

SPIS TREŚCI

NUMERU 6 (114)

Zagadki hydrodynamiki i turbulencja <i>doc. dr Zbigniew Peradzyński</i>	str. 1
Jasność powierzchniowa tarczy Słońca <i>dr Jerzy Madej</i>	str. 6
O pewnym paradoksie ekonomicznym <i>dr Andrzej Pelc</i>	str. 8
Zadania <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 8
Problem Kakeya <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 14
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 14
Piękny dowód Schwarza	str. 15
Klub 44	str. 16

Następny numer

z okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków zostanie wydany również w języku angielskim.

Nasza okładka:

Częściowe zaćmienie Słońca 15 grudnia 1982. Zdjęcie to wykonali G. Pojmański, M. Szymański i A. Udalski przy użyciu jednej z małych lunet Stacji Naukowo-Dydaktycznej Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Warszawskiego w Ostrowiku. Na zdjęciu tym można zauważyć kilka ciekawych zjawisk:

1. pociemnienie brzegowe tarczy Słońca, pisze o tym J. Madej wewnątrz numeru;
2. plamy słoneczne, jest ich niezbyt dużo, ponieważ Słońce zbliża się do minimum swojej aktywności;
3. nierówności brzegu tarczy Księżycy, w tych górach i dolinach właśnie wschodzi Słońce po dwutygodniowej nocy.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

dr Bogdan Cichoński
 dr hab. Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Tomasz Hofmokr
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Tadeusz Jarzembowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bogdan Paczyński
 dr Zbigniew Płochocki
 prof. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 doc. dr Jerzy Sawicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 prof. dr Grzegorz SitarSKI
 doc. dr Kazimierz Stępień

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
 1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 2. dla osób fizycznych — indywidualnych:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.
 3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Termin przyjmowania prenumeraty:

— od prenumeratorem indywidualnych zamieszkałych w miastach siedzibach oddziałów RSW „Prasa — Książka — Ruch” — do dnia 28 lutego 1983 r. — na II kwartał i dalsze okresy roku bieżącego, 31 maja 1983 r. — na III kwartał i II półrocze roku bieżącego, 31 sierpnia 1983 r. — na IV kwartał roku bieżącego,
 — od instytucji, zakładów pracy i prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych na wsi i w małych miasteczkach do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Stefan Turnau
 doc. dr Aniela Wolska
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Zakowski — przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski
 mgr Maciej Jędrzejczak
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr Marek Kordos — red. naczk.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczk.
 dr inż. arch. Jacek Mazur
 dr Jerzy Ryll
 dr Michał Szurek
 doc. dr Michał Święcki — z-ca red. naczk.

Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 4316/83 M-10

Zagadki hydrodynamiki i turbulencja

Doc. dr Zbigniew PERADZYŃSKI

Paradoks Du Buata

W latach siedemdziesiątych osiemnastego stulecia rząd francuski wyznaczył nagrodę za rozwiązanie problemu oporu statków w zależności od ich kształtu, co zintensyfikowało zarówno teoretyczne, jak i doświadczalne badania w dziedzinie hydrodynamiki. Spośród rozmaitych prac eksperymentalnych najbardziej przełomowe okazały się prace inżyniera hydrauliki Pierre Du Buata (1734—1809). Badając opór ciał poruszających się w wodzie Du Buat zauważył, że występuje dość wyraźna różnica w sile oporu w zależności od tego, czy będące w spoczynku ciało jest opływane strumieniem wody o pewnej prędkości v , czy też ciało to porusza się z prędkością v w nieruchomej wodzie. Sytuacja wygląda paradoksalnie, bowiem wydaje się przeczyć zasadzie względności Galileusza — fundamentalnej zasadzie fizyki. Pomimo usiłowań w tym kierunku Du Buat nie był w stanie wyjaśnić przyczyny tego paradoksu.

Problem siły wywieranej na ciało przez przepływający płyn jest podstawowym zagadnieniem hydrodynamiki, wiąże się bowiem bezpośrednio z problemem lotu samolotu, pracy śmigła, śruby okrętowej, turbin itp. Już Newton (1643—1727) atakował ten problem i rozważając ciało bombardowane przez swobodne cząstki doszedł do wzoru

$$F = \rho A v^2,$$

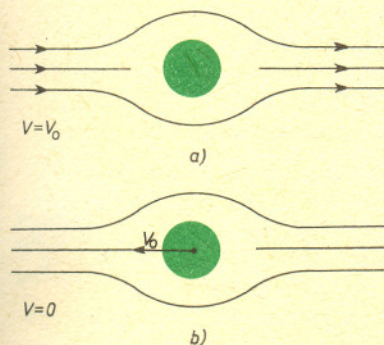
gdzie ρ jest gęstością, v — prędkością cieczy daleko od ciała, A — stałą proporcjonalną do przekroju poprzecznego ciała (np. dla płytki umieszczonej prostopadle do przepływu $A = 2 \times$ pole płytki, dla kuli $A = \pi r^2$).

Niestety, wzór ten może być słuszny jedynie dla niezwykle rozrzedzonych gazów i pozostaje w dużej niezgodności z eksperymentem. Dla realnych gęstych cieczy czy gazów cząstki płynu nie odskakują od ciała, lecz łagodnie je opływają. Według teorii Newtona tylko frontowa (w stosunku do napływającego płynu) strona byłaby odpowiedzialna za siłę wywieraną na ciało, podczas gdy eksperymenty Du Buata wykazały, że w wielu przypadkach właśnie tylna część ciała odgrywa decydującą rolę!

Paradoks d'Alemberta — czy lepsza teoria może dawać gorsze rezultaty

Początek dynamiki płynów jako teorii matematycznej można umieścić około roku 1750, kiedy to znakomity matematyk szwajcarski Leonhard Euler podał słynne równania (nazwane później jego imieniem) ruchu cieczy nielepkiej, tzn. takiej, w której siły działające na wybrany element cieczy pochodzą jedynie od ciśnienia. Jest to uogólnienie faktu (prawo Pascala), że ciśnienie w hydrostatyce jest izotropowe, tzn. jednakowe we wszystkich kierunkach. Ciecz silnie reaguje na zmianę objętości i niezauważalnie na zmianę kształtu!

Spośród wielu możliwych przepływów opisywanych tymi równaniami najważniejsze wydawały się przepływy potencjalne, a więc takie, dla których istnieje potencjał prędkości, tj. taka funkcja φ , że prędkość \mathbf{v} jest jej gradientem ($\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$), podobnie jak w elektrostatyce pole elektryczne jest gradientem potencjału. Rozciągając tę analogię, umieszczenie w przepływie ciała nieprzenikalnego dla cieczy odpowiada umieszczeniu w polu elektrycznym ciała o tym samym kształcie i zerowej stałej dielektrycznej. Przepływy potencjalne są przepływami bezwirowymi, tzn. takimi, że drobne elementy płynu, jakkolwiek mogą się poruszać po zakrzywionych torach i mogą być deformowane, to jednak nie ulegają obrotom. Dla cieczy opisywanej równaniami Eulera zachodzi twierdzenie (Thomsona), które mówi, że jeśli przepływ był na początku potencjalny, wówczas już na zawsze pozostanie potencjalny.

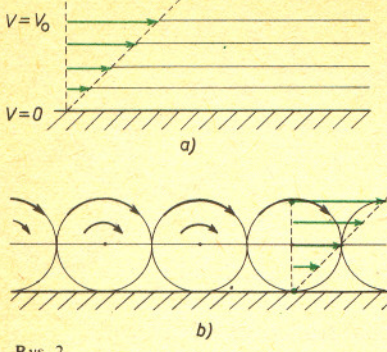


Rys. 1 Doświadczenie pokazuje, że siła, z jaką płyn działa na ciało, jest w przypadku a) inna niż w przypadku b).

Gradient różniczkowalnej funkcji rzeczywistej $f(x_1, \dots, x_n)$ w punkcie (x_1, \dots, x_n) to wektor:

$$\text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Pole skalarne określone funkcją f (punktowi przyporządkowana liczba) generuje tu więc pole wektorowe $\text{grad } f$ (punktowi przyporządkowany wektor charakteryzujący co do wielkości i kierunku — największą prędkość wzrostu f).



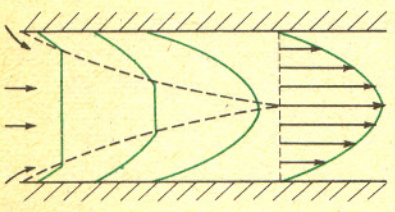
Rys. 2

Niezerową siłę oporu uzyskał Helmholtz (1821—1894) zakładając, że za ciałem rozciąga się do nieskończoności strefa cienia z zerową prędkością płynu. Ale takie przepływy nie są potencjalne i ponadto prędkość doznaje skoku na powierzchni cienia.

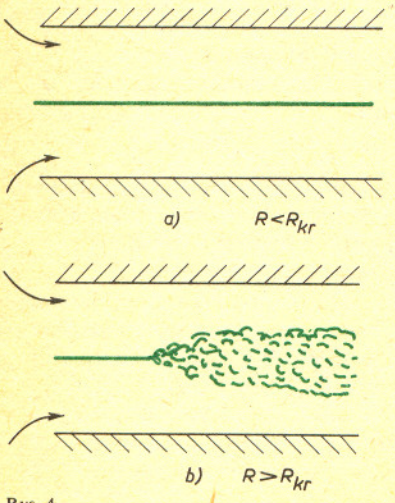
Pomiędzy dwiema bliskimi równoległymi warstwami cieczy oddalonymi o Δl , gdzie jedna ślizga się względem drugiej z prędkością Δv występuje siła tarcia

$$F_t = \eta \frac{\Delta v}{\Delta l}$$

gdzie Δl — odległość, a $\eta > 0$ jest stałą materiałową zwaną współczynnikiem lepkości.



Rys. 3 Płaski (potencjalny) profil prędkości w rurze ewoluuje do parabolicznego na skutek wzrostu grubości warstwy przyściennej.



Rys. 4

Mogłoby się wydawać, że mając równania opisujące ruch płynu można będzie analizując ich rozwiązania wyznaczyć siły działające na opływane ciało. Jeśli ciało zaczyna się poruszać osiągając pewną stałą prędkość w spoczywającym początkowo płynie, wówczas zgodnie z twierdzeniem Thomsona powinniśmy mieć do czynienia z opływem potencjalnym (bo spoczynek jest szczególnym przypadkiem przepływu potencjalnego). Analizując jednakże stacjonarne potencjalne przepływy d'Alembert (1717—1783) zauważył, że jeśli prędkość $v(x, y, z)$ i ciśnienie $p(x, y, z)$ jest rozwiązaniem równań Eulera, to również $-v(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ jest rozwiązaniem tego samego problemu. Ponieważ siła wywierana na ciało w modelu Eulera pochodzi tylko od ciśnienia, to zmiana znaku prędkości nie powoduje zmiany siły! Jeżeli ponadto przepływ daleko za ciałem jest taki sam jak daleko przed ciałem (a taka sytuacja ma miejsce dla przepływów potencjalnych), wówczas siła działająca na ciało może być tylko prostopadła do kierunku przepływu, a dla ciała symetrycznego, np. kuli, musi być równa zero! Oczywisty absurd znany jako paradoks d'Alemberta. Można pokazać, że w przepływie potencjalnym, w przypadku dowolnego ciała, siła jest zerem. W tej sytuacji nawet Euler analizując opór statków, pracę turbin czy śrub okrętowych korzystał z niepoprawnych wzorów Newtona, a paradoks oporu mimo licznych prób pozostawał nierozwiązany. Wzory Newtona jeszcze w końcu XIX wieku były wykorzystywane do wykazania praktycznej niemożliwości zbudowania latających maszyn ze względu na olbrzymi opór.

Wytworzyła się więc paradoksalna sytuacja: wzór Newtona, choć oparty na złych założeniach, dawał lepsze wyniki aniżeli elegancka i matematycznie spójna teoria Eulera. Stawało się powoli jasne, że nieuwzględnienie wewnętrznego tarcia w cieczy może być odpowiedzialne za paradoks d'Alemberta. W 1821 r. Claude L. M. H. Navier zmodyfikował równania Eulera uwzględniając siły lepkości (tarcia wewnętrznego) proporcjonalne do gradientu prędkości. Nieco później do tego samego rezultatu doszedł fizyk i matematyk angielski George G. Stokes.

