



## SPIS TREŚCI

NUMERU 10 (118)

Inwersje	str. 1
20 lat temu odkryto pierwsze kwazary <i>dr Marek Sikora</i>	str. 2
Zadania	str. 5
Klub 44	str. 6
Inwersja, stożkowe i inni <i>dr Jerzy Bednarczuk</i>	str. 7
Solitary w optyce <i>dr hab. Róża Trautman</i>	str. 10
Mizar MSE (2)	str. 13
Okrąg Feuerbacha ... <i>dr Michał Szurek</i>	str. 14
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Elektrony Augera**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

### Komitet Redakcyjny:

dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmokr  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzembowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Paczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
prof. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
doc. dr Kazimierz Stepiński

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wolska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Jerzy Ryll  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 4792/83 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
    - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
    - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

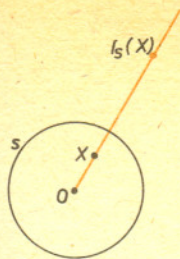
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

## Inwersje



Przez  $I_s$ , gdzie  $s$  jest okręgiem o środku  $O$  i promieniu  $r$  rozumiemy będziemy przekształcenie płaszczyzny bez punktu  $O$  na nią samą, spełniające następujący warunek:

Dla dowolnego, różnego od  $O$ , punktu  $X$  punkt  $I_s(X)$  leży na półprostej  $OX$  i  $OX \cdot OI_s(X) = r^2$ .

Przekształcenie to nazywa się *inwersją* względem okręgu  $s$ , a czasem też *symetrią* względem  $s$ . Ta ostatnia nazwa bierze się stąd, że jest to *inwolucja* — czyli  $I_s(I_s(X)) = X$  — tak jak i symetrie.

Dla badania inwersji dogodnie jest używać nazwy *łańcuch*, która tu będzie oznaczać zarówno prostą, jak i okrąg. Otóż inwersje przeprowadzają łańcuchy w łańcuchy (oczywiście ewentualnie bez punktu  $O$ ).

Aby to udowodnić, dogodnie jest skorzystać z następującego lematu

$$\sphericalangle OXY = \sphericalangle OI_s(Y) I_s(X).$$

Ci z Czytelników, którzy nie umieją (bądź nie chcą) przeprowadzić dowodu, znajdą go w numerze. W innym miejscu jest też podany (oznaczony numerem 1) szkic dowodu, że obrazem łańcucha jest łańcuch. Ciekawym problemem jest też stwierdzenie, jakie łańcuchy przy  $I_s$  przechodzą na siebie (choć, być może, ich punkty się przemieszczają). A oto odpowiedź:

Łańcuch przechodzi na siebie przy  $I_s$ , gdy jest to  $s$ , bądź jest on do  $s$  *ortogonalny* (co oznacza przecinanie się linii pod kątem prostym).

Szkic dowodu (z numerem 2) gdzieś w numerze. Warto się o tym przekonać, albowiem można dzięki powyższemu twierdzeniu określić  $I_s$  bez używania  $O$  i  $r^2$  — tylko za pomocą  $s$ :

Jeśli ortogonalne do  $s$  łańcuchy  $p$  i  $q$  przechodzą przez  $X$ , to ich drugim punktem przecięcia jest  $I_s(X)$ .

Istotnie, jeśli  $X \in p \cap q$ , to  $I_s(X) \in I_s(p) \cap I_s(q)$ , ale wobec ortogonalności  $I_s(p) = p$  i  $I_s(q) = q$ .

Zauważmy, że nasza druga definicja obejmuje obok inwersji także symetrie osiowe.

Przy inwersji bardzo bliskie sobie punkty mogą się znaleźć ogromnie daleko (np. gdy leżą tuż, ale po przeciwnych stronach  $O$ ). Jeżeli to się nam nie podoba, można złu zaradzić traktując inwersję na płaszczyźnie jako płaski obraz pewnego przekształcenia sfery (czyli powierzchni kuli), które też zresztą jest nazywane inwersją. W tym celu należy umieć zrećtnie przekształcać płaszczyznę na sferę i sferę na płaszczyznę.

Stosowaną metodą jest *rzut stereograficzny*.

Dokonuje się go przez postawienie na płaszczyźnie sfery i ustalenie, że punkt  $X$  płaszczyzny i punkt  $X'$  sfery odpowiadają sobie, gdy można przez nie poprowadzić prostą przechodzącą przez najdalszy od płaszczyzny punkt sfery.

Rzut stereograficzny jest *wiernokątny*, co oznacza, że odpowiadające sobie linie na płaszczyźnie i na sferze przecinają się pod tym samym kątem (szkic dowodu w numerze, oznaczony 3). Ponadto łańcuchom odpowiadają na sferze okręgi (szkic dowodu oznaczony jest 4).

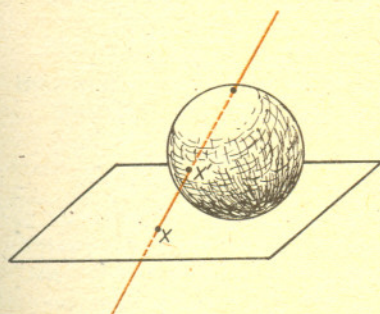
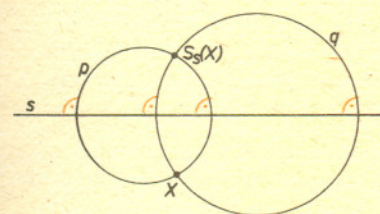
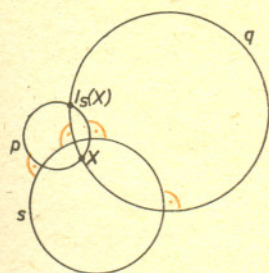
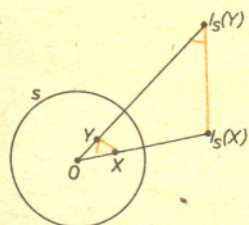
Wobec tego nasza druga definicja inwersji da nam, zastosowana do sfery, to samo co przeniesienie inwersji z płaszczyzny na sferę. Nawet coś lepszego — punkt  $O$  też będzie mógł być przekształcony i jego obrazem okaże się najwyższy punkt sfery. Co więcej — teraz bliskie punkty będą przez inwersję przekształcane na bliskie. A symetrii osiowych nie będzie można odróżnić od „normalnych” inwersji.

Ze względu na te udogodnienia chciałoby się sytuację ze sfery przenieść na płaszczyznę. W tym celu należałoby dodać do płaszczyzny „dodatkowy” punkt odpowiadający, z założenia, najdalszemu punktowi sfery i „zamykający” wobec tego wszystkie proste. Po wykonaniu tego uzupełnienia łańcuchy będą wszystkie jednakowe, inwersje nie będą odróżnialne od symetrii osiowych. Taki system geometryczny nazywany jest geometrią Möbiusa.

*A teraz pytanie:* nie mamy wątpliwości, że inwersje na sferze są przekształceniami ciągłymi; czy (nieuzupełnione) inwersje na płaszczyźnie też są ciągłe?

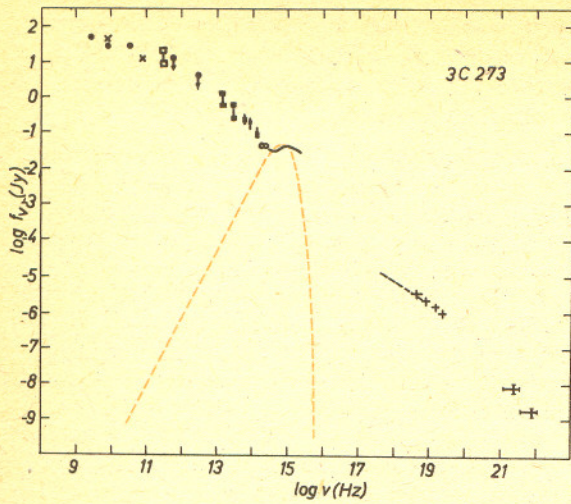
A dla tych, których zainteresowały inwersje, dwa trudniejsze problemy (bez rozwiązań w numerze):

1. Wykazać, że inwersje są wiernokątne.
2. Wykazać, że każdy punkt, który można skonstruować z danych punktów cyrklem i linijką, może być skonstruowany samym cyrklem.

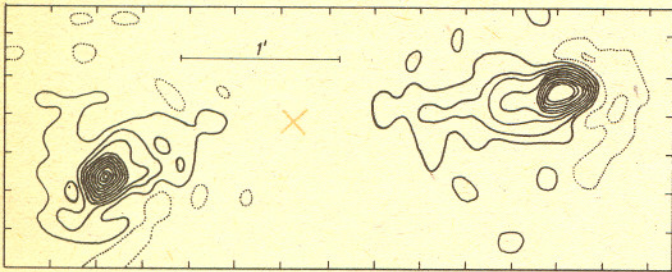


# 20 lat temu odkryto pierwsze kwazary

Dr Marek SIKORA



Rys. 1 Widmo kwazara 3C 273. Na osi pionowej odłożono strumień w janskach ( $1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ ). Dla porównania zaznaczono kolorem widmo ciała czarnego o temperaturze 10 tysięcy K (w dość dobrym przybliżeniu odpowiadające promieniowaniu gwiazdy).



Rys. 2 Mapa radiowa radiogalaktyki Cyg A. Krzyżyk oznacza pozycję jądra galaktyki.

Kwazary są to najpotężniejsze generatory energii we Wszechświecie, jednocześnie na tyle odległe i na tyle małe, że na kliszach wyglądają jak słabe gwiazdy. Pierwsze odkrywane były na drodze identyfikacji radioźródeł z punktowymi źródłami optycznymi. Kiedy jednak okazało się, że prawie wszystkie są bardzo jasne w bliskim ultrafiolecie oraz mają silne i bardzo szerokie linie emisyjne (własności nie spotykane w gwiazdach), rozpoczęto intensywne poszukiwania takich obiektów w już istniejących katalogach optycznych bądź dokonując odpowiednich optycznych przeglądów nieba. Większość znanych dziś kwazarów odkryta została w ten właśnie sposób i okazało się, że stosunkowo rzadko ( $\sim 10\%$ ) towarzyszy im silne promieniowanie radiowe. Natomiast wspólną ich cechą, oprócz wspomnianych wyżej własności optycznych, jest silne promieniowanie rentgenowskie, czego dowiodły obserwacje przeprowadzone w latach 1978—1981 z orbitującego dookoła Ziemi teleskopu rentgenowskiego „Einstein”. Kwazary świecą silnie także w podczerwieni i przynajmniej niektóre — w dziedzinie gamma. Widma kwazarów są więc bardzo rozciągnięte i nie mogą być tłumaczone żadnymi procesami gwiazdnymi (rys. 1).

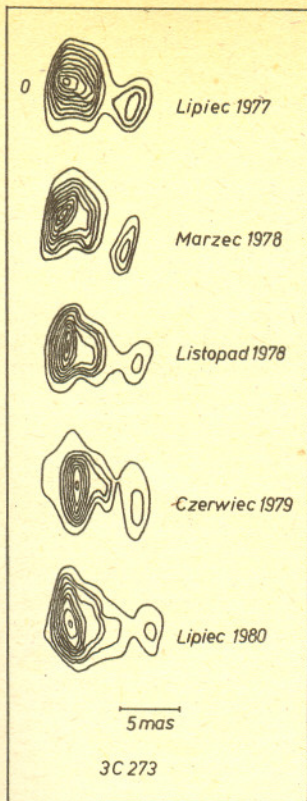
Jeszcze przed odkryciem kwazarów dysponowano danymi obserwacyjnymi wskazującymi na dużą aktywność niektórych galaktyk. Znane były galaktyki Seyferta, charakteryzujące się silnymi i szerokimi liniami emisyjnymi produkowanymi w „punktowych” jądrach, których jasności nierzadko dorównują jasnościom całych galaktyk. Znane były też radiogalaktyki, czyli galaktyki, którym towarzyszą rozległe struktury radiowe o jasnościach  $10^{41} - 10^{45} \text{ erg/s}$  (dla porównania: jasność radiowa naszej Galaktyki wynosi około  $10^{38} \text{ erg/s}$ ). Często struktury te są podwójne, tzn. składają się z dwóch radioobłoków leżących po przeciwnych stronach galaktyki (rys. 2).

Dość szybko zwrócono uwagę na liczne podobieństwa między formami aktywności w galaktykach i kwazarach; „punktowe” źródła centralne i widma liniowe to jest to, co łączy kwazary z galaktykami Seyferta, rozległe podwójne struktury radiowe wskazują z kolei na związek niektórych radiowych kwazarów z radiogalaktykami. Nic więc dziwnego, że już od chwili odkrycia pierwszych kwazarów (3C 273 i 3C 48) sporo ludzi podejrzewało, że znajdują się one w jądrach galaktyk. Potwierdzeniem tego stały się obserwacje słabych poświat optycznych widocznych w otoczeniu najbliższych kwazarów. Rozmiarami i jasnościami poświaty te odpowiadają typowym galaktykom, a ostatecznego dowodu na ich gwiazdną naturę dostarczyło zeszloroczne odkrycie gwiazdnych linii absorpcyjnych w poświacie kwazara 3C 48. Trudności związane z identyfikacją populacji gwiazdnych wokół kwazarów biorą się stąd, że kwazary przeważnie są bardzo odległymi obiektami oraz że ich jasności dominują zdecydowanie nad otaczającą je strukturą galaktyczną: od najbliższych kwazarów dzielą nas dziesiątki milionów lat świetlnych, od najdalszych — ponad miliard lat świetlnych, a jasności zawierają się pomiędzy  $10^{45} \text{ erg/s}$  a  $10^{48} \text{ erg/s}$ , świecą więc od 10 do 10000 razy silniej niż nasza Galaktyka.

Niemalym zaskoczeniem było odkrycie zmienności niektórych kwazarów. Z prostych bowiem rozważań bazujących na zasadzie przyczynowości otrzymuje się, że rozmiary obiektów zmiennych, wyrażone w jednostkach świetlnych ( $R/c$ ), nie mogą być większe niż czas zauważalnej fluktuacji jasności. Obserwowane często zmiany jasności kwazarów w skali czasowej rzędu jednego roku „ograniczają” więc ich rozmiary do co najwyżej jednego roku świetlnego.

