

hp6.63.10.7s W3.1433



Dnia 12 września 1983 roku

zmarł

Profesor ROMAN SIKORSKI

wybitny matematyk

członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk

wieloletni prezes

Polskiego Towarzystwa Matematycznego

twórca "Delta"

i jej Autor

# SPIS TREŚCI

## NUMERU 11(119)

O Profesorze Danyszu str. 1

Czy umiemy obliczać pierwiastek kwadratowy?  
*Jerzy Geresz* str. 4

Zadania str. 6

Mizar — MSE str. 7

Spektroskopia elektronów Augera  
*dr Irena Szymerska* str. 8

Patrz w niebo str. 11

Czy każda podróż do Wenecji kończy się w Wenecji?  
*mgr Piotr Chrzastowski* str. 12

Czworościan i sfery  
*dr Jerzy Bednarczuk* str. 14

Jeśli Słońce zmniejszy do rozmiarów grochu  
*dr Tomasz Chlebowski* str. 16

Klub 44 str. 17

**W następnym numerze:**  
Kriogenika

### Nasza okładka:

**Mgławica Dumbbell (M27)** — jedna z najbliższych znanych mgławic planetarnych. W samym środku widoczna jest jasna, gorąca, niebieskawa gwiazda będąca najprawdopodobniej źródłem odrzuconej otoczki. Mgławica ta rozszerza się z prędkością 68 sekund łuku na tysiąclecie.

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmökł  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Pańczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
prof. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
doc. dr Kazimierz Stepień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wolska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 4908/83 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.  
2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.  
3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.  
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550



Przez duży pokój przeciągnięty jest łańcuch utworzony z biurowych spinaczy. Na tym łańcuchu wisi kilkanaście kilkustronicowych plików pokreślonych maszynopisów oznaczonych kolejnymi numerami. Nowo przyjęty właśnie do pracy fizyk objawia lekkie zdumienie: co to wszystko oznacza? Starsi koledzy wyjaśniają mu to jako rzecz oczywistą: są to kolejne wersje pracy o hiperonie lambda. Wszystkie tu zawieszono zostały z takich lub innych powodów odrzucone przez Profesora. Tak zetknąłem się po raz pierwszy ze stylem pracy i krytycyzmem naukowym Mariana Danysza.

Profesor Marian Danysz zmarł 9 lutego 1983 r. Fizyka polska poniosła wraz ze śmiercią Profesora wielką stratę. O jego niezwykle bogatym dorobku naukowym piszą czasopisma specjalistyczne polskie i zagraniczne starając się w ten sposób uczcić jego wkład do nauki światowej. W tym miejscu chciałbym przybliżyć Czytelnikom *Delty* postać Profesora Danysza jako człowieka, jako twórcy szkoły fizycznej, jako przełożonego.

Pisanie o ludziach, którzy odeszli od nas na zawsze, przypomina nieco działalność hagiograficzną. Człowiek i jego czyny są podświadomie idealizowane, wady pomniejszane, a cała sylwetka nabiera idealnych znamion. Nie chcę iść tą drogą. Opowiem kilka, w gruncie rzeczy błahych epizodów, które choć trochę może przybliżą i urealnią postać tego wielkiego uczonego.

Podstawowe dane biograficzne można znaleźć w Wielkiej Encyklopedii Powszechnej PWN. Nie ma w niej natomiast informacji, że był on jednym z twórców i organizatorów polskiej szkoły fizyki cząstek elementarnych, że umiał skupiać wokół siebie i nadawać kierunek działalności młodym zapalonym fizykom.

Pamiętam, że w roku 1961 w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnej mówił do nas: „Wy macie się uczyć i pracować — ja będę Wam stwarzał do tego warunki”. Tę obietnicę starał się wypełnić jak najsumienniejsze.

Jest wczesne popołudnie. Siedzimy w laboratorium w Instytucie Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego i robimy ręcznie histogramy mas układów cząstek. Praca to nużąca i niezbyt ciekawa. Jesteśmy znudzeni i zdenerwowani, bo ciągle nic nie wychodzi. Nagle otwierają się niedomknięte drzwi i wpada Tawi (spaniel Profesora). Oho! Idzie Marian (był z nami po imieniu pomimo znacznej różnicy wieku). Nadlatujący dym cygara potwierdza tę hipotezę. Za chwilę wtacza się Profesor (był masywnie zbudowany) ze swoim stałym pytaniem „No i co u was słychać?”. A u nas, jak na złość, nic nie słychać — szukamy nowych cząstek, ale szukamy po omacku. A Ten jeszcze się dopytuje i pewnie da jakąś radę, i to, co gorsza, rozsądną.

Ktoś nie wytrzymał i odpowiedział niezbyt grzecznie — wręcz wulgarnie — coś w tym rodzaju: „odczep się, daj nam spokój”. Zreflektowaliśmy się — zapadła cisza. Bądź co bądź odpowiedzieliśmy tak nie tylko starszemu koledze profesorowi, ale również szefowi, dyrektorowi Instytutu Badań Jądrowych, krótko mówiąc, dygnitarzowi świata nauki. Zapadła więc cisza, Marian pokręcił się, uśmiechnął się pod nosem, ale czy był to krzywy uśmiech, czy nie, tośmy nie wiedzieli i wyszedł z pokoju bez słowa. Tawi i dym z cygara poszli za nim. U nas dalej panuje cisza — zawzięcie pracujemy. Mija kilka minut. Wchodzi ponownie Marian, „wiecie co” — mówi — „musicie być bardzo zmęczeni, jest śliczna pogoda, mam samochód, jedźmy nad Zalew Zegrzyński odpocząć”. Pojechaliliśmy — praca w następne dni szła nam znacznie łatwiej.

Marian lubił pływać. Miał jakieś dolegliwości kręgosłupa i pływanie było mu nawet zalecane. We wszystkim co robił wykazywał niezwykle upór w dążeniu do celu i zmuszał swoich współpracowników do wysiłku. Czasem wyglądało to tak: byliśmy razem w kilka namiotów nad jeziorem Serwy w Puszczy Augustowskiej. Marian postanowił łowić ryby o 4 rano. My nie. O świcie budzą mnie przytłumione głosy z sąsiedniego namiotu. Głosy te opryskliwie odmawiają natychmiastowego wyjścia ze śpiwora i nurkowania w jeziorze w poszukiwaniu czegoś tam zerwanego. Koleżanki śpiące w tym namiocie wybroniły się, mnie poszło gorzej i wkrótce rad nierad znalazłem się w wodzie.





W dziedzinie nauki postawione cele były realizowane z takim samym uporem i konsekwencją. Wspólna praca nocami — bo dzień był zajęty administracją — nie była wcale wyjątkiem. Swoich współpracowników pomimo sugerowania im (a nie narzucania) intensywnej pracy traktował jak wielką rodzinę i cieszył się robiąc nam miłe niespodzianki.

Przywiózł kiedyś z Moskwy ze sklepu z dziczyzną kilka kilogramów mrożonego mięsa niedźwiedziego. Zaprosił nas wtedy na kolację, której menu kojarzyło się z indiańskimi ucztami u Karola Maya.

Nie befsztyki z niedźwiedzia i ranne nurkowanie pozwoliły mu uzyskać liczące się wyniki naukowe. Na pierwszym miejscu postawiłbym nieprzeciętną intuicję fizyczną. Profesor Danysz nigdy nie kończył studiów fizycznych, był z wykształcenia inżynierem elektrykiem, a swój poziom naukowy zawdzięczał własnej pracy nad sobą. Czasami brakowało mu przygotowania matematycznego, ale mimo to, a może właśnie dlatego dążył do zrozumienia fizycznego każdego zagadnienia i nie zadowalało go tylko wyprowadzenie wzorów. Pozwalało mu to wyłapywać w pracach takie nieścisłości czy wręcz błędy, których inni w ogóle nie zauważali. Stąd właśnie legendarne już dziś siedemnaście wersji pracy, w której wyznaczano masę hiperonu lambda.

Profesora Mariana Danysza nie fascynowały wzory — szukał głębszego sensu zjawisk fizycznych. Pasjonował go dialog z przyrodą.

Usiłowałem namówić go kiedyś na napisanie artykułu do *Delty* na temat swojej największej przygody w fizyce. Odmówił. Nie lubił sam pisać. Był za to świetnym gawędziarzem. Wybrałem się więc do niego z magnetofonem i tak powstał artykuł „Przygoda w fizyce”, który zamieściliśmy w styczniowym numerze *Delty* z 1975 roku. Sądzę, że warto go przypomnieć.

*Tomasz HOFMOKL*

## Przygoda w fizyce

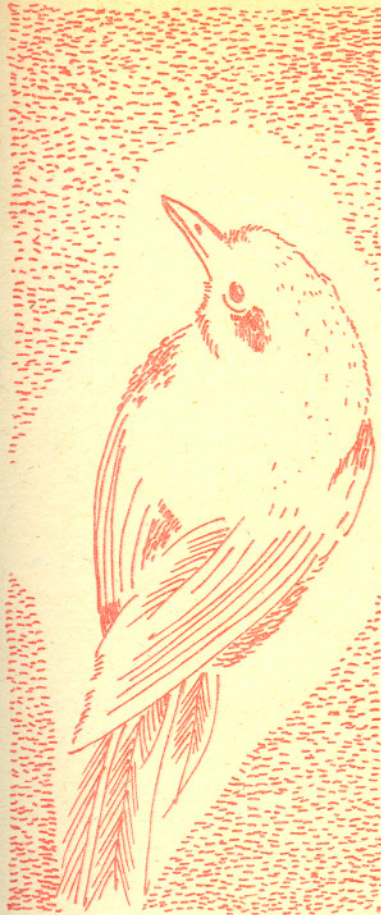
*Prof. Marian DANYSZ, członek rzeczywisty PAN*

Ludwik Wertenstein (ur. 16 IV 1887, zm. 18 I 1945) studiował w Paryżu, był asystentem Marii Skłodowskiej-Curie. W jej zastępstwie kierował Pracownią Radiologiczną Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

Z górą chyba czterdzieści lat temu byłem zatrudniony w Pracowni Radiologicznej w Warszawie, kierowanej przez profesora Ludwika Wertensteina. Głównym wyposażeniem pracowni był właściwie dar Marii Skłodowskiej-Curie w postaci 60 mg radu. Rad ten stanowił źródło wszystkich aktywności, z którymi pracowano w laboratorium. Lata trzydzieste, kiedy pracowałem w laboratorium, były okresem bardzo ciekawym. Wtedy właśnie odkryto neutron, pozyton, a Fryderyk Joliot-Curie odkrył promieniotwórczość wzbudzoną przez naświetlanie rozmaitych materiałów cząstkami  $\alpha$ . Pamiętam, że kiedyś zwróciłem się do prof. Wertensteina mówiąc z pewnym żalem: „Panie Profesorze, to właściwie wszystko wiemy. Wiemy, że cały świat nas otaczający składa się z atomów, atomy z jąder, dookoła których krążą elektrony, jądra z protonów i neutronów. Właściwie to pozostały nam detale”. Wertenstein uśmiechnął się, poklepał mnie po ramieniu i powiedział: „Nie bój się, starczy jeszcze dla Was”. W kilka miesięcy po odkryciu przez Joliot promieniotwórczości wzbudzonej naświetlaniem cząstkami  $\alpha$  pracowałem z Michałem Żywym używając małego źródelka cząstek alfa. Przygotowaliśmy je zresztą sami w aparaturze szklanej, w której znajdowało się w roztworze wodnym te 60 mg radu w postaci chlorku radu. Wyciągaliśmy z niego roztworu emanację radu, oczyszczaliśmy ją i kondensowaliśmy w małej szklanej rurce, w której końcu wtopiona była płytka platynowa. Po jakimś dniu, dwóch dniach pozostawiania płytki w atmosferze radonu powierzchnia jej była aktywowana produktami jego rozpadu. Po usunięciu radonu, odcięciu rurki, wyjęciu płytki i umieszczeniu jej w odpowiedniej osłonie naprzeciwko cienkiego okienka, które przepuszczało cząstki alfa i zatrzymywało jądra odskoku, mieliśmy źródelko cząstek alfa.