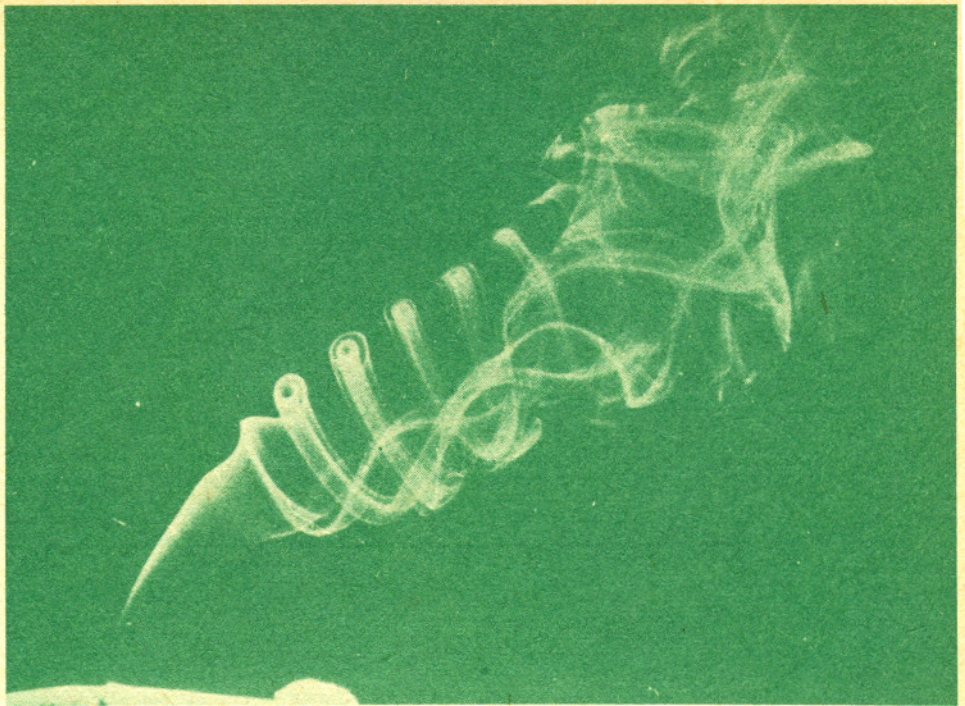
Dość zabawny jest fakt, że potencjalne rozwiązania równań Eulera spełniają również równania Naviera-Stokesa, a zatem różnica pojawia się tylko wtedy, kiedy wystąpi siła tarcia między powierzchnią ciała i opływającą je cieczą. Istotnie, eksperymenty pokazują, że ciecz bezpośrednio przylegająca do ciała ma prędkość zerową i prędkość ta narasta w pewnej cienkiej początkowo warstwie wokół ciała do typowych prędkości w przepływie. A zatem w pobliżu brzegu opływającego ciała pojawia się wirowość, przepływ przestaje być tam potencjalny. Istotnie, przepływ na rys. 2a można uważać za superpozycję dużej ilości wirów toczących się po powierzchni ciała (rys. 2b).

Z drugiej strony równanie opisujące ewolucję wirowości, będące konsekwencją równania Naviera-Stokesa, jest równaniem typu równania dyfuzji, co powoduje, że wiry generowane początkowo w cienkiej warstwie przy brzegu dyfundują dalej do obszaru, gdzie przepływ był poprzednio potencjalny. W ten sposób grubość warstwy wirowej zwanej warstwą przyściennej rośnie z pierwiastkiem odległości od przedniej krawędzi opływającego ciała. Grubość warstwy przyściennej maleje wraz ze wzrostem tzw. liczby Reynoldsa, $R = \frac{\rho v L}{\eta}$, gdzie ρ — gęstość cieczy, v — średnia typowa prędkość, a L jest typowym rozmiarem, np. średnicą rury w przepływie przez rurę lub średnicą kuli przy opływie kuli.

Paradoks symetrii — niestabilność i turbulencja

Wyobraźmy sobie następujące doświadczenie przeprowadzone przez Reynoldsa: do rury (rys. 4) wpływa woda z dużego zbiornika. W środku przekroju rury wpuszczony jest barwnik, np. atrament, który płynie razem z cieczą. Przy niezbyt dużych prędkościach przepływu obserwujemy równomierną strużkę barwnika jak na rys. 4a. Po przekroczeniu pewnej krytycznej prędkości obraz przepływu nagle się komplikuje, staje się bardzo chaotyczny, jak mówimy — turbulentny. Tak więc mimo symetrycznych, jak się wydaje, przyczyn i symetrii praw przyrody skutek jest wysoce niesymetryczny. Wyjaśnienie tego „paradoksu” opiera się na pojęciu niestabilności. Symetryczny przepływ staje się niestabilny po przekroczeniu krytycznej liczby Reynoldsa, w przypadku rury $R_{kr} \approx 2300$.

Rys. 5 Niestabilność dymu z papierosa



Przepływ wody ($\eta \approx 10^{-2} \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$) w rurze o średnicy $L = 2 \text{ cm}$ jest turbulentny już dla prędkości powyżej ok. $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

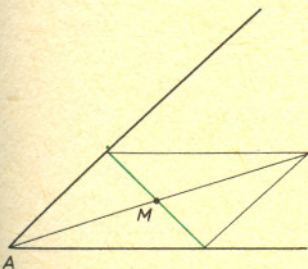
Pojawienie się turbulencji wyjaśnia do pewnego stopnia paradoks Du Buata. Mianowicie w praktyce prawie każdy strumień jest nieco turbulentny. Przepływ wody w rzece jest bardziej burzliwy niż opływ przedmiotu poruszającego się w spokojnej wodzie jeziora, co daje różnice w oporze i pozwala nadal wierzyć w zasadę względności. Zamiast paradoksu względności pojawia się jednakże problem opisu turbulencji.

Liczba Reynoldsa ma duże znaczenie w hydrodynamice. Wyraża stosunek sił bezwładności do sił tarcia wewnętrznych w przepływie. Dwa przepływy (w ogólności różnych) cieczy w sytuacji geometrycznie podobnej wyglądają tak samo, jeśli mają tę samą liczbę Reynoldsa. Dla przykładu przepływ miodu (duże η) w jakimś naczyniu można wymodelować przepływem wody ($\eta \approx 10^{-2} \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$) biorąc np. odpowiednio mniejsze wymiary naczynia czy też mniejszą prędkość wody.

Rys. 6 Ścieżka wirów za walcem (po lewej stronie fotografii) przy $R = 140$



Rozwiązanie zadania M 334.



Pojawienie się warstwy przyściennej wyjaśnia do pewnego stopnia paradoks d'Alemberta. Na skutek istnienia warstwy przyściennej przepływ przestaje być potencjalny i w ogólności za ciałem pojawia się pewna ścieżka wirów. Fakt ten ma miejsce nawet jeśli z lepkością przechodzić do zera, co odpowiada przejściu od równań Naviera-Stokesa do równań Eulera. W tym przypadku ścieżka wirowa staje się nieskończenie cienka i w konsekwencji daje nieciągłość prędkości bądź też wystąpienie pewnego wiru dookoła opływającego ciała (patrz artykuł W. Kuzaka, *Delta* 4/1982). Otrzymujemy niezerową siłę!

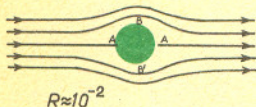
Rozumowanie to jest przybliżone, ponieważ równanie Bernoulliego jest konsekwencją równań Eulera, a nie równań Naviera-Stokesa.

Rozpatrzmy potencjalny opływ walca potokiem cieczy idealnej bez lepkości napływającym z lewa z prędkością v_0 (rys. 7). Zgodnie z prawem Bernoulli'ego

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const},$$

a więc w punktach A, A' , gdzie ciecz ma prędkość $v = 0$,

ciśnienie jest maksymalne, natomiast w punktach B, B' prędkość osiąga maksimum, po czym opływając walec ciecz jest hamowana, co prowadzi do wzrostu ciśnienia kosztem energii kinetycznej. Dla cieczy, w której występuje tarcie, sytuacja taka jest niemożliwa, część energii kinetycznej ulega dyssypacji, wskutek czego linie prądu bliskie powierzchni walca nie są już w stanie dotrzeć do punktu A' i wcześniej następuje tzw. oderwanie warstwy przyściennej (rys. 8), co prowadzi do pojawienia się wirów w okolicy punktu A' . Dalszy wzrost liczby Reynoldsa prowadzi do dalszych komplikacji przepływu, dopiero co utworzone wiry zaczynają być kolejno wymywane (rys. 9), aż wreszcie dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa przepływ za walcem staje się turbulentny (rys. 10). Jaki jest mechanizm powstawania turbulencji? W warstwie przyściennej generowana jest wirowość. Na skutek odrywania się warstwy przyściennej powstają duże wiry o wymiarach porównywalnych z rozmiarami charakterystycznymi występującymi w przepływie, jak średnica rury czy też promień walca. Wiry te oddziałują z przepływem, są rozciągane i rozrywane, co prowadzi do powstawania mniejszych wirów. Te z kolei są przyczyną powstawania jeszcze mniejszych itd. Kaskadowy mechanizm napędzania coraz to mniejszych wirów powoduje powstawanie bardzo małych wirów, których energia wskutek lepkości jest szybko zamieniana na ciepło. Wszystko to razem powoduje, że struktura przepływu jest bardzo skomplikowana i analityczne czy też numeryczne rozwiązywanie przepływu staje się niemożliwe nawet przy użyciu najpotężniejszych maszyn liczących. Przypomina to trochę sytuację dużej liczby molekuł gazu zamkniętych w naczyniu i wykonujących chaotyczne ruchy. Wprawdzie można napisać ich równania ruchu, jednakże trudno nawet pomyśleć o ich rozwiązaniu. Na szczęście interesują nas jedynie pewne wielkości średnie, takie jak temperatura gazu, ciśnienie czy też średnia prędkość, a te dają się stosunkowo łatwo obliczyć metodami fizyki statystycznej. Podobnie w przepływie turbulentnym wystarczyłoby wyznaczyć pewne wielkości średnie w otoczeniu każdego punktu, takie jak średnie ciśnienie czy średnia prędkość.



Rys. 7



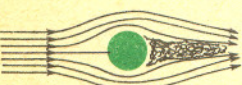
Rys. 8



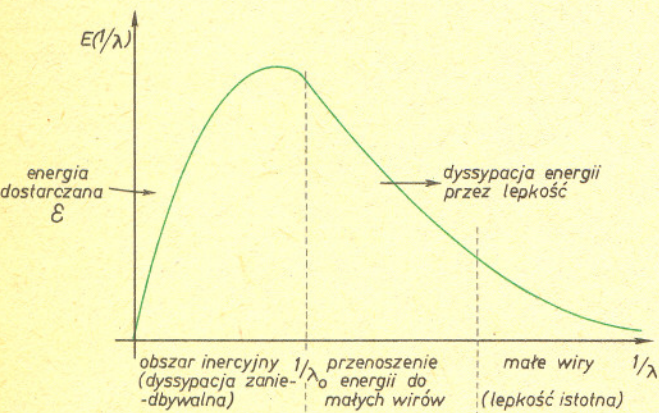
Rys. 9



Rys. 9

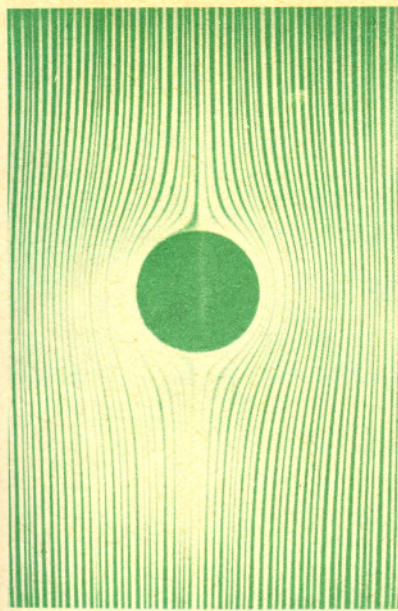


Rys. 10



Rys. 11 Rozkład energii w wirach

Było już wiele prób skonstruowania równań statystycznej teorii turbulencji, które jako jedyne niewiadome zawierałyby wielkości średnie. Wprowadzając hipotetyczne cząstki turbulencji L. Prandtl (1875—1953) uzyskała równania na średnie prędkości i średnie ciśnienia. Równania te są formalnie podobne do równań Naviera-Stokesa, w których jednakże zamiast zwykłej lepkości pojawia się tzw. lepkość turbulentna będąca konsekwencją dyfuzji „cząstek” turbulencji. Równania tego typu mają pewne praktyczne znaczenie, jednak ciągle są jeszcze bardzo dalekie od opisu rzeczywistości. Eksperyment pokazuje, że wystąpienie turbulencji związane jest z utratą stabilności przepływu laminarnego. Zanim przepływ po utracie stabilności osiągnie reżim tzw. turbulencji rozwiniętej, przechodzi on przez pewne stany przejściowe. Mamy więc rozmaite stadia turbulencji. Wydaje się, że najłatwiejsza w opisie powinna być turbulencja rozwinięta, ta najbardziej chaotyczna. Bliższe badanie równań Naviera-Stokesa pokazuje, że w przypadku turbulencji rozwiniętej (izotropowej) rozwiązanie problemu sprowadzałoby się do wyznaczenia rozkładu energii w wirach, tzn. do odpowiedzi na pytanie, ile energii unoszą wiry o danych rozmiarach.