Znane są również kwazary wykazujące dynamiczne zmiany jasności w ciągu tygodni, a niekiedy nawet w ciągu dni i godzin. Obiekty te oznaczane są często skrótem OVV (optically violent variables). Wyróżniają się one dodatkowo spośród „spokojnych” kwazarów tym, że towarzyszą im silne, zwarte i zmienne radioźródła pokrywające się pozycyjnie z obrazem optycznym kwazarów, a strumień promieniowania optycznego, radiowego i w podczerwieni jest w dużym stopniu spolaryzowany. Podobne własności mają tzw. lacertydy, obiekty, z których

Zarówno odległości, jak i jasności obliczane są na podstawie znajomości przesunięć linii emisyjnych ku czerwieni,  $z = \Delta\lambda/\lambda$ , które interpretuje się jako efekt dopplerowski związany z ucieczką kwazarów spowodowaną ekspansją Wszechświata. Większość znanych kwazarów ma  $z \gtrsim 1$  i nie można do obliczania ich odległości stosować liniowego prawa Hubble’a  $d = cz/H_0$ , gdzie  $H_0$  — stała Hubble’a, lecz trzeba używać bardziej skomplikowanych formuł uwzględniających nie tylko tempo, ale i dynamikę ekspansji charakteryzowaną przez tzw. parametr deceleracji  $q$ .



Rys. 3 Ekspansja „ponadświetlna” wyrzutu z 3C 273 (mas: mili-arc-second = 0,001'')

Prędkość relatywistyczna oznacza tu prędkość porównywalną z prędkością światła. Kolimację wiązki można tu określić jako odwrotność największego z kątów między torami cząstek, jakie się na nią składają.

$M_{\odot}$  — masa Słońca ( $1 M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}$  g)

### Inwersje — lemat

Ponieważ  $OX \cdot OI_s(X) = r^2 = OY \cdot OI_s(Y)$ , więc

$$\frac{OY}{OX} = \frac{OI_s(X)}{OI_s(Y)}$$

i, wobec wspólnego kąta, trójkąty  $OXY$  i  $OI_s(Y) I_s(X)$  są podobne.

część udało się zlokalizować w jądrach gigantycznych galaktyk eliptycznych, a różniące się od OVV jedynie brakiem silnych i szerokich linii emisyjnych. Czy jednak ograniczenia rozmiarów kwazarów, wynikające ze skali czasowej zmienności, stosują się w każdej sytuacji fizycznej, a w szczególności do OVV i lacertyd?

Odpowiedź na to pytanie została niejako podsunięta „z zewnątrz”. Astronomowie zajmujący się problemem rozległych radioźródeł zapostulowali konieczność ciągłego ich zasilania, aby uniknąć zbyt szybkiego ich wygaśnięcia. Brytyjski astronom — teoretyk prof. Martin Rees zasugerował, że zasilanie to może iść ze źródła centralnego w postaci strugi cząstek. I rzeczywiście radioastronomowie zaobserwowali wąskie, długie struktury radiowe (dżety) rozciągające się pomiędzy kwazarami i jądrami radiogalaktyk a zewnętrznymi radioobłokami znajdującymi się w odległościach dochodzących do kilku milionów lat świetlnych.

Następnie interferometryczne obserwacje radiowe centralnych zwartych radioźródeł pokazały, że ich struktury są często wydłużone tworząc swego rodzaju mini-dżety o rozmiarach rzędu kilku lat świetlnych. Gdy stwierdzono, że dość dokładnie leżą one na osi symetrii zewnętrznych struktur radiowych, utwierdzono się w przekonaniu, że rzeczywiście mamy do czynienia z transportem materii z centralnego źródła. W międzyczasie świat dowiedział się, że astronomowie zaobserwowali prędkości ponadświetlne. O prędkościach takich doniosły obserwacje kilku stosunkowo bliskich, silnych i zmiennych źródeł centralnych. W ciągu kilku lat stwierdzono u niektórych z nich zmiany strukturalne przejawiające się wzrostem separacji dwóch „pików” radiowych (rys. 3). Mnożąc prędkość kątową rozszerzającej się struktury przez jej odległość od nas otrzymano tangencjalną (poprzeczną) składową prędkości kilka, a w jednym przypadku nawet kilkanaście razy przekraczającą prędkość światła. Zjawisko to znajduje proste wyjaśnienie w modelu, w którym mini-dżet jest relatywistyczny (materia przemieszcza się w nim z prędkością  $v > 0,7c$ ) i tworzy mały kąt z naszą linią widzenia (patrz *Delta* 9/1982). Rzeczywista prędkość jest (oczywiście) mniejsza niż  $c$ . W modelu tym jeden pik radiowy związany jest z początkiem dżetu lub źródłem centralnym, a drugi — z niejednorodnością (zageszczenie, fala uderzeniowa) poruszającą się wzdłuż dżetu z prędkością nieco większą niż materia. Przy powyższych założeniach świecenie niejednorodności i jego fluktuacje zostają silnie wzmocnione efektem dopplerowskim. Pokazano, że takie niejednorodności mogą świecić także w podczerwieni, w dziedzinie optycznej i dalszych nawet zakresach. Tak czy inaczej interferometryczne obserwacje radiowe pokazują, że w obszarze centralnym o promieniu mniejszym od jednego roku świetlnego strugi cząstek mają relatywistyczne prędkości i są skolimowane. Ich kolimacja i przyspieszenie powinny więc zachodzić znacznie „głębiej”, dokąd, ze względu na ograniczoną zdolność rozdzielczą, nawet przy udziale radiowych systemów interferometrycznych o bazach międzykontynentalnych nie możemy bezpośrednio zajrzeć.

Do rozszyfrowania tego czegoś w środku trzeba więc dochodzić drogami pośrednimi, przez poszukiwanie takich własności kwazarów, które by w istotny sposób weryfikowały stosowalność proponowanych modeli. Jedną z takich własności jest czas życia kwazarów. Z długości niektórych dżetów wynika, że ich produkcja musi trwać co najmniej 10 mln lat, nawet przy założeniu relatywistycznej prędkości przemieszczania się materii na całej ich długości. Co więcej, w ciągu tak długiego okresu czasu powinno być zachowane tempo i kierunek wyrzutu, na co wskazują długie, prostoliniowe dżety niewiele zmieniające swą jasność na całej swej długości. Inną, nie mniej istotną własnością jest masa kwazara. Minimalną jej wartość można oszacować z równości Eddingtona wyrażającej równowagę pomiędzy siłami związanymi z ciśnieniem promieniowania a siłami grawitacyjnymi, działającymi na cząstki świecącego obiektu. Wynika z niej, że  $M \gtrsim (L/L_0) \cdot M_{\odot}$ , gdzie  $L$  jest jasnością kwazara (w erg/s), a  $L_0 = 10^{38}$  erg/s, a stąd, żeby utrzymać w centrum jądra materię produkującą promieniowanie w tempie  $10^{45} - 10^{48}$  erg/s, potrzebne są tam masy nie mniejsze niż  $10^7 - 10^{10} M_{\odot}$ .

Zakładając, że podstawowa struktura kwazara jest taka sama niezależnie od różnic ilościowych, a nawet jakościowych przejawiających się w dominacji poszczególnych form aktywności, w modelach kwazarów powinno się dać:

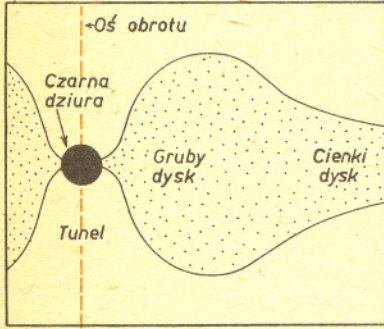
— ułokować masę nie mniejszą niż  $10^7 - 10^{10} M_{\odot}$  w obszarze o promieniu znacznie mniejszym od jednego roku świetlnego,

— produkować w tym obszarze energię w tempie dochodzącym do  $10^{48}$  erg/s, mającą swoje ujście w postaci promieniowania obejmującego bardzo szeroki zakres widma, oraz w postaci skolimowanej relatywistycznej strugi cząstek,

— utrzymać quasi-stacjonarną aktywność i wyróżniony kierunek wyrzutu strugi cząstek w przeciągu co najmniej  $10^7$  lat.

W ciągu 20 lat pojawiły się dziesiątki modeli kwazarów. Postulowano m.in. gęste skupiska gwiazd, w których można by się spodziewać produkcji energii w takich procesach, jak wzajemne zderzenia gwiazd, częste wybuchy supernowych, akrecja (spadek) materii na gwiazdy

neutronowe i czarne dziury pochodzenia gwiazdowego. Proponowano też supermasywne „gwiazdy” czerpiące energię z grawitacyjnego kurczenia się, spiny i magnetoidy będące supermasywnymi wariantami pulsarów, i wreszcie supermasywne czarne dziury wraz z akreującą na nie materią. W obliczu wymienionych wcześniej warunków największe szanse daje się tym ostatnim. W pobliżu czarnych dziur można osiągać nie spotykaną w „nieanihilacyjnych” procesach efektywność zamiany masy spoczynkowej na energię, bo dochodzącą do 40%. Przy takiej wysokiej efektywności akrecja kilkudziesięciu  $M_{\odot}$ /rok jest w stanie zapewnić produkcję energii w tempie odpowiadającym maksymalnym jasnościom kwazarów.

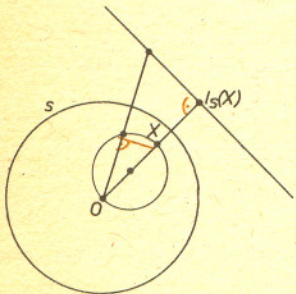


Rys. 4 Model grubego dysku akrecyjnego wokół czarnej dziury (w przekroju).

Czarna dziura z akreującą na nią materią jest układem, który może przejawiać swoją żywotność na wiele różnych sposobów. Jest to uzależnione od takich czynników, jak masa czarnej dziury i jej moment pędu, tempo akrecji, natężenie i struktura pól magnetycznych wzmrożonych w akreującą materię itd. Stąd też wynika cały wachlarz teoretycznych modeli proponujących przeróżne scenariusze akrecji wraz z towarzyszącymi jej wysokoenergetycznymi procesami. Akrecja może być sferyczna bądź dyskowa, dyski mogą być grube i cienkie, mniej lub bardziej stabilne, otoczone termiczną koroną bądź magnetosferą. W przypadku bardzo grubych dysków mamy w pobliżu czarnej dziury konfigurację quasi-sferyczną z wąskim kanałem wzdłuż osi rotacji (rys. 4). W kanałach takich mogą być kolimowane i rozpędzane ciśnieniem promienistym strugi cząstek wyrzucanych z powierzchni dysku. Dżety mogą być również produkowane i kolimowane w wyniku złożonych procesów elektromagnetycznych związanych z dyskową akrecją materii wlokącej ze sobą znaczne ilości pola magnetycznego.

W układzie „czarna dziura — akreująca materia” daje się też odtworzyć charakterystyczne dla kwazarów szerokie widma promieniowania. W modelach dyskowych „optyka i ultrafiolet” są produkowane w samych dyskach, natomiast promieniowanie rentgenowskie i gamma — w gorących koronach dyskowych w wyniku rozpraszania „fotonów dyskowych” na wysokoenergetycznych elektronach korony. Korony mogą być grzane poprzez dyssypację energii wynoszonej z powierzchni dysku w postaci silnych fal akustycznych, magnetohydrodynamicznych bądź w wyniku licznych rozbłysków związanych z niestabilnościami natury magnetycznej (tak jak na Słońcu). Źródłem wysokoenergetycznych elektronów, stanowiących swego rodzaju wzmacniacz fotonowy, mogą być również fale uderzeniowe generowane w rozrzedzonym ośrodku nad dyskiem w zderzeniach obłoków materii lub gwiazd osiągających w pobliżu czarnej dziury prędkości bliskie prędkości światła. Wysokoenergetyczne procesy zachodzą również w dżetach, gdzie fotony radiowe i podczerwone produkowane w mechanizmie synchrotronowym zostają wzmacniane na relatywistycznych elektronach, które je wyprodukowały, a wtórne rozpraszanie tych ostatnich może dać promieniowanie gamma. Fotony gamma mogą być też produkowane w procesach rozpadu pionów powstających w rezultacie zderzeń wysokoenergetycznych nukleonów. Warunki sprzyjające takim procesom panują w bliskim otoczeniu czarnej dziury.

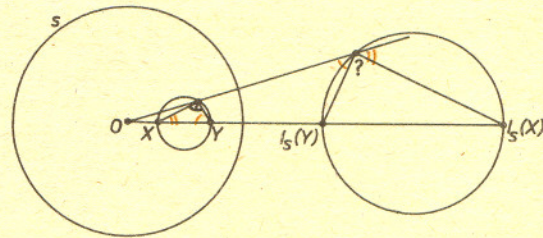
Nie wymieniliśmy tu wszystkich możliwości, istotne jednak jest to, że głęboki dół potencjalny wokół czarnej dziury stwarza doskonałe warunki do realizowania się najprzeróżniejszych wysokoenergetycznych procesów zapewniających nam zarówno emisję fotonów o bardzo dużym zakresie energii, jak i produkcję relatywistycznych dżetów.



Rys. a

### Inwersje — 1

Prosta przez  $O$  przechodzi na siebie. Okrąg przez  $O$  przechodzi (oznaczenia z rys. a), wobec lematu, na prostą przez  $I_s(X)$  prostopadłą do  $OI_s(X)$ . Prosta nie przez  $O$ , wobec inwolucyjności  $I_s$ , przechodzi na okrąg przez  $O$ . Okrąg nie przez  $O$  (oznaczenia z rys. b), po dwukrotnym zastosowaniu lematu, przechodzi na okrąg o średnicy  $I_s(X)I_s(Y)$ .



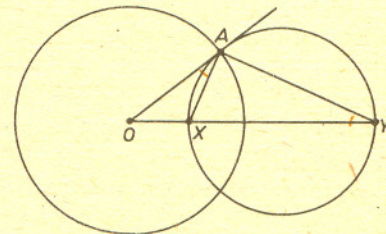
Rys. b

### Inwersje — 2

Przypadek, gdy łańcuch to prosta, jest oczywisty. Gdy okrąg  $o$  jest ortogonalny do okręgu  $s$ , styczna do  $o$  w ich punkcie przecięcia  $A$  przechodzi przez  $O$ . W oznaczeniach z rysunku, wobec równości kąta wpisanego  $OYA$  i dopisanego  $OAX$ , trójkąty  $OYA$  i  $OAX$  są podobne, a więc

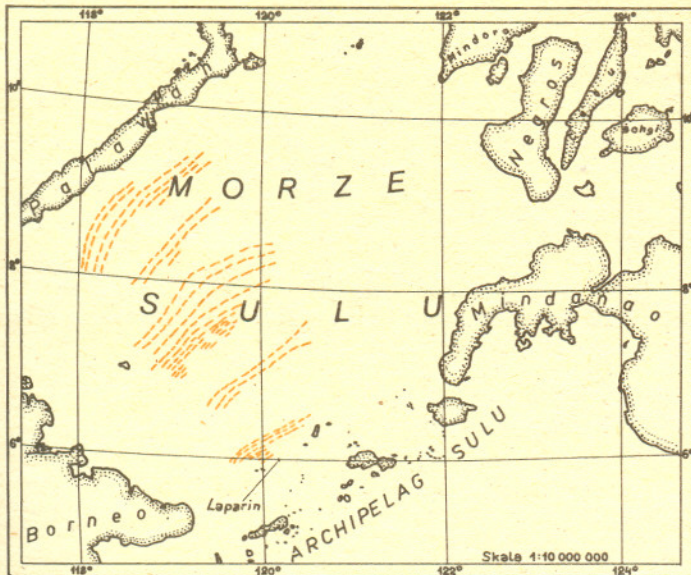
$$\frac{OY}{OA} = \frac{OA}{OX}$$

czyli  $OX \cdot OY = OA^2 = r^2$  i  $Y = I_s(X)$ .



