowicie pewien dowolny, ale na czas dowodu ustalony obiekt. Następnie będziemy starali się o nim dowieść tego, co początkowo mieliśmy udowodnić o wszystkich obiektach tego typu. No, a teraz możemy już zastosować techniki dowodu nie wprost do tego, co pozostało udowodnić.

Popatrzmy na przykład (przypominamy, że zdanie ograniczające w kwantyfikatorze ogólnym to w istocie poprzednik pewnej implikacji):

```
FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NWEX,YJ & X<Y & NWCY,ZJ
  HOLDS NOT NWCY,ZJ
PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
  A: NWEX,YJ AND B: X<Y AND C: NWCY,ZJ;
  ASSUME D: NWCY,ZJ;
  E: NWCY,XJ BY D,C,PRZECHODNIOSC;
  F: X=Y BY A,E,ANTYSYMETRIA;
  THUS CONTRADICTION BY B,F
END;
```

Dowody nie wprost są uważane często za najłatwiejszą formę uzasadniania tezy. Weźmy taki dowód:

```
FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NOT NWEX,YJ & NOT NWCY,ZJ
  HOLDS X<Z
PROOF LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
  A: NOT NWEX,YJ AND B: NOT NWCY,ZJ;
  ASSUME C: X=Z;
  THUS CONTRADICTION BY A,B,C,SPONJOSC
END;
```

Jeżeli nie jest jasne, skąd tutaj wynika sprzeczność, to podajemy rozumowanie w drobniejszych krokach. Mając już poczynione założenia *A*, *B* i *C* moglibyśmy ten dowód kontynuować tak:

```
D: NOT NWCY,YJ BY A,C;
E: NWCY,YJ BY B,SPONJOSC;
THUS CONTRADICTION BY D,E
```

Moduł sprawdzający logiczną poprawność tekstów Mizara MSE (checker) akceptuje oba uzasadnienia. A jaki byłby dowód wprost w tym przypadku?

Na koniec zauważmy, że jeśli już dla pewnej tezy dysponujemy dowodem wprost, to z łatwością możemy przedstawić jej dowód nie wprost. Można również dokonać operacji odwrotnej.

### Zadania:

Przedstawić dowód nie wprost dla następujących tez:

```
T11: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NOT NWEX,YJ & NOT NWCY,ZJ HOLDS NOT NWEX,ZJ
T12: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NWEX,YJ & NWCY,ZJ
  HOLDS NOT NWCY,XJ OR X=Z
T13: FOR X,Y BEING ULAMEK ST NWEX,YJ
  HOLDS FOR Z BEING ULAMEK HOLDS NWEX,ZJ OR NWCY,YJ
```

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI

# Koncentrat fotonowy

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI



## Rozwiązanie zadania F 144.

Termometr jest ciałem makroskopowym, znajdującym się w kontakcie cieplnym z otoczeniem. Towarzyszy temu wymiana ciepła na drodze przewodzenia, konwekcji i promieniowania. W stanie ustalonym termometr wskazuje temperaturę własną, która może (ale nie musi) być równa temperaturze otaczającego ośrodka.

a) W cieniu termometr wskazuje temperaturę powietrza, gdyż decydującą rolę w wymianie ciepła odgrywa przewodzenie. W Słońcu — promieniowanie. Tym samym wskazania termometru umieszczonego w świetle słonecznym silnie zależą od jego konstrukcji (np. barwy cieczy, wielkości powierzchni poddanej działaniu promieniowania itp.).

b) Podane temperatury są miarą średniej energii kinetycznej cząsteczek. Powietrze na tej wysokości jest jednak tak bardzo rozrzedzone, że wymiana ciepła drogą przewodzenia jest nieistotna — przeważa promieniowanie. Wskazania termometru wystawionego na zewnątrz satelity zdeteminowane są przez promieniowanie Słońca (gdy termometr jest oświetlony) lub samego satelity (gdy termometr znajduje się w cieniu), a nie przez temperaturę atmosfery.

Światło składa się z fotonów. Zdanie to, powszechnie znane, zawiera pojęcia odnoszące się do dwóch różnych teorii — klasycznej i kwantowej. Wynikają też z niego ważne konsekwencje dotyczące zjawisk zarówno makro-, jak i mikroskopowych. I tak na przykład falowe własności światła nieuchronnie prowadzą do falowego zachowania pojedynczego fotonu i w rezultacie do osławionego dualizmu falowo-korpuskularnego. Mniej sławne jest natomiast istnienie związków odwrotnych. Okazuje się mianowicie, że pewne kwantowe własności fotonów mają takie, czysto klasyczne, konsekwencje, jakich fizyka klasyczna nie jest w stanie nawet podejrzewać.

Wyobraźmy sobie zbiór atomów jakiegoś pierwiastka wzbudzonych (np. optycznie) do pewnego stanu energetycznego. Każdy z tych atomów może powrócić do stanu podstawowego wysyłając przy tym foton o dobrze określonej energii, a więc i częstotliwości ( $E = h\nu$ ). Foton ten może mieć zupełnie dowolny kierunek lotu i dowolną polaryzację. Jednak dla już wysłanego fotonu zarówno kierunek, jak i polaryzacja są określone. Taki foton znajduje się więc w pewnym określonym stanie fizycznym. Spróbujmy opisać emisję tego fotonu.

Zgodnie z regułami teorii kwantowej musimy posłużyć się pojęciem amplitudy prawdopodobieństwa (funkcji falowej). Jej kwadrat (ściślej moduł do kwadratu, jeśli jest zespolona) to nic innego, jak prawdopodobieństwo wysłania fotonu w określonym stanie. Amplituda prawdopodobieństwa jest podstawowym pojęciem mechaniki kwantowej, zawierającym w sobie całą mądrość dualizmu falowo-korpuskularnego. Z jednej strony ma ona własności typowo falowe (może być dodatnia, ujemna, a nawet zespolona), a z drugiej nie opisuje nic więcej, jak tylko prawdopodobieństwo znalezienia cząstki (fotonu) w określonym stanie. Amplitudą prawdopodobieństwa należy się posługiwać podobnie jak zwykłym prawdopodobieństwem klasycznym. I tak, amplituda prawdopodobieństwa zajścia dwóch zjawisk niezależnych równa się iloczynowi amplitud obu zjawisk oddzielnie. I dalej, amplituda prawdopodobieństwa zajścia zjawiska, które może przebiegać na wiele niezależnych, nierozróżnialnych sposobów, równa się sumie amplitud dla każdego ze sposobów. Ta ostatnia własność decyduje o wszelkiego rodzaju zjawiskach interferencji, tak częstych w mechanice kwantowej. Należy wreszcie pamiętać, że skonstruowaną według powyższych reguł amplitudę podnosimy do kwadratu i dopiero tak otrzymujemy szukane prawdopodobieństwo zajścia danego zjawiska.

Wróćmy teraz do naszego zbioru atomów wzbudzonych, emitujących fotony. Oznaczmy przez  $a'$  amplitudę prawdopodobieństwa wysłania fotonu w określonym stanie, zaś przez  $a''$  amplitudę wysłania fotonu w stanie nieco różniącym się od poprzedniego (np. o nieco innym kierunku lotu). Amplitudy te muszą, oczywiście, być odpowiednio unormowane tak, by prawdopodobieństwo wysłania fotonu w dowolnym kierunku i o jakiegokolwiek polaryzacji było równe jedności. Obliczmy teraz amplitudę prawdopodobieństwa rozpadu dwóch atomów wzbudzonych i wysłania dwóch fotonów w nieco różniących się stanach. Zgodnie z podanymi wyżej regułami wynosi ona

$$(*) \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} [a'_1 \cdot a'_2 \text{ (pierwszy foton do stanu prim, drugi do bis)} + a''_1 \cdot a''_2 \text{ (na odwrot)}];$$

suma dwóch amplitud pojawia się z powodu nierozróżnialności obu sytuacji, a czynnik  $1/\sqrt{2}$  bierze się z konieczności odpowiedniego unormowania amplitudy i nie będziemy go tu bliżej wyjaśniać. Warto jedynie wspomnieć, że zapobiega on podwójnemu liczeniu kierunków obu fotonów w sytuacji, gdy są one rejestrowane przez pojedynczy licznik. Niech teraz oba fotony znajdują się w tym samym stanie. Wtedy  $a'_1 = a''_1 = a'_2 = a''_2 = a$  i  $A = \sqrt{2} a^2$ . Stąd prawdopodobieństwo wysłania dwóch fotonów w tym samym stanie (kierunku i polaryzacji) wynosi  $A^2 = 2 a^4$  i jest dwa razy większe niż prawdopodobieństwo obliczone według reguł klasycznych.

Podobnie można pokazać, że prawdopodobieństwo wysłania  $n$  fotonów w tym samym stanie jest zwiększone  $n!$  razy.

Zwróćmy uwagę na fakt, że opisane zjawisko jest wynikiem interferencji nierozróżnialnych sposobów, na jakie można zrealizować stan końcowy. Jeżeli kierunki lotu fotonów zaczną się różnić za bardzo, to interferencja szybko przestanie dawać wzmocnienie (być konstruktywna) i prawdopodobieństwo zmaleje. W ten sposób zbiór atomów tak samo wzbudzonych promieniuje prawie równoległą, spójną wiązkę światła. Nie jest to oczywiście nic innego, jak laser — układ produkujący skrajnie klasyczne światło, klasyczny koncentrat jednakowych kwantowych fotonów.



Opisane zjawisko gromadzenia się jednakowych cząstek w jednym stanie fizycznym występuje dla wszystkich cząstek mających spin całkowity (tzw. bozonów od nazwiska fizyka hinduskiego S. N. Bosego). Zjawisko to nosi nazwę kondensacji Bosego-Einsteina i prowadzi do powstawania jednorodnych układów klasycznych złożonych z ogromnej liczby bozonów. Nasuwa się naturalne pytanie: jak zachowują się układy jednakowych cząstek o spinie ułamkowym (fermionów — od nazwiska E. Fermiego). Otóż dla nich we wzorze (\*) pojawia się znak minus zamiast plusa, czyli różnica, a nie suma odpowiednich amplitud. W rezultacie prawdopodobieństwo znalezienia dwóch jednakowych fermionów w tym samym stanie jest po prostu równe zeru. Własność ta jest treścią słynnego zakazu Pauliego obowiązującego na przykład dla elektronów oraz składników jądra atomowego — nukleonów. Widać więc, że zakaz Pauliego pojawia się jako wynik interferencji wygaszającej (destruktywnej) amplitud odpowiadających dwóm nierozróżnialnym sposobom realizacji stanu dwu fermionów.