Otóż naświetlając różne tarcze cząstkami alfa stwierdziliśmy bardzo dziwny efekt, którego nie rozumieliśmy. Niezależnie od tego, co naświetlaliśmy, materiał stawał się radioaktywny. Z absorpcji wynikało, że w wyniku rozpadu emitowane są elektrony. Co zaś było najbardziej uderzające — to, że czas połowicznego zaniku niezależnie od materiału naświetlanego był zawsze ten sam, około jednej minuty. Wertenstein nawet sugerował, że może dzieje się coś z cząstką alfa. Otóż kiedyś wieczorem zastanawialiśmy się nad tym i doszliśmy do przekonania, że jeszcze jeden czynnik jest wspólny we wszystkich tych eksperymentach, mianowicie atmosfera powietrza. Myśmy naświetlali w powietrzu — może był to wynik oddziaływania cząstek alfa z jądrami składników powietrza?

No i zaczęliśmy zadawać pytania. Naświetliliśmy tarczę w próżni — efekt zagał. No dobrze, efekt zależy od powietrza. Naświetliliśmy w atmosferze tlenu — efektu nie było. Po naświetleniu w atmosferze azotu efekt pojawił się. Wiedzieliśmy wobec tego, że jest to oddziaływanie alfa-azot. W tym czasie wiedzieliśmy również, że bombardowane cząstkami alfa substancje zawierające azot stają się źródłem neutronów. Można wobec tego było przypuszczać, że mamy tutaj do czynienia z procesem  $\frac{4}{2}\alpha + \frac{14}{7}\text{N} \rightarrow \frac{17}{9}\text{F} + n$ . Byłby to fluor, ale trwałe fluor ma w jądrze dziewiętnaście nukleonów  $\frac{19}{9}\text{F}$  — wobec tego byłby to fluor z niedomiarem neutronów. Jeżeli jest niedomiarek neutronów, to jest to prawdopodobnie jądro nietrwałe. Jeżeli jądro jest nietrwałe, to prawdopodobnie jeden z protonów przechodzi w neutron, wobec czego fluor zamienia się w trwałe tlen  $\frac{17}{8}\text{O}$ . Powinniśmy obserwować aktywność  $\beta^+$ , a więc emisję dodatnio naładowanych cząstek.

Wzięliśmy wobec tego nasze naświetlone płytki, licznik Geigera (sami go zresztą zrobiliśmy) i umieściliśmy w polu magnetycznym w taki sposób, że przy określonym kierunku pola magnetycznego licznik faworyzował detekcję cząstek ujemnych; przy zmianie pola faworyzowana była detekcja cząstek dodatnich. Pomiary wykazały, że mamy do czynienia z emisją cząstek naładowanych dodatnio. Mieliśmy rację: dziwny efekt powodowało oddziaływanie cząstek alfa z azotem w powietrzu.

Nasze doświadczenia skończyliśmy koło dziewiątej rano, to znaczy spędziliśmy w laboratorium całą noc. Pamiętam, że kiedy wychodziłem z rana z pracowni, byłem pod niesłychanie silnym wrażeniem możliwości takiego dialogu z przyrodą, zadawania pytań, uzyskiwania odpowiedzi i tego, że w ciągu jednej nocy można było rozwiązać zagadnienie, potwierdzić lub odrzucić taką czy inną hipotezę.

Gdy patrzę wstecz na swoje przeżycia z różnych czasów, jeżeli chodzi o pracę doświadczalną, to muszę przyznać, że to była chyba najfantastyczniejsza przygoda, jaka mnie spotkała.

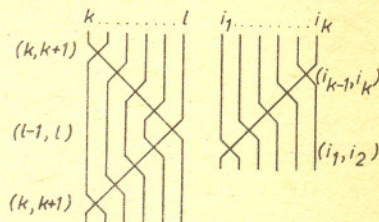


#### Rozwiązanie zadania M346.

Zauważmy, że jeżeli  $(k, l)$  jest dowolną transpozycją i  $k < l$ , to  $(k, l) = (k, k+1) \circ (k+1, k+2) \circ \dots \circ (l-1, l) \circ (l-2, l-1) \circ \dots \circ (k, k+1)$  (rys. 1). Jeżeli teraz  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  jest permutacją przedstawiającą cyklicznie elementy  $i_1, \dots, i_k$  ( $p(i_1) = i_2, p(i_2) = i_3, \dots, p(i_{k-1}) = i_k, p(i_k) = i_1$ ), to  $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \dots \circ (i_{k-1}, i_k)$ .

Podstawiając teraz w miejsce transpozycji  $(i_j, i_{j+1})$  otrzymane powyżej wyrażenia ich przez złożenia naszych transpozycji  $(i, i+1)$  otrzymamy szukane wyrażenia dla cyklu  $(i_1, \dots, i_k)$ . Zauważmy, że  $(k, l) = (l, k)$ . Pozostaje teraz skorzystać ze znanego twierdzenia mówiącego, że każdą permutację da się rozłożyć na cykle rozłączne, tzn. dla każdej permutacji  $p$  istnieje rozkład zbioru  $\{1, \dots, n\}$  na rozłączną sumę podzbiorów  $A_1, \dots, A_k$  takich, że  $p(A_i) = A_i$  i  $p$  permutuje cyklicznie elementy  $A_i$ .

(Ciąg  $i_1 = 1, i_2 = p(i_1), i_3 = p(i_2), \dots$  musi być okresowy i jego okres daje cykl  $A_1$ . Jeżeli nie wyczerpaliśmy wszystkich elementów zbioru  $\{1, \dots, n\}$ , rozpoczynamy następny cykl od dowolnego elementu spoza  $A_1$  i kontynuujemy tę operację do wyczerpania całego zbioru  $\{1, \dots, n\}$ ). Wynika stąd, że  $p$  jest złożeniem pewnej liczby cykli, a więc jest złożeniem transpozycji  $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ .



W numerze 9/1983 pominieliśmy informację, że wywiad z prof. A. Schinzlem był przeprowadzony w grudniu 1982 roku. Przepraszamy.



# Czy umiemy obliczać pierwiastek kwadratowy?

Jerzy GERESZ

$$\sqrt{2,718282} = 1,648721$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 171 : 26 \times 6 \\ 156 \\ \hline 1582 : 324 \times 4 \\ 1296 \\ \hline 28682 : 3288 \times 8 \\ 26304 \\ \hline \rightarrow 237800 : 32967 \times 7 \\ 230769 \\ \hline 703100 : 329742 \times 2 \\ 659484 \\ \hline 4361600 : 3297441 \times 1 \\ 3297441 \\ \hline 1064159 \end{array}$$

Od Redakcji: Autor stosuje uproszczoną procedurę przybliżonego dzielenia. Sprawdzenie jej poprawności pozostawiamy Czytelnikom.

$$\begin{array}{r} 721 \\ \hline 23780 : 3296 \\ 23072 \\ \hline 708 : 330 \\ 660 \\ \hline 48 : 33 \\ 33 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\sqrt{1,6487213} = 1,284$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 64 : 22 \times 2 \\ 44 \\ \hline 2087 : 248 \times 8 \\ 1984 \\ \hline 10321 : 2564 \times 4 \\ 10256 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\sqrt{1,6487213} = 1,2840254$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 64 : 22 \times 2 \\ 44 \\ \hline 2087 : 248 \times 8 \\ 1984 \\ \hline 10321 : 2564 \times 4 \\ 10256 \\ \hline 6530 : 2568 \\ 5136 \\ \hline 1394 : 257 \\ 1285 \\ \hline 109 : 26 \\ 104 \\ \hline 5 : 3 \end{array}$$

Większość czytelników na takie zapytanie wsruszy ramionami: uczyliśmy się w szkole procedury numerycznego obliczania pierwiastka z danej liczby. Procedura ta umożliwiła obliczenie pierwiastka z dowolną dokładnością. Ale problem polega na tym, czy umiemy obliczenie to przeprowadzić w sposób ekonomiczny — kosztem możliwie małego nakładu pracy. By problem ten zilustrować, rozpatrzmy przykład wyciągania pierwiastka z dokładnością siedmiu cyfr znaczących z liczby, którą znamy z taką samą dokładnością (rachunki na marginesie).

Zera na wysokości strzałki na prawo od pionowej linii przerywanej zostały wpisane tu zastępczo, wobec naszej nieznamości cyfr na siódmym i ósmym miejscu po przecinku liczby podpierwiastkowej. W konsekwencji fikcyjne są wszystkie cyfry różnic na prawo od linii przerywanej.

Jak widać, blisko połowa pracy rachunkowej odbywała się na cyfrach fikcyjnych i w istocie była ona zbędna. Ostatnie trzy cyfry wyniku uzyskalibyśmy te same, gdyby wszystkie cyfry na prawo od linii przerywanej w poszczególnych różnicach zostały zastąpione zerami. Co więcej, w części na lewo od linii przerywanej cały proces rachunkowy nie różni się zasadniczo od dzielenia zaznaczonej strzałką różnicy przez podwojony wynik dotychczasowego pierwiastkowania (o czterech cyfrach znaczących). By to unaocnić, przedstawiliśmy obok takie dzielenie, którego wynikiem są ostatnie trzy cyfry znaczące poszukiwanej wartości pierwiastka.

Obserwacja powyższa sugeruje, by jako najbardziej ekonomiczną metodę obliczania pierwiastka z zadaną dokładnością przyjąć co następuje: Pierwszą część obliczenia wykonujemy w sposób tradycyjny aż do wyczerpania cyfr znaczących liczby podpierwiastkowej. Z chwilą, gdy w grę zaczynają wchodzić nieznaczące zera, dalsze cyfry pierwiastka obliczamy dzieląc ostatnią różnicę (z ewentualnie dopisanym zerem nieznaczącym) przez podwojoną wartość dotychczas uzyskanego przybliżenia pierwiastka. Zilustrujemy to przykładem (rachunki na marginesie).

Do 65 dopisujemy teraz 30 (gdzie końcowe zero jest już nieznaczące), i dalszy rachunek wykonujemy jako dzielenie  $6530 : 2568$ . Ostatecznie otrzymujemy (rachunki na marginesie).

Zajmiemy się teraz przedstawioną metodą w sposób bardziej właściwy matematykowi, którego interesuje przede wszystkim jej logiczne uzasadnienie i dowód jej poprawności. Oznaczmy przez  $N$  liczbę podpierwiastkową, przez  $x_1$  już uzyskane przybliżenie liczby  $\sqrt{N}$ . Oznaczmy przez  $\varepsilon$  różnicę  $\sqrt{N} - x_1$ , spełnia ona równanie  $x_1^2 + 2x_1\varepsilon + \varepsilon^2 = N$ . Przyjmijmy, że  $x_1$  przybliży  $\sqrt{N}$  z dokładnością do jednej cyfry po przecinku, czyli  $|\sqrt{N} - x_1| < 0,1$ , w konsekwencji  $\varepsilon^2 = (\sqrt{N} - x_1)^2 < 0,01$ . Jeżeli teraz przez  $\varepsilon$  będziemy rozumieć wartość poprawki na  $x_1$  odpowiadającej dopisaniu drugiej cyfry po przecinku, to w równaniu  $x_1^2 + 2x_1\varepsilon + \varepsilon^2 = N$  możemy pominąć składnik  $\varepsilon^2$ , czyli na  $\varepsilon$  otrzymujemy równanie przybliżone  $x_1^2 + 2x_1\varepsilon = N$ , którego rozwiązanie jest  $\varepsilon = \frac{N - x_1^2}{2x_1}$ .