## Solitony podmorskie?

W 1967 roku Kruskal i jego współpracownicy z Princeton odkryli ogólną metodę rozwiązywania nieliniowych równań falowych, tzw. metodę odwrotnego rozpraszania. Umożliwiła ona dokonanie wielkiego postępu w badaniach nad tymi równaniami i ich szczególnymi rozwiązaniami — solitonami.



Jak dotychczas postęp ten ogranicza się jednak do równań falowych w jednym wymiarze przestrzennym, np. opisujących fale powierzchniowe na wodzie w wąskim kanale. Nie wiadomo, czy stabilne solitony mogą się pojawiać w „prawdziwym”, wielowymiarowym świecie.

Tym większe zainteresowanie wzbudziły więc niezwykle zaburzenia zaobserwowane na powierzchni morza pomiędzy wyspą Borneo a Filipinami. Są one widoczne na fotografiach satelitarnych tego obszaru w postaci serii prążków o długości ponad 100 km, przemieszczających się z dużą prędkością (ok. 2,5 m/s) na odległość ok. 400 km (rysunek). Bliższe badania wykazały, że zaburzenia te są wtórnym przejawem przemieszczania się zniekształceń granicy pomiędzy powierzchniową warstwą cieplej wody a zimną warstwą głębinową. Mają one postać grzbietów cieplej wody o szerokości 2—3 km, sięgających dziesiątki metrów poniżej normalnej granicy pomiędzy warstwami. Charakterystyczne jest to, że zaburzenia te zgrupowane są w serie, w których każda fala ma amplitudę mniejszą niż poprzednia. Podobnie jest dla solitonów: prędkość przemieszczania się solitonu rośnie z jego amplitudą.

Zaburzenia te przenoszą ogromną energię, powodując powstawanie silnych prądów podwodnych zakłócających pracę platform wiertniczych, z których prowadzone są poszukiwania ropy naftowej pod powierzchnią dna morskiego (było to zresztą jednym z powodów podjęcia badań nad tym zjawiskiem). Być może ma ono także związek z tajemniczym zaginięciem kilku łodzi podwodnych.

(na podstawie *Physics Today*, listopad 1980)



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 343. Wykazać, że jeżeli  $a + \frac{1}{a}$  jest liczbą całkowitą, to dla każdego naturalnego  $n$  liczba

$a^n + \frac{1}{a^n}$  jest całkowita.

Rozwiązanie na str. 15

M 344. Każda główna przekątna sześciokąta wypukłego  $ABCDEF$  połowi jego pole. Wykazać, że przekątne te mają punkt wspólny.

Rozwiązanie na str. 9

M 345. Czworoscian foremny rzutujemy prostokątnie na płaszczyznę. Przy jakim jego położeniu pole rzutu jest największe?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 140. Mamy igłę magnetyczną zamocowaną w taki sposób, że jej osią obrotu jest prostoliniowy nieskończony przewód, w którym płynie prąd stały o kierunku takim jak na załączonym rysunku. Jak zachowuje się igła? Opory ruchu, oddziaływanie Ziemi oraz efekty włączeniowe należy zaniedbać.

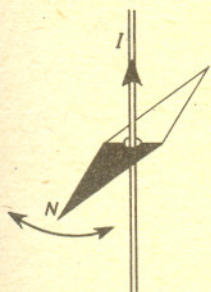
(Zadanie nadesłał p. St. Mrówczyński)

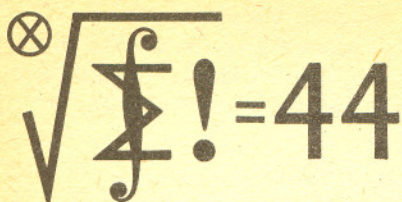
Rozwiązanie na str. 14

F 141. Wzdłuż osi symetrii przewodnika kołowego (prostopadłej do płaszczyzny pętli) biegnie nieskończony przewód prostoliniowy. Przez oba przewody przepływa prąd. Jaki kształt mają linie indukcji pola magnetycznego w pobliżu zwoju?

Ośrodkiem otaczającym jest próżnia.

Rozwiązanie na str. 16





## Klub 44

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr.  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"  
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
 zadań z numeru 4/1983

Jacek Uryga	- Bytom	46,48pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	46,17pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	32,41pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	32,06pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	31,76pkt
Marian Roman	- Błk	30,16pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	28,88pkt

Współczynniki trudności zadań 52, 53, 54:  
 2,82      2,17      3,56

Powtórne przekroczenie bariery 44:  
 pan Jacek Uryga

Nowe nazwisko w Klubie 44:  
 pan Mariusz Fiszer

### Zadania nr 64, 65, 66

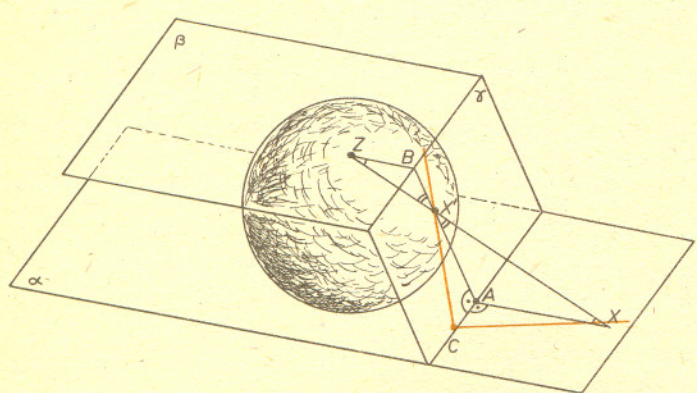
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1983

64. Przedstawić liczbę 1000000 w postaci sumy skończenie wielu liczb dodatnich tak, by ich iloczyn był możliwie największy. (Składniki mogą być dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, niekoniecznie różnymi; liczba składników nie jest zadana, należy ją dobrać optymalnie).
65. Czy można podzielić sześcian na skończoną liczbę sześcianów różnej wielkości? (Skonstruować podział lub udowodnić jego niewykonalność).
66. Wyznaczyć największą liczbę naturalną, która ma w przedstawieniu dziesiętnym wszystkie cyfry różne i która dzieli się przez każdą ze swych cyfr.
- Zadanie 66 przysłał nasz Czytelnik, pan Jerzy Janowicz z-Bolesławca.

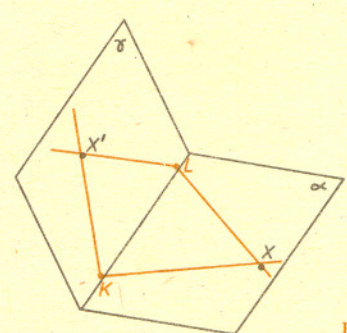
### Inwersje — 3

Oznaczmy przez  $Z$  punkt sfery położony najdalej od płaszczyzny  $\alpha$ , na którą rzutujemy. Poprowadźmy płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  styczne do sfery odpowiednio w  $Z$  i  $X'$ , oraz płaszczyznę  $\delta$  prostopadłą do  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . W przecięciu  $\alpha \cap \gamma \cap \delta$  mamy punkt  $A$ , a w przecięciu  $\beta \cap \gamma \cap \delta$  —  $B$ .  $Z$  zaznaczonych na rysunku a przystawań kątów wynika podobieństwo trójkątów  $XAX'$  i  $ZBX'$ . Ponieważ trójkąt  $ZBX'$  jest równoramienny (dlaczego?), więc mamy  $XA = AX'$ .

Jeśli poprowadzimy w  $\gamma$  dowolną prostą przez  $X'$  i oznaczymy przez  $C$  jej punkt przecięcia z  $\alpha \cap \gamma$ , to uzyskamy  $XC = XC'$ . Teraz możemy już wziąć pod uwagę styczne do dwóch przecinających się w  $X$  linii na  $\alpha$  i styczne do ich obrazów w  $X'$  na sferze. Te drugie leżą oczywiście w  $\gamma$ . Odpowiednie styczne przecinają się (dlaczego) na  $\alpha \cap \gamma$  w punktach, które oznaczymy przez  $K$  i  $L$ . W myśl poprzedniej części dowodu mamy  $XK = KX'$  i  $XL = LX'$ , a więc trójkąty  $KXL$  i  $KX'L$  są przystające (rys. b). W szczególności  $KXL = KX'L$ .



Rys. a



Rys. b

# Inwersja, stożkowe i inni

## Inwersja

Jeżeli mamy na płaszczyźnie dany okrąg  $o(A, t)$ , to inwersją względem tego okręgu (lub inwersją o środku  $A$  i promieniu  $t$ ) nazywane jest takie przekształcenie płaszczyzny, przy którym obrazem dowolnego punktu  $P$  jest punkt  $P'$  należący do półprostej  $AP$ , spełniający warunek  $AP \cdot AP' = t^2$ .

Jeżeli okrąg inwersji ma równanie  $x^2 + y^2 = t^2$ , to przy inwersji względem tego okręgu punkt  $P = (x, y)$  zmienia współrzędne według wzorów:

$$(1) \quad x' = \frac{t^2}{x^2 + y^2} \cdot x, \quad y' = \frac{t^2}{x^2 + y^2} \cdot y.$$

Inwersja przekształca proste przechodzące przez  $A$  na siebie, proste nie przechodzące przez  $A$  na okręgi przechodzące przez  $A$  (i odwrotnie: okręgi przechodzące przez  $A$  na proste nie przechodzące przez  $A$ ), natomiast okręgi nie przechodzące przez  $A$  na okręgi nie przechodzące przez  $A$ . Nie będziemy się tu jednak tym szczegółowo zajmować. Bardziej nas będzie interesować, jak wyglądają obrazy niektórych krzywych stożkowych, takich jak hiperbola czy parabola, przy inwersji właśnie.

Ponieważ niektóre rachunki wygodniej jest przeprowadzać we współrzędnych biegunowych, przypomnijmy, jak wyglądają równania stożkowych we współrzędnych biegunowych.

## Współrzędne biegunowe

Obierzmy na płaszczyźnie euklidesowej dowolny punkt  $F$  i półprostą  $b$  o początku  $F$ . Wówczas każdy punkt  $P$  płaszczyzny jest wyznaczony jednoznacznie przez swoją odległość  $r$  od punktu  $F$  i kąt  $\varphi$  (rys. 1). Para  $(r, \varphi)$  nazywana jest współrzędnymi biegunowymi punktu  $P$ , punkt  $F$  biegunem, a półprosta  $b$  osią biegunową.

Wygodnie jest przyporządkować każdemu punktowi o współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$  drugą parę „współrzędnych”:

$$(2) \quad (r, \varphi) = (-r, \varphi + \pi).$$

Wzory na zmianę współrzędnych biegunowych przy inwersji o środku  $A = (0,0)$  i promieniu  $t$  mają postać:

$$(3) \quad \varphi' = \varphi, \quad r' = \frac{t^2}{r}.$$

## Stożkowe we współrzędnych biegunowych

Przypomnijmy, że stożkową o ognisku  $F$ , kierownicy  $k$  i mimośrodku  $e$  ( $e > 0$ ) nazywany jest zbiór takich punktów  $P$ , których stosunek odległości od ogniska  $F$  do odległości od kierownicy  $k$  równy jest  $e$  (rys. 2).

Obierzmy układ współrzędnych biegunowych tak, by ognisko  $F$  było biegunem, a oś biegunowa była prostopadła do kierownicy i przecinała ją w punkcie  $F'$ . Znajdziemy równanie stożkowej w takim układzie współrzędnych.

Niech punkt  $P$  o współrzędnych  $(r, \varphi)$  będzie dowolnym punktem stożkowej, a  $RF = f$  (rys. 3).

Wówczas  $r = PF = e \cdot PP' = e \cdot P'F' = e(FF' - r \cdot \cos \varphi) = e(RR' - r \cdot \cos \varphi) =$

$$= e \left( \frac{RF}{e} - r \cdot \cos \varphi \right) = f - e \cdot r \cdot \cos \varphi,$$

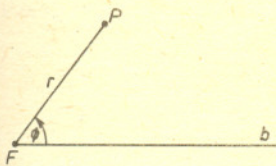
stąd  $r = f - e \cdot r \cdot \cos \varphi$  i ostatecznie

$$(4) \quad r = \frac{f}{e \cdot \cos \varphi + 1} \quad (r > 0).$$

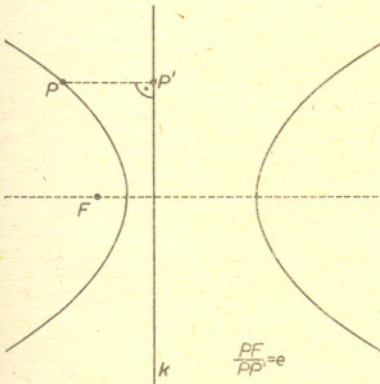
Równanie to jest równaniem elipsy (dla  $0 < e < 1$ ) lub paraboli (dla  $e = 1$ ) bądź też jednej gałęzi hiperboli. Dlatego w przypadku hiperboli, gdzie punkty drugiej jej gałęzi leżą po przeciwnej stronie kierownicy niż odpowiadające jej ognisko, musimy to równanie uzupełnić równaniem drugiej jej gałęzi

$$(5) \quad r = \frac{f}{e \cdot \cos \varphi - 1} \quad (r > 0),$$

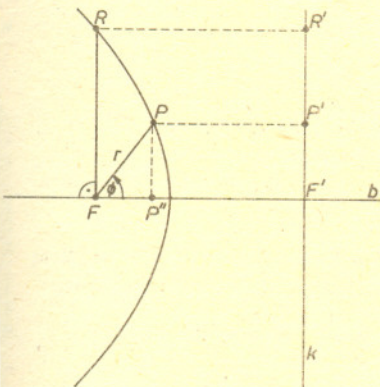
które otrzymujemy przeprowadzając analogiczne rachunki.