Metodami analizy wymiarowej, która jest wyrazem faktu, że zjawiska fizyki nie mogą zależeć od wyboru jednostek, słynny radziecki matematyk Kołmogorow doszedł do wniosku, że dla wirów o średnich rozmiarach rozkład energii powinien być dany wzorem

$$E(\lambda) = C\varepsilon^{2/3}\lambda^{5/3},$$

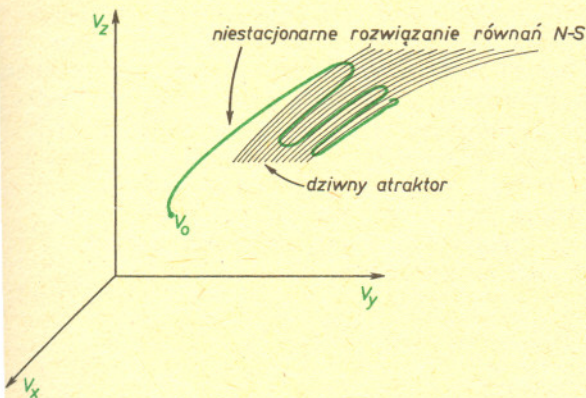
gdzie C — pewna stała, ε — energia dostarczona z przepływu przez duże wiry oraz λ — rozmiar wiru.

Problem turbulencji usiłował również rozwiązać słynny fizyk niemiecki Werner Heisenberg. Rezultaty, które otrzymał, do pewnego stopnia pokrywają się z rezultatami Kołmogorowa. Mimo licznych i upartych usiłowań żadna z podejmowanych prób nie doprowadziła jednak do zadowalającej teorii turbulencji. Z tego też powodu niektórzy nazywają turbulencję grobem dla geniuszy.

Turbulencja i dziwne atraktory

W ostatnich latach podjęto usiłowania wyjaśnienia natury turbulencji wykorzystując pojęcie dziwnych atraktorów (patrz *Delta* 7/1982). Stan układu w danej chwili, tzn. chwilowe prędkości $\mathbf{v}(x, y, z)$ oraz chwilowe pole ciśnienia $p(x, y, z)$ można reprezentować punktem w pewnej przestrzeni nieskończenie wymiarowej — przestrzeni stanów. Można to sobie wyobrazić następująco: — gdyby interesowała nas prędkość i ciśnienie tylko w jednym punkcie np. w $x = y = z = 0$, wówczas zbiór wszystkich możliwych $\mathbf{v}(0, 0, 0)$ i $p(0, 0, 0)$ stanowiłby czterowymiarową przestrzeń, w przypadku dwu punktów już ośmiowymiarową i ogólnie dla przypadku n punktów trzeba by $4n$ -wymiarowej przestrzeni. Ponieważ liczba punktów w przestrzeni jest nieskończona, zatem i wymiar naszej przestrzeni stanów jest nieskończony.

W miarę upływu czasu pole \mathbf{v} oraz p zmienia się i ewolucja układu może być przedstawiona jako krzywa w przestrzeni stanów parametryzowana czasem. W ten sposób z każdym punktem początkowym $\{\mathbf{v}(x, y, z), p(x, y, z)\}$ związana jest pewna trajektoria wyznaczona przez równania Naviera-Stokesa. Innymi słowy rozwiązanie równań Naviera-Stokesa polegałoby na skonstruowaniu pewnego odwzorowania $S(\tau)$, $\tau > 0$ przestrzeni stanów, które każdemu stanowi $\{\mathbf{v}_t, p_t\}$ w chwili t przyporządkowuje stan w chwili o τ późniejszej. Rzecz jasna $S(\tau) \cdot S(\tau) = S(2\tau)$ i ogólnie $S(\tau) \cdot S(\tau') = S(\tau + \tau')$. Jeśli teraz układ, tzn. odwzorowanie $S(\tau)$, ma dziwny atraktor, wówczas może się zdarzyć, że trajektoria przechodząca w pobliżu tego atraktora zostanie do niego przyciągnięta i błądząc w coraz to bliższym otoczeniu atraktora będzie wykonywać na pozór bardzo chaotyczne ruchy. W takim przypadku ogólny (statystyczny) obraz ruchu byłby nieczuły na zmiany początkowego stanu.



Rys. 12 Na rysunku byliśmy w stanie uwzględnić jedynie trzy wymiary przestrzeni stanów, np. wartości prędkości w wybranym punkcie przestrzeni fizycznej.

Jeśliby teraz udało się określić strukturę takiego atraktora oraz wyznaczyć średni czas przebywania trajektorii w pobliżu każdego punktu atraktora, wtedy stałoby się możliwe skonstruowanie statystycznej teorii turbulencji (podobnie jak dało się zbudować mechanikę statystyczną) i problem turbulencji byłby rozwiązany. Łatwo sobie wyobrazić, że układ w ogólności może mieć wiele dziwnych atraktorów, a co za tym idzie wiele reżimów turbulencji, każdy związany z odpowiednim atraktorem.

Jak dotąd nie potrafimy tego zrobić dla równań, które są dziecinnie proste w porównaniu z równaniami Naviera-Stokesa. Dlatego problem turbulencji wydaje się teraz trudniejszy, niż wydawało się 15 czy 20 lat temu i pod względem trudności nie ustępuje np. problemom kwantowej teorii pola. Równanie Eulera wypisane około 1750 roku czy Naviera-Stokesa (1821) oraz wzajemne relacje między rozwiązaniami tych równań mimo dwóch wieków pracy fizyków i matematyków ciągle stanowią jeszcze wielką zagadkę.

Jasność powierzchniowa tarczy Słońca

Dr Jerzy MADEJ

Patrząc na Słońce tuż przed jego zachodem (albo tuż po jego wschodzie) każdy może z łatwością zauważyć, że powierzchnia tarczy widziana z Ziemi nie jest jednakowo jasna. Największą jasnością powierzchniową obserwujemy w centrum tarczy Słońca, natomiast w miarę oddalania się w kierunku krawędzi jasność zmniejsza się w sposób ciągły. Cały efekt jest symetryczny względem środka tarczy Słońca i pozostaje niezmienny w czasie.

Pociemnienie brzegowe tarczy Słońca jest zjawiskiem realnym, niezależnym od istnienia atmosfery ziemskiej, która wpływa w negatywny i zakłócający sposób na większość obserwacji astronomicznych. Zjawisko to jest interpretowane w ścisłym związku z teoriami budowy atmosfery (fotosfery) słonecznej.

Słońce, będąc ogromną rozżarzoną kulą gazową, nie ma oczywiście żadnej stałej powierzchni, w przeciwieństwie do wielu planet Układu Słonecznego. Patrząc na Słońce obserwujemy tzw. fotosferę, czyli zewnętrzną jego warstwę o grubości kilkuset kilometrów. Stopniowo wzrastająca nieprzezroczystość gazowej fotosfery nie pozwala na zaobserwowanie warstw położonych głębiej i stanowiących wnętrze naszej dziennej gwiazdy. Wspólną cechą wnętrza i fotosfery słonecznej jest spadek temperatury w kierunku na zewnątrz. Tak więc światło słoneczne (o natężeniu I_ν dla danej, ustalonej częstotliwości fali ν), obserwowane z zewnątrz w pewnym miejscu tarczy, pochodzi z wielu warstw (znajdujących się w fotosferze) o różnych temperaturach. Można jednak wybrać spośród nich warstwę (o jakiejś temperaturze T), której promieniowanie będzie najlepiej przybliżać rozkład obserwowanego natężenia I_ν przez lokalną wartość funkcji Plancka

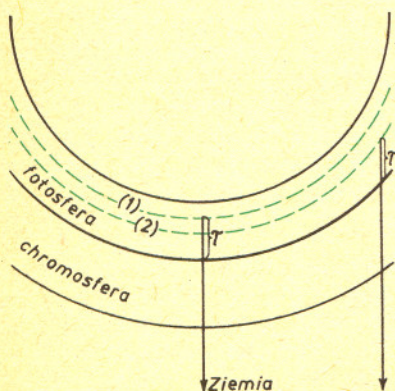
$$I_{\nu}(\text{zewn.}) = B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}$$

Zakładamy w tym miejscu, że warstwa ta promieniuje tak, jak ciało doskonale czarne. Wartość funkcji Plancka dla ustalonej częstotliwości ν monotonicznie rośnie ze wzrostem temperatury.

Zjawisko pociemnienia brzegowego wyjaśnia pierwszy spośród zamieszczonych rysunków. Zewnętrzny obserwator, patrząc na środek tarczy Słońca, obserwuje promieniowanie z warstwy fotosferycznej (1) położonej na głębokości optycznej $\tau = 1$. Parametr τ oznacza, że z tej głębokości wychodzi na zewnątrz $e^{-\tau}$ część wyemitowanego tam promieniowania, nie ulegając przy tym absorpcji w warstwach fotosfery leżących wyżej (reszta jest zaabsorbowana). Jeżeli obserwator patrzy poza centrum tarczy Słońca, promienie światła przecinają ukośnie kolejne warstwy fotosfery i w rezultacie głębokość optyczna odpowiada warstwie (2) położonej wyżej, a więc chłodniejszej od warstwy (1). Tak więc obserwowane natężenia spełniają nierówność

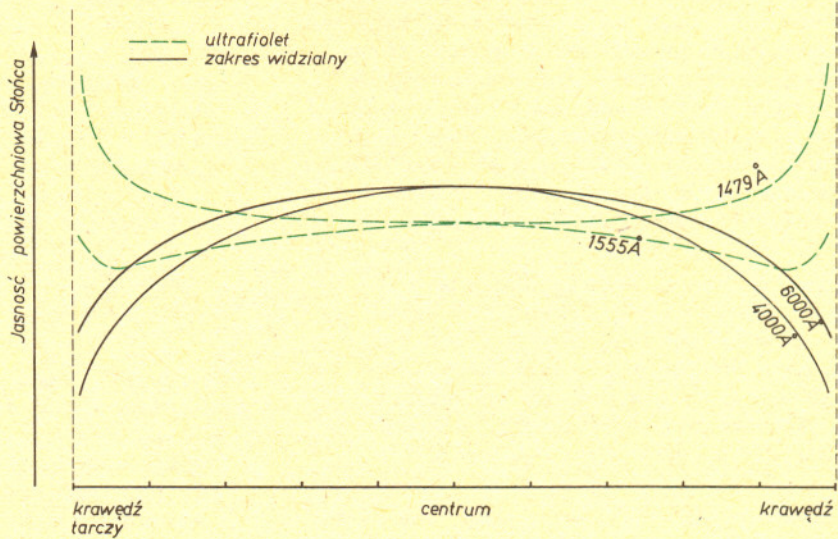
$$I_{\nu}(1) = B_{\nu}(T_1) > B_{\nu}(T_2) = I_{\nu}(2).$$

Natężenie promieniowania spoza centrum tarczy słonecznej jest mniejsze niż w jej środku, a różnica ta narasta w miarę zbliżania się do krawędzi tarczy.



Rys. 1

Efekt pociemnienia brzegowego Słońca silnie zależy od częstości (długości fali) promieniowania, które bierzemy pod uwagę. W widzialnym zakresie widma efekt ten wzrasta w miarę zwiększania częstości ν i jest najsilniejszy w zakresie fioletowym. Prawdopodobnie taka nie jest jednak sztywną regułą, albowiem np. w ultrafiolecie istnieją skokowe zmiany tego efektu, a także odwrócenie jego zależności od ν w sposób ciągły. Tak na przykład w 1973 roku wykonano przy użyciu rakiety obserwacje tarczy Słońca w widmie ciągłym w bardzo dalekim ultrafiolecie, które wykazały, że dla długości fali $\lambda < 1560 \text{ \AA}$ istnieje efekt pojaśnienia brzegowego!