W ten sposób uzyskujemy kolejne, lepsze przybliżenie  $x_2$  postaci:

$$x_2 = x_1 + \frac{N-x_1^2}{2x_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_1} + x_1 \right).$$

Tym razem mamy  $|\sqrt{N}-x_2| < 0,01$ , czyli  $(\sqrt{N}-x_2)^2 < 0,0001$ , a więc przedstawioną konstrukcję możemy powtórzyć uzyskując trzecie, jeszcze lepsze przybliżenie  $\sqrt{N}$ :

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_2} + x_2 \right).$$

Możemy w ten sposób uzyskać nieskończony ciąg coraz lepszych przybliżeń  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  według schematu

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_k} + x_k \right).$$

Nietrudno zauważyć, że tradycyjny algorytm zastosowany w przedstawionym wyżej pierwszym przykładzie jest to wielokrotne stosowanie przejścia  $x \rightarrow x + \frac{N-x^2}{2x}$ , z tą różnicą, że za każdym razem iloraz  $\frac{N-x^2}{2x}$  jest brany z dokładnością do jednej cyfry znaczącej. W ten sposób dla uzyskania ośmiu cyfr znaczących potrzebowaliśmy stosować powyższe przejście aż siedmiokrotnie.

Proponowane tu usprawnienie polega na tym, by ostatni iloraz  $\frac{N-x^2}{2x}$  brać z większą liczbą cyfr znaczących: w konkretnym wyżej przedstawionym przykładzie obliczyliśmy ostatni iloraz z dokładnością aż czterech cyfr znaczących uzyskując poprawny wynik. Poniższe stwierdzenie uzasadnia poprawność takiego postępowania.

Jeżeli  $x_1$  jest przybliżeniem  $\sqrt{N}$  o  $k$  cyfrach znaczących, przy czym  $k \geq 1$ , to  $x_2 = x_1 + \frac{N-x_1^2}{2x_1}$  jest przybliżeniem tego pierwiastka lepszym od pierwszego o co najmniej  $(k-1)$  cyfr znaczących.

**Dowód.** W ogólnym przypadku ilość cyfr znaczących przybliżenia liczby  $n$  jest to część całkowita liczby  $\log \left| \frac{5n}{n-x} \right|$ , gdzie podstawą logarytmu jest 10. W naszym przypadku potrzebujemy zatem zbadać zależność między liczbami  $\log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1} \right|$  oraz  $\log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2} \right|$ . Otóż mamy

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2} \right| &= \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1 - \frac{N-x_1^2}{2x_1}} \right| = \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{(\sqrt{N}-x_1) \left( \frac{2x_1 - \sqrt{N}-x_1}{2x_1} \right)} \right| = \\ &= \log \left| \left( \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1} \right)^2 \cdot \frac{2x_1}{5\sqrt{N}} \right| = 2 \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1} \right| + \log \left| \frac{2x_1}{5\sqrt{N}} \right| = \\ &= 2 \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1} \right| + \log \left( \frac{2}{5} \cdot \left| 1 - \frac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}} \right| \right). \end{aligned}$$

Ponieważ  $k \geq 1$ , więc  $\left| \frac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}} \right| \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ , czyli składnik  $\log \left( \frac{2}{5} \left| 1 - \frac{\sqrt{N}-x_1}{\sqrt{N}} \right| \right)$

będzie większy od  $-1$ .  
Otrzymaliśmy zatem nierówność

$$\log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_2} \right| \geq 2 \log \left| \frac{5\sqrt{N}}{\sqrt{N}-x_1} \right| - 1,$$

która będzie dotyczyła również części całkowitych logarytmów po obu stronach. Dowód jest zakończony.





Tym samym pokazaliśmy również, że ciąg o wyrazach  $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_k} + x_k \right)$  startujący z  $x_1$  dostatecznie bliskiego  $\sqrt{N}$  jest zbieżny do  $\sqrt{N}$  (faktycznie zbiega on do  $\sqrt{N}$  przy jakimkolwiek  $x_1$ ).

Z udowodnionego stwierdzenia wynika, że dla uzyskania  $n$  cyfr znaczących  $\sqrt{N}$  wystarczy wykonać  $k$  dzielen  $\frac{N-x^2}{2x}$ , gdzie  $k = \frac{n}{2}$ , gdy  $n$  jest parzyste, a  $k = \frac{n-1}{2}$ , gdy  $n$  nieparzyste, bowiem  $k$ -ty krok daje przybliżenie  $\sqrt{N}$  o  $n$  cyfrach znaczących, a to jest równoznaczne z przyjęciem opisanej wyżej metody. Co więcej, należałoby stosować tę metodę nie tylko w odniesieniu do liczby podpierwiastkowej  $N$  danej z dokładnością  $n$  cyfr znaczących, ale w każdym przypadku, w którym chodzi o uzyskanie  $n$  cyfr znaczących liczby  $\sqrt{N}$ , na przykład przy obliczaniu  $\sqrt{2}$ .

Niektórzy Czytelnicy być może uznają zajmowanie się problemami obliczeń numerycznych tego typu jak wyżej za przeżytek. Któż rozsądny będzie się kopał w jakichś tam rachunkach, skoro mamy do dyspozycji komputery i to już trzeciej generacji? Otóż należy wyjaśnić jedno zasadnicze nieporozumienie: nawet najlepsze z istniejących komputerów nie mają nic wspólnego z „mózgami elektronowymi” z powieści science-fiction, myślącymi za nas i samodzielnie rozwiązującymi problemy. Komputer jest to martwe narzędzie, bezmyślnie wykonujące program napisany przez człowieka. Różnica między tradycyjnymi rachunkami na kartce papieru a obliczeniami techniką elektronową jest w istocie taka, że wypisaniu cyferki na papierze odpowiada umieszczenie odpowiedniej informacji w odpowiedniej komórce pamięci operacyjnej. Problem matematyczny sposobu przeprowadzenia obliczenia pozostaje ten sam. Troska o wybór ekonomicznej metody obliczenia należy do człowieka programującego maszynę. A problem ekonomii obliczeń jest istotny: maszyna co prawda liczy szybko, ale jej czas pracy kosztuje dużo — gospodarować należy nim oszczędnie.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 346.** Transpozycją  $(k, l)$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  nazywamy taką permutację  $t$ , że  $t(k) = l$ ,  $t(l) = k$ ,  $t(i) = i$  dla  $i \neq k, l$ . Wykazać, że dowolną permutację  $p$  tego zbioru możemy otrzymać składając w odpowiednim porządku (z ewentualnymi powtórzeniami) transpozycje  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ , ...,  $(n-1, n)$ .

Rozwiązanie na str. 3

**M 347.** Wykazać, że  $n-2$  transpozycji nie wystarczy, by przez ich składanie uzyskać wszystkie permutacje zbioru  $\{1, \dots, n\}$ .

Rozwiązanie na str. 15

**M 348.** Wykazać, że dowolną permutację zbioru  $\{1, \dots, n\}$  można otrzymać składając (z ewentualnymi powtórzeniami) transpozycję  $t = (1, 2)$  i permutację cykliczną  $c$  ( $c(1) = 2$ ,  $c(2) = 3$ , ...,  $c(n-1) = n$ ,  $c(n) = 1$ ).

Rozwiązanie na str. 13

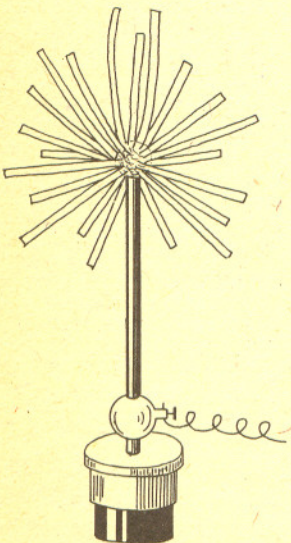
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 142.** Do pokazów z elektrostatyki używany bywa przyrząd zwany „piórpuszem”. Jest to metalowa kula z przyklejonymi listkami cynfolii zamocowana na izolującej podstawie. Po wprowadzeniu ładunku listki ustawiają się zgodnie z przebiegiem linii sił przewodnika sferycznego (patrz rysunek). Paski cynfolii mają jednak stały potencjał. Czyżby więc w tym przypadku linie natężeń pola elektrostatycznego nie były prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych?

Rozwiązanie na str. 13

**F 143.** Energia elektrostatycznego oddziaływania dwóch różnoimiennych ładunków jest ujemna. Energia pola elektrostatycznego wytworzonego przez ten układ jest z pewnością dodatnia, gdyż gęstość energii jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola. Skąd taka rozbieżność?

Rozwiązanie na str. 10





Wprowadzone w tym odcinku „słówka” możemy przetłumaczyć następująco:  
**proof:** dowód  
**let x be punkt:** niech x będzie punktem  
**such that:** taki, że  
**assume (that):** załóżmy (że)  
**and:** i, oraz  
**thus:** a zatem, więc  
**end:** koniec (dowodu, rozumowania).

Przypominamy:

Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — lepiej większą — z naklejonym znacznikiem, otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

## Mizar — MSE (3)

W poprzednim odcinku pokazaliśmy, jak zapisywać w Mizarze poszczególne kroki rozumowania. Kroki mogą się składać na większą całość, np. na dowód. Zasadniczą strukturę dowodów w Mizarze przedstawimy dzisiaj. Oczywiście najpierw musimy sformułować tezę naszego dowodu. Następnie piszemy **proof** i ... ano właśnie, korzystając z założonych aksjomatów bądź z tego, co wcześniej już stwierdziliśmy, dowodzimy naszej tezy. Cóż to znaczy? Jak to zrobić? Zależy to istotnie od struktury aktualnie dowodzonego zadania (tezy). Najprostsze przypadki to, gdy teza jest koniunkcją lub implikacją. Jeśli jest koniunkcją, to musimy w dowodzie stwierdzić prawdziwość każdego jej członu. (Wszystkie dzisiejsze przykłady zakładają wstęp z zadania z poprzedniego odcinka.)

Np:

```
NWCA,C1 & NWCB,C1
PROOF
  THUS NWCA,C1 BY Z2?
  THUS NWCB,C1 BY Z3
END?
```

Dowód kończymy słowem **end**. Słowo **thus** umieszczone w dowodzie służy wskazaniu, że następujące po nim zdanie jest konkluzją — tym (lub częścią tego), co mieliśmy udowodnić. W powyższym przypadku mogliśmy napisać, **thus** NW[a, c] & NW [b, c] **by** Z2, Z3 co też by wystarczyło.

Zilustrujmy teraz przypadek, gdy teza jest implikacją. Zakładamy wtedy, że prawdziwy jest jej poprzednik i staramy się teraz wynioskować następnik. Na przykład:

```
NWCA,B1 & NWCD,D1 IMPLIES NWCA,D1
PROOF
  ASSUME A: NWCA,B1 & NWCD,D1?
  THUS NWCA,D1 BY A
END?
```

Słowo **assume** wskazuje założenie w dowodzie. Słowo **thus** wskazuje na wynioskowany następnik. Założenie może składać się z całej listy (być może ponumerowanych — etykietowanych) zdań, łączonych słówkiem **and**. Np:

```
NWCA,B1 & (NWCD,C1 OR NWCA,E1) IMPLIES NWCA,D1 & NWCD,C1
PROOF
  ASSUME THAT A: NWCA,B1 AND
  B: NWCD,C1 OR NWCA,E1?
  THUS NWCA,D1 BY T1?
  THUS NWCD,C1 BY B,Z5
END?
```

W powyższym przykładzie, z chwilą założenia (przez **assume** ...) poprzednika implikacji pozostało do udowodnienia zdanie będące koniunkcją dwu członów (tzn. następnik wyjściowej tezy). Dowód mogliśmy zakończyć przez konkluzję w postaci dokładnie

takiej, jak wygląda następnik tezy (tj. **thus** NW [a, d] & NW [d, c] **by** ... ?). Możemy również, i tak zrobiliśmy, zakończyć dwiema konkluzjami stwierdzającymi oddzielnie poszczególne człony następnika (czasami tak jest wygodnie).