Rys. 1



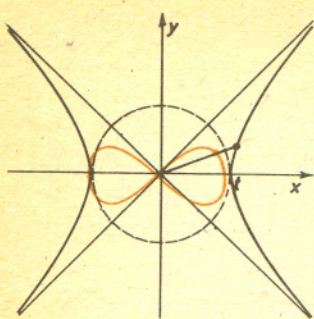
Rys. 2



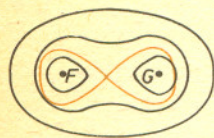
Rys. 3



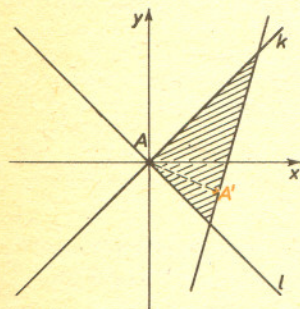
## Lemniskata Bernoulli'ego



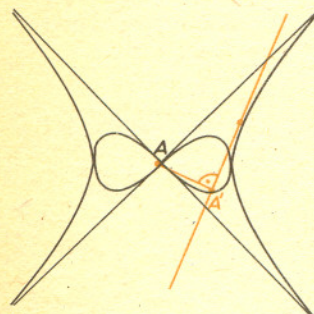
Rys. 4



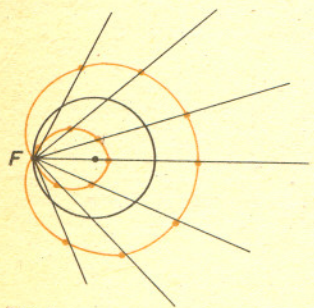
Rys. 5



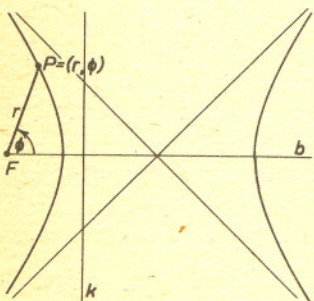
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Jeśli hiperbolę równoosiową o równaniu  $x^2 - y^2 = t^2$  przeksztalcimy przez inwersję o środku  $A = (0,0)$  i promieniu  $t$ , to jej obraz będzie miał równanie  $t^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ , które otrzymujemy stosując wzory (1) na zmianę współrzędnych przy inwersji. Krzywa ta to *lemniskata Bernoulli'ego* (rys. 4).

Lemniskatę można otrzymać i w inny sposób. Zbiorem punktów, których iloczyn odległości od dwóch danych punktów  $F$  i  $G$  jest stały i równy  $s$ , jest krzywa nazywana *owalem Cassiniego*. Na rysunku 5 widzimy, jak wygląda owal Cassiniego, w zależności od stosunku  $s$  do  $d$  — odległości punktów  $F$  i  $G$ . Dla dużych  $s$  owal ten jest spójną krzywą i jeśli  $s$  maleje, to po przekroczeniu  $\left(\frac{d}{2}\right)^2$  „pęka” na dwie części. W granicznym przypadku, dla  $s = \left(\frac{d}{2}\right)^2$  otrzymujemy równanie  $\frac{d^2}{2}(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$  w układzie współrzędnych, w którym  $C = \left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ ,  $D = \left(\frac{d}{2}, 0\right)$ .

Jest to więc po prostu lemniskata Bernoulli'ego (rys. 5).

Rozwiążmy teraz następujące zadanie:

Dane są prostopadłe proste  $k$  i  $l$  przecinające się w punkcie  $A$ . Znaleźć zbiór rzutów prostokątnych  $A'$  punktu  $A$  na proste wyznaczające wraz z prostymi  $k$  i  $l$  w „lewej” i „prawej” ćwiartce płaszczyzny trójkąty o danym polu  $t^2$  (rys. 6).

Niech dane proste  $k$  i  $l$  mają równania  $x - y = 0$  i  $x + y = 0$ . Z warunków zadania wynika, że proste, na które rzutujemy punkt  $A$ , to styczne do hiperboli o równaniu  $x^2 - y^2 = t^2$ . Mają więc one równania postaci  $p_1x - p_2y = t^2$ , gdzie punkt styczności ma współrzędne  $P = (p_1, p_2)$ . Wobec tego proste odpowiednio do nich prostopadłe, przechodzące przez  $A$ , mają równania  $p_2x + p_1y = 0$ .

Po wyeliminowaniu z układu równań

$$\begin{aligned} p_1x - p_2y &= t^2 \\ p_2x + p_1y &= 0 \\ p_1^2 - p_2^2 &= t^2 \end{aligned}$$

parametrów  $p_1$  i  $p_2$  otrzymujemy równanie  $t^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ , a więc znowu równanie lemniskaty Bernoulli'ego (rys. 7).

## Ślimak Pascala

*Ślimakiem Pascala* nazywać będziemy krzywą otrzymaną w następujący sposób:

Na danym okręgu o środku  $A$  i promieniu  $u$  wybieramy dowolny punkt  $F$ . Przez ten punkt prowadzimy proste, a na tych prostych odkładamy od punktów przecięcia z okręgiem, w obydwie strony, odcinki o danej długości  $s$ . Końce tych odłożonych odcinków tworzą krzywą nazywaną *ślimakiem Pascala* (rys. 8). Jeśli układ współrzędnych biegunowych oberzemy w ten sposób, by  $F$  był biegunem, a oś biegunowa przechodziła przez  $A$ , to ślimak Pascala opisywać będą równania:

$$(6) \quad r = 2u \cdot \cos \varphi + s, \quad r = 2u \cdot \cos \varphi - s \quad \left( r > 0, \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right).$$

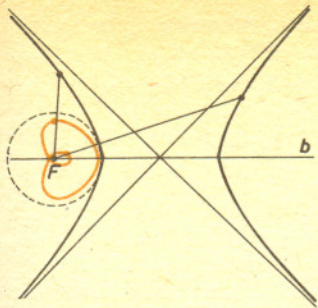
Jedno z nich odpowiada końcom odcinków odkładanych w jedną stronę od punktów przecięcia z okręgiem, a drugie — w drugą. Wobec umowy (2) warunki (6) można zastąpić przez

$$(7) \quad r = 2u \cdot \cos \varphi + s, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ lub}$$

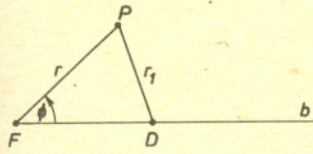
$$(7'') \quad r = 2u \cdot \cos \varphi - s, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Przeksztalcimy jeszcze raz hiperbolę przez inwersję względem okręgu o promieniu  $t$ , ale tym razem niech środkiem inwersji będzie ognisko hiperboli. Rachunki przeprowadzimy we współrzędnych biegunowych, przy czym biegunem  $F$  będzie ognisko hiperboli, a oś biegunowa prostopadła do kierownicy, przechodząca przez drugie ognisko (rys. 9).

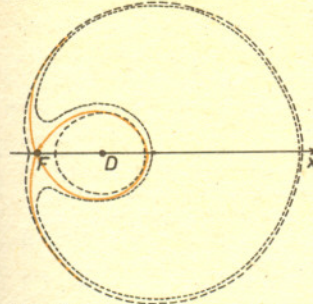
Po zastosowaniu do równań (4) i (5), opisujących obie gałęzie hiperboli, wzorów (3) na zmianę współrzędnych przy inwersji o środku w ognisku obraz jednej gałęzi hiperboli będzie krzywą opisaną równaniem  $r = \frac{et^2}{f} \cdot \cos \varphi + \frac{t^2}{f}$  ( $r > 0$ ), a obraz drugiej równaniem  $r = \frac{et^2}{f} \cdot \cos \varphi - \frac{t^2}{f}$  ( $r > 0$ ). Otrzymaliśmy więc równania opisujące ślimak Pascala (rys. 10).



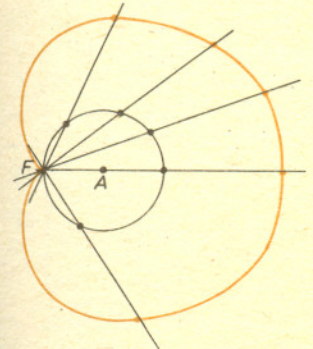
Rys. 10



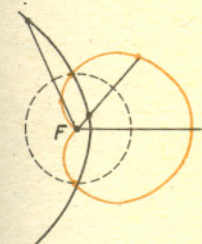
Rys. 11



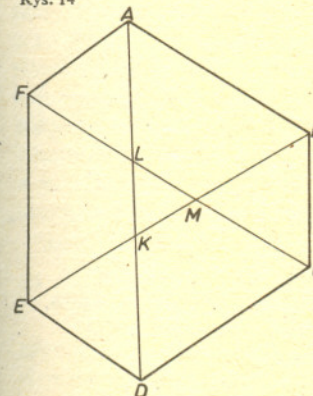
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Owalem Kartezjusza nazywać będziemy zbiór takich punktów  $P$ , których odległości  $r$  i  $r_1$  od stałych punktów  $F$  i  $D$  spełniają warunek

$$(8) \quad r + s \cdot r_1 = u \quad \text{lub} \quad r - s \cdot r_1 = u,$$

gdzie  $s$  i  $u$  są pewnymi stałymi, przy czym  $s \neq 1, -1$ .

Obierzmy układ współrzędnych biegunowych tak, by  $F$  był biegunem, a oś biegunowa przechodziła przez  $D$  (rys. 11) i niech  $FD = d$ .

Wówczas

$$(9) \quad r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cdot \cos \varphi.$$

Podstawiając (8) do (9) otrzymujemy równanie owalu Kartezjusza we współrzędnych biegunowych:

$$(10) \quad r^2(s^2 - 1) - 2r(ds^2 \cdot \cos \varphi - u) + s^2d^2 - u^2 = 0.$$

W zależności od parametrów  $s, u, d$  owal Kartezjusza może być spójną krzywą bądź może rozpaść się na dwie części. Jeżeli parametry wyznaczające owal Kartezjusza obierzemy tak, by  $u = s \cdot d$ , jego równanie przybierze postać:  $r(s^2 - 1) = 2d^2s \cdot \cos \varphi - 2sd$ . Porównując je z (7'') widzimy, że jest to równanie ślimaka Pascala (rys. 12), który jest więc szczególnym przypadkiem owalu Kartezjusza.

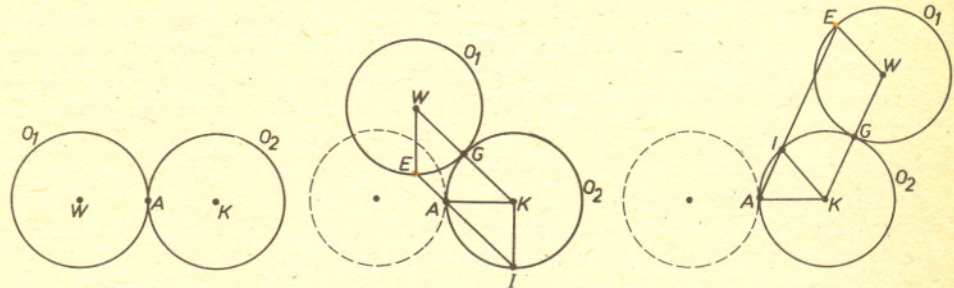
### Kardioida

Powróćmy jeszcze do równania (7'') ślimaka Pascala. Jeśli przyjmiemy  $s = 2u$ , to ten szczególny przypadek ślimaka Pascala nazywać będziemy *kardioidą* (rys. 13). Równanie kardioidy ma więc we współrzędnych biegunowych postać  $r = 2u(\cos \varphi + 1)$ .

Przekształćmy teraz parabolę przez inwersję o środku w jej ognisku i promieniu  $f$ . Stosując wzory (3) do równania paraboli ( $e = 1$ ) otrzymujemy równanie jej obrazu  $r = f(\cos \varphi + 1)$ , a jest to, jak widzimy, równanie kardioidy (rys. 14).

Kardioidę możemy otrzymać także w jeszcze inny sposób. Tym razem niczego nie będziemy liczyć. Będziemy za to toczyć. Zobaczymy, po jakim torze porusza się punkt okręgu, toczonego się po zewnętrznej stronie drugiego okręgu o takim samym promieniu  $r$ . Niech okrąg  $o_1$  toczy się po okręgu  $o_2$ . W pozycji wyjściowej okręgi te są styczne w punkcie  $A$  (rys. 15). Po przetoczeniu się okręgu  $o_1$  po łuku  $\widehat{AG}$  punkt  $A$ , którego drogi szukamy, znalazł się w punkcie  $E$ . Ponieważ łuki  $\widehat{AG}$  i  $\widehat{EG}$  są przystające, czworokąt  $EWKA$  jest trapezem równoramiennym. Stąd zaś wynika, że czworokąt  $EWKI$  jest równoległobokiem. W takim razie długość odcinka  $\overline{EI}$  równa jest  $2r$ , niezależnie od tego, jak daleko przetoczył się okrąg  $o_1$ . W takim razie punkt  $A$  porusza się po szczególnym przypadku ślimaka Pascala — po kardioidzie.

dr Jerzy BEDNARCZUK



Rys. 15



#### Rozwiązanie zadania M 344.

Przypuśćmy, że przekątne te tworzą trójkąt  $KLM$ . Z równości  $S_{ABCD} = S_{BCDE} =$

$$= \frac{1}{2} S_{ABCDEF} \text{ mamy } S_{ABK} = S_{KDE},$$

podobnie sprawdzamy, że  $S_{BMC} = S_{EMF}$

i  $S_{CLD} = S_{ALF}$ . Z równości kątów

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle DKE, \sphericalangle BMC = \sphericalangle EMF,$$

$$\sphericalangle CLD = \sphericalangle ALF \text{ mamy:}$$

$$AK \cdot BK = DK \cdot EK, CL \cdot DL = FL \cdot AL,$$

$$EM \cdot FM = BM \cdot CM, \text{ czyli}$$

$$(AL + LE)(BM + MK) = DK \cdot EK,$$

$$(CM + LM)(DK + KL) = AL \cdot FL,$$

$$(EK + KM)(FL + LM) = BM \cdot CM.$$

Mnożąc trzy ostatnie równości stronami otrzymamy:

$$(AL + LE)(BM + MK)(CM + LM)$$

$$(DK + KL)(EK + KM)(FL + LM) =$$

$$= DK \cdot EK \cdot AL \cdot FL \cdot BM \cdot CM, \text{ co wobec}$$

nieujemności  $KL, LM, KM$  jest możliwe

tylko wtedy, gdy  $KL = LM = KM = 0$ ,

czyli gdy  $K = L = M$ , co kończy dowód.