Ktoś może się zapytać: co to wszystko ma wspólnego z niskimi temperaturami, będącymi przecież przewodnim tematem tego numeru *Delta*? Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że opisane wyżej (i wyjaśnione na przykładzie lasera) jednorodne układy wielu bozonów pojawiają się tam, gdzie występuje dobrze określony i odseparowany energetycznie stan pojedynczego bozonu. Układy te są szczególnie ciekawe dla bozonów obdarzonych niezerową masą i zerową wartością spinu (co odpowiada brakowi polaryzacji). Dla takich cząstek ich stan podstawowy jest stanem o zerowej wartości pędu i właśnie obsadzanie tego stanu prowadzi do interesujących zjawisk. Stan podstawowy może być obsadzony jedynie w odpowiednio niskich temperaturach — takich, że ruchy cieplne materii nie mogą doprowadzić do wzbudzeń na jakiegokolwiek inny stan. Tak właśnie pojawia się kondensacja Bosego-Einsteina cząsteczek nadciepłego helu  $^4\text{He}$  oraz par dwu elektronów (para fermionów jest bozonem) w nadprzewodnikach. Zbyt małe ruchy cieplne nie są w stanie wzbudzić takiego wielobozonego stanu na wyższy energetyczny poziom i dlatego nie mogą w żaden sposób zaburzyć ewentualnych niewielkich ruchów tego układu. Stąd znikanie lepkości dla niezbyt szybkiego ruchu cieczy i oporu elektrycznego dla niezbyt silnego prądu. Temperatura musi oczywiście być wystarczająco niska.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 349.** Sfera o środku  $O$  wpisana w czworościan  $ABCD$  styka się z jego ścianami w punktach  $K, L, M, N$ .

Wykazać, że punkt  $O$  leży w czworościanie  $KLMN$ .

Rozwiązanie na str. 17

**M 350.** Wykazać, że jeżeli  $k \neq n$ , to liczby  $2^{2^k} + 1$  i  $2^{2^n} + 1$  są względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 3

**M 351.** Na jednym z nienaroznych pól brzegowych szachownicy  $4 \times 4$  zapisano znak — wypełniając pozostałe pola znakami  $+$ . Jeden ruch polega na zamianie na przeciwne wszystkich znaków w rzędzie poziomym, pionowym lub ukośnym (równoległym do którejś przekątnej). Wykazać, że po dowolnej liczbie ruchów na szachownicy znajdzie się co najmniej jeden znak —.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 144.** a) W komunikatach o pogodzie można usłyszeć, że:

„Temperatura w cieniu wynosiła 25 stopni, w słońcu 35°C”. Jaki jest sens takiego stwierdzenia?

b) Badania geofizyczne wykazują, iż na wysokości około 1000 km nad powierzchnią Ziemi temperatura atmosfery waha się od 1000 K (nocą) do 2500 K (w dzień). Czyżby były to wskazania termometrów wystawionych na zewnątrz sztucznych satelitów krążących na danej wysokości?

Rozwiązanie na str. 7

**F 145.** a) Mierząc gorączkę trzymamy termometr pod pachą przez kilka lub nawet kilkanaście minut. Jak to jest możliwe, że termometr daje się „strząsnąć” prawie natychmiast po wyjęciu spod pachy?

b) Jak można by za pomocą termometru lekarskiego zmierzyć temperaturę ciała ludzkiego, gdy temperatura otoczenia wynosi, powiedzmy, 42°C?

Rozwiązanie na str. 11

Doc. dr Eugeniusz TROJNAR

W niskich temperaturach, bliskich zera bezwzględnego, gdy energia chaotycznych drgań cieplnych staje się wystarczająco mała, mogą wystąpić zjawiska związane z uporządkowaniem ruchów cząstek i prawa kwantowe mogą się przejawiać w skali makroskopowej.

Do takich zjawisk kwantowych należy nadprzewodnictwo. Niskie wartości temperatur, w których może pojawić się nadprzewodnictwo, świadczą o tym, że oddziaływanie odpowiedzialne za wystąpienie tego zjawiska jest bardzo słabe. W wyższych temperaturach energia cieplna  $kT$  ( $k$  jest stałą Boltzmanna,  $T$  — temperaturą w skali bezwzględnej) jest zbyt duża i niszczy uporządkowanie nadprzewodzące. Temperatura, powyżej której nadprzewodnictwo znika, nazywa się temperaturą krytyczną  $T_c$ . Jest ona na ogół różna dla różnych metali. Najwyższa dotychczas zanotowana temperatura krytyczna wynosi ok. 23 K.

Nadprzewodnictwo przejawia się m.in. jako brak oporu elektrycznego, czyli przepływ elektronów bez tarcia, tj. bez strat energii na rzecz sieci krystalicznej. Pod tym względem nadprzewodnictwo przypomina inne zjawisko, zwane nadciekłością, występujące w niskich temperaturach w ciekłym helu. Chociaż nadprzewodnictwo zostało odkryte wcześniej niż nadciekłość, na jego wyjaśnienie trzeba było czekać znacznie dłużej. Tłumacząc nadciekłość można było założyć, że w temperaturze zera bezwzględnego wszystkie atomy helu znajdują się w identycznym stanie kwantowym z najniższą energią (kondensacja Bosego-Einsteina). Dla elektronu w metalu taka sytuacja nie jest możliwa ze względu na zakaz Pauliego — w układzie elektronów nie może być nawet dwu cząstek w tym samym stanie kwantowym.

Dopiero koncepcja L. Coopera (1956 r.) dotycząca możliwości łączenia się elektronów z przeciwnymi pędami i spinami w pary była punktem wyjścia do opracowania teorii nadprzewodnictwa. Taka para elektronów ma spin całkowity i nie podlega zakazowi Pauliego.

Przypuszczenie, że elektrony mogą się łączyć w pary, wypowiedział R. A. Ogg jeszcze przed Cooperem, ale koncepcja ta wydawała się wtedy (rok 1946) nieprawdopodobna, gdyż trudno było zrozumieć przyczynę łączenia się elektronów wbrew siłom coulombowskiego odpychania. Przyczynę tę podał H. Fröhlich wskazując na rolę, jaką może tu odgrywać oddziaływanie elektronów z siecią krystaliczną. Wykrycie w tym samym roku tzw. efektu izotopowego potwierdziło przypuszczenia Fröhlicha. Efekt izotopowy polega na tym, że różne izotopy tego samego pierwiastka nadprzewodzącego mają różne temperatury przejścia w stan nadprzewodnictwa ( $T_c$ ), przy czym spełniona jest przybliżona zależność  $T_c \sim M^{-1/2}$ , gdzie  $M$  oznacza masę atomową. Przyczyną nadprzewodnictwa trzeba przeto szukać w oddziaływaniu elektronów z jonami sieci krystalicznej. Ciekawe, że właśnie to oddziaływanie, które powoduje występowanie oporu elektrycznego, w pewnych warunkach może prowadzić do jego znikania. Tym można wytłumaczyć fakt, że najlepsze przewodniki, jakimi są srebro, złoto czy miedź, nie przechodzą w stan nadprzewodnictwa (przynajmniej w temperaturach, w których były przebadane); oddziaływanie elektronów z siecią w tych metalach jest zbyt słabe.

Przyciągające oddziaływanie między elektronami za pośrednictwem sieci możemy sobie wyobrazić w następujący sposób. Elektron porusza się przez sieć i deformuje ją. Deformacja polega na zgęszczeniu dodatnich jonów sieci w pobliżu elektronu. To zgęszczenie dodatnich jonów oddziałuje z kolei na inny elektron. W rezultacie oba elektrony przyciągają się za pośrednictwem sieci. Oddziaływanie takie ma zasięg znacznie większy (setki, a nawet tysiące razy) niż bezpośrednie odpychanie elektrostatyczne elektronów.

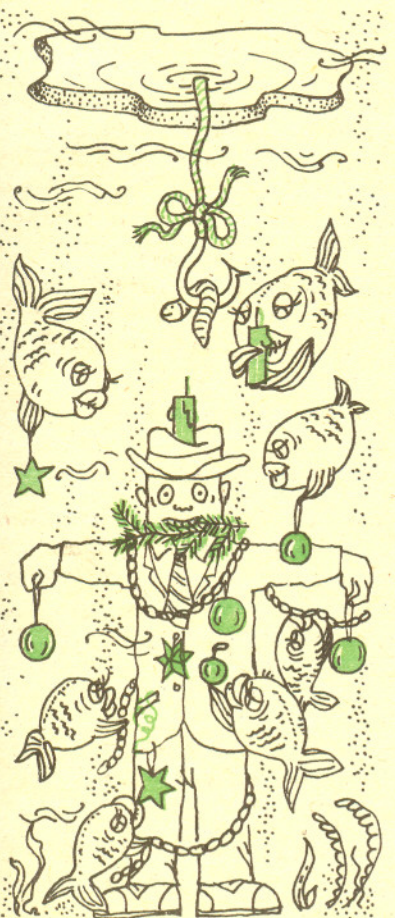
Tworzenie się par Coopera jest zjawiskiem kolektywnym, w którym bierze udział jednocześnie duża liczba cząstek, dlatego nie należy sobie wyobrażać pary Coopera jako dwóch wyodrębnionych, złączonych ze sobą elektronów. Pojedyncza, niezależna od innych para nie może istnieć; należy w zasadzie mówić o korelacji między elektronami o przeciwnych pędach i spinach. Pojawienie się korelacji prowadzi do obniżenia energii układu. Wartość tej obniżki na jedną parę Coopera to jednocześnie energia, jaką trzeba dostarczyć do układu elektronów, aby jedną parę „rozerwać”.