Poprzednie przykłady ilustrowały użycie dowodów w przypadkach, kiedy to nie było niezbędne. Dowód jest konieczny potrzebny przy dowodzie w Mizarze zdań z kwantyfikatorem ogólnym, choćby z tego powodu, że dla maszyny (checkera) żadne zdanie ogólne nie jest oczywiste i wymaga uzasadnienia — na ogół w postaci dowodu. W codziennej praktyce, jeśli chcemy udowodnić zdanie ogólne, to najczęściej bierzemy pod uwagę dowolne obiekty odpowiednich typów; zakładamy o nich, że spełniają ograniczenia nałożone w kwantyfikatorze i z tymi aktywnymi usiłujemy udowodnić kwantyfikowane zdanie.

Na początek weźmy prosty przykład. Gdyby ze wstępu usunąć zwrotność, to można by i tak jej dowieść.

```
FOR X BEING ULAMEK HOLDS NWEX,X1
PROOF
  LET X1 BE ULAMEK?
  A: NWEX1,X1 OR NWEX1,X1 BY SPOJNOSC?
  THUS NWEX1,X1 BY A
END?
```

Wybraliśmy pewien ułamek  $x1$ , dowolny, lecz ustalony na czas reszty dowodu (**let x1 be ulamek**). Następnie pokazaliśmy pewien pomocniczy fakt o  $x1$  — i fakt ten nie był ani założeniem, ani konkluzją w tym dowodzie. Po czym stwierdziliśmy o wybranym dowolnie  $x1$  to, co chcieliśmy wiedzieć o każdym ułamku. Poniższy przykład jest bardziej obszerny:

```
FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NWEX,Y1 & X<Y & NWZ,X1
  HOLDS NOT NWEY,X1 & NWZ,Y1
PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
  A: NWEX,Y1 AND B: X<Y AND C: NWZ,X1?
  D: NOT (NWEY,X1 & NWZ,Y1) BY B,ANTYSYMETRIA?
  THUS NOT NWEY,X1 BY D,A?
  E: NWZ,X1 & NWEX,Y1 BY A,C?
  THUS NWZ,Y1 BY E,PRZECHODNOSC
END?
```

Założenia odpowiadające ograniczeniu kwantyfikatora mogliśmy ująć w równoważny sposób tak:

```
LET X,Y,Z BE ULAMEK?
ASSUME THAT A: NWEX,Y1 AND B: X<Y AND C: NWZ,X1
```

Konstrukcja rozpoczynająca się od **let** jest nazywana deklaracją.

Jak widzimy, dowód jest ciągiem założeń i deklaracji (nie podlegających uzasadnieniu) oraz stwierdzeń (wśród nich konkluzji). Kolejność występowania tych elementów jest narzucana przez postać dowodzonej tezy. Stwierdzenia są uzasadniane np. w sposób podany w poprzednim odcinku i używane w tym. Jak je uzasadniać inaczej, podamy później.

**Zadania:**

Przyjmując wstęp podany w drugim odcinku dla teorii liniowego porządku dla ułamków udowodnić:

```
T8: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NWEX,Y1 & NWEY,Z1 & NWZ,X1 HOLDS X=Y ;
T9: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NOT NWEX,Y1 & NOT NWEY,Z1 HOLDS NWZ,X1 ;
T10: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK
  ST NOT NWEX,Z1 & NWEY,Z1 HOLDS NOT NWEX,Y1 ;
```



Dr Irena SZYMERSKA

## Wstęp

Skład chemiczny i struktura powierzchni ciała stałego wywierają istotny wpływ na przebieg zjawisk fizycznych i chemicznych zachodzących na granicy faz ciało stałe-gaz czy ciało stałe-ciecz. Dlatego też badania własności warstw powierzchniowych były prowadzone już od dziesiątków lat, głównie w dziedzinach, gdzie atomy powierzchniowe i ich zdolność wchodzenia w reakcje chemiczne odgrywają szczególną rolę, takich jak badania korozji, kataliza, technologia elektronowa itd. Mówiąc o powierzchni lub obszarze powierzchniowym mamy na myśli kilkuatomową warstwę, która różni się własnościami termodynamicznymi i elektronowymi od fazy objętościowej (wewnątrz kryształu). Nasza wiedza o powierzchni nie jest tak pełna, jak o fazach trójwymiarowych, właśnie ze względu na trudności i komplikacje związane z brakiem trzeciego wymiaru. W ostatnim dwudziestoleciu rozwinęły się jednak techniki badawcze, które pozwoliły na dokładniejszy opis własności powierzchni ciał stałych. Rozwój tych technik był ściśle związany z możliwością uzyskiwania bardzo wysokich próżni,  $p < 10^{-8}$  Pa.

We wspomnianych metodach narzędziem badawczym są elektrony. Oddziaływanie elektronów z materią jest bardzo silne. Miarą głębokości ich penetracji w ciele stałym jest średnia droga swobodna, czyli średnia odległość, jaką przebywa elektron między kolejnymi zderzeniami.

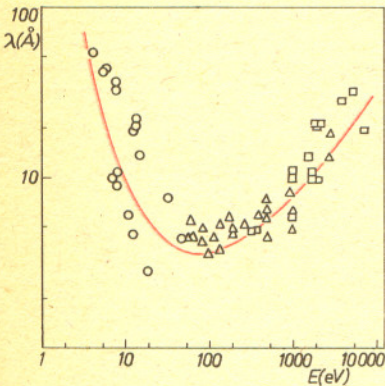
Wielkość ta zależy głównie od energii kinetycznej elektronu i w niewielkim stopniu od liczby porządkowej pierwiastka stanowiącego próbkę. Pozwoliło to na wyznaczenie uniwersalnej (tj. niezależnej od liczby porządkowej pierwiastka) krzywej pokazanej na rysunku 1. Elektronom o energii kinetycznej od 50 do 500 eV odpowiada najmniejsza droga swobodna  $\sim 10$  Å, czyli zaledwie 2—3 warstwy atomowe. Elektrony niskoenergetyczne „widzą” więc tylko powierzchnię i dlatego na ich oddziaływanie z ciałem stałym opierają się metody „powierzchniowo czułe”. Metody te można podzielić na 2 grupy:

1. Powierzchnię bombarduje się elektronami, a rejestruje się efekt nieelektronowy, np. promieniowanie elektromagnetyczne.
2. Powierzchnię bombarduje się elektronami i analizuje się energię elektronów rozproszonych. Wśród elektronów rozproszonych znajdują się zarówno elektrony pierwotne rozproszone sprężyste lub niesprężyste, jak i elektrony wtórne.

Do tych ostatnich należą tzw. elektrony Augera. Ich nazwa pochodzi od nazwiska Piotra Augera, który badając efekty bombardowania rozrzedzonych gazów (azot, tlen, argon i in.) promieniami X o energiach 20—100 keV, zauważył w komorze Wilsona ślady elektronów o nieznanym pochodzeniu i opisał w 1925 roku fizyczne podstawy ich emisji. Odkrycie Piotra Augera zostało wykorzystane dopiero w latach pięćdziesiątych, kiedy to, dzięki rozwojowi techniki próżniowej i zastosowaniu urządzeń elektronicznych, opracowano metodę spektroskopii elektronów Augera.

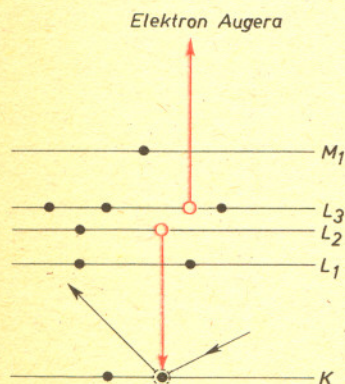
## Proces emisji elektronów Augera

Jeśli atom pierwiastka o liczbie atomowej  $Z$  bombardowany jest elektronami lub fotonami, to może nastąpić jego jonizacja, np. może zostać wybity elektron z orbity  $K$  (rysunek 2). Taki jon będzie dążył do stanu o niższej energii przez zapelnienie luki na poziomie  $K$  elektronem z innego, wyższego poziomu energetycznego, np.  $L_2$ . Uwolniona przy tym energia  $E_K - E_{L_2}$  może zostać wypromieniowana jako foton promieniowania X; tzw. fluorescencja rentgenowska. Inną drogą pozbycia się tej nadwyżki energii jest przekazanie jej elektronowi, np. z poziomu  $L_3$  i wyrzucenie go z atomu, jeśli ilość energii jest wystarczająca. Ten właśnie elektron jest elektronem Augera, a opisany proces nazywamy przejściem Augera  $KL_2L_3$ . Emisja elektronów Augera jest więc zjawiskiem konkurencyjnym



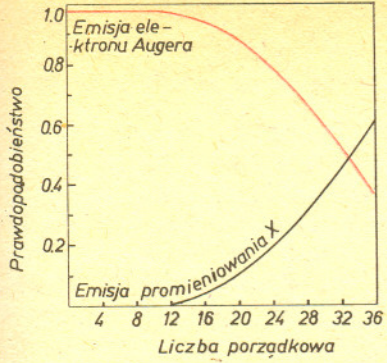
Rys. 1 Zależność średniej drogi swobodnej elektronu w ciele stałym od energii. Wartości doświadczalne uzyskano trzema niezależnymi metodami.

O pierwszej z wymienionych metod pisał doc. Stefan Mróz w *Delcie* 3/1982.



Rys. 2 Proces emisji elektronu Augera  $KL_2L_3$  z atomu Na





Rys. 3 Prawdopodobieństwo emisji elektronu Augera i promieniowania X jako funkcja liczby porządkowej pierwiastka

w stosunku do fluorescencji rentgenowskiej. Prawdopodobieństwo emisji elektronu Augera jest wysokie dla pierwiastków o małej liczbie atomowej i maleje ze wzrostem  $Z$ , przeciwnie niż prawdopodobieństwo fluorescencji promieni X, jak to widać na rysunku 3. Z opisanego mechanizmu emisji elektronu Augera wynika, że przynajmniej 2 stany energetyczne i 3 elektrony biorą udział w tym procesie, dlatego też wodór i hel nie mogą emitować elektronów Augera.

Energia kinetyczna elektronów Augera zależy od energii poziomów elektronowych w atomach, a więc jej pomiar może być podstawą identyfikacji atomów emitujących. Należy tylko dokonać pomiaru rozkładu energetycznego elektronów wtórnych i zidentyfikować pojawiające się w rozkładzie maksima z przejściami Augera charakterystycznymi dla określonych atomów. Można tego dokonać albo obliczając energię elektronu Augera na podstawie znanych z rentgenografii energii poziomów elektronowych, biorących udział w procesie emisji albo porównując otrzymaną krzywą z widmem już znanym. W rozkładzie energetycznym piki (lokalne ostre maksima) Augera są słabo widoczne i trudno byłoby określić ich położenie. Dlatego najczęściej bada się pochodną funkcji rozkładu, która jest bliska zeru dla wolnozmiennego tła i duża w obszarze pików. W przypadku ogólnym, jeśli w procesie Augera biorą udział elektrony z poziomów  $W, X, Y$ , energia kinetyczna elektronu emitowanego dana jest przez:

$$E_{W,X,Y}(Z) = E_W(Z) - E_X(Z) - E_Y(Z),$$

gdzie  $E_{W,X,Y}(Z)$  jest energią kinetyczną elektronu Augera, który po pierwotnej jonizacji poziomu  $W$  i przeskoku elektronu z poziomu  $X$  na  $W$  jest emitowany z poziomu  $Y$ .

$E_W(Z), E_X(Z)$  i  $E_Y(Z)$  są energiami wiązania elektronów odpowiednio na poziomie  $W, X, Y$  w atomie obojętnym o liczbę porządkową  $Z$ .