H. Iwaniec w 1969 roku udowodnił, że sześciokąt jest (poza czworokątem) jedynym wielokątem o takiej własności.

Dr hab. Róża TRAUTMAN

Soliton jest szczególną postacią ruchu falowego. Ta zlokalizowana fala, zachowująca podczas propagacji swój kształt i prędkość została po raz pierwszy zaobserwowana w 1834 roku przez Johna Scotta-Russella w ruchu wody w kanale. W „Wykładzie o falach” tak opisuje Scott-Russell wyniki swoich obserwacji:

„Fala przyjmie swój charakterystyczny kształt... i będzie przesuwająca się do przodu zachowując objętość i wysokość; odrzuci zbędną materię, która się z nią poruszała, pozostawi ją z tyłu...”

O solitonach pisaliśmy w *Delcie* 4/1976 i 1/1983.

Zjawisko to zostało ponownie „odkryte” w 1965 roku przez N. Zabusky’ego i M. Kruskala przy numerycznym badaniu drgań nieliniowych; oni też zaproponowali nazwę soliton. Zainteresowanie solitonami znacznie wzrosło, gdy okazało się, że fale solitonowe mogą zachowywać swój kształt nawet po nieliniowym oddziaływaniu między sobą, tj. w pewnym sensie zachowują się jak cząstki.

Najprostsza fala, jaką jest fala harmoniczna, charakteryzuje się stałą amplitudą, częstością i wektorem falowym. Jej prędkość fazowa dana jest stosunkiem częstości do długości wektora falowego. Przez składanie nieskończonej liczby takich fal można tworzyć zlokalizowane w przestrzeni paczki falowe. Na ogół, wskutek dyspersji, czyli zależności prędkości fazowej od częstości, paczki falowe rozplývają się; ich amplituda z upływem czasu zanika.

Przy oddziaływaniu nieliniowym z ośrodkiem fale o określonych częstościach nie rozchodzą się niezależnie; następuje przepływ energii między różnymi częstościami. W szczególności, wzmocnienie centralnej części paczki kosztem jej „skrzydeł” może skompensować dyspersję i doprowadzić do powstania trwałej samotnej fali. Solitony obserwuje się wyłącznie w zjawiskach, w których nieliniowość odgrywa istotną rolę, chociaż w różnych zjawiskach mechanizmy pojawiania się nieliniowości są różne.

W związku z badaniem solitonów powstała metoda ścisłego rozwiązywania równań różniczkowych nieliniowych, tzw. metoda odwrotnego rozpraszania. Pociągnęło to za sobą powstanie nowego działu fizyki matematycznej, zwanego teorią solitonów.

Zakres zjawisk, które opisuje się bądź próbuje się opisać metodami teorii solitonów, jest bardzo szeroki. Szacuje się, że charakterystyczne rozmiary solitonów dla różnych zjawisk mogą różnić się o 22 rzędy wielkości. Na jednym krańcu mamy solitony w teorii cząstek elementarnych, dalej solitony w zjawiskach optycznych, w plazmie, nadprzewodnikach, magnetykach, kryształach, aż po fale na oceanie, a być może ruchy materii w gwiazdach.

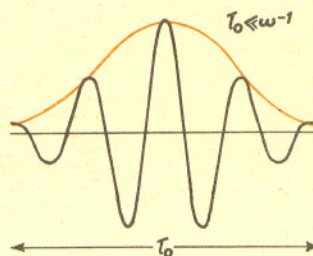
W tym artykule zajmiemy się solitonami optycznymi, które występują w zjawiskach związanych z rozchodzeniem się krótkich impulsów światła laserowego rezonansowo oddziałujących z atomami ośrodka. Jest to zagadnienie z pogranicza fizyki klasycznej i kwantowej, bowiem pole elektromagnetyczne można w tych zjawiskach traktować klasycznie, a atomy ośrodka trzeba opisywać kwantowo. Opis solitonów optycznych jest

jednym z najbardziej zadawalających przykładów zastosowania teorii solitonów — wyjątkowo dobra jest zgodność jej przewidywań z licznymi danymi doświadczalnymi.

## Przezroczystość wymuszona i solitony światła laserowego

Rozwinięte w latach sześćdziesiątych nowoczesne techniki optyki laserowej pozwalają nie tylko uzyskiwać impulsy światła spójnego o dużej mocy, lecz także dzielić je na impulsy bardzo krótkie.

O formowaniu impulsów pikosekundowych pisaliśmy w *Delcie* 11/1982.



Rys. 1 Pole elektryczne impulsu rozchodzącego się w kierunku osi Z można zapisać w postaci  $E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) \sin \omega(t - zn/c)$ , gdzie  $\omega$  jest częstością fali nośnej impulsu, a  $n$  — współczynnikiem załamania. Funkcja  $\mathcal{E}(t, z)$  nosi nazwę obwiedni impulsu (linia brązowa).

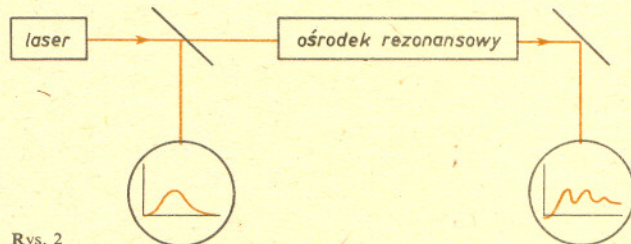
Rozważmy taki impuls i załóżmy, że jest on prawie monochromatyczny, tzn. jego pole elektryczne składa się z bardzo szybkich drgań o ustalonej częstości, których amplituda zmienia się powoli w czasie (rys. 1). Jeśli częstość drgań jest równa lub bardzo bliska częstości jednego z przejść między poziomami energetycznymi w atomie, z którym takie światło oddziałuje, to mówimy, że jest ono w rezonansie z atomem. Możemy wtedy w przybliżeniu zaniedbywać przejścia między wszystkimi innymi poziomami.

Typowa częstość optyczna  $\omega \approx 10^{15} \text{s}^{-1}$ .

W doświadczeniach nad przezroczystością wymuszoną używano impulsów o czasie trwania  $10^{-8} \text{s}$ . Najkrótsze wytworzone w laboratorium impulsy osiągają  $10^{-14} \text{s}$ .

Badanie rozchodzenia się krótkich impulsów światła laserowego w ośrodku rezonansowym doprowadziło w 1967 r. McCalla i Hahna do odkrycia nowego zjawiska, które nazwali przezroczystością wymuszoną.

Prawdopodobieństwo absorpcji kwantu promieniowania przez atom jest proporcjonalne do liczby kwantów promieniowania będących w rezonansie z tym atomem. Ma miejsce także mniej oczywisty fakt — im więcej jest kwantów o danej energii, tym łatwiej wzbudzony atom emituje kwanty o tej energii. Zjawisko to nazywane jest emisją wymuszoną.



Rys. 2

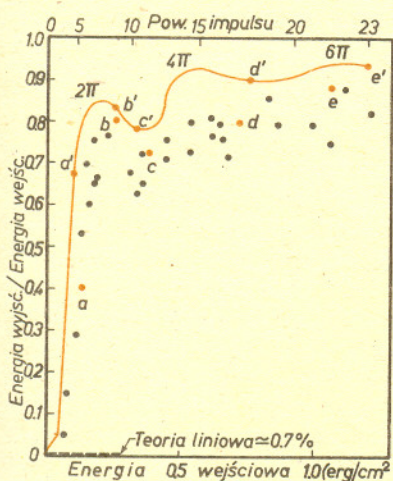
Rys. 2 przedstawia ogólny schemat doświadczenia. Krótki impuls laserowy, w postaci fali płaskiej, pada na próbkę złożoną z atomów w rezonansie z padającym promieniowaniem. Obserwuje się kształt obwiedni impulsu wyjściowego, jego energię, zmiany widma itp. W doświadczeniu McCalla i Hahna użyto lasera rubinowego, w którym aktywnymi atomami są atomy rubidu  $^{87}\text{Rb}$ . Próbką był także kryształ rubidu, co zapewniło dokładny rezonans światła z ośrodkiem. Aby

obniżyć wpływ drgań cieplnych niszczących wzbudzenia atomowe, ochłodzono kryształ do temperatury ciekłego helu. Przy małych energiach impulsu wejściowego obserwowano silne tłumienie, zgodne z liniową teorią absorpcji, według której natężenie światła po przejściu w ośrodku drogi  $L$  wynosi

$$I(L) = I_0 e^{-\alpha L},$$

gdzie  $I_0$  jest natężeniem wejściowym,  $I$  — wyjściowym, a  $\alpha$  jest tzw. stałą tłumienia. Oznacza to, że spadek natężenia światła w cienkiej warstwie ośrodka jest proporcjonalny do natężenia światła padającego i grubości tej warstwy. W doświadczeniu McCalla i Hahna  $\alpha L$  było równe 5, słabe impulsy były więc prawie całkowicie tłumione.

Zwiększając natężenie wchodzącego impulsu zaobserwowano, powyżej pewnej progowej wartości  $I_0$ , gwałtowny spadek absorpcji. Impuls przechodził prawie bez strat energii, tak jakby ośrodek był przezroczysty. Jednocześnie znacznie wydłużał się czas przebywania impulsu w ośrodku. Impulsy powyżej mocy progowej przyjmowały kształt symetryczny i wykazywały dużą stabilność, a więc miały charakter solitonowy. Teoria i dalsze doświadczenia w pełni potwierdzają obecność solitonów w tym zjawisku.



Rys. 3 Przepuszczalność w zjawisku wymuszonej przezroczystości obserwowanej w parach Rb. Krzywa ciągła przedstawia wyniki teoretyczne, kropki — wyniki doświadczeń. Kropkami brązowymi zaznaczone są dane dla impulsów przedstawionych na rys. 4.

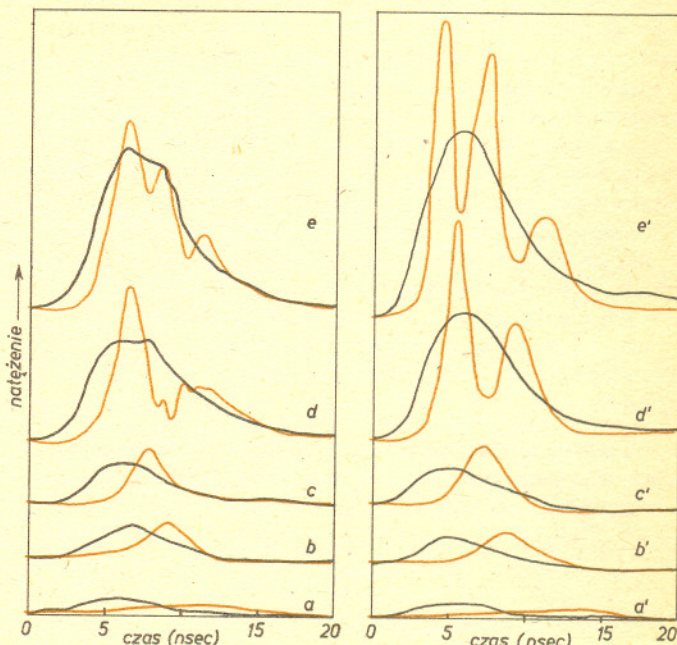
W późniejszych doświadczeniach zaobserwowano przezroczystość wymuszoną w wielu substancjach gazowych i stałych. Najdokładniejsze wyniki uzyskali R. Slusher i H. Gibbs w 1972 r. badając przezroczystość wymuszoną w parach rubidu wzbudzanych laserem rtęciowym. Atomy rtęci  $^{202}\text{Hg}$  emitują linię o długości 79944,66 Å, krótszą o 3 Å od linii absorbowanej przez atomy  $^{87}\text{Rb}$ . Dokładny rezonans uzyskano przez rozszczepienie poziomów w atomach próbki polem magnetycznym o odpowiednio dobranym natężeniu. Z pracy Slushera i Gibbsa pochodzą wyniki przedstawione na rys. 3 i 4. Kluczową wielkością charakteryzującą zachowanie się impulsu w ośrodku okazała się nie jego energia, a wielkość bezwymiarowa zwana powierzchnią impulsu

$$(1) \quad A(z) = P \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t, z) dt,$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest obwiednią impulsu (patrz dalej), a  $P$  stałą charakteryzującą przejście atomowe.

Krzywa na rys. 3 przedstawia przepuszczalność próbki w zależności od energii wejściowej impulsu. Przy ustalonym czasie trwania impulsu każdej wartości energii odpowiada określona wartość jego powierzchni zaznaczona u góry wykresu. Próg przezroczystości przypada dla powierzchni bliskiej  $\pi$ . Gwałtowny wzrost przepuszczalności ośrodka świadczy o nieliniowym charakterze zjawiska. Krzywa wykazuje charakterystyczne przegięcia dla powierzchni  $2\pi, 4\pi, 6\pi$ . Z teorii zjawiska, o której będzie mowa dalej, wiadomo, że odpowiadają one obecności odpowiednio jednego, dwu, trzech solitonów.

Krzywe na rys. 4 przedstawiają obwiednie przed i po przejściu próbki. Na krzywych  $d$  i  $e$  widać rozpadanie się impulsów na 2 i 3 pojedyncze impulsy. Widoczne jest też opóźnienie impulsu w ośrodku i typowo nieliniowe wzmocnienie wierzchołka impulsu. Wartość maksymalnego natężenia impulsu wyjściowego jest większa od maksimum na wejściu. Towarzyszy temu zwężenie impulsu, bo całkowita energia jest zachowana.



Rys. 4 Kształty impulsów wchodzących (linia czarna) i wychodzących (linia brązowa) dla  $\alpha L \approx 5$ . Krzywe  $a-e$  przedstawiają wyniki doświadczenia, a krzywe  $a'-e'$  przewidywania teorii wliczone numerycznie.

## Mechanizm zjawiska

Aby wyobrazić sobie mechanizm wymuszonej przezroczystości, przypomnijmy warunki obserwacji tego zjawiska. Padający impuls musi być falą płaską, spójną, jego czas trwania musi być krótki, a energia musi przewyższać pewną wartość progową. Ośrodek musi być w stanie rozrzedzonym lub, gdy jest to ciało stałe, utrzymywany w niskiej temperaturze, aby osłabić procesy niszczące wzbudzenie atomów. W atomach oddziałujących rezonansowo z promieniowaniem odgrywa rolę tylko jedno wyróżnione przejście energetyczne. Dobrym modelem takiej sytuacji jest układ kwantowy o dwóch poziomach energetycznych.