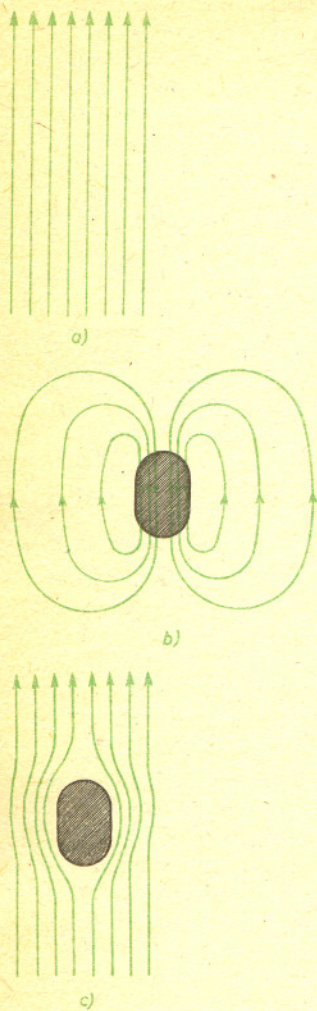
Okazuje się, że im lepsza jest korelacja między elektronami, to znaczy im więcej elektronów jest związanych w pary, tym większa jest energia wiązania pary. W miarę wzrostu temperatury wzbudzenia cieplne niszczą korelację, maleje więc względna liczba par oraz energia wiązania pary. W pobliżu  $T_c$  proces rozrywania (czy tworzenia) par przebiega lawinowo.

Odległość, z jakiej oddziałują elektrony tworzące parę dla czystych metali, jest rzędu  $\xi = 10^{-6}$  m (zanieczyszczenia zmniejszają tę odległość). Jeśli przyjmiemy, że na każdy atom metalu przypada



Najdokładniejsza metoda pomiaru bardzo małego oporu polega na wzbudzeniu w pierścieniu z nadprzewodnika prądu i obserwacji jego zaniku. Takie doświadczenie z ołowianym pierścieniem nadprzewodzącym przeprowadził S. C. Collins; po upływie dwu i pół roku nie stwierdził żadnego zauważalnego osłabienia prądu krążącego w pierścieniu. Wynika stąd, że opór właściwy nadprzewodzącego ołowiu nie mógł być większy niż  $10^{-25} \Omega \cdot m$ . Opór najlepszych przewodników w temperaturze pokojowej jest ok.  $10^{17}$  razy większy.



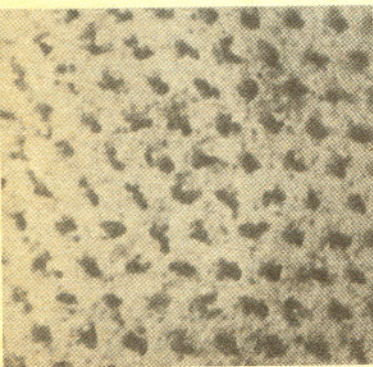


Rys. 1 Suma zewnętrznego pola magnetycznego (a) i pola magnetycznego wytworzonego przez ekranujący prąd elektryczny (b) jest wewnątrz nadprzewodnika równa zeru (c).

Strumień magnetyczny, inaczej strumień wektora indukcji magnetycznej  $B$ , przez małą (tj. taką, na której  $B$  jest stałe) powierzchnię  $\Delta S$  wynosi

$$\Delta \varphi_B = |\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}| \Delta S,$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem normalnym do tej powierzchni. Strumień przez dowolną powierzchnię łatwo obliczyć rozbijając ją na małe powierzchnie  $\Delta S$ . Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber (Wb).



jeden elektron przewodnictwa i że tylko około 0,01% elektronów łączy się w pary Coopera (w pary mogą się łączyć tylko niektóre elektrony — te, których energia różni się od energii Fermiego nie o więcej niż wynosi energia wiązania), to średnia odległość między parami będzie rzędu  $10^{-8}$  m, a więc około sto razy mniej, niż wynosi rozmiar jednej pary. W obszarze zajęty przez jedną parę jest więc dużo innych par, co wyjaśnia kolektywność oddziaływania i silną korelację między nimi.

Zastanówmy się teraz, jak przy pomocy koncepcji par Coopera można wyjaśnić zjawisko bezoporowego przepływu prądu elektrycznego, czyli nadciekłość w „płynie” elektronów przewodnictwa. Opór elektryczny w metalach jest wynikiem zderzeń elektronów z drganiami sieci krystalicznej i defektami jej struktury. W niezaburzonej, ściśle okresowej sieci, elektrony powinny poruszać się bez przeszkód. Opór elektryczny w takiej sieci nie może więc istnieć. Defekty struktury i drgania cieplne jonów zaburzają jednak okresowość struktury krystalicznej i rozpraszają elektrony. W procesie rozpraszania elektrony przekazują sieci energię nabytą w polu elektrycznym.

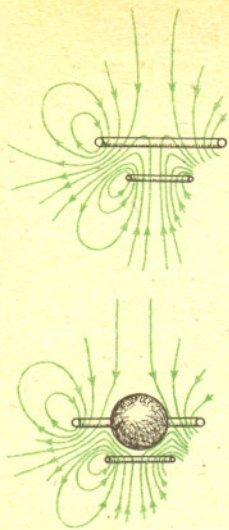
Jak już wspomniano wyżej, w pary Coopera łączą się elektrony o przeciwnych pędach tak, że sumaryczny pęd pary jest równy zeru, gdy prąd nie płynie. Para biorąca udział w przepływie prądu ma pęd różny od zera, np.  $2P$ , czyli elektrony pary mają pędy  $K+P$  i  $-K+P$ . Gdyby jeden z elektronów uległ rozproszeniu, jego pęd zmieniłby się o pewną wartość, powiedzmy  $Q$ ; nowy pęd wynosiłby teraz  $-K+P+Q$ . Taki elektron nie mógłby już tworzyć pary z elektronym o pędzie  $K+P$ , a więc para uległaby rozerwaniu. To zaś zwiększyłoby energię układu o energię wiązania pary, co jest dla układu niekorzystne. Elektrony związane w parę nie biorą więc udziału w procesie rozpraszania ze względów energetycznych. Jeśli jednak gęstość prądu wzrośnie do takiej wartości, że energia kinetyczna nośników prądu przekroczy spadek energii wynikły z utworzenia par, to pary ulegną rozerwaniu. Gęstość prądu, przy której znika nadprzewodnictwo, nazywa się gęstością krytyczną. Jest ona dość wysoka, bo dla niektórych nadprzewodników sięga wartości  $10^5 \text{ A/mm}^2$ . Gęstość krytyczna prądu jest funkcją temperatury, a podana wartość odnosi się do temperatury znacznie niższej niż krytyczna.

Nadprzewodnictwo może także zostać usunięte w polu magnetycznym. Zewnętrzne pole magnetyczne nie wnika do wnętrza bryły nadprzewodzącej. Jest to druga, obok oporu elektrycznego, podstawowa własność nadprzewodnika. Niezależnie od tego, czy zewnętrzne pole magnetyczne zostało nałożone na nadprzewodnik przed przejściem w stan nadprzewodnictwa, czy po przejściu, indukcja magnetyczna w obszarze nadprzewodnika jest zawsze równa zeru. Nadprzewodnik jest więc doskonałym diamagnetykiem z równą zeru przenikalnością magnetyczną. Ekranowanie wnętrza nadprzewodnika od zewnętrznego pola magnetycznego odbywa się w ten sposób, że w cienkiej (rzędu  $10^{-7}$  m) warstwie powierzchniowej nadprzewodnika krąży prąd elektryczny wytwarzający takie pole magnetyczne, które kompensuje wewnątrz nadprzewodnika pole pochodzące od zewnętrznych źródeł (rys. 1). Jeśli ten powierzchniowy, ekranujący prąd elektryczny osiągnie gęstość równą krytycznej dla danej temperatury, dalsze ekranowanie od pola staje się energetycznie niekorzystne, nadprzewodnictwo znika i pole magnetyczne wnika do wnętrza materiału nadprzewodnika. Zjawisko ekranowania nadprzewodnika od pola magnetycznego zostało odkryte przez W. Meissnera dopiero w 1933 roku, chociaż z niszczącym nadprzewodnictwo działaniem pola zapoznano się wkrótce po odkryciu nadprzewodnictwa. Odkrycie zjawiska Meissnera miało bardzo istotne znaczenie dla opracowania fenomenologicznej teorii nadprzewodnictwa.

Opisana powyżej skokowa utrata nadprzewodnictwa w polu magnetycznym o krytycznej gęstości strumienia dotyczy jedynie pewnej grupy nadprzewodników, zwanych nadprzewodnikami pierwszego typu. Do tej grupy należą prawie wszystkie pierwiastki nadprzewodzące (oprócz niobu i wanadu) oraz niektóre stopy.

Dla nadprzewodników drugiego typu energetycznie korzystniejsze jest, aby powyżej pewnej wartości natężenia pola zewnętrznego część strumienia magnetycznego w postaci pojedynczych włókien przenikała bryłę nadprzewodnika. Włókna strumienia magnetycznego są nitkoksztalnymi obszarami nadprzewodnika, w których skupione jest pole magnetyczne. Indukcja magnetyczna jest większa w środku włókna i maleje w miarę wzrostu odległości od środka. Dookoła osi włókna krążą prądy nadprzewodnictwa o gęstości malejącej ze wzrostem odległości od osi. Właśnie te prądy wytwarzają pole magnetyczne włókna. Włókno strumienia magnetycznego, zwane też fluksoidem, jest więc wirum podobnym do wiru w cieczy, z tym że tutaj wokół osi krążą elektrony nadprzewodnictwa, a nie cząsteczki płynu.

Fluksoidy w monokrystalicznej, pozbawionej defektów próbce nadprzewodnika drugiego typu mogą, w pewnych warunkach, tworzyć w płaszczyźnie prostopadłej do pola uporządkowaną siatkę trójkątną lub kwadratową. Fotografia przedstawia obraz trójkątnej siatki fluksoidów otrzymany pod mikroskopem elektronowym po naniesieniu proszku ferromagnetycznego na powierzchnię próbki. Ziarenka proszku skupiły się w obszarach najsilniejszego pola, czyli w miejscach, gdzie rdzenie wirów wychodzą na powierzchnię próbki.