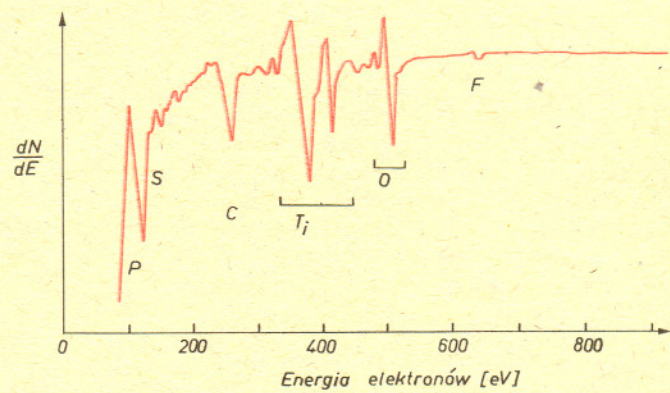
W ścisłych obliczeniach należy uwzględnić to, że po emisji elektronu Augera pozostaje atom dwukrotnie zjonizowany, a wszystkie energie poziomów elektronowych są wyznaczone jako energie jednokrotnej jonizacji. Wprowadzając

$E'_Y(Z) = E_Y(Z + \Delta)$ , gdzie  $\Delta \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$  uwzględnia nadmiarowy ładunek dodatni (zmniejszenie ekranowania jądra przez elektrony), otrzymujemy

$$E_{W,X,Y}(Z) = E_W(Z) - E_X(Z) - E_Y(Z + \Delta).$$

Powyższe rozważania odnoszą się do atomu swobodnego. Jeśli atom jest związany w jakikolwiek sposób np. w metalu lub cząsteczce, poziomy energetyczne ulegają przesunięciu, wskutek czego zmienia się położenie pików Augera. Na rysunku 4 pokazano dla przykładowego widma Augera uzyskane dla próbki tytanu, którego powierzchnia była zanieczyszczona fosforem, siarką, węglem, tlenem i fluorem.

Obserwuje się również zjawisko Augera w atomach już zjonizowanych. Np. ze zderzenia fotonu z dwukrotnie zjonizowanym atomem tlenu uzyskuje się czterokrotnie zjonizowany atom tlenu i dwa elektrony. Takie procesy zachodzą m.in. w materii międzygwiazdowej.



Rys. 4 Widmo elektronów Augera dla próbki tytanu



### Analiza ilościowa

Pod koniec lat sześćdziesiątych pojawiły się pierwsze prace sygnalizujące możliwość zastosowania spektroskopii elektronów Augera do określania stężenia pierwiastków w obszarze powierzchniowym o grubości 2–10 warstw atomowych. Obecnie analizę ilościową stosuje się głównie do określania składu powierzchniowego metalicznych stopów dwuskładnikowych.





#### Rozwiązanie zadania F 143.

Pozorna sprzeczność wynika z faktu, iż energia oddziaływania ładunków  $Q_1, Q_2$

wyrażona wzorem:  $E = k \frac{Q_1 Q_2}{r}$ , gdzie

$k$  — stała zależna od układu jednostek,  
 $r$  — odległość, nie wyraża całkowitej energii ich oddziaływania. Są one bowiem zgromadzone na konkretnych ciałach i naelektryzowanie tych ciał wymaga określonego nakładu pracy. Pominięto więc energię własną nośników ładunków. Suma tych dwóch energii — własnej (obu ciał) i wzajemnego oddziaływania ładunków (traktowanych jako punktowe) jest równa energii pola elektrostatycznego wytworzonego przez układ. W każdym punkcie pola natężenie jest sumą natężeń pochodzących od obu źródeł:  $E = E_1 + E_2$ .

Gęstość energii pola, proporcjonalną do kwadratu natężenia, można rozdzielić na trzy wyrazy proporcjonalne do  $E_1^2, E_2^2$  i  $2 E_1 \cdot E_2$ :

$$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 \cdot E_2.$$

Pierwsze dwa opisują gęstości energii własnych naładowanych ciał, ostatni — energię ich wzajemnego oddziaływania.

Podział energii elektrostatycznej na dwa składniki jest bardzo wygodnym narzędziem podczas rozwiązywania konkretnych zadań.

We wszystkich zagadnieniach energetycznych, w których rozkład ładunku w obrębie ciał nie ulega zmianie, wygodnie jest operować modelem ładunku punkowego, pomijając stałe energie własne. Oczywiście nie zawsze jest to możliwe, np. gdy ciała wymieniają ładunek lub gdy zmiana położenia ciał zmienia konfigurację ładunku na nich zgromadzonego.

Okazało się bowiem, że skład powierzchniowy różni się od składu fazy objętościowej. Ilościowo można również określać stopień pokrycia powierzchni warstwą zaadsorbowaną oraz zależność stężenia pierwiastka od odległości od powierzchni ciała stałego.

Analiza ilościowa opiera się na równaniu wiążącym natężenie prądu elektronów Augera rejestrowane przez analizator ze stężeniem badanego pierwiastka w obszarze powierzchniowym. Dokładne określenie tej zależności jest obecnie jeszcze niemożliwe. Stosuje się zazwyczaj równania przybliżone, oparte na założeniach idealizujących budowę warstwy powierzchniowej oraz upraszczających zjawiska rozpraszania elektronów pierwotnych i emisji elektronów Augera.

Sytuację dodatkowo utrudnia fakt, że w wyniku pomiarów nie otrzymuje się bezpośrednio natężenia prądu elektronów Augera, lecz wielkość do niego proporcjonalną, a mianowicie wysokość pików w widmie  $dN(E)/dE = f(E)$ . Z tych powodów analiza ilościowa jest analizą porównawczą, opartą na wzorcach, tj. powierzchniach o znanych stężeniach danego pierwiastka.

### Możliwości spektroskopii elektronów Augera

Spektroskopia elektronów Augera umożliwia jednoznaczną identyfikację pierwiastków. Badania wykazały, że głębokość, z jakiej pochodzą elektrony Augera, wynosi 3 do 30 Å dla  $E_{WXY} < 500$  eV; zależy ona od wartości  $E_{WXY}$  oraz od materiału badanego. Natomiast nie wpływa na nią energia elektronów padających na próbkę.

W idealnych warunkach można wykrywać tą metodą zanieczyszczenia powierzchniowe, aż do minimalnych stężeń rzędu  $10^{12}$  atomów/cm<sup>2</sup> (dziesiąt części procenta warstwy monomolekularnej). W praktyce osiąga się mniejsze czułości, ok. 1% warstwy monomolekularnej.

Widmo energetyczne elektronów Augera zawiera również informacje o chemicznym związaniu atomów interesującego nas pierwiastka. Jedną z nich jest tzw. przesunięcie chemiczne spowodowane przesunięciem wewnętrznych poziomów energetycznych wskutek przemieszczania się elektronów walencyjnych w chwili powstania wiązania chemicznego.

Przesunięcia chemiczne w widmach elektronów Augera są zwykle trudne do rozszyfrowania. Jeśli bowiem  $\Delta_W, \Delta_X, \Delta_Y$  są odpowiednio przesunięciami poziomów energetycznych  $WXY$ , to zmierzone przesunięcie energii pików Augera będzie wynosiło

$$\Delta E = E_W - E_X - E_Y - (E_W + \Delta_W - E_X - \Delta_X - E_Y - \Delta_Y) = -\Delta_W + \Delta_X + \Delta_Y.$$

Należałoby więc znać wartości wszystkich  $\Delta$ , a tymczasem eksperymentalnie wyznacza się tylko  $\Delta E$ .

Jeśli w procesie Augera biorą udział elektrony z pasma walencyjnego, można dodatkowo uzyskiwać dane dotyczące struktury pasmowej ciała stałego i gęstości stanów w paśmie. Metoda spektroskopii elektronów Augera jest nieniszcząca i może być stosowana zarówno do ciał krystalicznych, jak i amorficznych.

### Uwagi końcowe

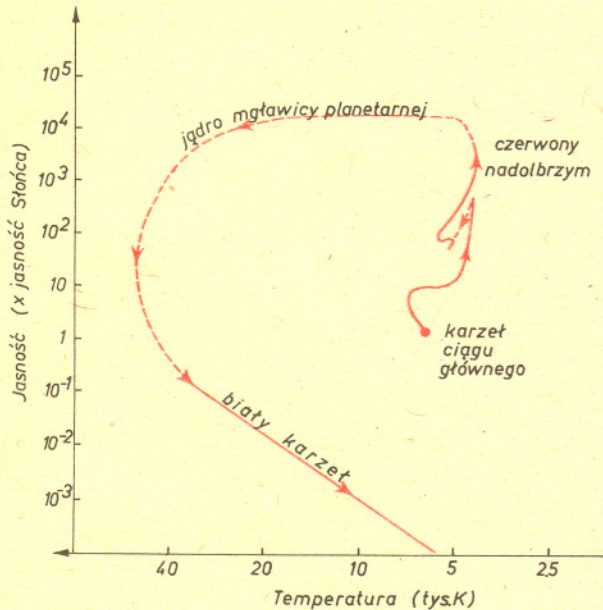
Ogromna użyteczność spektroskopii elektronów Augera do badań powierzchni ciał stałych powoduje szybki rozwój tej metody. Duży postęp daje się zauważyć w konstrukcji spektrometrów. W ostatnich latach opracowano spektrometry skaningowe umożliwiające określenie rozkładu stężenia wybranego pierwiastka na badanej powierzchni. Z drugiej strony, rozpowszechnianie spektroskopii elektronów Augera jest hamowane wysoką ceną spektrometrów oraz dużą pracochłonnością tej metody. Ilościowa analiza jest jeszcze niedopracowana.

Ocenia się, że jej wyniki są obarczone błędem systematycznym 20—30%. Aby ten błąd zmniejszyć, należy opracować metody pozwalające możliwie dokładnie wyznaczać wartości współczynników wstecznego rozproszenia oraz średniej drogi swobodnej elektronów. Udoskonalenia wymagają również techniki pomiaru prądu elektronów Augera.





Po przejściu etapu czerwonego nadolbrzyma starzejąca się gwiazda przechodzi często burzliwe chwile, zanim osiągnie jedną z ostatnich faz swojego życia (biały karzeł, gwiazda neutronowa albo czarna dziura). Może to być wybuch gwiazdy — supernowa, ale nie musi. Niezbyt masywne gwiazdy (o masach mniejszych niż ok. 6 mas Słońca) osiągają w tym okresie na tyle duże jasności, że ciśnienie promieniowania znacznie przekracza siłę przyciągania atomów atmosfery. W konsekwencji znaczna część masy gwiazdy jest w krótkim czasie „wywiewana” w przestrzeń.



Rys. 2 Droga ewolucyjna mało masywnej gwiazdy na diagramie Hertzsprunga-Russella

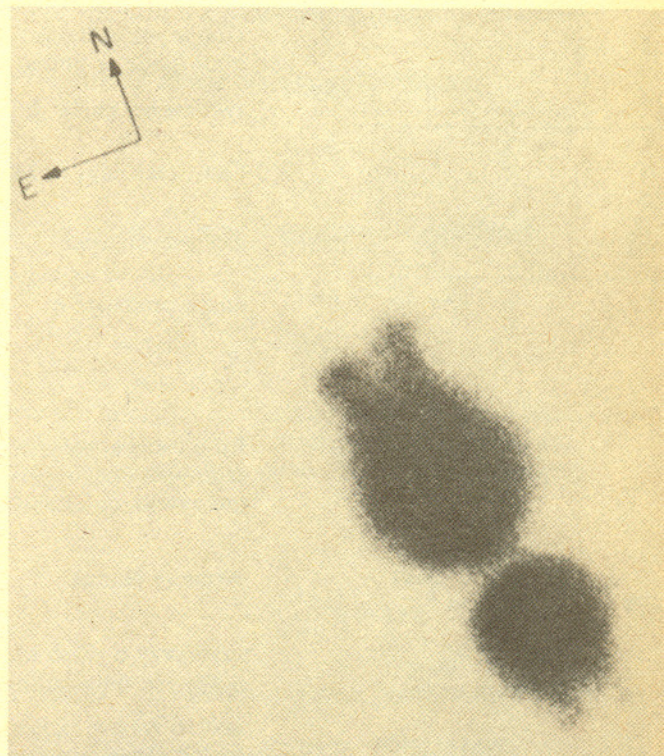
Pozostaje jedynie gorące jądro (o temperaturze powierzchniowej do 100 000 K), z którego później w wyniku stygnięcia powstanie biały karzeł. Odrzucona otoczka tworzy mgławicę wokół jądra, zwaną mgławicą planetarną. Oczywiście mgławice te nie mają nic wspólnego z planetami, a otrzymały taką nazwę w związku ze zdarzającymi się pomyłkami spowodowanymi mylącym ich wyglądem. Często jednorodnie jasna, kolistą mgławicą łądząco przypomina tarczę planety. Jest to twór bardzo krótko żyjący w porównaniu z czasem życia gwiazdy. Ekspandująca mgławica po kilkudziesięciu tysiącach lat „rozmywa” się w przestrzeni i przestaje być widoczna. Mimo to znamy dzisiaj ponad 1000 mgławic planetarnych o różnych kształtach i kolorach (np. na rys. 1, czy coś Wam ona przypomina?). Tymczasem jądro o masie poniżej  $1,4 M_{\odot}$  powoli stygnie stając się białym karłem, a później czarnym, zimnym gruzowiskiem zdegenerowanej materii.