Rys. 2 Rozkład jasności tarczy Słońca w różnych długościach fal

Przyczyną pojaśnienia brzegowego Słońca w dalekim ultrafiolecie jest obecność chromosfery, warstwy niezwykle rzadkiej plazmy leżącej ponad fotosferą, z której pochodzi promieniowanie słoneczne w widzialnym zakresie widma. W chromosferze właśnie zachodzi odwrócenie fotosferycznego spadku temperatury: w kierunku na zewnątrz temperatura wzrasta na skutek dyssypacji energii mechanicznej docierającej tu z głębokich warstw podfotosferycznych w postaci fal akustycznych i magnetohydrodynamicznych. Tak więc na granicy pomiędzy fotosferą i chromosferą temperatura ośrodka osiąga minimum, $T_{\min} = 4400 \text{ K}$.

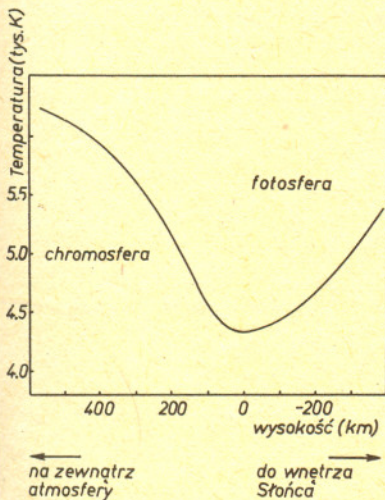
Podana uprzednio interpretacja pociemnienia brzegowego w widzialnym zakresie widma promieniowania nie jest naruszona przez obecność chromosfery, ponieważ ta warstwa jest całkowicie przezroczysta dla promieniowania widzialnego. W miarę przechodzenia do coraz krótszych fal nieprzezroczystość atmosfery Słońca bardzo szybko wzrasta, tak że dla $\lambda < 1560 \text{ \AA}$ głębokość optyczna $\tau = 1$ (silnie zależna od nieprzezroczystości w danej barwie) osiągana jest już w chromosferze. Wtedy, w warunkach wzrastającej na zewnątrz temperatury,

$$I_{\nu}(1) = B_{\nu}(T_1) < B_{\nu}(T_2) = I_{\nu}(2),$$

ponieważ teraz $T_1 < T_2$.

Ten niezwykle efekt pojaśnienia brzegowego jest właśnie jednym z dowodów istnienia chromosfery, warstwy o nietypowym (odwróconym) gradientie temperatury. Istnienie chromosfer jest zresztą czymś bardzo typowym w świecie gwiazd. Ocenia się, że wszystkie gwiazdy typu Słońca i chłodniejsze (tzn. gwiazdy późnych typów widmowych) muszą mieć chromosfery ogrzewane przez biegnące od wewnątrz atmosfery fale uderzeniowe.

Badania efektu pociemnienia brzegowego Słońca w różnych długościach fali λ pozwalają prawie w bezpośredni sposób wyznaczać przebieg temperatury w fotosferze. Porównywanie pociemnień brzegowych Słońca w różnych λ pozwala ponadto wyznaczać obserwacyjnie przebieg nieprzezroczystości w fotosferze dla rozmaitych barw λ . Są to dane o podstawowym znaczeniu dla teoretycznych badań atmosfery Słońca i gwiazd do niego podobnych.



Rys. 3 Przebieg temperatury w zewnętrznych warstwach Słońca

Barwa — termin często używany przez astronomów jako synonim długości fali promieniowania. Wiadomo, że światło o długości $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ jest czerwone, natomiast dla $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ obserwujemy błękit. Pojęcie to ekstrapoluje się na inne zakresy widma.

O pewnym paradoksie ekonomicznym

Dr Andrzej PELC

W epoce wielkiej reformy cen w naturalny sposób wzrasta zainteresowanie wpływem zmian cen na sytuację na rynku, w szczególności zaś na zmianę struktury popytu na poszczególne towary. Panuje na ten temat pewien obiegowy pogląd, iż drastyczny wzrost ceny danego towaru powoduje zmniejszenie nań popytu na korzyść innych artykułów z tej samej grupy, których cena utrzymała się na nie zmienionym poziomie. Jeśli więc we wrześniu są na rynku jabłka i gruszki, na które istnieje pewien ustalony popyt, to można przewidywać, że dwukrotny wzrost ceny gruszek przy równoczesnym utrzymaniu ceny jabłek spowoduje, że część konsumentów przestanie kupować gruszki lub będzie kupować ich mniej nabywając zamiast tego więcej jabłek.

Tak rzeczywiście często bywa. Zdarza się jednak czasem — i zjawisko to było obserwowane w przeszłości dość często — że gwałtowny nawet wzrost ceny danego artykułu powoduje nie zmniejszenie, lecz ... zwiększenie nań popytu kosztem innych artykułów z tej samej grupy towarowej. Aby wyjaśnić ten paradoksalny fakt, rozważmy uproszczony model sytuacji rynkowej z dwoma towarami i jednym konsumentem.

Rozważmy mianowicie dwa towary z grupy nabiału: mleko i jaja. Rzut oka do tabeli kaloryczności produktów żywnościowych przekonuje nas, że 1 litr mleka dostarcza 500 kcal, a 1 jajo 50 kcal. Ustalmy jednocześnie w danym momencie cenę 1 l mleka na poziomie 10 zł i 1 jaja na poziomie 10 zł. Na ten uproszczony rynek wprowadźmy konsumenta, którego dzienna stawka przeznaczona na zakup nabiału wynosi 25 zł. Przypuśćmy też, że konsument musi dostarczyć organizmowi 350 kcal w postaci

produktów nabiałowych. Nie jest on jednak zainteresowany w maksymalizacji dawki kalorycznej (dba o linię) i po spełnieniu postulatów spożycia 350 kcal w artykułach nabiałowych tak kształtuje swój popyt, by zjeść jak najwięcej jaj, które bardzo lubi.

Nietrudno się przekonać, że przy opisanej strukturze cen nasz konsument będzie kupował dziennie 2 jaja i 0,5 l mleka, na co wyda swoje 25 zł, uzyska 350 kcal i zje najwięcej jaj, na ile go stać.

Przypuśćmy, że w tej sytuacji następuje gwałtowny wzrost ceny mleka (bez rekompensaty) i 1 l tego płynu kosztuje już 25 zł. Jaja natomiast nie drożeją. Co robi nasz konsument? Wyjmuje rano swoje 25 zł i zastanawia się: z głodu nie umrę, bo w razie czego wszystko wydam na mleko i będę nawet miał nadmiar kalorii. Jednak na 2 jajka mnie nie stać: dostarczą mi one tylko 100 kcal, więc musiałbym wypić 0,5 l mleka, ale ponieważ ono zdrożało, więc mi zabraknie pieniędzy. No cóż, jaja w przeliczeniu na kalorie są jednak w dalszym ciągu droższe od mleka, skoro więc nie stać mnie na dwa, pomyślmy o jednym. Liczymy: 1 jajo, zostaje 15 zł, przy nowej cenie starczy na 0,6 l mleka, które dostarczy 300 kcal, razem będę miał 350 kcal i maksymalną możliwą liczbę jajek.

Tak więc po podwyżce ceny mleka konsument będzie kupował 0,6 l mleka dziennie, a więc więcej niż poprzednio. Dziwne, prawda? A jednak patrząc na przytoczony przykład od innej strony przekonamy się, że wniosek ten jest właściwie oczywisty. Pomińmy na razie zjawisko wzrostu ceny mleka i przyjrzyjmy się z osobna dwóm strukturom cen: starej i nowej. Łatwo zauważyć, że sytuacja finansowa konsumenta uległa pogorszeniu i jego pieniądze mają niższe pokrycie towarowe. W takiej sytuacji naturalna jest zmiana struktury popytu z towarów droższych na tańsze. W naszym modelu miernikiem jest cena 1 kcal. Jak łatwo się przekonać, mleko (1 kcal mleczna) nawet po podwyżce pozostało tańsze od jaj, jego też w nowej sytuacji musi konsument kupić więcej, jeśli nie stać go na dawny asortyment.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 334. Wewnątrz kąta o wierzchołku A dany jest punkt M . Skonstruować odcinek, którego środkiem jest M , a końce leżą na ramionach kąta.
Rozwiązanie na str. 3

M 335. Niech x_1, x_2, x_3 będą pierwiastkami równania $x^3 - 3x + 1 = 0$. Znaleźć $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8$.
Rozwiązanie na str. 15

M 336. Wykazać, że równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ ma dokładnie 3 rozwiązania w liczbach naturalnych, gdy n jest liczbą pierwszą i ponad 3 rozwiązania, gdy n jest liczbą złożoną (rozwiązania $x = a, y = b$ i $x = b, y = a$ uważamy za różne, gdy $a \neq b$).
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 137. Wiadomo, iż pole magnetyczne działa na poruszający się w nim ładunek elektryczny siłą prostopadłą do jego prędkości (składowa magnetyczna siły Lorentza). Praca takiej siły jest zerowa. Mimo to, dzięki oddziaływaniu pola magnetycznego na nośniki prądu w przewodnikach, silniki elektryczne wykonują pracę mechaniczną. Jak pogodzić powyższe fakty?
Rozwiązanie na str. 15

Zadania, które już umiemy rozwiązać

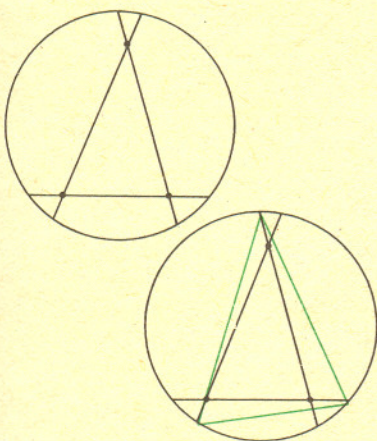
Otrzymujemy wiele listów dotyczących kącika z *Zadaniami, których nie umiemy rozwiązać*. My — to znaczy redakcja i grono znajomych. W listach naszych Czytelników znaleźliśmy rozwiązania tych zadań, czasami, niestety, błędne lub tylko częściowe. Omówimy krótko niektóre rozwiązania. Dotyczą one zadań z numerów 3—9 z 1982 r.

3/1982. Wewnątrz koła dane są trzy punkty. Skonstruować trójkąt wpisany w okrąg tego koła tak, by jego boki przechodziły przez dane punkty.

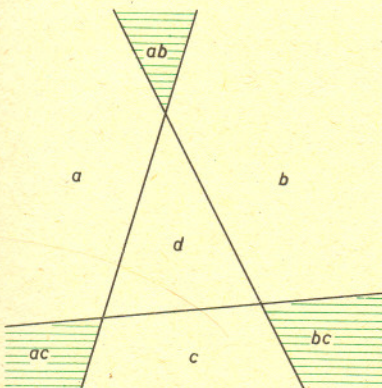
4/1982. Wpisać w dany okrąg czworokąt wypukły $ABCD$ mając dane długości odcinków AC , BD i EF , gdzie $E \in \text{pr. } AD \cap \text{pr. } BC$, $F \in \text{pr. } AB \cap \text{pr. } DC$.

5/1982. Dane są trzy okręgi i trójkąt. Skonstruować — o ile to możliwe — trójkąt przystający do danego tak, aby jego wierzchołki leżały na danych okręgach.

6/1982. Czworobokiem nazywamy figurę podzieloną na cztery przystające wielokąty tak, że część wspólna każdego z nich zawiera odcinek. Czy istnieją czworoboki złożone z wielokątów wypukłych?



Rys. 1



Rys. 2

7/1982. Dla danego punktu P płaszczyzny i trójkąta ABC trójkątem spodkowym nazywamy trójkąt utworzony przez rzuty P na proste AB , BC , AC . Znaleźć miejsce geometryczne punktów, dla których trójkąty spodkowe w danym trójkącie mają dane pole.

8/1982. Czy istnieją rozwiązania nietrywialne układu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 \\ \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y_1^n + y_2^n + \dots + y_k^n \end{cases}$$

w liczbach całkowitych przy $k = n + 1 \geq 11$?

9/1982. Jak ustawić m drzew w r rzędach po s drzew w każdym, by stosunek $k = rs/m$ był możliwie największy.