Rys. 2 Doskonały diamagnetyzm jest przyczyną wypychania nadprzewodnika z obszaru najsilniejszego pola (odwrotnie niż w przypadku ferromagnetyków, które są wciągane w obszar najsilniejszego pola). Powszechnie znane jest doświadczenie z kulej nadprzewodzącej unoszącej się nad nadprzewodzącymi pierścieniami, w których krążą prądy elektryczne (wzbudzone w przeciwnych kierunkach). Prądy te tworzą pole magnetyczne wypychające nadprzewodzącą kulę. Rysunek przedstawia linie sił pola przed i po zawieszeniu kuli.

Prace nad stworzeniem nadprzewodników organicznych przyniosły w 1979 r. częściowy sukces (K. Bechgaard i D. Jérôme, *Scientific American*, lipiec 1982), jednak temperatura krytyczna pierwszych nadprzewodników organicznych jest bardzo niska (~ 1 K). Ponadto większość tych substancji wykazuje własności nadprzewodzące dopiero pod wysokim ciśnieniem (rzędu tysięcy atmosfer).



Rys. 1



#### Rozwiązanie zadania F 145.

Termometr lekarski jest jednym z tzw. termometrów maksymalnych, czyli takich, które wskazują maksymalną temperaturę zbiorniczka rtęci w trakcie pomiaru. Efekt taki można uzyskać np. wstawiając do kapilary cienki pręcik szklany (patrz rys. 1). Podczas kurczenia się rtęci w przewężeniu następuje przetrwanie słupka (dlaczego?).

a) W trakcie pomiaru temperatury termometr powinien nagrzać się od temperatury pokojowej do temperatury ciała, czyli o kilkanaście stopni. Strząśnięcie jest możliwe, gdy zbiorniczek ostygnie do najniższej temperatury na skali (34–35°C). Zgodnie z prawem Newtona (nie mylić z zasadami dynamiki, też Newtona) tempo wymiany ciepła jest proporcjonalne do różnicy temperatur termometru i otoczenia.

Strumień magnetyczny włókna przechodzącego przez nadprzewodnik nie może mieć dowolnej wartości, lecz musi być równy całkowitej wielokrotności pewnej porcji wynoszącej  $2,05 \cdot 10^{-15}$  Wb i zwanej kwantem strumienia. Na ogół każde włókno stanowi jeden kwant strumienia. Do nadprzewodników drugiego typu należy większość stopów i związków nadprzewodzących. Niektóre z nich wykazują nadprzewodnictwo nawet w polach magnetycznych o gęstości strumienia rzędu kilkudziesięciu tesli. Stanowią one przedmiot szczególnego zainteresowania ze względu na zastosowania praktyczne. Należałoby tu jeszcze dodać, że strumień magnetyczny kwantuje się również wtedy, gdy przenika jakikolwiek otwór w bryle nadprzewodzącej. Kwantowanie strumienia magnetycznego w obszarze zajęтым lub otoczonym przez nadprzewodnik — to trzecia podstawowa cecha nadprzewodnictwa.

Sprawą doniosłej wagi, zarówno ze względów poznawczych, jak i praktycznych, jest rozstrzygnięcie zagadnienia, czy nadprzewodnictwo może występować również w temperaturach zbliżonych do temperatury otoczenia. Niskie temperatury krytyczne znanych nadprzewodników związane są z mechanizmem wystąpienia w nich nadprzewodnictwa. Pary Coopera tworzą się w wyniku oddziaływania elektron-elektron poprzez sieć krystaliczną; energia tego oddziaływania nie może być większa niż energia drgań sieci (ściślej: energia kwantu drgań — fononu). Ta zaś zależy od stałych cechujących sieć krystaliczną i wyraża się poprzez tzw. temperaturę Debye'a. Temperatury Debye'a różnych materiałów wynoszą od kilkudziesięciu do kilkunastu kelwinów. Temperatury krytyczne dla nadprzewodnictwa są co najmniej o rząd niższe.

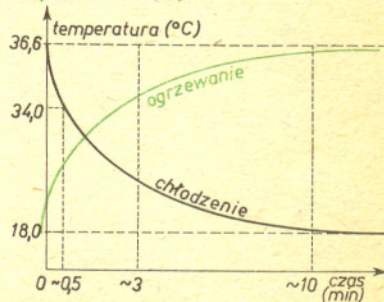
Przy opisanym mechanizmie nadprzewodnictwa niskie temperatury krytyczne są więc uwarunkowane własnościami samej sieci krystalicznej. Dla uzyskania wysokich  $T_c$  potrzebne byłoby inne, znacznie silniejsze oddziaływanie. Mogłoby to być na przykład nadprzewodnictwo wywołane oddziaływaniem między elektronami za pośrednictwem ekscytonów. Ekscytony są elementarnymi wzbudzeniami układu elektronów. Wzbudzenia te mogą się rozprzestrzeniać w ośrodku niemetalicznym, np. w półprzewodniku lub dielektryku. Dla utworzenia pary elektronów siłami wymiany ekscytonu trzeba zbudować odpowiedni ośrodek złożony z metalu pozostającego w ciasnym kontakcie z niemetalem. Mógłby to być np. układ złożony z cienkiej warstwy metalu obłożonej z obu stron dielektrykiem. Temperatura przejścia w stan nadprzewodnictwa takiego układu mogłaby wynosić kilkaset kelwinów. Zwróćmy uwagę, że cienka warstwa metalu otoczona dielektrykiem stanowi w przybliżeniu dwuwymiarowy układ nadprzewodzący. Koncepcje dotyczące nadprzewodnictwa ekscytonowego są rozwijane głównie przez W. L. Ginzburga.

Ciekawy przykład koncepcji jednowymiarowego nadprzewodnictwa podał przed kilku laty W. A. Little. Zgodnie z jego sugestią nadprzewodnictwo miałyby wystąpić w kwazi-jednowymiarowych molekułach organicznych. Molekuła w kształcie łańcucha ma boczne polaryzujące się odgańczenia. Między elektronami przewodnictwa w łańcuchu powinny się pojawiać siły wzajemnego przyciągania w wyniku oddziaływania z polaryzującymi się odgańczeniami łańcucha. Byłoby to oddziaływanie coulombowskie, a więc jego energia mogłaby być duża. Według oszacowań Little'a krytyczna temperatura w tym modelu powinna wynosić 2400 K. Głównym zarzutem wysuniętym przeciw takiemu modelowi było to, że w kwazi-jednowymiarowym łańcuchu nadprzewodnictwo nie może istnieć, gdyż fluktuacje gęstości elektronów doprowadziłyby do jego zaniku.

Zagadnienie istnienia nadprzewodnictwa w temperaturach wyższych niż 30–40 K pozostaje więc, jak dotąd, w sferze rozważań teoretycznych.

Ochłodzenie o 2–3 stopnie, przy dużej różnicy temperatur, trwa więc bardzo krótko. Widać to wyraźnie na wykresie (rys. 2).

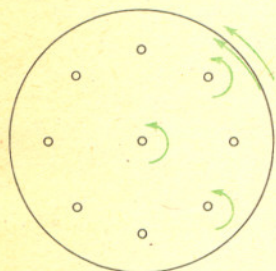
b) Jednym ze sposobów jest: trzymać termometr pod pachą przez dłuższy czas, wyjąć, natychmiast strząsnąć i spojrzeć. A jak można inaczej?



Rys. 2

# Gwiazda neutronowa w laboratorium

Dr Marta CIEPLAK



Rys. 1 Wirujące naczynie z nadciekłym helem

Nad doświadczeniem, o którym chcę opowiedzieć Czytelnikom *Delty*, pracowałam w kierowanej przez Wiliama Glabersona pracowni fizyki niskich temperatur w Rutgers University w Stanach Zjednoczonych. Doświadczenie miało na celu zbadanie pewnych własności ciekłego helu w bardzo niskich ( $\sim 1$  K) temperaturach.

W temperaturze 2,17 K w  $^4\text{He}$  następuje przejście fazowe do fazy nadciekłej. Hel ma w tej fazie niezwykle własności. Jego przewodnictwo cieplne jest nieskończenie duże, a lepkość, mierzona przy przepływie przez cienkie rurki włoskowate, równa zero. Można jednak wyznaczać lepkość także inną metodą. W tym celu wypełnia się helem przestrzeń między dwoma współosiowymi walcami i obraca jeden z nich. Okazuje się, że po pewnym czasie drugi porusza się również. Dzieje się tak dlatego, iż w doskonale nielepkiej cieczy mogą być wzbudzone fale dźwiękowe – wiry. Wzbudzenia takie tworzą jakby drugą, „lepką”, składową cieczy, gdyż mogą one oddziaływać ze ściankami naczynia i przenosić pęd.

Przyjrzyjmy się bliżej wzbudzeniom w obracającym się naczyniu z nadciekłym helem. Wiadomo, że jeśli obracamy naczynie z lepką cieczą, np. wodą, to po pewnym czasie woda zaczyna się obracać z tą samą prędkością kątową, co naczynie (przynajmniej dla prędkości poniżej pewnej prędkości krytycznej, kiedy w cieczy nie powstają turbulencje).

A co dzieje się z cieczą nielepką? Okazuje się, że hel będzie miał najniższą energię (będzie w stanie stabilnym), jeśli powstaną w nim tzw. wiry liniowe o osiach równoległych do osi obrotu naczynia. Osie wirów będą krążyć przy tym z prędkością kątową naczynia (rys. 1). Podobnie jak elektrony w atomie wodoru, tak i atomy helu w wirze mogą mieć wartości momentu pędu równe tylko wielokrotności  $\hbar = h/2\pi$ , gdzie  $h$  – stała Plancka. Moment pędu atomu helu o masie  $m$  obracającego się w odległości  $r$  od osi wiru z prędkością  $v$  wynosi  $mvr$ . Tak więc  $mvr = n\hbar$ , gdzie  $n = 1, 2 \dots$ . Zauważmy, że, inaczej niż w przypadku bryły sztywnej,

prędkość atomów w wirze maleje z odległością od osi wiru:  $v = \frac{A}{r}$ , gdzie  $A$  jest

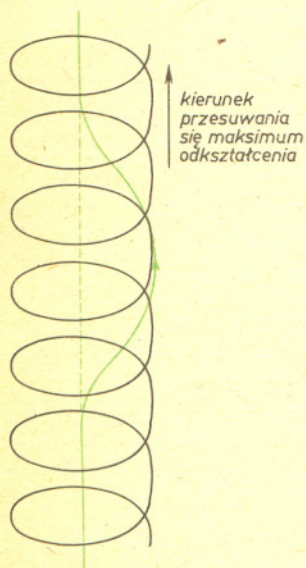
współczynnikiem proporcjonalności zwanym cyrkulacją lub mocą wiru. Wynika stąd, że

cyrkulacja może przybierać tylko wartości  $\frac{\hbar}{m} \cdot n$ .