Płaska fala spójnego promieniowania wzbudza atomy ośrodka w sposób koherentny. Oznacza to, że funkcje falowe opisujące stany poszczególnych układów dwupoziomowych mają zgodne fazy. Z tych funkcji falowych zbudowane są mikroskopowe dipole, które promieniują oddając energię fali świetlnej. Jeśli impuls jest krótki, to w czasie jego trwania spójność między poszczególnymi atomami nie ulega zniszczeniu. Procesy takie jak

zderzenia atomów czy spontaniczne wypromieniowanie energii są wtedy tak powolne, że nie zdążą zadziałać w czasie trwania impulsu. Pole elektromagnetyczne oddziałuje więc z jakby „zamrożonym” układem atomów. Układ taki odpowiada na wzbudzenie jak jeden wielki dipol oddający na drodze emisji wymuszonej energię polu. Jeśli impuls jest tak silny, że pierwsza jego połowa powoduje pełne wzbudzenie (decyduje o tym powierzchnia impulsu), to druga połowa może jedynie odebrać energię pobraną w pierwszej części i impuls odbudowuje się. Taki impuls będzie rozchodził się bez zmiany kształtu, jak soliton, oddając atomom ośrodka dokładnie tyle energii z części czołowej, ile pobiera od nich w drugiej części. W efekcie ośrodek oddziałujący z polem będzie przezroczysty. Prędkość impulsu zmaleje przy tym istotnie ze względu na czas potrzebny do tej wymiany energii.

## Trochę teorii

Jak wspomnieliśmy na wstępie, warunkiem istnienia rozwiązań solitonowych jest dyspersja i nieliniowość równań opisujących dany proces. Zastanówmy się nad źródłem nieliniowości w zagadnieniu propagacji rezonansowej. Rozchodzenie się pola elektromagnetycznego w ośrodku opisują równania Maxwella, które są liniowe, gdy polaryzacja ośrodka jest stała lub jest liniową funkcją pola. Polaryzacja ośrodka z kolei jest wynikiem składania polaryzacji poszczególnych atomów, które są wyznaczone przez liniowe równania mechaniki kwantowej. W zagadnieniu propagacji chcemy jednak jednocześnie znać stan ośrodka i pole wywołujące zmiany tego stanu. Trzeba więc rozwiązywać równania dla pola i równania kwantowe dla atomów wzajemnie sprzężone. To sprzężenie dwóch problemów liniowych prowadzi do układu równań wykazujących silną nieliniowość.

Przy pewnych ograniczających założeniach można wyeliminować z tego układu zmienne atomowe i zredukować go do jednego równania dla chwilowej powierzchni impulsu

$$\varphi(t, z) = P \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t', z) dt'$$

Obwiednia impulsu jest pochodną  $\varphi$  względem czasu, a wielkości atomowe wyrażają się przez trygonometryczne funkcje  $\varphi$ . Na przykład inwersja obsadzeń, czyli różnica prawdopodobieństw obsadzenia stanu wzbudzonego i podstawowego jest proporcjonalna do  $\cos \varphi$ .

Chwilowa powierzchnia spełnia proste równanie nieliniowe

$$(*) \quad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta \tau \delta \xi} = -\sin \varphi,$$

W zmiennych  $u = \tau + \xi, v = \tau - \xi$  równanie to przyjmuje postać tzw. równania sin-Gordona  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \sin \varphi$ .

Równanie to jest ściśle całkowalne i występuje w wielu innych zastosowaniach teorii solitonów.

gdzie  $\tau = \Omega(t - z/c), \xi = \Omega z/c$ , a  $\Omega$  jest stałą o wymiarze częstości. Szukając rozwiązań zachowujących kształt możemy założyć, że  $\varphi$  zależy tylko od jednej zmiennej  $\eta = \Omega(t - z/v)$ , gdzie  $v$  jest prędkością propagacji impulsu. Równanie (\*) przechodzi wtedy w równanie wahadła matematycznego

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = \tau_0^2 \sin \varphi,$$

gdzie  $\tau_0^2 = \frac{c}{v} - 1$ .

Kąt  $\varphi$  odpowiada przesuniętemu o  $\pi$  kątowi wychylenia wahadła z położenia równowagi. Zwykle rozważając ruch wahadła matematycznego linearyzujemy to równanie, co odpowiada

ograniczeniu się do małych wychyleń z położenia równowagi. Rozwiązanie interesujące w optyce musi spełniać warunki

$$\varphi(-\infty) = \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta=-\infty} = 0, \text{ bo przy ustalonym } z \text{ (punkt}$$

obserwacji) pole impulsu znika dla dużych ujemnych czasów. Rozwiązanie takie opisuje bardzo szczególny, zdegenerowany ruch wahadła, które wychylone maksymalnie (początkowy kąt wychylenia  $\pi$ ) po nieskończonym czasie wraca do położenia wyjściowego.

Równanie wahadła z powyższymi warunkami początkowymi łatwo jest rozwiązać. Jego całkę pierwszą, tj. zależność typu

$$f\left(\varphi, \frac{d\varphi}{d\eta}\right) = \text{const, otrzymujemy mnożąc obustronnie przez } \frac{d\varphi}{d\eta} \text{ i całkując względem } \eta. \text{ Równanie, które dostajemy, jest po}$$

prostu zasadą zachowania energii dla wahadła

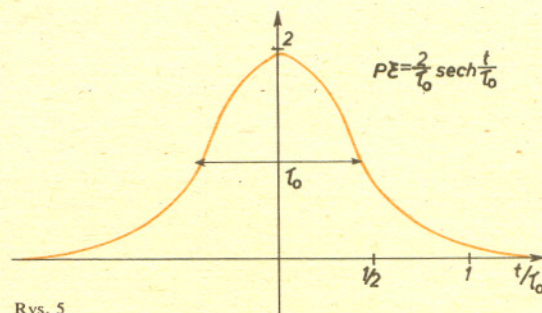
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \tau_0^{-2} (1 - \cos \varphi) = 0.$$

$$\text{Z równości tej mamy } \frac{d\varphi}{d\eta} \pm 2\tau_0^{-1} \sin \frac{1}{2} \varphi = 0,$$

a stąd i z tego, że  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  wynika już rozwiązanie

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} [e^{\pm(t-z/v)/\tau_0}].$$

Dla dużych ujemnych czasów znika tylko rozwiązanie ze znakiem plus.



Rys. 5

Obwiednia otrzymanego impulsu

$$P\mathcal{E}(t, z) = \frac{d\varphi}{dt} = 2\tau_0^{-1} \operatorname{sech}[(t-z/v)/\tau_0]$$

ma typowy kształt symetrycznego dzwonu o szerokości  $\tau_0$  i powierzchni  $2\pi$ . Jest to jednosolitonowe rozwiązanie naszego problemu, zwane w optyce impulsem  $2\pi$ . Przy zmianie funkcji  $\varphi$  o  $2\pi$  funkcje trygonometryczne nie zmieniają swoich wartości, a więc inwersja obsadzeń i polaryzacja, po przejściu impulsu, wracają do swoich wyjściowych wartości. Jest to zgodne z jakościowym obrazem propagacji solitonu.

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Pełna teoria przewiduje, że każdy impuls po przebyciu dostatecznie długiej drogi w ośrodku rozpadnie się na układ pojedynczych impulsów  $2\pi$ . W procesie rozpadu część energii przechodzi nieodwracalnie do ośrodka. Znając kształt impulsu na wejściu można ściśle obliczyć, na ile solitonów on się rozpadnie i jakie będą straty energii.

Na zakończenie pragnę wyjaśnić, że solitony związane z propagacją rezonansową, omówione w tym artykule, nie są jedynymi solitonami optycznymi. Z solitonami spotykamy się w teorii efektu Ramana, w zjawisku samoogniskowania wiązek świetlnych i w propagacji światła w światłowodach. Te ostatnie znajdują prawdopodobnie już niedługo zastosowanie praktyczne.

## Mizar MSE (2)

Formułując wstęp do pracy podajemy aksjomaty i twierdzenia, na które będziemy się powoływać. Jak je napiszemy w Mizarze, pokazaliśmy w poprzednim numerze.

Często występuje potrzeba (choćby dla wygody) wprowadzenia stałych obiektów dla dziedzin, którymi się zajmujemy. Na przykład w geometrii, jeśli już mamy pojęcie kąta, taką stałą może być kąt prosty. W Mizarze do wprowadzenia takich stałych służy konstrukcja zaczynająca się od **given**, na przykład

```
GIVEN PUSTY BEING ZBIOR
```

A oto początek wstępu pewnej pracy

```
ENVIRON
```

```
GIVEN 0,1,2 BEING LICZBA
AX1: FOR X BEING LICZBA ST PEXJ HOLDS GECX,0J
AX2: FOR X,Y,Z BEING LICZBA ST LTCX,YJ & LTCY,ZJ HOLDS LTCX,ZJ
AX3: PEXJ & PECZJ
****
```

Używane predykaty intuicyjnie znaczący mają:

**P [X]** —  $X$  jest dodatnie,  
**GE [X, Y]** —  $X$  jest większe lub równe  $Y$ ,  
**LT [X, Y]** —  $X < Y$ .

Kto się domyśli, jakiej dziedziny dotyczyła ta praca? W dalszym ciągu tego odcinka będziemy używali pojęć, które wystąpiły w tym wstępie.

Jako się rzekło, Mizar ma sprawdzać poprawność wnioskowań. Opisałiśmy już jak budować poprawne (w tym języku) zdania. Nadszedł czas, by wyjaśnić, jak w Mizarze przeprowadza się rozumowania.

Dzisiaj przedstawimy najprostszy sposób uzasadniania stwierdzeń. Ogólnie rozumowania składają się z ciągu kolejnych przejść — kroków. Każdy poszczególny krok powinien być uzasadniony. W wyniku takiego przejścia uzyskujemy pewne stwierdzenie (wyrażone zdaniem) — aby komputer mógł je zaakceptować, musimy przedstawić dlaczego, naszym zdaniem, jest ono prawdziwe. W najprostszym przypadku wystarczy podać przesłanki, z jakich się w danym kroku rozumowania korzysta.

Reguły logiki używanych przy przejściu od przesłanek do wniosku nie trzeba wyjaśniać maszynie (a w Mizarze nawet nie ma tego jak zrobić). Popatrzmy na przykłady

```
A: PEXJ IMPLIES GEC1,0J BY AX1
...
```

```
B: PEXJ BY AX3
...
```

```
C: GEC1,0J BY A,B
```

Słowo **by** („z uwagi na...”) oznacza właśnie powołanie się przy uzasadnianiu zdania  $C$  na przesłanki oznaczone  $A$  i  $B$ . Innym przykładem może być następujące rozumowanie

```
D: PEXJ OR LTCX,0J
E: NOT LTCX,1J & NOT LTCX,0J
F: NOT PEXJ OR GECX,2J
.....
```

```
G: GECX,2J BY D,E,F
```

Przy takich samych przesłankach  $D$ ,  $E$ ,  $F$  możemy też nasz wniosek uzyskać w dwu krokach.

```
H: PEXJ BY D,E
I: GECX,2J BY H,F
```

W tym przypadku oba rozumowania zostaną zaakceptowane przez system Mizara, dokładniej przez ten jego moduł (część),

który sprawdza takie właśnie uzasadnianie (w naszym żargonie nazywamy go checkerem — „sprawdzcą”).

Istnieje pewna klasa zdań, które dla checkera są oczywiste, to znaczy nie wymagają żadnego uzasadnienia.

Na przykład

```
((PEXJ IMPLIES GECX,0J) & PEXJ) IMPLIES GECX,0J
```

Stwierdzenie powyższe nie potrzebuje uzasadnienia (nie ma **by**, średnik umieszczony bezpośrednio po tym zdaniu oddziela je od następnego stwierdzenia). Zdanie oznaczone etykietą  $A$  uzyskano z pewnego ogólnego prawa jako konkretny przypadek. Checker akceptuje takie uzasadnianie. Co więcej, akceptuje również następujący krok rozumowania

```
J: GEC1,0J BY AX1,AX3
```

Mając udowodniony szczególnie przypadek możemy stwierdzić ogólniej

```
L: EX W BEING LICZBA ST GECW,0J BY J
```

i checker z tym się zgodzi.

W przypadku, gdy checker nie akceptuje jakiegoś rozumowania, zaznacza to na wydruku sprawdzanego tekstu, który oddaje po sprawdzeniu i daje następujący komentarz:

„Twoje rozumowanie nie zostało zaakceptowane. Jest możliwe, że logicznie to rozumowanie jest poprawne. Niestety checker nie umiał znaleźć sprzeczności między negacją wniosku i przesłankami. Jeżeli nie jest jasne dlaczego checker odmówił akceptacji, proszę przejrzeć „opis checkera” lub skontaktować się z autorami”.

Pewien opis checkera będzie zawarty w kolejnych odcinkach.

Wicie już, jak w Mizarze dokonuje się najprostszych uzasadnień. Przyszła pora, byście wypróbowali samodzielnie swoje siły. Spróbujcie uzupełnić poniższe rozumowania — z jakich przesłanek trzeba korzystać, aby otrzymać podane wnioski. Wstęp do pracy sformułujemy od razu. Dziedziną badaną jest zbiór ułamków, predykat większości dla dwu ułamków  $U1$ ,  $U2$  będziemy zapisywać  $NW [U1, U2]$  (co ma intuicyjnie znaczyć, że  $U1$  jest nie większe od  $U2$ ).

Żeby sformułować zadania, założmy, że wyróżniliśmy pewne stałe i przyjmijmy o nich pewne założenia (we wstępie)

```
ENVIRON
```

```
ZMROTNOSC: FOR X BEING ULAMEK HOLDS NWEX,XJ
PRZECHODNIOSC: FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NWEX,YJ & NWCY,ZJ
HOLDS NWEX,ZJ
ANTYSYMETRIA: FOR X,Y BEING ULAMEK ST NWEX,YJ & NWCY,XJ
HOLDS X=Y
SPOLNOSC: FOR X,Y BEING ULAMEK HOLDS NWEX,YJ OR NWCY,XJ
GIVEN A,B,C,D,E BEING ULAMEK
Z1: A<D
Z2: NWCA,CJ
Z3: NWCB,CJ
Z4: NWCC,DJ
Z5: NOT NWCA,EJ
```

```
BEGIN
```

A oto dowodzone tezy

```
T1: NWCA,DJ BY ??
T2: NWCB,DJ BY ??
T3: NWCA,AJ BY ??
T4: NOT NWED,AJ BY ??
T5: NOT (A=C & C=D) BY ??
T6: NOT C=E BY ??
T7: EX X BEING ULAMEK ST NWEX,XJ BY ??
T7': NWCE,DJ BY ??
```

Proszę uzupełnić miejsca wskazane przez znak zapytania tak, by wnioskowanie było akceptowane. Oczywiście można dopisać dodatkowe kroki pomocnicze.