Pan Tadeusz Skorupski (Horyniec Zdrój) podał ciekawy algorytm budowania ciągu punktów zbieżnego do wierzchołków trójkąta, szukanego w zadaniu z nr. 3/1982. Z pierwszego przybliżenia widocznego na rysunku 1 można zorientować się, jak przebiega dalszy proces. Żądanie z nr. 4/1982 zostało rozwiązane analitycznie przez p. Jerzego Mitka z Siedlec, a z nr. 5/1982 przez p. Zygmunta Bartkowskiego z Warszawy. Z obydwu rozwiązań można otrzymać sposób konstrukcji cyrklem i linijką szukanych obiektów — tak jednak skomplikowany, że — choć formalnie zadania zostały rozwiązane — nie jesteśmy w pełni zadowoleni. Pan Jerzy Mitek zwrócił też uwagę, że zadanie z nr. 7/1982 jest rozwiązane w książce Szklarskiego, Czencowa i Jagłoma „Izbranne zadania i teoremy elementarnej matematyki, cz. 2” (1952), str. 237—240; z powodu braku miejsca w tym numerze nie przepisujemy rozwiązania. Kompletnie rozwiązanie zadania z nr. 6/1982 przysłał pan Adam Kleiner z Krakowa, choć w dowodzie twierdzenia

Nie istnieje czworobok o wypukłych składowych

korzystał aż z twierdzenia o czterech barwach. Potrzebne było ono jedynie do tego, by stwierdzić, że jedna z figur jest oddzielona od reszty płaszczyzny przez pozostałe. Ponieważ dwie ograniczone figury wypukłe mogą graniczyć jedynie wzdłuż odcinka, więc powstaje sytuacja zaznaczona na rys. 2. Figura D zawarta jest w trójkącie d , $A \subset a \cup ab \cup ac$, B, C — analogicznie. Stąd nietrudno już wyprowadzić, że dla przystających figur wypukłych tak być nie może.

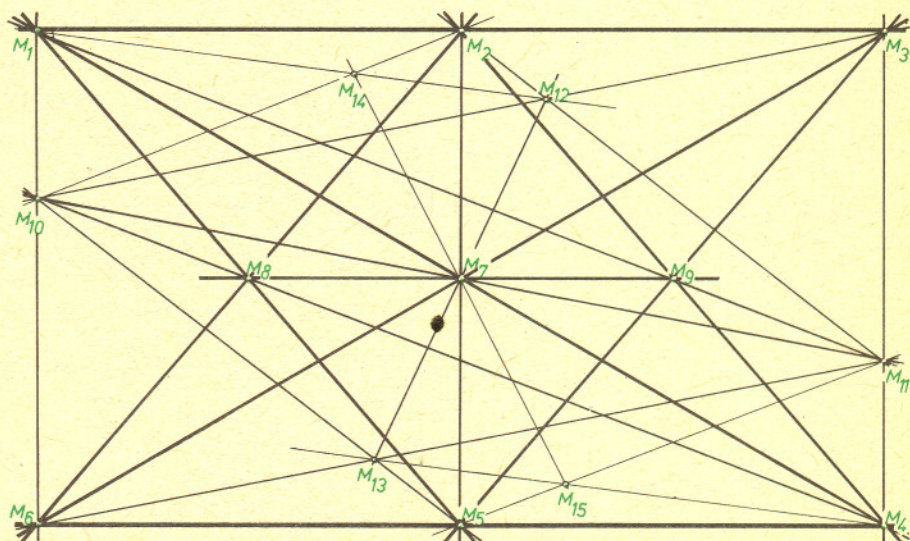
Zenon Chodowiec (uczeń II klasy LO) podał (zadanie z nr. 9/1982) sposób ustawienia $m = 2n + 9$

drzew w $r = 5(n + 2)$ rzędach po 3 drzewa w każdym, co daje stosunek $k_n = \frac{r \cdot s}{m} = \frac{15(n + 2)}{2n + 9}$

i $\lim k_n = \frac{15}{2}$, co jest znacznie lepszym wynikiem niż nasz, wynoszący $\frac{10}{3}$. Iteracyjny sposób

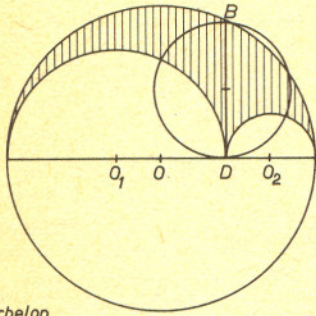
ustawienia można odgadnąć z rysunku 3: najpierw ustawiamy pierwsze 9 punktów, a potem parami dostawiamy następne.

Dziękujemy wszystkim, którzy przysłali do nas listy, i prosimy, by dalej dbali z nami o kącik *Zadań, których nie umiemy rozwiązać*.



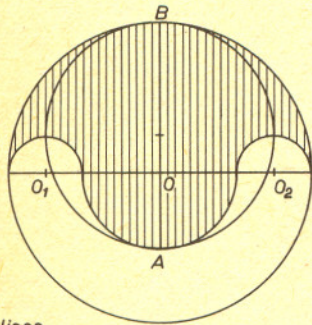
Rys. 3

Jeżeli spojrzymy wstecz na historię matematyki, to dostrzeżemy nieprzerwany ciąg różnorodnych problemów, które zaprzętały umysły matematyków. Czytelnikowi na pewno są znane pasjonujące niegdyś, a dziś już „klasyczne” zagadnienia starożytnych: kwadratura koła, trysekcja kąta, podwojenie sześcianu, problemy Archimedesesa obliczania pól figur zwanych arbelonem (rys. 1), salinonem (rys. 2), czy też zagadnienia późniejszych stuleci, jak na przykład problem postawiony w 1775 roku przez włoskiego matematyka di Fagnano (1682—1776): W dany trójkąt ostrokątny wpisać trójkąt o możliwie najmniejszym obwodzie. (Rozwiązaniem jest trójkąt zwany ortycznym dla trójkąta wyjściowego — poszukaj w numerze).



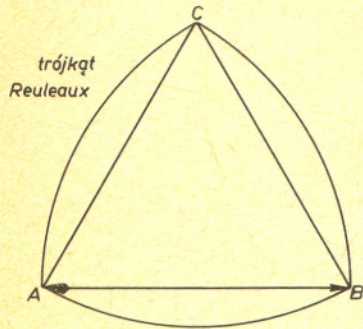
arbelon

Rys. 1

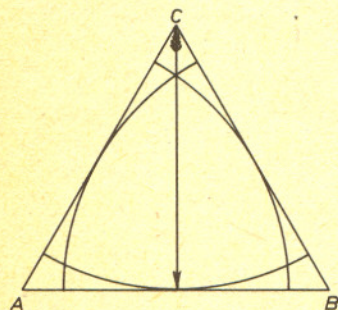


salinon

Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czy w czasach nam bardziej współczesnych nie stawiano podobnych, ciekawych i w zadziwiająco naturalny sposób powstających zagadnień? Otóż sytuacja nie jest tak beznadziejna, jak mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Przekonać się o tym możemy śledząc przedstawioną poniżej historię zagadnienia postawionego w 1917 roku przez japońskiego matematyka Sôichi Kakeya. Problem Kakeya: Znaleźć na płaszczyźnie zbiór o najmniejszym polu, w którym można przemieszczać odcinek jednostkowy w ten sposób, by po skończonej liczbie obrotów i przesunięć powrócił on do położenia wyjściowego wykonując przy tym obrót o kąt co najmniej π .

Każdy zbiór, w którym takie przemieszczenie odcinka jest możliwe, będziemy nazywali zbiorem Kakeya.

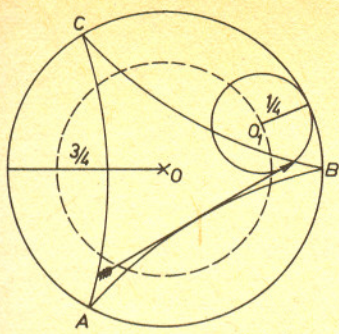
Zgodnie z zapowiedzią przedstawimy teraz niektóre osiągnięcia matematyków związane z tym problemem w różnych klasach zbiorów. Naturalnym wydaje się rozpoczęcie poszukiwań od klasy zbiorów wypukłych, tzn. takich, w których każde dwa różne punkty zbioru możemy połączyć odcinkiem całkowicie zawartym w tym zbiorze. Może rozwiązaniem będzie tutaj koło o promieniu $\frac{1}{2}$, a polu $\frac{1}{4} \pi \approx 0,785$? Okazuje się, że nie, bo oto zbiór powstały przez obrót wokół poszczególnych wierzchołków (rys. 3) jednostkowego odcinka o kąt $\frac{1}{3} \pi$ jest „lepszy” od poprzedniego: pole jego wynosi $\frac{1}{2} (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,704$. Definitywne rozwiązanie w klasie zbiorów wypukłych podał w 1921 roku matematyk węgierski J. Pól wykazując, że rozwiązaniem problemu Kakeya jest trójkąt równoboczny o wysokości 1 (rys. 4), którego pole wynosi $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ (dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce I. M. Jagłom, W. G. Bołtiański — „Figury wypukłe”).

Interesujące byłoby sprawdzić, czy prawdziwa jest następująca hipoteza: Minimalny obwód wypukłego zbioru Kakeya wynosi π .

Jeżeli okazałoby się to prawdą, to rozwiązanie tego zagadnienia nie byłoby jednoznaczne — spełnia je zbiór przedstawiony na rys. 3 i okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$. Dość długo przypuszczano, że w klasie wszystkich podzbiorów płaszczyzny rozwiązaniem jest zbiór ograniczony hipocykloidą trójkątną (zwaną także deltoidą), tzn. krzywą jaką zakreśla punkt leżący na okręgu o promieniu $\frac{1}{4}$ toczącym się od wewnątrz po okręgu o promieniu $\frac{3}{4}$ (rys. 5), o polu $\frac{1}{8} \pi \approx 0,392$. I tym razem nie było to ostatnie słowo. W 1928 roku A. S. Besicovitch wykazał, że istnieją na płaszczyźnie zbiory Kakeya o dowolnie małym polu, a tym samym, że w ogólności zagadnienie to nie ma rozwiązania.

Twierdzenie (A. S. Besicovitch, 1928): Istnieją na płaszczyźnie zbiory Kakeya o dowolnie małym polu.

Dowód: Przeprowadzimy go w dwóch etapach. W pierwszym utworzymy pewien zbiór i pokażemy, że jego pole może być dowolnie małe. W drugim etapie opiszemy jak w otrzymanym zbiorze przemieszczać strzałkę zgodnie z postawionymi warunkami.

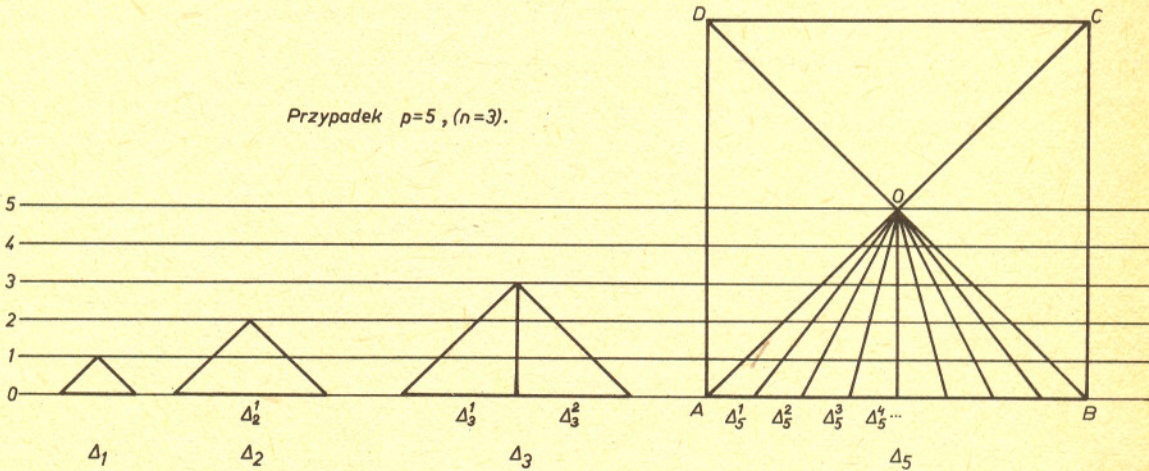


hipocykloida trójkątna

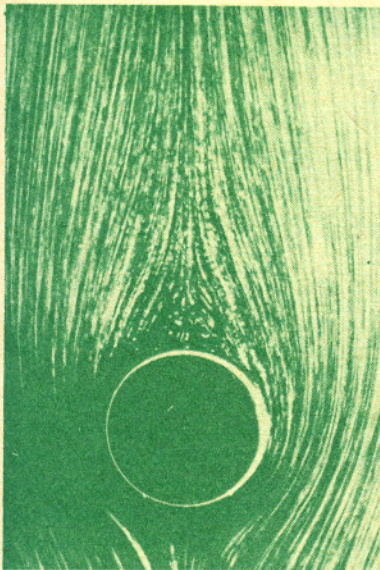
Rys. 5

Rozpatrzmy kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Strzałkę o długości 1 możemy obrócić w tym kwadracie o kąt 2π obracając ją np. wokół punktu przecięcia przekątnych kwadratu. Dzieli one kwadrat na 4 przystające trójkąty prostokątne o wspólnym wierzchołku O . Podzielmy teraz każdy taki trójkąt na 2^n trójkątów tzw. elementarnych, w następujący sposób: przeciwprostokątne (boki kwadratu) dzielimy na 2^n równych części i punkty podziału łączymy z wierzchołkiem O . Otrzymujemy więc $4 \cdot 2^n$ trójkątów elementarnych o wysokości równej 1. Jeżeli te trójkąty poprzesuujemy równoległe wzdłuż odpowiednich boków kwadratu tak, by częściowo pokrywały się, to otrzymamy figurę o polu mniejszym niż pole całego kwadratu. Jest to oczywiste!