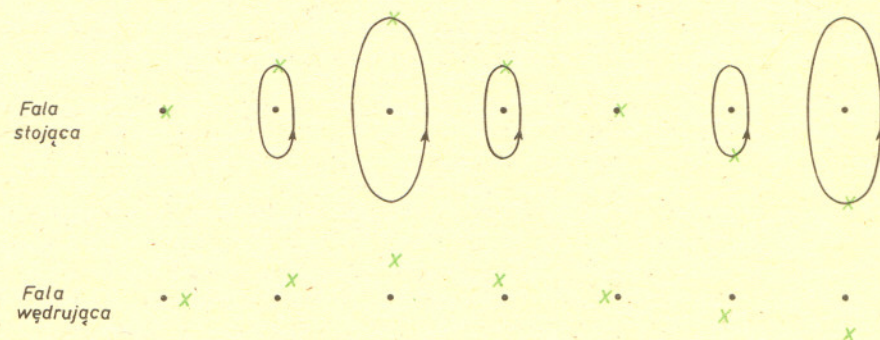
Okazuje się, że nadciecz helowa w obracającym się naczyniu ma najniższą energię, gdy dla wszystkich wirów  $n = 1$ , przy czym gęstość wirów na jednostkę powierzchni cieczy wynosi

$2\omega \frac{m}{h}$ , gdzie  $\omega$  jest częstością kątową obrotów naczynia. Ponadto wiry rozłożone są w cieczy

równomiernie. Przy prędkości obrotów  $\omega = 1$  radian/s odległości osi wirów od siebie wynoszą około 0,2 mm. Stwierdzono, że najbardziej stabilny układ linii wirów realizowany jest wtedy, gdy osie wirów tworzą regularną sieć trójkątną. Jest to jakby „sieć krystaliczna” przypominająca sztywny układ atomów w ciele stałym. Tak samo jak atomy w ciele stałym, osie wirów mogą drgać wokół swych położeń równowagi, w związku z czym w nadcieczy pełnej wirów mogą powstawać fale. Obserwuje się dwa rodzaje takich fal. Jeden z nich to odkształcenie osi wiru, przemieszczające się po linii śrubowej wzdłuż osi (rys. 2a). Inny typ fal to tzw. fale Tkaczki, gdy odkształcenie wiru przemieszcza się w nadcieczy prostopadle do osi wiru (rys. 2b). Jest to zaburzenie, w którym uczestniczy wiele wirów. W nadciekłym helu nie obserwowano nigdy fal Tkaczki w czystej formie – jedynie mieszaninę obu typów fal.

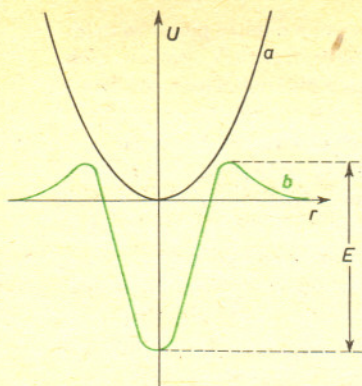


Rys. 2a Fala spiralna — możliwy jest również przeciwny kierunek przesuwania się fali (w dół rysunku) oraz fala stojąca.

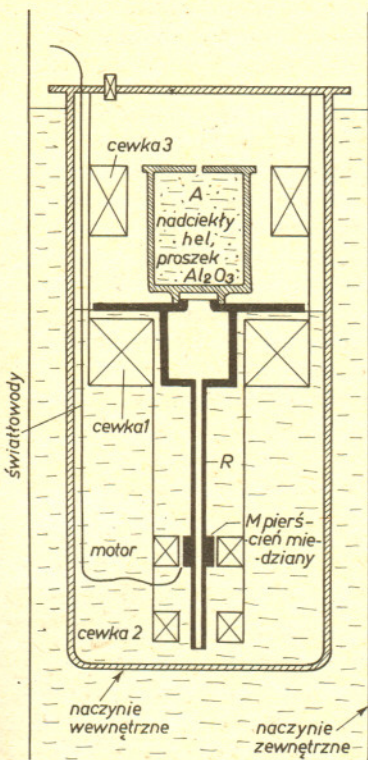


Rys. 2b Fala Tkaczki — kropki przedstawiają niezakłóconą linię osi wirów; krzyżyki — położenia osi wirów w pewnej chwili czasu. Osie wirów poruszają się po elipsach.

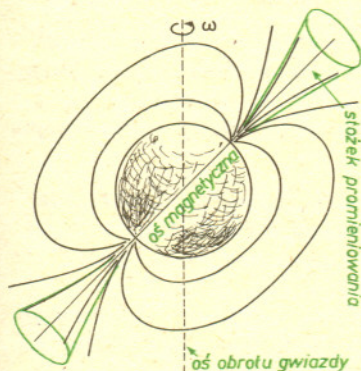
To, co powiedzieliśmy dotychczas, dotyczyło nadcieczy obracającej się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Załóżmy teraz, że zwalniamy prędkość obrotów naczynia do nowej prędkości kątowej  $\omega'$ . Gęstość wirów wewnątrz naczynia powinna zmniejszyć się do wartości  $2\omega' \frac{m}{h}$ . Okazuje się, że wiry przesuwają się na zewnątrz naczynia i znikają przy jego ściankach. Gdy natomiast zwiększamy prędkość obrotów — wirów przybywa — tworzą się nowe wiry w pobliżu ścianek naczynia i przesuwają się do wnętrza.



Rys. 3 Energia wiru w funkcji: (a) wychylenia z położenia równowagi; (b) odległości od nierówności powierzchni.



Rys. 4 Układ doświadczalny



Rys. 5 Model promieniowania pulsara

Na ogół wiry nie poruszają się jednak zupełnie swobodnie, lecz przylepiają się do chropowatości na ściankach naczynia. Mechanizm przylepiania się wirów nie jest dokładnie znany, wiadomo jednak, że istnieje pewna prędkość krytyczna nadciężcy względem naczynia, powyżej której rdzeń wiru odrywa się od chropowatości. Jakościowo można to wyjaśnić następująco. Jeśli w doskonałej sieci wirów wychylimy jeden z nich z położenia równowagi, to znajdzie się on w polu prędkości drugiego wiru i wzrośnie jego energia — wir w stanie równowagi ma najmniejszą energię (rys. 3a). W pobliżu nierówności powierzchni naczynia w nadciężcy istnieją fluktuacje gęstości, a tym samym zmieniają się odległości od sąsiednich wirów. Pojawia się pewne dodatkowe oddziaływanie. To, czy jest ono przyciągające czy odpychające, zależy od kształtu i wielkości nierówności powierzchni, od tego, czy gęstość nadciężcy miejscowo rośnie, czy maleje. Okazuje się, że w większości przypadków energia wiru zmienia się w zależności od odległości od nierówności powierzchni, jak to pokazano na rys. 3b.

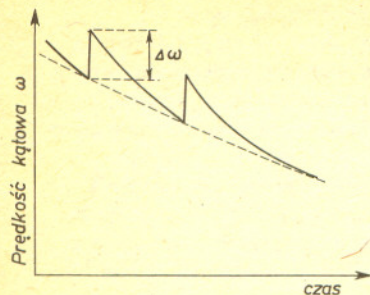
Wir ma najniższą energię, gdy pozostaje przylepiony do nierówności. Wyobraźmy sobie teraz, że prędkość naczynia maleje. Po to, by wir mógł oderwać się od nierówności, musimy mu dostarczyć energii  $E$  (rys. 3). Dopóki więc zmiana prędkości naczynia jest mała, tak że przyrost energii wiru jest mniejszy od  $E$ , wir pozostaje przylepiony i ilość wirów się nie zmienia. Moment pędu nadciężcy nie ulega zmianie. Przy dostatecznie dużej zmianie prędkości kątowej naczynia energia wirów wzrośnie o  $E$ . Wiry „odlepią się” gwałtownie i pewna ich ilość zaniknie. Moment pędu nadciężcy zmaleje. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że o taką samą wartość musi wzrosnąć moment pędu naczynia. Powinniśmy więc zaobserwować chwilowy wzrost prędkości jego obrotów. Właśnie poszukiwanie takich nieregularności obrotów jest celem doświadczenia, o którym wspominałam na wstępie. Ponieważ doświadczenie nie jest jeszcze zakończone, muszę ograniczyć się do opisanie układu doświadczalnego (rys. 4). Naczynie z helem należało zawiesić w taki sposób, aby siły zewnętrzne jak najmniej zakłócały jego obrót. Wykorzystaliśmy w tym celu zjawisko unoszenia nadprzewodnika w polu magnetycznym. Naczynie w kształcie walca  $A$  zawierające nadciężki hel oraz gęsto upakowany proszek  $Al_2O_3$  (proszek zwiększa ilość centrów, do których mogą przypinać się wiry, a więc zwiększa efekt, który chcemy zmierzyć) umieszczone jest na wierzchołku wirnika  $R$ . Na powierzchni wirnika i naczynia napyłona jest cienka warstwa ołowiu, który staje się nadprzewodzący już w temperaturze 7,19 K. Wirnik znajduje się w środku cewki 1 wytwarzającej pole magnetyczne. Linie sił pola magnetycznego nie mogą wnikać do wnętrza nadprzewodnika i pole unosi wirnik wraz z naczyniem do góry. Dodatkowe cewki 2 i 3 stabilizują wirnik i naczynie w pozycji pionowej. Na końcu długiej „nogi” wirnika znajduje się pierścień miedziany  $M$ . Zawieszony wokół niego motor składa się z małych cewek nadprzewodzących.