### Przypominamy

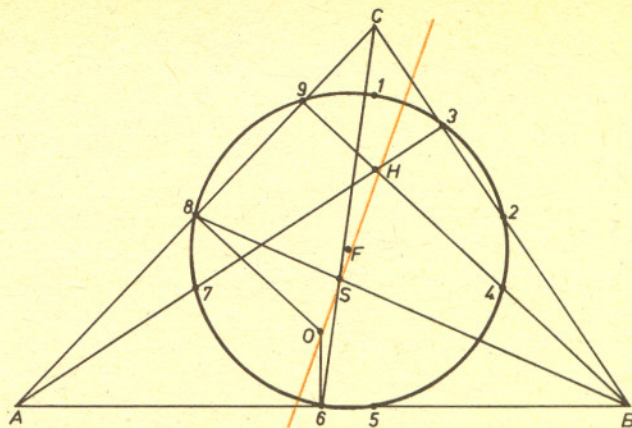
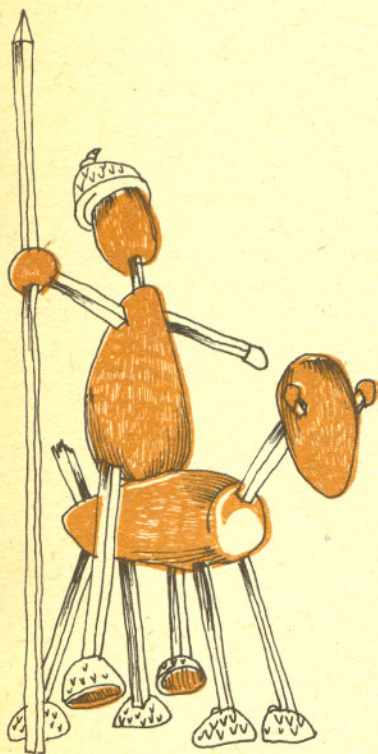
Każdy, kto nadesłanie pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — lepiej większą — z naklejonym znacznikiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.



## Okrąg Feuerbacha jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt i do okręgów dopisanych

### Rozwiązanie zadania F 140.

Zasada zachowania energii wymaga, aby igła (w zależności od warunków początkowych) pozostawała w spoczynku lub obracała się ze stałą prędkością kątową. Fakt ten staje się bardziej zrozumiały, gdy rozpatrzmy jej model matematyczny, np. traktując ją jako układ dwóch monopoli (dawniej mówiono „mas”) magnetycznych o przeciwnych „ładunkach”. Na każdy z nich działa siła styczna do linii indukcji pola. Wektory tych sił mają równe wartości, lecz różnią się zwrotami. Ponadto równe są także ich ramiona. Zatem wypadkowa siła i wypadkowy moment siły działające na igłę muszą być równe zeru. Oczywiście do tego samego wniosku prowadzi przyjęcie innego modelu igły bądź skorzystanie z symetrii. A jak zachowałaby się igła, gdyby otwór był umieszczony niesymetrycznie, np. bliżej bieguna południowego?



Rys. 1 Okrąg Feuerbacha i prosta Eulera trójkąta

Wśród wielu ciekawych zależności, jakie można znaleźć w każdym trójkącie, warto zwrócić uwagę na *okrąg Feuerbacha* (zwany czasem okręgiem Eulera lub okręgiem dziewięciu punktów). Przechodzi on przez środki boków trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków wysokości między wierzchołkami a ortocentrum  $H$  (rys. 1). Jest — jak łatwo spostrzec — obrazem jednokładnym okręgu opisanego na trójkącie; środek jednokładności jest w ortocentrum  $H$ , a skala wynosi  $1/2$ . Wynika stąd oczywiście zależność pomiędzy promieniami

$$R = 2f,$$

gdzie znaczenie  $R$  i  $f$  łatwo zgadnąć.

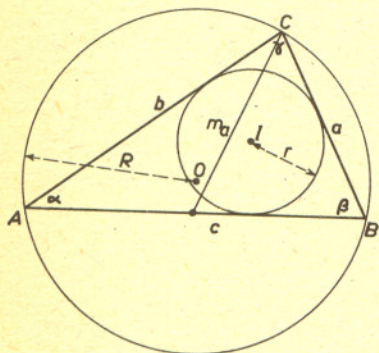
Warto też zwrócić uwagę na inną jednokładność — o środku w  $S$  (środku ciężkości trójkąta) i skali —  $1/2$ . Przeprowadza ona — jak widać z rysunku 1 — ortocentrum  $H$  na środek  $O$  okręgu opisanego. Zatem w każdym trójkącie punkty  $H, S, O$  są współliniowe (bo punkt, obraz i środek jednokładności zawsze leżą na jednej prostej); ponadto  $SH = 2OS$ . Wyznaczają one prostą (o ile tylko trójkąt nie jest równoboczny) — tzw. *prostą Eulera* (rys. 1). W połowie odcinka  $OH$  leży na niej i środek  $F$  okręgu Feuerbacha.

Autor artykułu postawił sobie dwa cele. Pierwszy: opisać ciekawą i chyba mało komu znaną własność okręgu Feuerbacha. Drugi: przedstawić kilka jej dowodów i zadać Czytelnikom pytanie (w pojęciu autora retoryczne): który jest najładniejszy? Wspomniana ciekawa własność okręgu Feuerbacha jest już wymieniona w tytule:

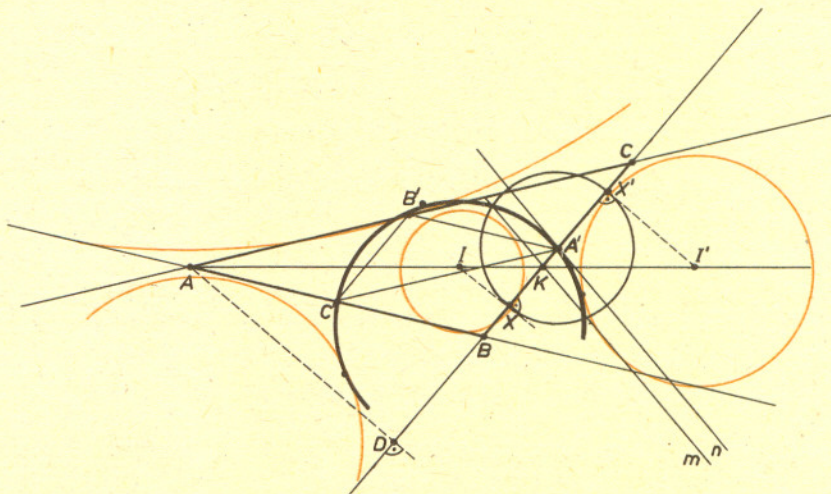
*Okrąg Feuerbacha jest styczny wewnętrznie do okręgu wpisanego w trójkąt i zewnętrznie do trzech okręgów dopisanych do trójkąta.*

\*\*\*

Tym sposobem zrealizowany został cel pierwszy; rysunki 3 i 4 ilustrują opisaną własność. Przejdźmy do dowodów. Przedstawimy je w pewnym skrócie, bardzo starając się nie nadużyć nigdzie wyświechtanego zwrotu „łatwo sprawdzić” (bo słowo musi być święte, jak śpiewał kilka lat temu Wiesław Michnikowski).



Rys. 2 Standardowe oznaczenia



Rys. 3



### Rozwiązanie zadania M 345.

Rzut czworoscianu na płaszczyznę może być trójkątem lub czworokątem o wierzchołkach będących rzutami wierzchołków czworoscianu. W pierwszym przypadku rzut czworoscianu jest rzutem prostokątnym jednej z jego ścian, a więc jego pole jest nie większe od pola tej ściany i mamy  $S_{rzutu} \leq$

$$\leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (a \text{ jest długością krawędzi czworoscianu}).$$

W drugim przypadku otrzymujemy czworokąt wypukły, którego przekątnymi są rzuty dwóch krawędzi. Ze znanego wzoru  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$  (gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy przekątnymi) mamy  $S_{rzutu} \leq \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} =$

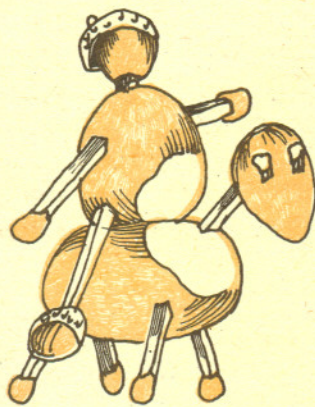
$= \frac{a^2}{2}$ , przy czym równość mogłaby być osiągnięta, gdyby krawędzie, których rzuty tworzą przekątne czworokąta, były równoległe do płaszczyzny, a kąt między tymi rzutami był prosty.

Można to osiągnąć stawiając na płaszczyźnie sześcian  $ABCA'B'C'D'$

o krawędzi  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  i biorąc czworoscian

$ACB'D'$  (wszystkie jego krawędzie są przekątnymi ścian sześcianu i mają długość  $a$ ). Jego rzut jest właśnie kwadratem  $ABCD$

o polu  $\frac{1}{2} a^2$ . Ponieważ  $\frac{a^2}{2} > \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , podana konfiguracja realizuje żądane maksimum.



### Rozwiązanie zadania M 343.

Twierdzenie jest z założenia prawdziwe dla  $n = 1$ . Dla  $n = 2$  otrzymujemy

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2,$$

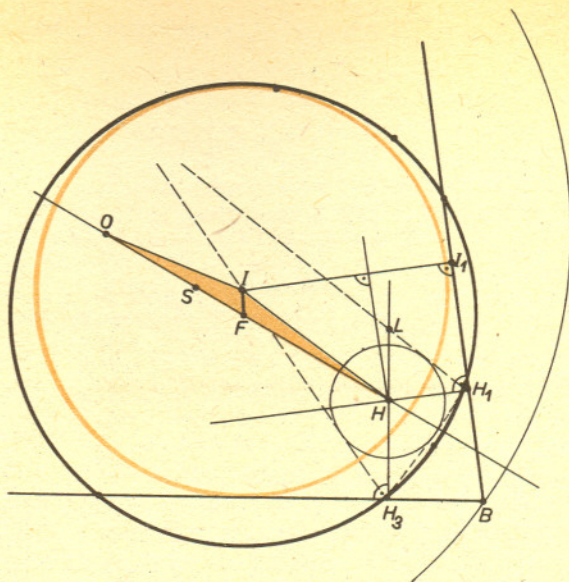
czyli też liczbę całkowitą.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , przy  $m > 2$ . Wówczas liczba

$$a^m + \frac{1}{a^m} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^{m-1} + \frac{1}{a^{m-1}}\right) - \left(a^{m-2} + \frac{1}{a^{m-2}}\right)$$

również jest całkowita, co kończy indukcyjny dowód.

(Porównaj artykuł K. Pawłowskiego w *Delcie* 2/1983).



Rys. 4

W dowodzie I skorzystamy z inwersji (patrz artykuły na str. 1 i 7).

Wygodnie będzie wprowadzić proste pojęcie. Powiemy, że współliniowe punkty  $A, B, C, D$  tworzą czwórkę harmoniczną, gdy  $BA/BC = DA/DC$ .

Skorzystamy z prawie oczywistego faktu, że rzutowanie równoległe zachowuje harmoniczną czwórkę punktów. Punkty  $A$  i  $K$  na rysunku 3 są środkami jednokładności przeprowadzających okrąg wpisany na dopisany. Stąd szybko wynika, że  $A, I, K, I'$  tworzą czwórkę harmoniczną, a więc tworzą ją także  $D, X, K, X'$  — rzuty  $A, I, K, I'$  na przedłużenie boku  $BC$ . Umiarkowanie trudno pokazuje się, że proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych połowią jego obwód; w naszym przypadku  $AC + CX' = X'B + BA$ , skąd szybko wynika, że  $XB = CX$ , tj.  $A'$  jest środkiem nie tylko  $BC$ , ale i  $XX'$ .

Dokonyamy teraz inwersji względem okręgu o środku  $A'$  i promieniu  $A'X = A'X'$ . Okrąg Feuerbacha przechodzi przez  $A'$ , a więc odwzoruje się na prostą. Ta prosta przejdzie przez obraz inwersyjny punktu  $D$  — a więc punkt  $K$  ( $D, X, K, X'$  tworzą czwórkę harmoniczną). Dowód nasz będzie zakończony, gdy przekonamy się, że

- 1) tą prostą jest  $m$  (rys. 3),
- 2) wspomniana inwersja przekształca okrąg wpisany na ten sam okrąg i okrąg dopisany na ten sam okrąg dopisany.

Obydwa te fakty możemy zostawić Czytelnikom jako zadanie. W pierwszym z nich trzeba będzie sprawdzić, że styczną do okręgu Feuerbacha w punkcie  $A'$  jest prosta równoległa do  $m$  (rys. 3). To zaś otrzymamy z kilku równości kątów na rys. 3, a w gruncie rzeczy z tego, że  $A'C'$  jest równoległa do  $AC$ ,  $A'B'$  do  $AB$ , zaś  $B'C'$  do  $BC$ . Aby wykazać, że nasza inwersja przekształca okrąg (wpisany) w siebie, zauważmy, że jest on prostopadły do okręgu, względem którego wykonujemy inwersję. Problem sprowadzi się zatem do wykazania, że

Jeżeli dwa okręgi są prostopadłe, to inwersja względem jednego przekształca drugi w siebie.

To zaś stanie się zupełnie proste, jeżeli przypomnimy sobie jakikolwiek sposób konstruowania punktu inwersyjnego względem danego (np. Inwersja — 2).

Zakończyliśmy dowód I. W drugim będziemy korzystać tylko ze znanych lub łatwo osiągalnych w tablicach wzorów planimetrii (lista poniżej). Wszystko sobie obliczymy (autor cytuje tu swoją sześćdziesięcioletnią córkę, która odezwała się kiedyś; ty masz, tatusiu, dobry zawód, bo wszystko możesz sobie obliczyć).