Droga ewolucyjna mało masywnej gwiazdy przedstawiona jest na rys. 2. Wzrost temperatury w czasie pokonywania górnej części diagramu Hertzsprunga-Russella nie jest spowodowany grzaniem jądra, a jedynie odsłanianiem coraz głębszych i gorętszych jego warstw. Nie wszystkie mgławice planetarne mają kształty w przybliżeniu kuliste. Istnieje pewna klasa mgławic mających symetrię osiową (rys. 3). Dzisiaj nie wiadomo jeszcze, dlaczego ich kształty są jakościowo różne. Możliwe, że (przed odrzuceniem otoczki) wokół gwiazdy utworzył się z nieznanых przyczyn gazowo-pyłowy pierścień w płaszczyźnie równikowej. Pierścień ten utrudnia ekspansję otoczki w tych kierunkach tworząc wąską „kibic” mgławicy.

dr Tomasz CHLEBOWSKI



Rys. 1 Mgławica planetarna 197+17°1



Rys. 3 Mgławica bipolarna CRL 2688



# Czy każda podróż do Wenecji kończy się w Wenecji?

Mgr Piotr CHRZĄSTOWSKI

Na początek proponuję Czytelnikowi, aby spróbował obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Cała historia zaczęła się w autobusie, który wraz ze mną i z moim kolegą, matematykiem, podążał w kierunku Wenecji. Noc już zapadła i zależało nam na czasie, gdyż nie wypadało zbyt późno przyjeżdżać do oczekujących nas gościnnych Włochów. Minęliśmy właśnie znak „Wenecja 80 km”. Odruchowo spojrziałem na licznik. Szybkościomierz wskazywał 80 km/godz. Nie było jeszcze tak źle. Prędkość autobusu zaczęła jednak nieco maleć i dziesięć kilometrów dalej jechał już tylko z prędkością 70 km/godz. Wtedy to zrodziło się następujące, makabryczne zadanie:

## Zadanie

Autobus ma do przejechania  $a$  kilometrów. Na  $x$  kilometrów do celu jego prędkość wynosi  $x$  km/godz.

Po jakim czasie:

1. dojedzie do celu?
2. przebędzie połowę drogi?

Zabraliśmy się żwawo do rozwiązania, bojąc się, że nie zdążymy przed Wenecją. Tutaj, Drogi Czytelniku, przymknij oczy, wyobraź sobie, że jedziesz do Wenecji i spróbuj to zadanie rozwiązać (przynajmniej punkt 1).

Nie jest ono w końcu takie bardzo trudne.

Wyobraźmy sobie, że coraz dokładniej przybliżamy ciągłe hamowanie autobusu w następujący sposób:

*Pierwsze przybliżenie:* Jedziemy całą drogę z prędkością  $a$  km/godz., co nam zajmie jedną godzinę.

$$H_1 = 1.$$

*Drugie przybliżenie:* Jedziemy pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością  $a$  km/godz, a potem przypominamy sobie o założeniach i w połowie drogi zwalniamy nagle do  $\frac{a}{2}$  km/godz i dojeżdżamy z tą prędkością już do końca.

Czas, jaki nam to zajmie, wyniesie  $H_2 = \frac{a}{2} / a + \frac{a}{2} / \frac{a}{2} = \frac{1}{2} + 1$ .

*n-te przybliżenie:* zaczynamy od prędkości  $a$  km/godz i co  $\frac{1}{n}$  drogi zmniejszamy naszą prędkość o  $\frac{a}{n}$  km/godz.

$$H_n = \frac{a}{n} / a + \frac{a}{n} / \frac{(n-1)a}{n} + \dots + \frac{a}{n} / \frac{a}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1.$$

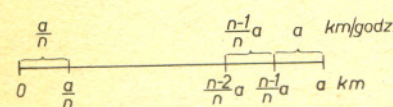
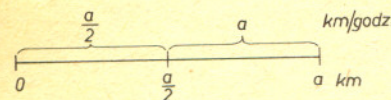
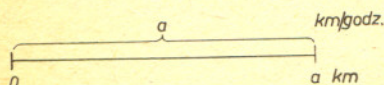
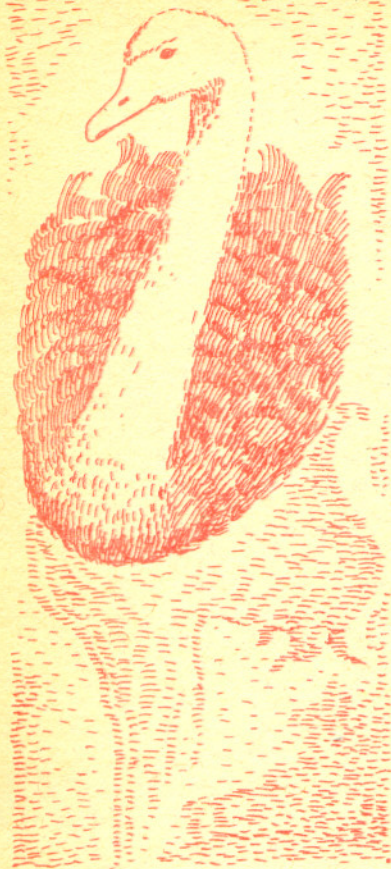
Im na więcej części podzielimy nasz odcinek  $[0, a]$ , tym dokładniej skokowy ruch autobusu będzie przypominał rzeczywisty. Przy  $n \rightarrow \infty$ ,  $H_n$  będzie dążyło do rzeczywistego czasu  $H$ .

Niestety jednak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

czyli przy  $n \rightarrow \infty$  czas  $H_n$  dąży do nieskończoności. Gdyby tak dalej poszło, to nigdy nie dojechalibyśmy do Wenecji. Makabra!

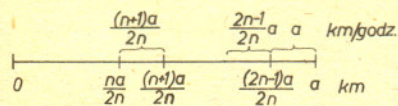
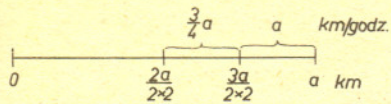
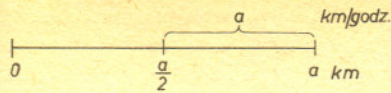
Jest to zresztą oczywiste, gdyż kierowca porównując licznik ze słupkami milowymi w dowolnym momencie myśli sobie: „No to jeszcze godzinka i będziemy na miejscu”. Ta jego świadomość jest niezmiennicza względem czasu!



$$\sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{i} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} >$$

$$> \sum_{j=1}^n 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{n}{2}$$





Połowę drogi jednak już na pewno osiągniemy. Aby wyznaczyć czas na to potrzebny, spróbujmy użyć tej samej metody:

$$T_1 = \frac{a}{2} \Big/ a = \frac{1}{2},$$

$$T_2 = \frac{a}{4} \Big/ \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} \Big/ a = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$T_n = \frac{a}{2n} \Big/ \frac{(n+1)a}{2n} + \dots + \frac{a}{2n} \Big/ \frac{(2n-1)a}{2n} + \frac{a}{2n} \Big/ \frac{2na}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}.$$

Czas  $T$  potrzebny na przebycie pierwszej połowy drogi jest, podobnie jak w pierwszym przypadku granicą  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ . Granicę tę oczywiście da się jakoś tam w miarę normalnie policzyć. My jednak użyjemy armaty na komara i zabijemy go bezlitośnie. Rozwiążemy nasze zadanie uciekając się do równań różniczkowych.

Wyrazimy położenie  $x$  w zależności od czasu  $t$ , który upłynął od chwili  $t = 0$ , gdy znajdowaliśmy się w punkcie  $a$ . Prędkość  $v(t)$  w punkcie  $x(t)$  wynosi  $-x$  (minus, gdyż jest skierowana przeciwnie do wzrostu argumentu).

Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = -x \text{ z warunkiem początkowym } x(0) = a.$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

$$\frac{dx}{x} = -dt, \quad \ln x = -t + C.$$

Wyznaczamy teraz stałą  $C$  (z warunku początkowego)

$$\ln a = -0 + C, \quad \text{czyli } C = \ln a.$$

Zarówno  $a$ , jak i  $x$  są dodatnie, więc nie ma kłopotów ze znakami, ostatecznie mamy

$$x = a \cdot e^{-t} \quad \text{lub co będzie dla nas wygodniejsze,} \\ t = \ln \frac{a}{x}.$$

Sprawdzamy szybko, że istotnie  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{a}{x} = \infty$  i zabieramy się za drugą połowę zadania bez najmniejszego trudu

$$t \left( \frac{a}{2} \right) = \ln \left( a \Big/ \frac{a}{2} \right) = \ln 2.$$

Ciekawostka: wynik zupełnie nie zależy od  $a$ . Niezależnie od tego, czy lecimy ze Słońca na Ziemię, czy przesuwamy ołówkiem po papierze według wzoru (\*), zawsze przebycie połowy drogi zajmie nam tyle samo czasu (przy pominięciu efektów relatywistycznych!).

Czyli ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2.$$

Morał: Trudne do przewidzenia są korzyści wynikające z podróży do Wenecji.

I na zakończenie pytanie: czy Czytelnik potrafi podać przykład innego ruchu, niż opisany równaniem (\*), za pomocą którego możemy dowolnie blisko zbliżyć się do celu, ale samego celu nigdy nie osiągnąć?



**Rozwiązanie zadania M 348.**

Transpozycje  $(k, k+1)$  możemy przedstawić jako  $c^{k-1} \circ t \circ c^{n+1-k}$ . Możemy więc ze złożenia cyklu  $c$  i transpozycji  $t$  odtworzyć wszystkie transpozycje  $(1, 2), \dots, (n-1, n)$ , a więc, w myśl tezy zadania M 346, wszystkie permutacje.



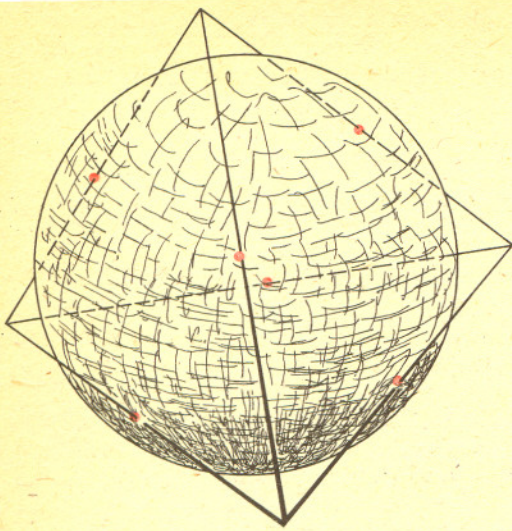
**Rozwiązanie zadania F 142.**

Ładunek wprowadzony na przyrząd gromadzi się głównie na końcach listków. Odpychanie tych ładunków napina listki i ustawia je wzdłuż normalnych do przewodnika kulistego, czyli tak, jak bieglby linie natężeń pola przewodnika bez pasków cynfolii. Potencjał sfery i listków jest stały (o ile można zaniedbać splotanie ładunków do otoczenia), a rzeczywistość istniejące pole jest dużo bardziej skomplikowane niż dla przewodnika kulistego. Linie natężeń tego pola są oczywiście prostopadłe do powierzchni pasków i przewodnika. Warto zastanowić się nad orientacyjnym przebiegiem tych linii.