Po nalaniu helu do naczynia i „zatopieniu” urządzenia, również w helu, temperatura całości zostaje obniżona do ok. 1,5 K przez odpompowywanie par helu z nadciężcy. Po przejściu helu w stan nadciężki rozpędzamy wirnik do żądanej prędkości obrotów, a następnie wyłączamy napęd i obserwujemy zanik prędkości kątowej.

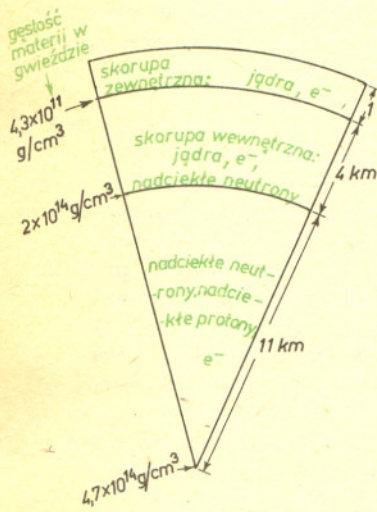
Prędkość obrotów mierzy się metodą optyczną: część pierścienia ( $M$ ) silnie odbija światło, które doprowadza się do wnętrza kriostatu światłowodem. Odbite impulsy, wyprowadzone drugim światłowodem, zliczane są przez komputer.

Czas teraz spojrzeć w niebo. Istnienie gwiazd neutronowych postulowane było już od dość dawna — w roku 1934 astronomowie Baade i Zwicky zasugerowali, że w końcowym etapie ewolucji gwiazd jako jedna z możliwych pozostałości po wybuchu gwiazdy supernowej powstaje kula bardzo gęstej materii złożona z neutronów. W roku 1968 odkryto pulsary, tj. obiekty astronomiczne promieniujące głównie w zakresie fal radiowych. Promieniowanie to odbierane jest na Ziemi w postaci impulsów o dość regularnym okresie, różnym dla różnych pulsarów, średnio około 1 s. Wkrótce wysunięto hipotezę, iż są to bardzo szybko wirujące gwiazdy neutronowe, które wytwarzają silne pole magnetyczne (szacuje się, że na powierzchni gwiazdy panuje pole około  $10^8$  tesli).

Ładunki obu znaków wytwarzane przy powierzchni gwiazdy przyspieszane są w polu magnetycznym w pobliżu biegunów magnetycznych do prędkości bliskich prędkości światła, i w związku z tym wysyłają promieniowanie elektromagnetyczne. Ponieważ oś pola magnetycznego nie musi pokrywać się z osią obrotu gwiazdy, obserwator zewnętrzny rejestruje impulsy, ilekroć stożek promieniowania „zamiecie” jego pole widzenia (rys. 5). Tak więc okres obrotu gwiazdy pokrywa się z okresem impulsów obserwowanym na Ziemi. Ponieważ gwiazda ciągle wypromieniowuje energię, jej okres obrotu rośnie. Najmłodszy pulsar, o okresie obrotu 0,33 s, to pulsar w Mgławicy Krab. Stanowi on pozostałość po wybuchu supernowej, obserwowanej przez astronomów chińskich w roku 1054. Wysyła on nie tylko fale radiowe, ale również promieniowanie w zakresie widzialnym, promienie  $\gamma$  i rentgenowskie. Dokładniejsze obserwacje tego i innych pulsarów (znanych jest już ponad 300) pokazały, że ich obrót nie zmienia się regularnie. Na przykład obserwując promieniowanie pulsara Vela z konstelacji Żagli stwierdzono występowanie gwałtownych wzrostów prędkości obrotów gwiazdy, po których



Rys. 6 Schematyczny wykres zmian prędkości obrotów pulsara;  $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-6}$  dla pulsara Vela i  $\sim 10^{-8}$  dla pulsara Krab.



Rys. 7 Model gwiazdy neutronowej o masie 1,4 masy Słońca

następuje powolny zanik tych zaburzeń (rys. 6). Teoretyczne badania modelu pulsarów dalekie są od zakończenia — zależą bowiem istotnie od stanu teorii oddziaływań cząstek elementarnych. Model gwiazdy, który najlepiej „mieści się” w granicach danych z obserwacji astronomicznych, pokazany jest na rys. 7. Zewnętrzna skorupa gwiazdy składa się z jąder, od  $^{56}\text{Fe}$  do  $^{118}\text{Kr}$ , upakowanych w sieć periodyczną (jak w kryształach) i swobodnych elektronów. We wnętrzu gwiazdy znajduje się nadcięż neutronowa i protonowa. Neutrony i protony są fermionami. Okazuje się, że w pewnym zakresie gęstości tych cząstek występuje między nimi oddziaływanie przyciągające i mogą powstawać pary neutron-neutron i proton-proton. Pary takie, tak jak pary elektronów w nadprzewodniku (pary Coopera) są bozonami. Temperatura gwiazdy wynosi  $10^8\text{K}$ , a energia wiązania par ma wartość równoważną temperaturze  $10^{11}\text{K}$ . Oznacza to, że materia neutronowa znajduje się w temperaturze na tyle niskiej, że zachodzi w niej kondensacja Bosego-Einsteina, podobnie jak w nadciężnym helu. Ponieważ gwiazda obraca się, w nadciężu neutronów istnieją wiry, które przylepiają się do jąder z zewnętrznej skorupy. Prędkość obrotowa gwiazdy wciąż maleje, a więc jak w przypadku naczynia z nadciężnym helum powinniśmy oczekiwać okresowego odrywania się wirów i przyspieszania obrotów gwiazdy. Taki mechanizm powstawania skoków w prędkości obrotów zaproponowali dwa lata temu Alpar, Anderson, Pines i Shaham. Starszy model, tzw. model trzęsienia gwiazdy, opracowany w roku 1969 przez Rudermana, wyjaśniał istnienie nieregularności obrotów okresowym kurczeniem się skorupy gwiazdy. Gdy gwiazda zwalnia swoje obroty, w skorupie mogą powstawać naprężenia. Powodują one okresową zmianę rozmiarów gwiazdy. Jeśli gwiazda zmieni swoje rozmiary, to zmieni się również jej moment bezwładności, co musi prowadzić do zmiany prędkości obrotów.

Obecnie wydaje się, że obydwa mechanizmy chwilowego przyspieszania obrotów gwiazdy są możliwe. Nie należy zapominać także o tym, że gwiazda jest obiektem znacznie bardziej skomplikowanym niż naczynie z helum. Gwiazda jest kulista, więc wiry mają różną gęstość w różnych jej obszarach. Występuje oddziaływanie pomiędzy nadciężem protonów i neutronów (protony i elektrony jako cząstki naładowane muszą obracać się razem z polem magnetycznym gwiazdy, podczas gdy neutrony stanowią stosunkowo swobodną ciecz). Ponadto nadcięż neutronowa ma, zależnie od gęstości, dwie fazy o różnym wypadkowym spinie pary neutronów. Te i szereg innych różnic powodują, że obserwuje się bardzo wiele innych nieregularności obrotów spowodowanych, być może, np. istnieniem warstw turbulentnych w cieczy neutronów bądź też wzbudzeniami fal, np. fal Tkaczenki. Jednak doświadczenie z nadciężnym helum pomoże z pewnością odpowiedzieć na pytanie, czy mechanizm odrywania się wirów jest główną przyczyną skoków w prędkości obrotów gwiazd neutronowych.

## Patrz w niebo

Czytając artykuły zamieszczone w tym numerze *Delty* zauważamy, że pojęcie niskiej temperatury jest względne. Fizycy konstruują aparaty do wytwarzania temperatur rzędu  $0,001\text{ K}$  i uważają substancje w nich oziębione za naprawdę zimne. Astrofizycy badający obłoki międzygwiazdowe zwykli nazywać obiekty o temperaturach ok. 10 tysięcy K ciepłymi, „zimne” oznacza dla nich 2—3 tysiące K. Astrofizycy zajmujący się gwiazdami neutronowymi uważają temperatury rzędu 10 milionów K za charakterystyczne dla obiektów „zimnych”.

Czy w Naturze obserwujemy rzeczywiście bardzo niskie temperatury, powiedzmy  $T < 1\text{ K}$ , skoro wiadomo, że wszystkie obiekty zanurzone są w gazie fotonowym (tzw. promieniowanie reliktywne pochodzące z bardzo wczesnych etapów ewolucji Wszechświata) o temperaturze  $2,7\text{ K}$ ?

Nie obserwujemy takich obiektów, jednak przewidujemy ich istnienie! Są to czarne dziury, grobowce wszelkich form materii, ale za to źródła wielu niespodzianek.

Astrofizycy relatywiści stworzyli dział nauki zwany termodynamiką czarnych dziur. Zgodnie z jej klasycznymi wynikami każda czarna dziura ma temperaturę  $0\text{ K}$  (bo żaden foton nie może opuścić jej powierzchni). Obiekty te różnią się jedynie masą, momentem pędu i ewentualnie ładunkiem elektrycznym (który jednak szybko się „neutralizuje”).

Uwzględnienie efektów kwantowych, a w szczególności tzw. wirtualnych rozpadów cząstek w pobliżu horyzontu zdarzeń („powierzchni”) czarnych dziur, pozwala na stwierdzenie, że różnią się one również temperaturami. Część produktów rozpadu jest pożerana przez czarną dziurę, jednak pozostała część ucieka i oddziałując ze sobą emituje fotony, które mają taki rozkład, jakby były wytwarzane przez ciało doskonale czarne (takie ciało, które promieniuje zgodnie z rozkładem Plancka) o bardzo

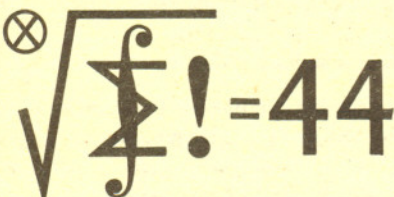
$$\text{niskich temperaturach (T): } T = \frac{hc^3}{16\pi^2 GMk}$$

gdzie  $h$  — stała Plancka,  $c$  — prędkość światła,  $G$  — stała grawitacji,  $M$  — masa czarnej dziury,  $k$  — stała Boltzmanna.