Oto potrzebne wzory (oznaczenia — patrz rys. 2 i 4):

1. Dla długości środkowej boku trójkąta mamy

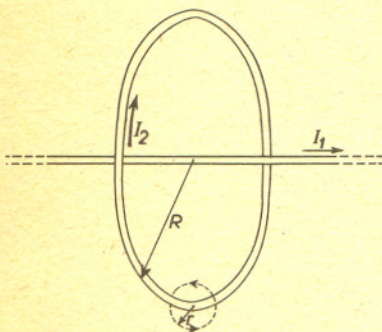
$$m_a^2 = \frac{1}{2} (b^2 + c^2) - \frac{1}{4} a^2.$$





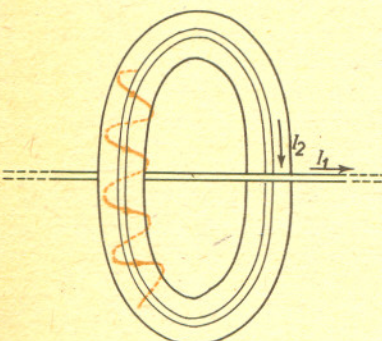
### Rozwiązanie zadania F 141.

Gdyby prąd płynął tylko w przewodniku kołowym, wtedy linie indukcji w jego najbliższym otoczeniu byłyby okręgami (patrz rys. 1), a ich zbiór dla danej wartości indukcji stanowiłby powierzchnię torusa. Wynika to z faktu, iż dla małych wartości stosunku  $r/R$  element przewodnika kołowego można traktować jako prostoliniowy.



Rys. 1

Prąd płynący w przewodzie prostoliniowym jest źródłem dodatkowego pola, którego wektory indukcji są styczne do powierzchni torusa (i prostopadłe do wektorów indukcji pola zwoju). Zgodnie z zasadą superpozycji pól indukcja pola wypadkowego jest również styczna do tej powierzchni, a jej linie tworzą linie śrubowe owijające torus (rys. 2).



Rys. 2

Przebieg linii śrubowej musi zależeć od stosunku natężeń prądów w przewodnikach. Intuicja podpowiada (i potwierdzają to obliczenia), że przy określonych stosunkach prądów linia indukcji może nie być zamknięta. Oplata wtedy dokładnie powierzchnię torusa. Czy nie jest to jednak sprzeczne z prawem Ampère'a? A jaki jest kształt linii indukcji w obszarach bardziej odległych od pętli?

2. Promień okręgu wpisanego w zależności od promienia okręgu opisanego:

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

3. Promień okręgu wpisanego w trójkąt łączący spodki wysokości trójkąta:

$$\rho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$4. BI_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$5. HH_1 = 2R \cos \beta \cos \gamma.$$

6. Odległość środka okręgu opisanego od wpisanego:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

7. Odległość środka koła opisanego od ortocentrum:

$$OH^2 = R^2 - 4R\rho, \quad \text{gdzie } \rho \text{ jest jak w 3.}$$

$$8. IH^2 = 2r^2 - 2R\rho.$$

Uporządkowaliśmy wzory według (subiektywnej) wzrastającej skali trudności w ich dowodzie; dowiedzimy tylko 8. Może tylko jedno zdanie na temat 7: wzór ten wynika z podobieństwa trójkąta  $HLH_1$  i  $BA'C$ , gdzie  $L \in pr. H_1 H_2 \cap pr. CH_3$ , a  $A'$  jest punktem na okręgu opisanym, położonym po przeciwnej stronie średnicy niż  $A$ .

Dowód wzoru nr 8 zaczniemy od zastosowania 3 i 4:

$$I_1 H_1 = BI_1 - BH_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 2R \cos \beta \sin \gamma = p,$$

$$r - HH_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 2R \cos \beta \cos \gamma = q.$$

Patrząc na trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej  $IH$  mamy  $IH^2 = p^2 + q^2$ . Podnosząc  $p$  i  $q$  do kwadratu, po długich i żmudnych obliczeniach możemy dojść stąd do zależności

$$IH^2 = 16R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - 16R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \beta \left( \cos \frac{\beta}{2} \sin \gamma + \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma \right) + 4R^2 \cos^2 \beta.$$

Dalsze rachunki (standardowe przekształcenia trygonometryczne) doprowadzą do

$$IH^2 = 32R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

co na mocy 3 i 4 jest inną tylko postacią wzoru 8.

Z nagromadzonych wzorów teza wynika już bardzo prosto. Wiemy, że  $OF = FH$ , a więc  $FI$  jest środkową w trójkącie  $OHI$ . Zatem 1 daje

$$IF^2 = \frac{1}{2} (OI^2 + IH^2) - \frac{1}{4} OH^2 = \frac{1}{2} R^2 - Rr + r^2 - R\rho - \frac{1}{4} R^2 + R\rho = \left( \frac{1}{2} R - r \right)^2,$$

więc  $IF = \frac{1}{2} R - r$ ; a to znaczy, że odległość środków okręgu Feuerbacha i wpisanego jest

równa różnicy ich promieni. Są więc one styczne wewnętrznie.

Dowód zmienia się trochę dla trójkąta rozwartokątnego, a jeszcze bardziej, gdy będziemy dowodzić, że okrąg Feuerbacha jest styczny do okręgu dopisanego. Zmiany polegać będą wprawdzie tylko na zastąpieniu niektórych znaków  $+$  przez  $-$  lub odwrotnie, ale właśnie dlatego, że niektórych — dowody trzeba będzie prześledzić od nowa.

\*\*\*

A obiecany trzeci dowód? Spróbujmy. Przypiszmy wierzchołkom trójkąta współrzędne  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  i zabierzmy się do wyliczenia wszystkiego w tych współrzędnych. Oto wzór na współrzędne środka okręgu Feuerbacha:

$$x = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(y_1 - y_2)}{2[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)]}$$

$$y = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2 - x_3) + (x_2^2 + y_2^2)(x_3 - x_1) + (x_3^2 + y_3^2)(x_1 - x_2)}{2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}$$

Dokończenie dowodu autor złośliwie pozostawia Czytelnikom.

dr Michał SZUREK

Odległości dalekich kwazarów i galaktyk wyznaczone są ze znajomości przesunięć ich linii widmowych ku czerwieni (patrz artykuł Marka Sikory w tym numerze *Delty*). Przesunięcia te mierzy się parametrem  $z = \Delta\lambda/\lambda$ . Pozwala on od razu obliczyć zarówno prędkość obiektu ( $v = cz$ , gdzie  $c$  — prędkość światła), jak i odległość ( $d = v/H$ , gdzie  $H$  — stała Hubble'a) dla niezbyt dużych wartości  $z$  ( $z \lesssim 0,5$ ).

Najbliższe galaktyki mają oczywiście  $z = 0$ , najdalsza (odkryta w tym roku) 3C 324 ma  $z = 1,21$ . Kwazary są obiektami często znacznie odleglejszymi, najdalsze kwazary mają wartość  $z \simeq 5$  (tu już nie można stosować liniowego prawa Hubble'a).

Jeśli Czytelnik na podstawie artykułów publikowanych w *Delcie* sądzi, że tak wyznaczone odległości są powszechnie akceptowane wśród astronomów, jest On, niestety, w błędzie. Obecnie trwa zażarta dyskusja między przedstawicielami ogromnej większości „ortodoksyjnych” astronomów a grupką „walczących z wiatrakami odszczepieńców”. Ci ostatni mają (znowu niestety) jednak kilka poważnych argumentów świadczących o tym, że przynajmniej niektóre galaktyki i kwazary nie znajdują się w odległościach przypisywanych im na podstawie prawa Hubble'a, ale znacznie bliżej.

Galaktyki często grupują się w gromady. Różnice prędkości poszczególnych członków gromad wyznaczone z efektu Dopplera są rzędu 100 km/s ( $\Delta z \simeq 0,0003$ ), ale co zrobić z bliskimi parami galaktyk mającymi  $\Delta z = 0,08$  (NGC 1232 A i B),  $\Delta z = 0,11$  (NGC 53 + anonimowy towarzysz) albo z parami galaktyka — kwazar np. NGC 4319 — Markarian 205 ( $\Delta z = 0,06$ ) czy 1107 + 036 ( $\Delta z = 0,93!$  kwazar oddala się od galaktyki z prędkością prawie równą prędkości światła!)? Przypadkowa koincydencja położen? Nie, bo te pary wyraźnie ze sobą oddziałują!

Dyskusja między zwolennikami dwóch nierównych frakcji jest bardzo gorąca, często kończy się wymachiwaniem rękoma i izolacją „poszukiwaczy sprzeczności” w skądinąd spójnym wyobrażeniu o Wszechświecie. Ostatnio jednak ukazał się artykuł autorstwa przedstawicieli obu grup będący krokiem do zespolenia wysiłków dla porozumienia.

Autorzy ci tak wyobrażają sobie dyskusję (w stylu starożytnych filozofów i dość dowolnym tłumaczeniu) na temat jednej z takich dziwnych par (1107 + 036).

**X:** Przyznaję, że nie można wyciągać wielu wniosków na podstawie obserwacji jednego obiektu [1107 + 036 ma największą wartość  $\Delta z$ ]. Jednak prawdopodobieństwo przypadkowego znalezienia jasnej galaktyki w odległości nie większej niż 20'' od kwazara [tyle wynosi separacja tej pary] wynosi  $\sim 0,006$ . Nie jest to rozstrzygający argument, jednak wygląd galaktyki, jak i jej wydłużenie w kierunku kwazara sugerują możliwe oddziaływanie.

**Y:** Ale nie widać bezpośredniego połączenia pary, a prawdopodobieństwo zostało wyznaczone *a posteriori*. Na podstawie tej oceny można jedynie stwierdzić, że wśród znanych kwazarów powinniśmy obserwować ok. 10 takich przypadkowych par.

**X:** Zgoda, jeśli rozważać liczbę źródeł radiowych, takich koincydencji jest znacząco więcej niż ilość spodziewana z ocen probabilistycznych.

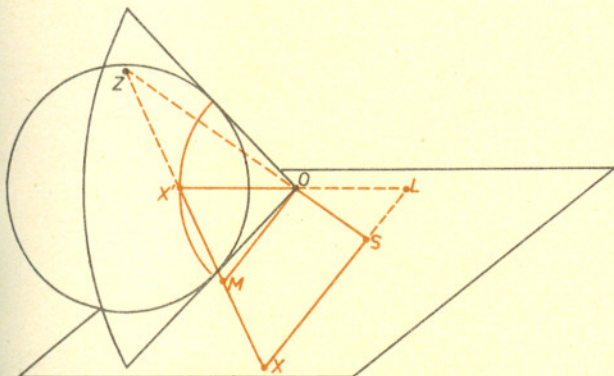
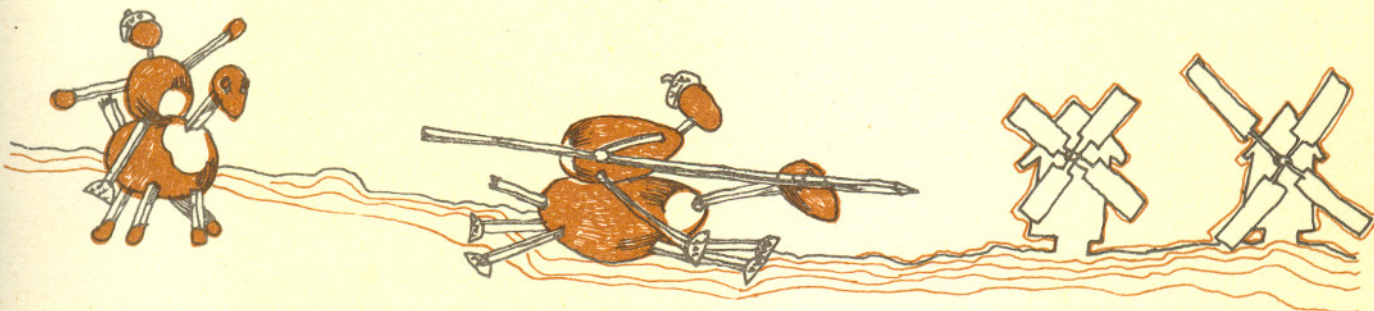
**Y:** Jednak, jak wiesz, w dwóch przypadkach odkryto linie absorpcyjne w widmach kwazarów w takich parach, odpowiadające odległości galaktyki, co świadczy o tym, że kwazar jest za galaktyką (jego światło jest w drodze ku nam częściowo absorbowane) i rzeczywiście jest w odległości zgodnej z prawem Hubble'a.

**X:** Nie, to świadczy jedynie o tym, że kwazar jest za galaktyką, ale nic nie mówi o tym, jak daleko. Możliwe, że kwazary są jakimiś tworami wyrzuconymi przez galaktyki z dużymi prędkościami. W tych dwóch przypadkach zostały one wyrzucone w kierunkach przeciwnych niż do Ziemi.

**Y:** Twierdzisz, że kwazary rzeczywiście znajdują się blisko galaktyk? To dlaczego wszystkie te inne kwazary wyrzucane są w kierunku od Ziemi? Czyżbyśmy byli w środku Wszechświata? A poza tym znamy wiele zjawisk wyrzutów materii z galaktyk i kwazarów, wszystkie mają prędkości ok. 0,1c, a tu mamy do czynienia z prędkością bliską prędkości światła.

Autorzy ci zgadzają się, że dotychczas nie osiągnięto porozumienia (co nie jest rzeczą łatwą). Ale próby trwają.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



#### Inwersje — 4

Na sferze opiszmy stożek o wierzchołku  $O$ . Jest on styczny do sfery wzdłuż okręgu. Wykażemy, że okręgowi temu odpowiada na płaszczyźnie okrąg o środku  $S$  będącym punktem przecięcia prostej  $ZO$  (por. 3) z płaszczyzną. Należy więc wykazać, że  $SX$  nie zależy od wyboru punktu  $X'$  na okręgu na sferze. W myśl 3 proste  $X'O$  i  $SX$  przecinają się w takim punkcie  $L$ , że  $X'L = LX$ . Prowadząc przez  $O$  równoległą do  $SX$  uzyskujemy w przecięciu z  $XX'$  punkt  $M$ . Trójkąty  $X'LM$  i  $X'OM$  są podobne, więc  $X'O = OM$ . Podobne są też trójkąty  $ZOM$  i  $ZSX$ , a więc

$$\frac{SX}{SZ} = \frac{OM}{OZ}$$

Stąd  $SX = \frac{SZ \cdot OM}{OZ} = \frac{SZ \cdot OX'}{OZ}$ , a ponieważ  $OX'$  nie zależy od wyboru  $X'$  na okręgu, więc  $SX$  też nie zależy od wyboru  $X'$ .