# Czworościan i sfery

Dr Jerzy BEDNARCZUK



Rys. 1

Czy dla każdego czworościanu można zbudować taką sferę, by była ona styczna do każdej jego krawędzi (rys. 1)?

Przez czworościan rozumiemy oczywiście dowolny ostrosłup o podstawie trójkątnej.

Nie da się ukryć, że nie z każdym czworościanem ta sztuka nam się uda. A z którymi? Jak to możliwe najprościej sprawdzić? Jest wiele sposobów. Podamy tu trzy.

Równoważne są mianowicie na przykład następujące warunki:

(1) Dla danego czworościanu istnieje sfera styczna do jego wszystkich krawędzi.

(2) Okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne (rys. 2).

(3) Istnieją cztery, parami styczne sfery o środkach w wierzchołkach czworościanu.

(4) Sumy długości trzech par skośnych krawędzi czworościanu są równe, czyli  $AB + CD = AC + BD = AD + BC$  (rys. 3).

Przytoczone kryteria są dość wygodne w użyciu. Wypadałoby je jednak udowodnić.

Wszystkie wynikania „na dół”, czyli  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$  są w zasadzie oczywiste. Wystarczy zatem udowodnić wynikanie  $(4) \Rightarrow (1)$ .

Dowód opiera się na prostym fakcie: jeśli mamy okrąg wpisany w kąt, to odcinki  $PA$  i  $PB$  są przystające (rys. 4).

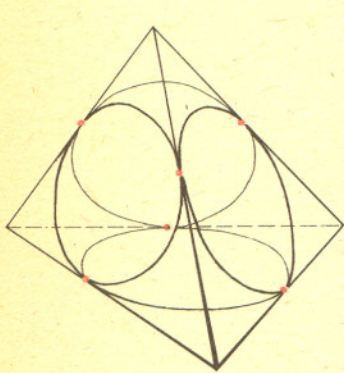
W konsekwencji, jeśli mamy okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$ , to otrzymujemy tu trzy pary odcinków przystających (rys. 5).

Zauważmy, że jest i odwrotnie: jeśli punkty  $P, Q, R$ , należące odpowiednio do boków trójkąta  $ABC$ , dzielą te boki na odcinki odpowiednio przystające (rys. 6), to punkty te są punktami styczności boków trójkąta do okręgu wpisanego (rys. 5). Gdyby bowiem na przykład punkt  $R$  przesunąć nieco w stronę punktu  $A$ , to i punkt  $Q$  też należałoby przesunąć ku punktowi  $A$ , bo wszak odcinki  $AR$  i  $AQ$  powinny być przystające. Wtedy jednak punkt  $P$  należałoby, z tego samego powodu, z jednej strony przesuwać ku punktowi  $B$ , z drugiej zaś strony — ku punktowi  $C$ , co jest raczej niemożliwe.

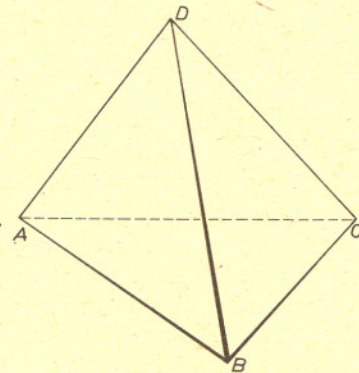
Weźmy teraz dowolny trójkąt  $ABC$  i niech punkty  $P, Q, R$  będą punktami styczności jego boków do okręgu wpisanego. Weźmy też trójkąt  $ABD$ , taki, by  $AD + BC = AC + BD$ . Odłóżmy na bokach  $AD$  i  $BD$  odcinki, jak na rysunku 7. Wówczas  $DQ'' = DP''$ . Wobec tego punkty  $R, Q', P'$  są punktami styczności boków trójkąta  $ABD$  do okręgu weń wpisanego. W rezultacie otrzymujemy, że prosta  $AB$  jest prostopadła do prostej  $FG$  (rys. 8). Fakt ten nie ulegnie zmianie, nawet jeśli zaczniemy trójkąt  $ABD$  obracać wokół prostej  $AB$  i trójkąty  $ABC$  i  $ABD$  będą leżały w różnych płaszczyznach. Wtedy jednak proste prostopadłe odpowiednio do tych płaszczyzn, poprowadzone przez punkty  $F$  i  $G$  przetną się (rys. 9).

I to już w zasadzie wszystko, bo stąd wynika, że jeśli mamy czworościan spełniający warunek (4), to proste prostopadłe do jego ścian, poprowadzone odpowiednio przez środki okręgów wpisanych w te ściany, spotykają się w jednym punkcie. I punkt ten, jako jednakowo oddalony od wszystkich krawędzi czworościanu, będzie środkiem poszukiwanej przez nas sfery.

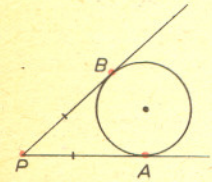
I na koniec zadanie — zadanie, które w pierwszej chwili może się wydać nie związane z omawianymi powyżej faktami: Dana jest hiperbola o ogniskach  $F$  i  $G$ . Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty  $FGA$ , gdzie punkt  $A$  jest dowolnym punktem jednego z ramion hiperboli, leżą na prostej stycznej do tego ramienia hiperboli w jego wierzchołku  $P$  (rys. 10).



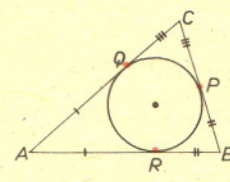
Rys. 2



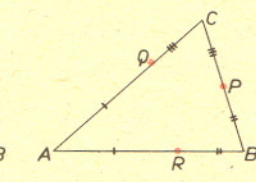
Rys. 3



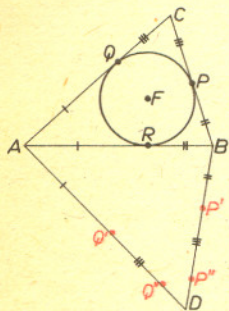
Rys. 4



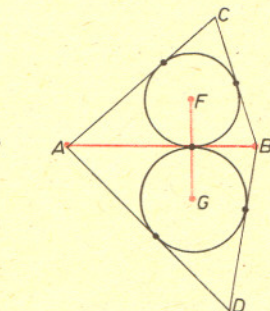
Rys. 5



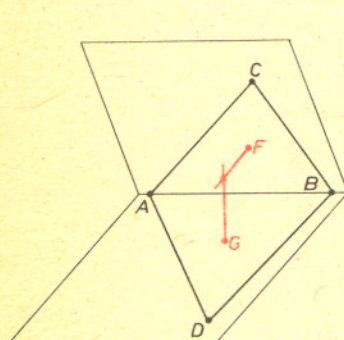
Rys. 6



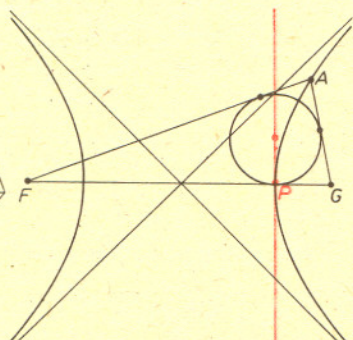
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



## Czytelnicy proponują

Pan Witold Bednarek z Łodzi znalazł trzy liczby o ciekawej własności

$$\sqrt[2]{81} = 8 + 1$$

$$\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2$$

$$\sqrt[4]{2401} = 2 + 4 + 0 + 1$$

i zapytuje, czy są inne liczby  $n$ -cyfrowe ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) takie, że ich pierwiastek  $n$ -tego stopnia jest sumą ich cyfr.

Innych takich liczb nie ma. Łatwo wyliczyć, że  $n$ -ty pierwiastek takiej liczby musi być liczbą jednocyfrową. Czy może być nią  $9^n$  ma  $[n \cdot \log 9] + 1$  cyfr ( $[x]$ , to część całkowita  $x$ ), więc gdy  $n \cdot \log 9 + 1 < n$ , rozwiązań na pewno nie będzie. Z tej nierówności wyliczamy  $n \geq 22$ ; zatem wystarczy przebadać potęgi  $9^2, 9^3, 9^4, \dots, 9^{21}$ . Mamy  $9^6 = 531441$ , obliczając trzycyfrowe końcówki kolejnych potęg dziesiątki znajdujemy, że wszystkie mają sumę co najmniej 9 oprócz  $9^0 = \dots 401$  i  $9^8 = \dots 121$ . Bezpośrednim rachunkiem wykluczamy i te potęgi.

Dla  $n = 8$  mamy mniej rachunków, bo z nierówności  $n \cdot \log 8 + 1 < n$  wychodzi  $n > 1/(1 - \log 8) \approx 10,3$ . Wystarczy przeglądnąć zatem liczby  $8^2, 8^3, \dots, 8^{10}$ . Dla  $n = 7$  starczy do 6, dla  $n = 6$  do 4 (stwierdzamy po drodze, że  $\sqrt[3]{216} = 2 + 1 + 6 - 3$  i  $\sqrt[3]{125} = 1 + 2 + 5 - 3$ ) itd. Praca z użyciem kalkulatora zajmuje pięć minut, a bez niego ze dwadzieścia.

Pan Marek Berezowski z Gliwic przypomniał nam uproszczony sposób podnoszenia do kwadratu liczb zakończonych na 5:

liczbę utworzoną z cyfr stojących przed końcówką 5 należy pomnożyć przez liczbę o 1 od niej większą. Następnie trzeba dopisać do iloczynu 25:

$$35^2 = 3 \cdot 4 \mid 25 = 1225,$$

$$65^2 = 6 \cdot 7 \mid 25 = 4225,$$

$$105^2 = 10 \cdot 11 \mid 25 = 11025.$$

Uzasadnienie przepisu jest natychmiastowe:  $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$ .

Natomiast Andrzej Stelmaszczyk z Zabrze zauważył, że w wierszach trójkąta Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

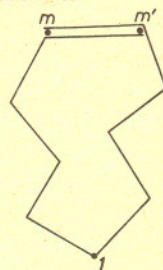
„stoją” kolejne potęgi  $11 : 11^2 = 121, 11^3 = 1331, 11^4 = 14641$  i żałuje, że następny wiersz  $1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$  już tej własności nie ma. Jednak wystarczy spojrzeć na to nieco inaczej, aby tę prawidłowość odzyskać: jeśli jedynki z dziesiątek dodamy do poprzednich miejsc, to otrzymamy prawidłowy wynik  $161051$ .



### Rozwiązanie zadania M 347.

Dla dowolnego zbioru  $n - 2$  transpozycji  $(k_1, l_1), \dots, (k_{n-2}, l_{n-2})$  utwórzmy graf  $G$  o wierzchołkach  $1, \dots, n$  i łukach  $(k_1, l_1), \dots, (k_{n-2}, l_{n-2})$  (punkty  $1, \dots, n$  są połączone rozłącznymi łukami  $(k_1, l_1), \dots, (k_{n-2}, l_{n-2})$  i tylko nimi). Przypuśćmy teraz, że graf ten jest spójny, co oznacza, że każde dwa wierzchołki są połączone pewną drogą. W szczególności każdy wierzchołek  $m \neq 1$  jest połączony pewną drogą z wierzchołkiem 1. Wybierzmy najkrótszą taką drogę i przyporządkujmy  $m$  jej początkowy łuk  $(m, m')$ . Łatwo zauważyć (patrz rysunek), że łuki przyporządkowane różnym wierzchołkom muszą być różne, co przeczy konstrukcji, w myśl której nasz graf ma tylko  $m - 2$  łuki. Wynika stąd, że istnieje wierzchołek  $m$ , którego nie można połączyć drogą

z wierzchołkiem 1. Gdyby teraz transpozycję  $(1, m)$  można było przedstawić jako złożenie naszych transpozycji  $(k_1, l_1), \dots, (k_{n-2}, l_{n-2})$ , to śledząc drogę elementu  $m$  przy kolejnych transpozycjach z tego złożenia otrzymalibyśmy w  $G$  drogę łączącą  $m$  z 1, co jest niemożliwe.