Łatwo podstawić wartości liczbowe stałych i uzyskać zależność  $T \approx 4,13 \cdot 10^{25}\text{ K/M}$  (masa w gramach). Jeśli teraz podstawimy masę Słońca, uzyskamy  $T = 2 \cdot 10^{-8}\text{ K}$ , temperaturę 2 tysiące razy mniejszą od najniższych temperatur uzyskiwanych sztucznie na Ziemi!

Czarne dziury mają masy rzędu kilku mas Słońca, możliwe że istnieją też dziury o masach miliardów mas Słońca, ale również o masach miliardy miliardów mniejszych niż masa Słońca (mini czarne dziury lub czarne dziury Hawkinga, który pierwszy przedstawił hipotezę o ich istnieniu; ten sam astronom również pierwszy poddał myśl o temperaturze jako parametrze odróżniającym czarne dziury).

dr Tomasz CHLEBOWSKI



Klub 44

W tym numerze  
nie podajemy czołówek ligowej.  
W numerze 1/1984  
będzie natomiast  
dłuższa tabela ligowa.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

### Zadania nr 70, 71, 72

Termin nadsyłania rozwiązań: 29.02.1984

70. Dane są trzy ciągi skończone liczb rzeczywistych  $(a_i), (b_i), (c_i), i = 1, \dots, n$ , takie, że  $a_1 < \dots < a_n, b_1 < \dots < b_n$ , a ciąg  $(c_i)$  jest nieidentycznościową permutacją ciągu  $(b_i)$ . Dowieść, że  $\sum_{i=1}^n a_i b_i > \sum_{i=1}^n a_i c_i$ .

71. Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w koło. Udowodnić, że środki kół wpisanych w trójkąty  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$  są wierzchołkami pewnego prostokąta.

72. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 3$  znaleźć rozkład liczby 1 na sumę  $n$  odwrotności różnych liczb naturalnych.

Zadanie 72 przysłał nasz Czytelnik, pan Włodzimierz Szymczyk z Zielonki koło Warszawy.

### Rozwiązania zadań z numeru 8/1983

Przypominamy treść zadań:

58. Który wyraz szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  jest — przy ustalonym  $x > 0$  — największy?

59. Jakim trójkątem  $ABC$  przysługuje własność następująca: dla każdego punktu  $P$  leżącego wewnątrz trójkąta można z odcinków  $AP, BP, CP$  zbudować trójkąt?

60. Jaka jest maksymalna liczba sposobów, na które liczba naturalna może być przedstawiona jako suma czterech swoich różnych dzielników?

58. Oznaczmy  $n$ -ty wyraz rozpatrywanego szeregu przez  $z_n$ . Ponieważ  $z_n/z_{n-1} = x/n$ , zachodzą implikacje:

$$n < x \Rightarrow z_{n-1} < z_n, \quad n > x \Rightarrow z_{n-1} > z_n.$$

Niech  $m = [x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ . Jeśli więc  $x > m$  (tzn.  $x$  nie jest liczbą całkowitą), to  $z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1} < z_m > z_{m+1} > z_{m+2} > \dots$ , czyli największym wyrazem jest  $z_m$ . Jeśli natomiast  $x = m$ , to wówczas  $z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1} = z_m > z_{m+1} > z_{m+2} \dots$ , czyli poszukiwane maksimum jest realizowane przez wyrazy o numerach  $m$  i  $m-1$ .

59. Omawiana własność przysługuje jedynie trójkątom równobocznym. Istotnie: wykonajmy obrót płaszczyzny o  $60^\circ$  wokół wierzchołka  $C$  trójkąta równobocznego  $ABC$  tak, by punkt  $A$  przeszedł na punkt  $B$ ; oznaczając przez  $Q$  obraz punktu  $P$  otrzymujemy trójkąt  $PQB$ , którego boki  $QB, BP, PQ$  są równe odcinkom  $AP, BP, CP$ . W trójkącie nierównobocznym  $ABC$ , w którym np.  $AC < BC$ , wystarczy wybrać punkt  $P$  dostatecznie blisko wierzchołka  $C$ , by dostać nierówność  $BP > AP + CP$ , uniemożliwiającą zbudowanie trójkąta z tych trzech odcinków.

60. Rozkład liczby naturalnej na sumę czterech jej różnych dzielników indukuje rozkład liczby 1 na sumę czterech odwrotności różnych liczb naturalnych:

$$1 = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad k < l < m < n.$$

$k$  musi się równać 2 (w przeciwnym razie napisana suma byłaby nie większa od  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$ ).  $l$  może być równe jedynie 3, 4 lub 5 (bo gdy  $l \geq 6$ , rozważana suma jest nie większa od  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{157}{168}$ ). Przy  $l$  równym odpowiednio 3, 4, 5 dostajemy

analogicznie oszacowania:  $m \leq 11, m \leq 7, m \leq 6$ . Analizując poszczególne możliwości stwierdzamy, że badane równanie spełniają następujące czwórki liczb  $(k, l, m, n)$ :

$(2, 3, 7, 42), (2, 3, 8, 24), (2, 3, 9, 18), (2, 3, 10, 15), (2, 4, 5, 20), (2, 4, 6, 12)$ .

Zatem dowolna liczba naturalna  $N$  może być zapisana jako suma czterech różnych dzielników na nie więcej niż sześć sposobów. Najmniejsza liczba  $N$  mająca sześć takich przedstawień — to najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich otrzymanych mianowników  $k, l, m, n$ :

$$N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$



# Opowieść wigilijna

Usiądźcie, Czytelnicy, szarą grudniową godziną przy kominku i posłuchajcie

## Jak trzy wektory wyznacznik do zera przyrównały

Za siedmioma przestrzeniami, za siedzioma podprzestrzeniami dana była pewna unormowana, dobrze uporządkowana rodzina wektorów  $w_1, w_2, w_3, \dots$ . Nie były one przynależne do żadnej wartości własnej, a mimo to rodzina żyła zgodnie i szczęśliwie. Nie mieli żadnych kłopotów, prócz jednego: jak zarobić na życie. Od okresu do okresu, od  $-\pi$  do  $+\pi$  pracowali w pocie czoła w bazie wielowymiarowego Sympleksu — wyzyskiwacza, darmozjada i homotopijcy, który całe swoje życie przeżył według zasady najmniejszego działania. I ruszyli się wektorowi bracia, striangulowali Sympleks, zrobili z niego Kompleks, ale doli swej nie polepszyli. Wyczynia on z nimi swoje homologiczne sztuczki: a to na brzeg wyrzuci, a to obszar określoności do punktu ściągnie ...

— Niedobrze żyć z takim Kompleksem — doszli do wniosku bracia. Nie ma na niego żadnych ograniczeń. I umyślili trzej najstarsi bracia:  $w_1, w_2$  i  $w_3$  wyruszyć w świat, obejść wszystkie przestrzenie i wszystkie podprzestrzenie, wszystkie powierzchnie i rozmaitości i znaleźć dogodny i prawy układ współrzędnych. Pokłonili się po raz ostatni starej Macierzy, podjęli ją za kolumny, a potem wyszli na czysto potencjalne pole i ruszyli ze skokiem  $\frac{h}{2}$  dokąd czy poniosą.  $\pi$  idą,  $2\pi$  idą,  $3\pi$  idą,

a potencjał wokół nich maleje i maleje. Popatrzyli bracia, a tu przed nimi na gładziutkiej płaszczyźnie zespolonej bieleje potok stabilny. Nie zwyczajny to potok, bo w podkowę Smale'a się zawijający.

— Ech, połović by rybki — westchnął  $w_1$ .

— A czemuż by nie? — zgodzili się bracia. Z punktu brzegowego zarzucili swą sieć epsilonową, którą już dziad ich dziada w nieośrodkowych oceanach domykał. A trzeba wam wiedzieć, że drzewiej nie takie epsilon jako dziś bywały. Patrzają bracia: w sieci ryba-sigma się trzepocze, ludzkim głosem przemawia:

— Nie gubcie mnie, mili moi, wypuście mnie do wody, a jeszcze się wam za to odwdzięczę.

Wypuścili ją bracia na wolność, a sami dalej poszli. Uszli trochę, więcej niż 0, mniej niż  $\infty$ , patrzą: przy drodze mały parametr stoi, z głodu płacze. Uliłowali się nad nim bracia, nakarmili. Zaczął rosnąć parametr, a gdy osiągnął lokalne maksimum, pokłonił się braciom w pas i powiada: „Pamiętajcie o mnie, a ja jeszcze mogę się wam przydać”. I przepadł tak, jakby go w ogóle nie było.

Pociemniało nagle niebo, słońce schowało się za czarną chmurę. Zawirowały w powietrzu liście Kartezjusza, zakręciły się turbulენტne wiry, na polach wektorowych zakolysały się snopy koherentne, zdźbła z nich wiązki lecą. Ogniste błyskawice rozdarły niebieską sferę Riemanna. Obejrzeni się bracia, szukają schronienia. Patrzą: przy drodze stoi chatka na kurzej łapce.

— Chatko, chatko, odwróć się do nas plusem, do lasu minusem! — Zakolysała się chatynka, zakręciła. Weszli bracia do środka i dusza im się raduje. Stoi na środku izby stół i ugina się od jadła. Podjedli bracia, pytają: „Jest tu kto? Odezwij się, w imię Boże”. Patrzą, a zza pieca wychodzi kudłaty stwór: ni to wektor, ni to skalar, szczeciną pokryty, zakuty w łańcuchy.

— Witajcie, mileńcy moi. Jestem dobrym czarodziejem, a nazywam się Ko-Szi Mak-Loren. Już pół życia tu siedzę pod strażą okrutnej Nabli-Jagi, bo nie stosowałem się do jej zasady nieoznaczoności ...

Nie zdążył dokończyć, bo oto zaświszczało i zaszumiało coś za chatką. „Uciekajmy”, wykrzyknął Ko-Szi Mak-Loren. Rozkuli go bracia i biegną wszyscy ile sił w nogach. Obejrzeni się za siebie i widzą: leci po niebie przepiękna Delta. Uderzyła Delta o ziemię, stanęła na głowie i zmieniła się w straszną Nablę-Jagę. „Czuję, czuję, wektorami tu pachnie”.