Przedstawimy teraz zbiór skonstruowany przez A. Besicovitcha i O. Perrona w 1928 roku, ulepszony w 1962 roku przez H. Rademachera i I. Schoenberga. Niech p będzie dowolną liczbą naturalną nie mniejszą niż 2, i niech $n = p - 2$. Wobec tego trójkąt ABO składa się z 2^{p-2} trójkątów elementarnych. Przesuniemy je w sposób opisany niżej. Na początek środkową trójkąta ABO wyprowadzoną z punktu O o długości 1 podzielmy na p równych części. Przez punkty podziału i krańce środkowej poprowadźmy proste równoległe do boku AB (rys. 6).



Rys. 6

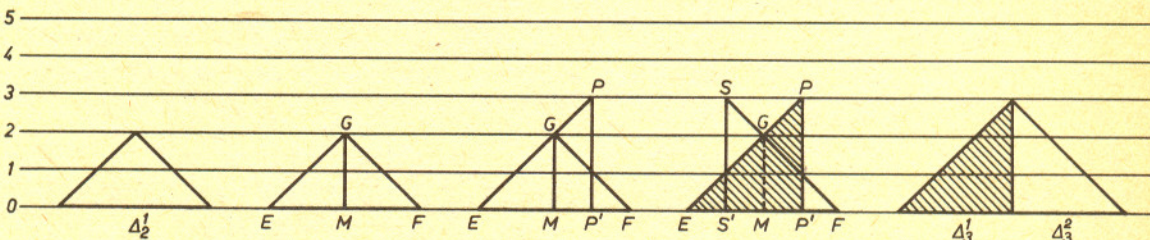


Oznaczmy je numerami $0, 1, 2, \dots, p$ zaczynając od boku AB i idąc w górę do wierzchołka O . Utwórzmy teraz p równoramiennych, prostokątnych trójkątów $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$, każdy z przeciwprostokątną na prostej o numerze 0 i przeciwnym wierzchołkiem na odpowiednich prostych $1, 2, \dots, p$. Zauważmy, że Δ_p jest równy trójkątowi ABO .

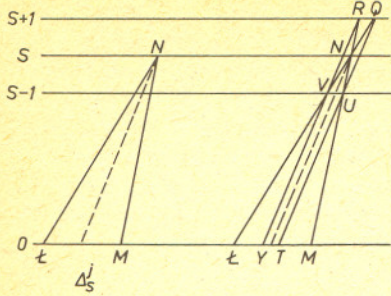
Dalej, dla każdego $s = 2, 3, \dots, p$ podzielmy przeciwprostokątne Δ_s na 2^{s-2} równych części, a punkty podziału połączmy z wierzchołkiem leżącym na prostej s . Otrzymujemy w ten sposób 2^{s-2} trójkątów elementarnych w trójkącie Δ_s ; oznaczmy je przez Δ_s^j , gdzie $s = 2, 3, \dots, p, j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$. Trójkąt Δ_2 nie jest podzielony, możemy jednak przyjąć, że składa się on z jednego trójkąta $\Delta_2^1 = \Delta_2$.

Trójkąta Δ_1 nie bierzemy na razie pod uwagę.

Przedstawimy pewną operację, którą będziemy nazywali „przepełnianiem i rozszerzaniem”, w skrócie $p-r$. Rezultatem tej operacji na dwóch sąsiednich trójkątach elementarnych z klasy $\Delta_i, i = 2, 3, \dots, p-1$ jest para trójkątów zachodzących na siebie, przystających do odpowiednich trójkątów z klasy Δ_{i+1} . W najprostszym przypadku, czyli dla trójkąta Δ_2 operacja $p-r$ jest pokazana na rys. 7: dzielimy trójkąt EFG środkową GM na dwa trójkąty EMG i MFG .



Rys. 7



Rys. 8

Następnie odcinki EG i FG przedłużamy do prostej 3 i z punktów przecięcia prowadzimy odcinki PP' i SS' równoległe do środkowej GM . Otrzymaliśmy w ten sposób dwa zachodzące na siebie trójkąty klasy Δ_3 .

Konstrukcja $p-r$ dla dowolnego trójkąta LMN (rys. 8) jest następująca: boki LN i MN przedłużamy do prostej $s+1$, a punkt R łączymy z punktem przecięcia boku LN z prostą $s-1$ oznaczonym przez V .

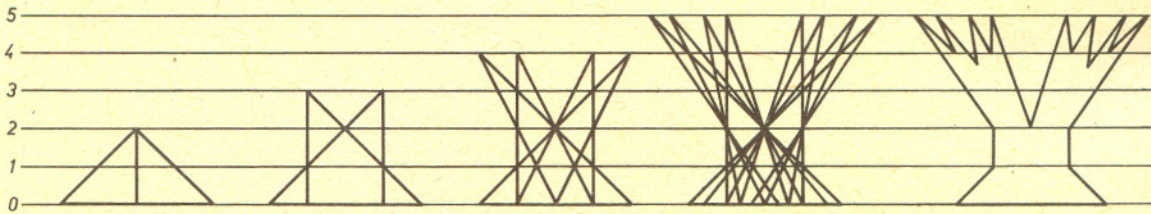
Wyliczmy teraz jak zmienia się pole trójkąta przy operacji $p-r$. Nazwijmy część trójkąta Δ_s , $s = 2, 3, \dots, p-1$ leżącą między prostymi s i $s-1$ *krańcem* trójkąta Δ_s . Będziemy go oznaczać symbolem $k(\Delta_s)$. Jak łatwo zauważyć dla $s = 2, 3, \dots, p$ $k(\Delta_s)$ jest przystający do trójkąta Δ_1 . Tak więc suma pól krańców $k(\Delta_s^j)$ przy ustalonym s i $j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$ jest równa polu trójkąta Δ_1 . Obliczmy teraz przyrost pola przy wykonywaniu operacji $p-r$ na trójkącie Δ_s^j (patrz rys. 8). W wyniku operacji $p-r$ otrzymujemy dwa przesunięte równoległe trójkąty elementarne LQT i YMR z klasy Δ_{s+1} . Trójkąty LQT i YMR pokrywają trójkąt LMN i dwa trójkąty RVN i NUQ . Mamy

$$|RVN| = |NUQ| = |VUN|,$$

a co za tym idzie przyrost pola powierzchni wynosi $2 \cdot k(\Delta_s^j)$. Ponieważ

$\sum_{j=1}^{2^{s-2}} |k(\Delta_s^j)| = |\Delta_1|$, więc całkowity przyrost pola przy przejściu od trójkątów elementarnych klasy Δ_s do trójkątów elementarnych klasy Δ_{s+1} jest równy co najwyżej $2 \cdot |\Delta_1|$. Operację $p-r$ stosujemy kolejno do wszystkich trójkątów elementarnych Δ_s^j , $s = 2, 3, \dots, p-1$, $j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie trójkąty elementarne trójkąta ABO równoległe przesunięte (tzw. drzewo Perrona), co obrazuje rysunek 9. Zaczynając od Δ_2 dochodzimy po $p-2$ krokach do równoległego przesunięcia wszystkich trójkątów elementarnych powstałych z trójkąta Δ_p ; przyrost pola w jednym kroku jest nie większy niż $2 \cdot |\Delta_1|$, a więc pole końcowej figury nie przekracza wartości

$$|\Delta_2| + (p-2) \cdot 2 \cdot |\Delta_1| = \frac{4}{p^2} + 2(p-2) \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p}.$$



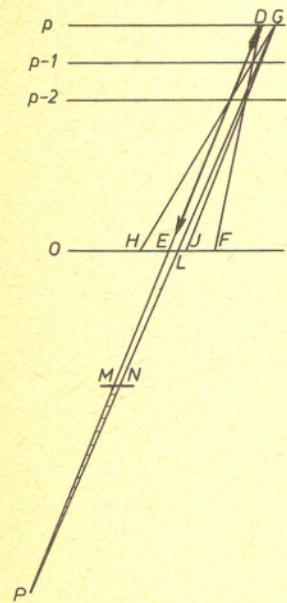
Rys. 9

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą, a p — liczbą naturalną większą niż $\frac{16}{\varepsilon}$. Wtedy pole figury otrzymanej w wyniku przesunięć równoległych

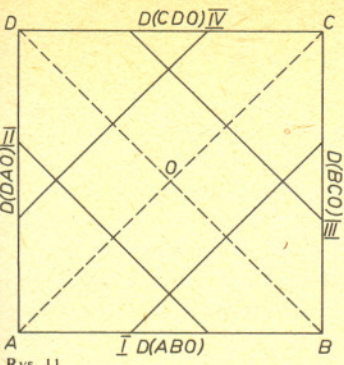
trójkątów elementarnych jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{8}$. Postępując analogicznie w trzech pozostałych trójkątach kwadratu stwierdzamy, że pole pokryte przez $4 \cdot 2^n$ trójkątów (gdzie $n = p-2$) jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{2}$.

No dobrze, powie Czytelnik, w każdym takim trójkącie elementarnym otrzymanym w wyniku podziału trójkąta ABO możemy umieścić strzałkę, ale jak w takich poprzesuwanych trójkątach przemieszczać strzałkę zgodnie z zadaniem? Obecnie jest to jeszcze niemożliwe. Zatem do tego zbioru musimy dołączyć inny, który nam taką operację umożliwi. Zbiór ten złożony jest co najwyżej z $4 \cdot 2^{p-2}$ tzw. „łączy”. Niech DEF i GHI będą parą kolejnych trójkątów elementarnych po przesunięciu, jak na rysunku 10. Figurę złożoną z odcinków GP i PD oraz trójkąta PMN nazywamy łączem. Przejście strzałki z trójkąta DEF do trójkąta GHI polega na przesunięciu jej wzdłuż odcinka DP do punktu P , następnie obróceniu jej w trójkącie PMN i przesunięciu wzdłuż odcinka PG , aż początkowy punkt strzałki dojdzie do punktu G . W taki oto sposób strzałka znalazła się w trójkącie GHI . Oszacujemy teraz pole tak uzyskanego łącza. Boki DE i GJ są równoległe.

Oznaczmy przez L taki punkt leżący na odcinku HJ , że $\frac{LJ}{HJ} < \frac{\varepsilon}{8}$. Punkty M i N



Rys. 10



Rys. 11

oberamy w taki sposób, by trójkąt PMN był przystający do trójkąta GLJ (zauważmy, że nie jest to sprzeczne z zaprezentowanym opisem łącza). Korzystając z założenia o punkcie L oraz przystawiania trójkątów GLJ i PMN mamy:

$$|PMN| = |GLJ| < \frac{\epsilon}{8} |GHJ|. \text{ Ponieważ pole jednego trójkąta elementarnego wynosi}$$

$$\frac{1}{2^{p-2}}, \text{ zatem pole jednego łącza jest mniejsze niż } \frac{\epsilon}{8 \cdot 2^{p-2}}. \text{ Biorąc pod uwagę}$$

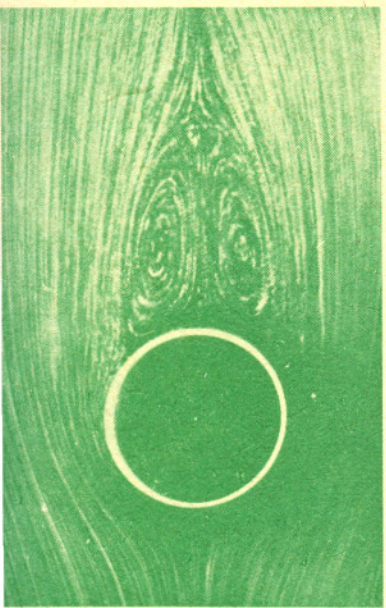
liczbę łączy wnosimy, że całkowite ich pole jest mniejsze niż $\frac{\epsilon}{2}$. Wobec tego pole tak uzyskanego zbioru jest mniejsze niż zadana z góry liczba ϵ .