Zaznaczone drogi nie mogą być najkrótsze!



# Jeśli Słońce zmniejszyć do rozmiarów grochu...

Dr Tomasz

CHLEBOWSKI

Popularyzacja egzotycznych procesów zachodzących w Kosmosie zmusza astronomów do poszukiwania obrazowych porównań, aby ułatwić Czytelnikowi wyobrazenie sobie ogromnych odległości, gęstości, mas i tak dalej. Chciałbym dzisiaj przedstawić kilka przykładów tego typu pomagania wyobraźni. Większość z nich zaczerpnąłem z popularnych książek o astronomii, niektóre jednak pochodzą z oryginalnych publikacji ogłaszanych w specjalistycznych czasopiśmie.

Zacznijmy od współczesnych instrumentów astronomicznych. Obecnie budowane radioteleskopy (współpracując ze sobą) osiągają zdolność rozdzielczą  $10^{-4}$  sekundy łuku. Prawda, że ta informacja niewiele daje? Natomiast jeśli powiemy, że przy użyciu takiego systemu teleskopów można określić z Ziemi, czy *Delta* leżąca na Księżycu (jeśli ktoś ją tam by zabrał i jeśli świeciłaby w zakresie radiowym) wydrukowana jest w formacie A4 czy A5, to ta informacja mówi już więcej. Odległość Księżyca od Ziemi potrafimy obecnie mierzyć z dokładnością do kilkunastu centymetrów (chodzi oczywiście o odległość do określonego punktu na jego powierzchni).

Projektowane obecnie instrumenty mają imponujące parametry. Duży Teleskop Kosmiczny, który będzie wystrzelony w Kosmos prawdopodobnie w 1986 roku, ma zwierciadło o średnicy ok. 2,5 m wyszlifowane tak dokładnie, że gdyby z tą samą względną dokładnością wyrównać powierzchnię Polski, to największe odchylenia od idealnego kształtu miałyby mniej niż 2,5 cm. Czułość takich instrumentów jest również ogromna. Projektowany system radioteleskopów CYKLOP będzie mógł bez trudu „podsłuchiwać” lokalne programy telewizyjne i radiowe (o ile takie istnieją) z hipotetycznych planet krążących wokół kilku najbliższych gwiazd.

Wspomnijmy tu o pływach skorupy ziemskiej wywołanych oddziaływaniem Księżyca. Tarcie wewnętrzne (w skorupie ziemskiej, wodach, a także atmosferze) towarzyszące ruchom pływowym powoduje zamianę energii kinetycznej rotującej Ziemi na ciepło w tempie wystarczającym do ogrzania w ciągu każdej sekundy półtora tysiąca ton wody o 100 stopni. Siła przyciągania Ziemi i Księżyca jest tak duża, że gdyby nagle miała zniknąć, a Ziemia chcieliby utrzymać własnego satelitę na orbicie, musieliby przywiązać go liną, np. konopną, o grubości około 500 km! Mieszkańcy Jowisza chcąc utrzymać się wokół Słońca musieliby użyć liny o grubości 23 000 km, prawie 2 razy większej niż średnica Ziemi. Ciekawe, jak by to zrobili!?

Ziemia znajduje się pod ciągłym ostrzałem cząstek promieniowania kosmicznego; najszybsze cząstki niosą ok.  $10^{20}$  eV. Po prostu liczba. Jednak jest to tyle, że jeden proton przekazując tę energię mógłby ogrzać 1 gram wody o 4 stopnie. Promieniowanie radiowe odbierane przez nas z Kosmosu ma natomiast niewiarygodnie małe natężenie. Praca wykonana przy podniesieniu tego numeru *Delta* o kilkanaście centymetrów jest większa niż energia zebrana przez wszystkie radioteleskopy na Ziemi (razem) od początku radioastronomii.

A energie procesów zachodzących we Wszechświecie są niewiarygodnie duże. Weźmy dla przykładu gwiazdy neutronowe, bardzo gęste (jak — o tym niżej) obiekty o promieniach ok. 10 km. Ich atmosfery mają kilka centymetrów grubości. Przynajmniej niektóre z tych gwiazd (pulsary) wirują bardzo szybko wokół osi — najszybsza z nich obraca się ok. 600 razy na sekundę. Okres ich obrotu jest bardzo stabilny. Gdyby regulować według nich nasze zegarki, różnica 1 s względem czasu atomowego wystąpiłaby po miliardach lat (mowa tu o najbardziej stabilnych pulsarach, przy założeniu, że zmiany okresu są stałe). Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni gwiazdy neutronowej jest tak duże, że praca wykonana przy podniesieniu tego egzemplarza *Delta* na wysokość 1 cm ponad powierzchnię gwiazdy jest na Ziemi równoważna 30 tysiącom wypraw 100 kilogramowego człowieka na Mount Everest (z poziomu morza). Jasność radiowa pulsara w Krabie i jego magnetosfery jest tak duża, że gdyby całą tę otoczkę magnetyczną pokryć najpotężniejszymi antenami nadawczymi o powierzchniach efektywnych 1 ha każda (byłoby ich 100 milionów), to i tak ich łączna moc wynosiłaby zaledwie jedną dziesięciomiliardową mocy promieniowania radiowego pulsara.

Wspomnieliśmy o gęstościach gwiazd neutronowych. Warto je tu przedstawić na tle ogromnej rozpiętości gęstości występujących w Kosmosie. Najniższe gęstości występują w przestrzeni międzygalaktycznej. Trudno jest tam znaleźć jedną cząstkę w sześcianie o boku 1 m. Gęstość materii międzygwiazdowej jest milionkrotnie większa. Średnia gęstość gwiazd — nadolbrzymów wynosi  $10^{-7}$  g/cm<sup>3</sup>; jest to ok. 10 tysięcy razy mniej niż gęstość powietrza w warunkach normalnych.

Kilka lat temu odkryto istnienie atmosfery na Merkury, oceniono jej gęstość i ciśnienie na powierzchni —  $2 \times 10^{-9}$  milibara. Znowu ta liczba mało mówi w porównaniu ze stwierdzeniem, że *cała* atmosfera Merkurego ma masę kilku ton, taką samą masę ma powietrze zawarte w sześcianie o boku 20 m (w warunkach normalnych na Ziemi). W drodze ku coraz wyższym gęstościom mijamy białe karły, średnia ich gęstość to 10 ton sprasowanych w 1 cm<sup>3</sup>. Z jednego litra takiej materii można by wybudować transatlantyk. Wszelkie rekordy biją jednak





wspomniane już gwiazdy neutronowe (nie mówiąc o czarnych dziurach, gdzie trudno określić sens fizyczny pojęcia gęstości) — tam masa Słońca mieści się w kuli o promieniu 10 km. Z jednej łyżeczki do herbaty zaczerpniętej tam materii można by zbudować samochody dla wszystkich ludzi żyjących na Ziemi.

Mimo że gęstości obłoków międzygwiazdowych są znikome, to ich rozmiary są na tyle duże, że masy tych obłoków są znowu niewiarygodnie ogromne. Kilka lat temu odkryto ślady związku  $C_2H_5OH$  (znanego niektórym pod nazwą alkoholu etylowego) w obłoku Sagittarius B2 w pobliżu centrum Galaktyki. Amerykański astronom J. Greenstein chcąc na łamach czasopisma „The Astrophysical Journal Letters” unaooczyć, jak dużo tego związku znajduje się w chmurze Sgr B2, napisał, że jest tam  $10^{28}$  ćwiartek tego związku i „przewyższa to wszystko, co uzyskali ludzie na drodze fermentacji alkoholowej, odkąd istnieje zapis historii”. To jest eufemizm, proszę Państwa! W obłoku Sgr B2 jest tyle alkoholu, że gdyby przerobić go na szampan i gdyby każdy mieszkaniec Ziemi wybudował sobie basen o powierzchni Polski i głębokości 1 m (większość mieszkańców Ziemi to dzieci — żeby się nie potopiły!), to mógłby w tym basenie kąpać się przez całe życie, zmieniając w nim szampan co 10 dni.

Przykładów takich można mnożyć tysiące. Każdy chyba przyzna, że lepiej trafiają do wyobraźni niż suche liczby.

## Klub 44

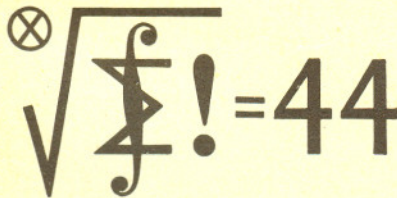
Czołówka ligi zadaniowej „Klub 44”

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 5/1983

Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	39,42pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	38,33pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	36,82pkt
Marian Roman	- Ełk	35,98pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	35,89pkt
Marek Gażeczki	- Milanówek	32,02pkt
Marek Prauza	- Poraj	31,77pkt

Współczynniki trudności zadań:

55 - 2,27    56 - 2,46    57 - 2,28



### Nasza okładka:

**Mgławica Helix (NGC 7293)** ma widomą średnicę prawie taką jak tarcza Księżyca, rozkład koloru (niebieski w centrum, coraz bardziej czerwony na zewnątrz) pozwala na wyznaczenie temperatur i obfitości pierwiastków w mgławicy. W zewnętrznych częściach widoczne są białe-czerwone smużki, wszystkie skierowane od centralnej gwiazdy oświetlającej gaz mgławicy.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfi”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Zadania nr 67, 68, 69

Termin nadsyłania rozwiązań 31.01.1984 r.

67. Szereg liczbowy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ma tę własność, że każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, równa się sinusowi sumy wyrazów poprzedzających:  $a_n = \sin(a_1 + \dots + a_{n-1})$ . Wykazać zbieżność tego szeregu i przedyskutować zależność jego sumy od wartości wyrazu początkowego  $a_1$ .

68. Każdy bok trójkąta  $ABC$  o danym polu  $S$  podzielono na trzy równ

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2B = AB/3, \quad BB_1 = B_1B_2 = B_2C = BC \\ CC_1 = C_1C_2 = C_2A = CA/3.$$

Obliczyć pole części wspólnej trójkątów  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$ .

69. Do turnieju w pewnej dyscyplinie sportu przystąpiło 1024 zawodników. Ósma część spośród nich to zawodowcy, reszta — amatorzy. W pojedynku z amatorem zawodowiec zwycięża z prawdopodobieństwem 0,6; remisów nie ma. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym. Uczestnicy otrzymują numery startowe od 1 do 1024. W pierwszej rundzie rozgrywek nr 1 walczy z nr 2, nr 3 z nr 4 itd. W drugiej rundzie zwycięzca meczu 1/2 spotyka się ze zwycięzcą meczu 3/4, zwycięzca meczu 5/6 ze zwycięzcą 7/8 itd. Triumfatorzy wymienionych spotkań drugiej rundy tworzą pierwszą parę przeciwników w trzeciej rundzie itd. Runda dziesiąta to pojedynczy mecz — finał turnieju. Zawodowcy zostali rozstawieni i otrzymali numery startowe będące wielokrotnościami liczby 8. Co jest bardziej prawdopodobne: zdobycie pucharu przez zawodowca czy przez amatora?

Zadanie 68 przysłał nasz Czytelnik pan Piotr Bernatowicz z Zambrowa.