Ale wektorów i Ko-Szi Mak-Lorena już ani śladu.

Wyprowadził Ko-Szi braci na geodezyjną, pokazał drogę do Dziwogrodu (który będziemy oznaczać przez Divgrad), a sam poszedł swoją drogą. Poszli bracia po linii geodezyjnej, a przed nimi rosły mury Divgradu, podobnie jak rośnie wykres tangensa przy argumentie dążącym do  $\pi/2$ . A rozbiegały się z nich promienie złociste, tak, jak rozbieżne są sumy częściowe szeregu harmonicznego. Zaszli bracia do otwartej (a nie domkniętej) gospody „Pod Pierwiastkiem”, pogadali z karczmarką, grubą Tyldą, a ona opowiedziała im o wielkim nieszczęściu, jakie nawodziło ich gród. Książę Divgradu, wielki Tensor Holomorficzny X, dobry, kowariantny pan, wyprawił Bal Niezmienniczy z okazji 16 rocznicy urodzin swej córki, pięknej Rezolwenty. Takiego balu jeszcze nie było w jego obszarze holomorficzności. Przyjechał na bal sam książę d'Y ..., w samosprężonej kolasce przybył graf Sinus ze swoją Sinusoidą. Wielowymiarowa muzyka delikatnie unosiła się po salach balowych, przy hiperbolicznych stolikach starsi grali w quasipreferans, w łóżach młodzi oddawali się całkowaniu po  $dt$ . Strojna w liberie służba na każde skinienie różniczkowała gościom jadło i napitki. Przygasło nagle światło, po ścianach zatańczyły figury Lissajous, wyptłoszyli się goście. A gdy znów rozbłysło światło, spostrzeżono, że Rezolwenty-krasawicy ani śladu. Metodą sprowadzenia do niedorzeczności wykazano, że porwał ją zły czarownik Vandermonde. Dostał on się na bal naruszając warunki holomorficzności Cauchy-Riemanna i wykonując zrzeczne podstawienie w szeregach straży.

Mocno wryła się braciom w duszę opowieść Tyldy. I postanowili zmierzyć się ze strasznym Vandermondem i wyzwolić z jego rąk nadobną Rezolwentę. Przez szereg dni i nocy przygotowywali się do wyprawy, wreszcie powrózyli sobie z hodografu i ruszyli w drogę.

Bajka przedzie się wartko, lecz rzecz wolniej się toczy. Nietławie warunki brzegowe zagradzały braciom drogę do sąsiedniego obszaru, najeżonego pseudowektorami, w którym panowała klasowa nierówność Schwarza. Ale po obwieśni dostali się bracia do punktu rozgałęzienia, w którym tablica stoi: „Na lewo pójdziesz — współrzędne pogubisz, na prawo pójdziesz — nieskończoność zobaczysz, prosto pójdziesz — przetransponujesz się”. Zmartwili się bracia. „Co robić?”, nie wiedzą. Nagle jak spod ziemi wyrasta przed nimi dobry znajomy Ko-Szi Mak-Loren.

— Znam, znam wasze zmartwienia, bracia moi. Trudna to rzecz pokonać Vandermonde'a. Jego śmierć wyznacza wyznacznik. A wyznacznik ten leży w dodekaedrze, dwie macierze w bok od cyklu Hamiltona. A dodekaedr leży w ikosaedrze. A ikosaedr jest ściśle związany z zeramii funkcji meromorficznej: pierwszy węzeł zwyczajny, drugi nie ściałalny, trzeci — logarytmiczny. A funkcja ta ma osobliwość w biegunie i dostać się tam — trudna sprawa. Leży on za  $2+3i$  górami,  $3-2i$  lasami, w zespolonej przestrzeni złego chara Banacha. A przy biegunie siedzi stwór-potwór o przestępnej liczbie zębów, wołają na niego Dekrement. A z drugiej strony siedzi pies Funktor, sobaka złowroga, sierść na nim jak na jeżu z  $m$  kolcami, ogon zwija się

jak w lemacie o wężu, funktorów pochodnych nie ma, bo nieaddytywna bestia. Taki to wyznacznik trzeba dostać i przyrównać do zera.

Znów wskazał im Ko-Szi drogę i poszli nią bracia, aż doszli do brzegu niepustego obszaru, wypełnionego cieczą nieściśliwą. Patrzą, myślą, co robić, nie wiedzą. Nagle wychyliła pyszczek z cieczy sigma-ryba, ludzkim głosem przemówiła:

— Teraz ja się wam przydam.

Przewiozła ich na drugi brzeg i wskazała dalszą drogę.

Nie zdążyli bracia przejść nawet 2 okresów, kiedy zagroziła im drogę nieciągłość pierwszego rodzaju. Ale któż to przed nimi skacze? Mały parametr!

— Wyście mi pomogli, a teraz ja wam pomogę — powiada.

Uderzył o ziemię, rozwinął się w szereg, zwiększył stopnie przy kolejnych wyrazach, potem raz jeszcze i jeszcze raz i przeszli bracia  $C^k$  — gładko na drugą stronę.

— A teraz idźcie po śladach operatorów prosto do bieguna — mówi.

Znaleźli  $w_1$ ,  $w_2$  i  $w_3$  ślady — patrzą, a rozchodzą się one na trzy strony świata. Poszli bracia każdy w swoją stronę. Szedł  $w_1$ , szedł, a tu jak spod ziemi wyrosły przed nim nieprzeliczalne hordy chana Banacha, wszyscy (poza być może skończoną ilością), w formie jordanowskiej, ostrzyżeni równo niczym pod nawias Poissona.

— Ech, nie ujrę ja już swoich braci — wektorów — pomyślał  $w_1$  i rzucił się na wrogów. Ale oto już bracia nadbiegli. Pokonali

złego czarnoksiężnika. Psu Funktorowi rzucili padlinę. Połknął Funktor jeden kęs, drugiego nie może, bo nieaddytywny. Udławiła się bestia i zdechła. A tu zatrzęsła się ziemia, wpadła w rezonans i rozpekła się góra. Wyłazi ohydny stwór-potwór Dekrement. Nie stracili głowy bracia. Ze sznurków i lin skonstruowali za pomocą cyrkla i linijki 17-kąt foremny. Narzucili bestii na łeb, zaciągnęli. Zaplątał się potwór, przewrócił się na bok i wyzionął ducha.

Znaleźli bracia licznik i mianownik funkcji meromorficznej, wyznaczyli pierwiastki, strywializowali węzły, dobrali się do ikosaedru, wydostali dodekaedr, pobiegli po cyklu Hamiltona, otrzymali wyznacznik — i przyrównali go do zera.

Tak oto przyszedł koniec na Vandermonde'a. A przed braćmi pojawiła się Rezolwenta, cała i zdrowa,

*co było do okazania.*

**Uwaga 1.** Bajka napisana jest dla przypadku  $n_0 = 3$ .

Posługując się metodą indukcji zupełnej Czytelnik bez trudu uogólni ją na przypadek dowolnego  $n \geq 3$ .

**Uwaga 2.** W ogólnym przypadku w drugą stronę bajka nie pójdzie.

*Autor: ?*

**Uwaga redaktora:** powyższy tekst jest tłumaczeniem z rosyjskiego (też najwyraźniej przekładu). W swoich starych notatkach nie znalazłem ani nazwiska autora, ani źródła tej bajki. Może ktoś z Czytelników pomoże to ustalić?

*M. Sz.*



**Rozwiązanie zadania M 349.** Niech  $K, L, M$  będą punktami styczności sfery ze ścianami zawierającymi  $A$ . Trójkąty prostokątne  $AKO, ALO$  i  $AMO$  mają wspólny bok  $AO$  i równe promieniowi sfery boki  $KO, LO$  i  $MO$ . Są więc one przystające i ich wysokości poprowadzone z  $K, L, M$  mają wspólny spodek  $S$  leżący wewnątrz  $AO$ . Wynika stąd, że płaszczyzna  $KLM$  przechodzi przez  $S$ , oraz że punkty  $A$  i  $O$  leżą po jej przeciwnych stronach. Powtarzając to rozumowanie dla wierzchołków  $B, C, D$  przekonamy się, że  $O$  leży za każdym razem w półprzestrzeni wyznaczonej przez płaszczyznę przechodzącą przez odpowiednie punkty styczności i nie zawierającej danego wierzchołka. Przecięciem tych półprzestrzeni jest czworościan  $KLMN$  i  $O$  leży wewnątrz tego czworościanu.

## Co by było, gdyby...

Matematyka tym różni się od (pozostałych) nauk przyrodniczych, że wyboru aksjomatów dokonuje się dość dowolnie, a następnie buduje się teorię matematyczną tak, żeby wszystkie konsekwencje i wnioski były zgodne z wybranymi aksjomatami. W naukach przyrodniczych aksjomatami są znane prawa przyrody. Do tego zbioru imponderabiliów niektórzy dodają pewne zasady filozoficzne (nie należące do klasy udowodnionych praw przyrody) oraz czasem pewne hipotezy, których prawdziwości nie można obecnie udowodnić ani obalić.

Chcielibyśmy zaproponować Czytelnikom zabawę — konkurs w opisywanie hipotetycznych światów, w których prawdziwe są inne prawa fizyki niż te znane w naszym Wszechświecie. Na przykład: co by było, gdyby:

- ładunek elektronu równał się połowie ładunku protonu, albo
- masa bezwładna nie była równa masie ciężkiej, albo
- prędkość światła zależała od jego częstości, np.  $c \sim \sqrt{\nu}$ , albo
- życie było oparte na krzemie, albo
- współczynnik załamania powietrza wynosił  $n = 2$ , itd.

Nie chcemy ograniczać Czytelników w doborze założeń. Rozwinięcie powyżej wymienionych przykładowych aksjomatów nie będzie preferowane w stosunku do innych. Forma opisu świata jest dowolna, może to być rozprawa, esej (byle nie za długi!), komiks itd. Najciekawsze, naszym zdaniem, odpowiedzi opublikujemy w *Delcie*, na ich autorów czekają nagrody. Czekamy na Wasze prace do dnia 1 kwietnia 1984 roku.

*Redakcja*