Przystąpmy teraz do drugiego etapu. Naskicujemy w jaki sposób w utworzonym zbiorze (cztery drzewa Perrona i zbiór łączy) przemieszczać strzałkę. Zauważmy, że drzewo Perrona utworzone z trójkątów elementarnych trójkąta ABO , co oznaczać będziemy $\mathcal{D}(ABO)$ (rys. 11), zawiera przesunięty równolegle odcinek AO (część odcinka I), natomiast $\mathcal{D}(BCO)$ zawiera przesunięty równolegle odcinek CO (część odcinka I) i odcinki te (AO i CO) po równoległym przesunięciu w sumie dają odcinek I. Podobnie jest i w pozostałych przypadkach:

- $\mathcal{D}(BCO) \cup \mathcal{D}(CDO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki BO i DO , które w sumie dają odcinek III;
- $\mathcal{D}(CDO) \cup \mathcal{D}(DAO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki CO i AO , które w sumie dają odcinek IV;
- $\mathcal{D}(DAO) \cup \mathcal{D}(ABO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki DO i BO , które w sumie dają odcinek II.

W dowodzie obok pokazaliśmy, że dany prostokątny, równoramienny trójkąt ABO można tak podzielić na 2^n trójkątów elementarnych, by po ich równoległym przesunięciu do AB pokryte przez nie pole było dowolnie małe. Proponujemy Czytelnikom jako zadanie na podobnej drodze wykazać ogólniejszy fakt. **Twierdzenie Fischera:** Niech dany będzie trójkąt ABC o polu P i liczba $\epsilon > 0$. Wówczas trójkąt można tak podzielić odcinkami CA_i , $i = 0, 1, \dots, n$, $A_i \in AB$, $A = A_0$, $B = A_n$ na trójkąty $CA_j A_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, by po ich odpowiednim przesunięciu równoległym do AB pokrywały pole nie większe niż ϵ .

Przypuśćmy teraz, że strzałka znajduje się w $\mathcal{D}(ABO)$ na odcinku I. Wzdłuż I przesuujemy strzałkę do $\mathcal{D}(BCO)$. Następnie w zbiorze tym przy pomocy łączy przemieszczamy strzałkę do położenia na odcinku III. Wzdłuż tego odcinka przesuujemy strzałkę do $\mathcal{D}(CDO)$ i przemieszczamy ją przy pomocy łączy do położenia na odcinku IV. Procedurę taką powtarzamy do momentu, aż strzałka powróci do położenia wyjściowego. Wobec tego tak otrzymany zbiór jest zbiorem Kakeya i jego pole może być dowolnie małe. Zauważmy, że im mniejsze jest pole zbioru Kakeya w twierdzeniu Besicovitcha, tym jego średnica jest większa. W związku z tym zaczęto poszukiwać zbioru Kakeya o dowolnie małym polu, lecz mniejszej średnicy. W 1941 roku I. H. van Alphen wykazał, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki zbiór zawarty w kole o średnicy $4 + \epsilon$.



Przejdziemy teraz do kolejnej klasy zbiorów — zbiorów jednospójnych. Wcześniej wyjaśnijmy, co kryje się pod tą nazwą. Do tego potrzebne nam będzie pojęcie spójności, które wyjaśnia zdanie: „Twór geometryczny jest spójny, gdy składa się z jednego kawałka, czyli gdy nie można go podzielić na dwa kawałki, które nie stykałyby się bezpośrednio” (patrz *Delta* 1/1979). Teraz „jasna” staje się następująca

Definicja: Podzbiór płaszczyzny nazywamy jednospójnym, jeżeli jest zbiorem spójnym i jego dopełnienie również jest zbiorem spójnym.

Dla jednospójnych zbiorów Kakeya pierwsi podali oszacowanie (niezależnie od siebie) w 1965 roku M. Bloom i I. Schoenberg. Sądziłi oni, że najmniejszy spójny i jednospójny zbiór Kakeya ma pole równe $\frac{\pi}{24} (5 - 3\sqrt{2}) \approx 0,099$. Pogląd ten obalił w 1971 roku F. Cunningham wykazując

Twierdzenie: Istnieje jednospójny zbiór Kakeya o dowolnie małym polu zawarty w kole o promieniu 1.

Inną klasą zbiorów, wśród których również można marzyć o rozwiązaniu problemu Kakeya, jest klasa zbiorów gwiazdzistych. Otóż właśnie w klasie zbiorów gwiazdzistych problem Kakeya do tej pory nie został całkowicie rozwiązany. F. Cunningham dowiódł tylko w 1974 r. pewnego oszacowania, a mianowicie:

Każdy zbiór gwiazdzisty Kakeya ma pole równe co najmniej $\frac{\pi}{108}$.

Uważając, że wszczęcie poszukiwań ostatecznego rozwiązania problemu Kakeya w klasie zbiorów gwiazdzistych będzie bardziej fascynujące niż czytanie dowodu, kończę i życzę przyjemnej zabawy.

Definicja: Zbiór nazywamy gwiazdzistym względem danego punktu O , gdy każdy punkt tego zbioru da się połączyć z punktem O odcinkiem całkowicie zawartym w tym zbiorze.

Z dokładnych obserwacji gwiazd możemy odtworzyć ich rzeczywisty ruch w przestrzeni. Pomiar spektroskopowy umożliwia uzyskanie informacji na temat prędkości radialnej, wykorzystuje się tu dopplerowskie przesunięcie linii widmowych. Porównanie dwóch zdjęć okolic gwiazdy wykonanych w odstępie kilkudziesięciu lat daje, po uwzględnieniu orbitalnego ruchu Ziemi wokół Słońca i innych drobnych efektów, ruch gwiazdy w „płaszczyźnie sfery niebieskiej”. Dokładność tego pomiaru jest, niestety, tym mniejsza, im dalej jest gwiazda i im wolniej się porusza, w przeciwieństwie do pomiaru prędkości radialnej, którego dokładność zależy jedynie od jakości uzyskanego widma.

Analiza prędkości własnych gorących gwiazd typów O i B wykonana w latach pięćdziesiątych doprowadziła do zaskakujących wniosków. Prawie wszystkie gwiazdy typów O i B są młodymi, powstającymi w płaszczyźnie Galaktyki masywnymi obiektami szybko wypalającymi wodór w swoich jądrach. Stwierdzono, że 10–20% populacji tych gwiazd wykazuje nienormalnie duże prędkości, szybko odbiegając od płaszczyzny Drogi Mlecznej. Interpretacja teoretyczna tego zjawiska natrafia na spore trudności. Jediną akceptowaną hipotezą tłumaczącą istnienie gwiazd o dużych prędkościach jest wybuch gwiazdy supernowej w układzie podwójnym, często związane z tym rozerwanie układu i nadanie jego resztkom znacznych prędkości. Muszą tu wchodzić w grę ogromne masy i energie. Typowa masa gwiazdy typu O wynosi $30 M_{\odot}$ (mas Słońca). Aby rozpędzić ją do prędkości 100 km/s (jak się obserwuje), trzeba przekazać jej ok. $3 \cdot 10^{48}$ ergów

($= \frac{1}{2} mv^2$). Tak ogromną energię można uzyskać np. przez wybuch bomby termojądrowej o masie 70 razy większej niż masa Ziemi. A jednak gwiazdy, które dostały tak potężnego kopniaka

obserwuje się, i to stosunkowo często: znamy około 100 takich „uciekinierów”.

Wybuch supernowej nie musi koniecznie prowadzić do rozerwania układu. Istnieje prosty warunek określający kiedy to nastąpi. Otóż układ podwójny rozleci się, jeśli masywniejsza gwiazda pozbędzie się nagle (w czasie krótszym niż okres orbitalny) masy większej niż połowa masy całego układu. Jeśli więc istnieje układ, powiedzmy $60 + 30 M_{\odot}$, to gwiazda cięższa musi odrzucić co najmniej $45 M_{\odot}$ (zostanie jej $15 M_{\odot}$). Twierdzenie to można w prosty sposób udowodnić (dla orbit kołowych) korzystając z praw Keplera.

Odrzucenie mniejszej masy nie doprowadzi do rozerwania układu, ale może również nadać całemu systemowi znaczną prędkość. Zachodzą tu dwie możliwości:

- 1) prędkość orbitalna składnika w ciasnym układzie podwójnym gwiazd typu O lub B wynosi typowo 200–300 km/s. W momencie wybuchu odrzucana otoczka będzie miała również tę prędkość względem środka ciężkości układu. Trzymając się powyższego przykładu, jeśli gwiazda odrzuci $30 M_{\odot}$, to pozostały układ podwójny o masie $60 M_{\odot}$ ($30 + 30$) zachowując pęd całości uzyska prędkość 100–150 km/s w kierunku przeciwnym.
- 2) Można sobie wyobrazić tzw. niecentralny wybuch supernowej, zachodzący niedokładnie w jej centrum, wtedy również gwiazda (lub cały układ) zostanie odrzucona w stronę przeciwną niż odrzucona otoczka.

Obserwowana częstość wybuchów supernowych jest jednak zbyt mała, aby wytłumaczyć istnienie wszystkich gwiazd uciekających. Czy istnieje inny mechanizm nadawania gwiazdom dużych prędkości — nie wiadomo (zderzenia gwiazd nie wchodzą tu w grę, ze względu na ich znikome prawdopodobieństwo).

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Zadania, których nie umiemy rozwiązać

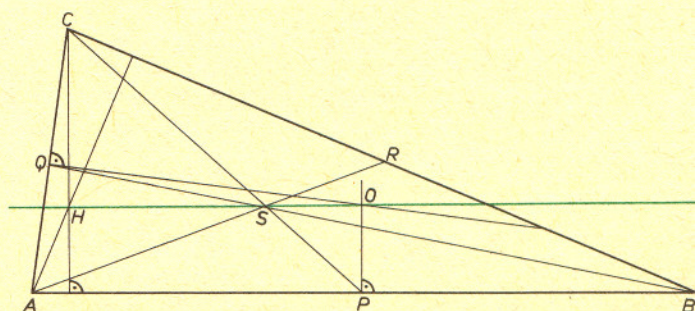
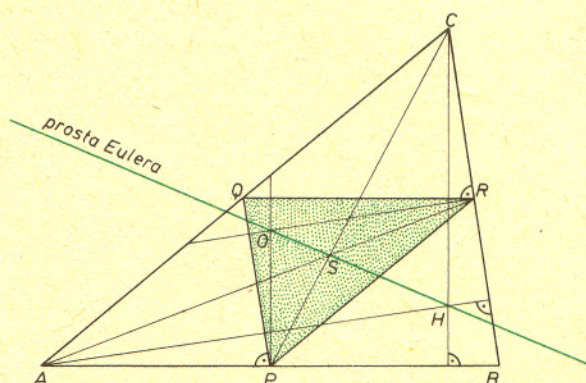
W każdym trójkącie trzy jego charakterystyczne punkty: ortocentrum H (punkt przecięcia się wysokości), środek ciężkości S (punkt przecięcia się środkowych) i środek okręgu opisanego (...symetrycznych) są współliniowe. To łatwo wykazać.

Przekształćmy bowiem jednokładnie (o skali $-\frac{1}{2}$) dany trójkąt;

za środek jednokładności przyjmijmy punkt S . Punkt C (p. rysunek) padnie w środek P odcinka AB , zaś odcinek AB przekształci się w RQ . Jednokładność zachowuje kąty, więc obraz wysokości CH będzie prostą przechodzącą przez P i prostopadłą do QR — a więc symetryczną podstawy AB .

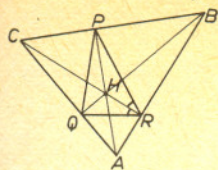
Prosta wyznaczona przez H , S i O jest nazywana prostą Eulera. Kiedy *nie* jest wyznaczona (jednoznacznie)? Kiedy przechodzi przez wierzchołek trójkąta? Kiedy jest prostopadła do jednego z boków? Te bardzo łatwe pytania pozostawimy tu bez odpowiedzi. Nie powiemy (choć wiemy) jak skonstruować trójkąt, w którym prosta Eulera jest równoległa do jednego z boków (rysunek). Przyznajemy się: nie chciało się nam sprawdzić (bo chyba tak jest), że taki trójkąt jest jedyny — z dokładnością do podobieństwa oczywiście, ani np. obliczyć jego kątów. Ale to chyba umielibyśmy. Nie umiemy zaś zapanować nad położeniem prostej Eulera względem trójkąta ABC . Na przykład: skonstruować trójkąt, w którym prosta ta przecina podstawę pod danym kątem, albo dzieli ją w zadanym stosunku.

M. Sz.

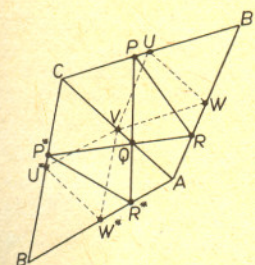


Piękny dowód Schwarza

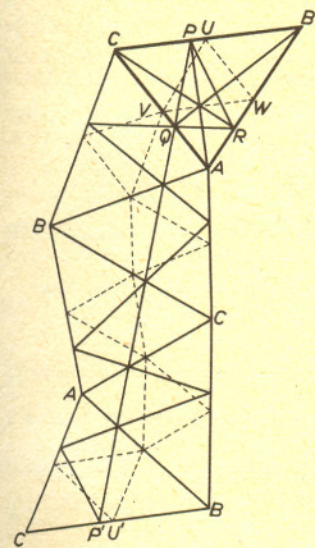
W artykule „Problem Kakeya” autor wspomniał o problemie Fagnano: w dany trójkąt ostrokątny wpisać trójkąt o jak najmniejszym obwodzie. Warto opisać bardzo ciekawe rozwiązanie tego zagadnienia, podane przez H. A. Schwarza.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wykażemy, że rozwiązaniem jest trójkąt PQR (rys. 1) utworzony przez spodki wysokości danego trójkąta ABC .

1) W oznaczeniach jak na rys. 1 mamy $\sphericalangle QRH = \sphericalangle HRP$. Dla dowodu starczy zauważyć, że punkty Q, A, R, H leżą na okręgu (o średnicy AH) i „pobawić się” trochę widocznymi kątami.

2) Narysujmy inny trójkąt UVW wpisany w $\triangle ABC$. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy, że obwód $\triangle UVW$ nie jest mniejszy niż trójkąta PQR . Odbijmy rysunek symetrycznie w prostej AC (rys. 2). Obrazy punktów A, B, C , będziemy tu i przy następnych odbiciach oznaczać też przez A, B, C — ta dwuznaczność oznaczeń nic nam nie zaszkodzi. Obrazy punktów P, R, U, W oznaczymy przez P^*, R^*, U^*, W^* . Oczywiście trójkąty PQR i P^*QR^* są przystające, a punkty P, Q, R^* , a także punkty P^*, R, Q — współliniowe (zob. 1). Stąd mamy np. że $|PR^*| = |PQ| + |QR|$. Bok BC został obrócony o $2 \sphericalangle C$.

3) Odbijmy symetrycznie tak powstały trójkąt ABC jeszcze cztery razy: w AB , potem w BC, AC i na koniec jeszcze raz w AB . Całą tę serię odbić widzimy na rysunku 3. Co stało się z bokiem BC pierwotnego trójkąta ABC ? Obrócił się o $2 \sphericalangle C$, potem o $2 \sphericalangle B$, następnie o $-2 \sphericalangle C$ i wreszcie o $-2 \sphericalangle B$ — a więc zachował swój kierunek. Z tego zaś, co stwierdziliśmy w punkcie 2) wynika jasno, że obwód trójkąta PQR „rozłożył się” wzdłuż prostej PP' . Dokładniej:

$$PP' = 2 \cdot \text{obwód } \triangle PQR.$$

Co stało się z obwodem trójkąta UVW ? Odwinął się wzdłuż łamanej UU' , zaznaczonej na rysunku 3 przerywaną linią. Łamana, jak to łamana, nie jest krótsza od odcinka łączącego jej końce. Tak oto dowiedliśmy, że spośród wszystkich trójkątów wpisanych w dany trójkąt ostrokątny najkrótszy obwód ma trójkąt utworzony ze spodków wysokości.

M. Sz.



Rozwiązanie zadania M 335.

Z warunków zadania wynika, że $x_1^2 = 3x_1 - 1$, skąd $x_1^3 = 3x_1^2 - x_1$. Podnosząc ostatnią równość do kwadratu mamy

$$x_1^6 = 9x_1^4 - 6x_1^3 + x_1^2 = 27x_1^3 - 9x_1 - 18x_1 + 6 + x_1^2 = 28x_1^3 - 27x_1 + 6.$$

Analogiczne wzory zachodzą dla x_2 i x_3 , mamy więc $x_2^6 + x_3^6 + x_1^6 = 28(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 27(x_1 + x_2 + x_3) + 18 = 28((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)) - 27(x_1 + x_2 + x_3) + 18$. Ale $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3$ (z wzorów Viete'a). Ostatecznie $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 28 \cdot 6 + 18 = 186$.



Rozwiązanie zadania M 336.

Łatwo zauważyć, że $x, y > n$. Pisząc

$$x = n + u, y = n + v \text{ mamy } \frac{1}{n+u} + \frac{1}{n+v} = \frac{1}{n}.$$

czyli $n(n+v) + n(n+u) = (n+u)(n+v)$, skąd wynika, że $n^2 = uv$.

Gdy teraz n jest liczbą pierwszą, to jedynymi rozwiązaniami równania $n^2 = uv$ są: $u = 1, v = n^2; u = v = n; u = n^2, v = 1$, odpowiadające rozwiązaniom

$$x = n + 1, y = n^2 + n; \quad x = y = 2n; \quad x = n^2 + n, y = n + 1.$$

Jeżeli teraz $n = k \cdot l, k, l \neq 1$, to mamy np. rozwiązanie $u = k, v = kl^2$, czyli $x = n + k, y = n + kl^2$, różne od wyżej wypisanych.



Rozwiązanie zadania F 137.

Siła Ampère'a, $F = I \Delta l \times B$, nie jest jedyną siłą działającą na przewodnik z prądem poruszający się w polu magnetycznym. Całkowita praca siły Lorentza działającej na przewodnik istotnie jest zerowa, ponieważ składa się z pracy mechanicznej związanej z siłą Ampère'a i z pracy pola elektrycznego indukowanego w poruszającym się przewodniku (równej pracy siły Ampère'a co do wielkości, ale o przeciwnym znaku). W ten sposób pole magnetyczne umożliwia transport energii od źródła prądu do otoczenia, nad którym wykonywana jest praca mechaniczna.

Aby się o tym przekonać, rozważmy prostoliniowy element przewodnika poruszający się z prędkością v w polu magnetycznym o indukcji B . Załóżmy, że jednostka objętości przewodnika składa się z n_+ jonów sieci krystalicznej o ładunkach q i n_- elektronów przewodnictwa o ładunkach $-e$, drufujących (po przyłożeniu napięcia zewnętrznego) z prędkością u .

Całkowita siła Lorentza działająca na jednostkę objętości przewodnika w polu magnetycznym składa się z sił działających na jony (f_+) i na elektrony (f_-):

$$f_+ = f_+ + f_-; \\ f_+ = n_+ q v \times B \\ f_- = -n_- e (v + u) \times B.$$

Praca mechaniczna tej siły w czasie Δt wynosi $w_m = f \cdot v \Delta t = [n_+ q v \times B - n_- e (v + u) \times B] \cdot v \Delta t = -n_- e \Delta t (u \times B) \cdot v$.

Ponieważ $j = -n_- e u$ jest gęstością prądu płynącego w przewodniku, rozpoznajemy w tym

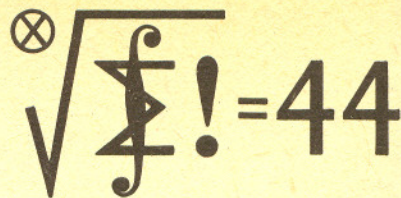
wyrażeniu pracę siły Ampère'a. Nie jest to jednak całkowita praca siły f ; nie uwzględniliśmy faktu, że elektrony poruszają się nie z prędkością przewodnika v , lecz z prędkością $v + u$. Całkowita praca w czasie Δt wynosi więc

$$w = [f_+ \cdot v + f_- \cdot (v + u)] \Delta t \\ = -n_- e [(v + u) \times B] \cdot (v + u) \Delta t \\ = -n_- e [(u \times B) \cdot v + (v \times B) \cdot u] \Delta t = 0.$$

Np. aby silnik elektryczny mógł wykonać pracę mechaniczną, drugi składnik pracy w musi zostać zrównoważony przez pracę źródła prądu, albo pochodzi on od siły przeciwdziałającej ruchowi dryfowemu elektronów przewodnictwa. W ten sposób, jak zapowiadaliśmy, pole magnetyczne umożliwia zamianę energii źródła prądu na pracę mechaniczną.

Efektem działania siły Lorentza na elektrony jest również zmiana ich koncentracji w obrębie przewodnika. Pominęliśmy ją w naszych rozważaniach jako nieistotną. Warto jednak przedrzeć, jakie zmiany w koncentracji elektronów mają miejsce np. w przypadku przewodnika z prądem spoczywającego w polu magnetycznym i przewodnika bez prądu, ale poruszającego się.

Uważny Czytelnik zapewne spostrzegł, że na początku rozwiązania wspomnieliśmy o polu elektrycznym indukowanym w przewodniku poruszającym się w polu magnetycznym, natomiast w dalszych rozważaniach o polu elektrycznym nie było wcale mowy. Dlaczego? (W razie trudności z odpowiedzią patrz Delta 1/1983, zadanie F 128).



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 11/1982

Edward Orzechowski - Warszawa	45,01pkt
Zbigniew Bartold - Gdynia	43,43pkt
Paweł Kamiński - Warszawa	42,47pkt
Marek Gażdecki - Milanówek	35,50pkt
Dariusz Sowizdrzał - Szczecin	32,20pkt
Krzysztof Trautman - Warszawa	28,04pkt
Artur Smoleczyk - Tarnów Op.	24,06pkt
Mariusz Fiszer - Duszniki Zd.	23,22pkt

i z numeru 12/1982

Paweł Kamiński - Warszawa	49,10pkt
Zbigniew Bartold - Gdynia	43,43pkt
Marek Gażdecki - Milanówek	42,42pkt
Dariusz Sowizdrzał - Szczecin	38,83pkt
Krzysztof Trautman - Warszawa	32,51pkt
Artur Smoleczyk - Tarnów Op.	29,84pkt
Mariusz Fiszer - Duszniki Zd.	27,28pkt
Jerzy Janowicz - Bolesławiec	26,92pkt

Współczynniki trudności zadań:

37	38	39	40	41	42
1,85	1,43	2,67	2,71	2,86	2,70

W Klubie 44 znaleźli się kolejni dwaj uczestnicy konkursu ligowego: pan Edward Orzechowski i pan Paweł Kamiński - obydwaj z Warszawy. Witamy - i czekamy na następnych.

Pan Jerzy Janowicz jest już za półmetkiem "drugiego okrążenia"!

Następna "podwójna" tabela w nr. 8/1983

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

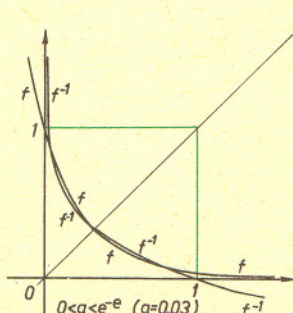
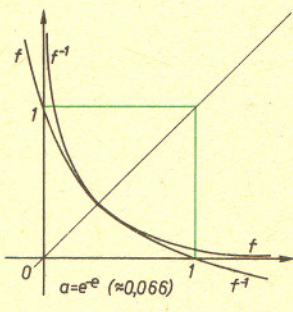
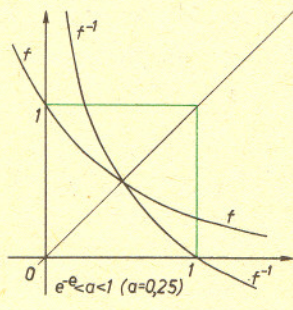
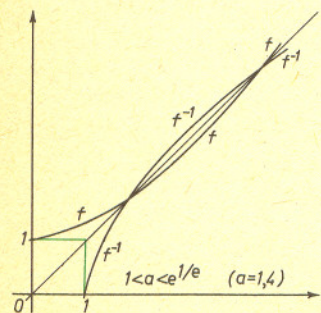
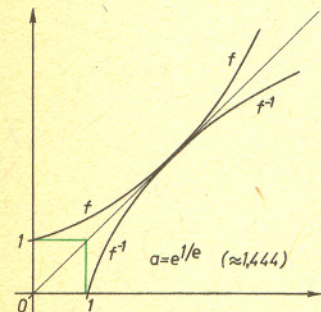
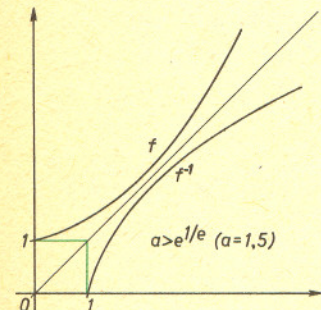
Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań z nr. 2 i 3/1983

46. Ile pierwiastków ma równanie $a^x = \log_a x$?
47. Dowiedz, że każda liczba naturalna ma wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.
48. Spośród wierzchołków sześciowymiarowej kuli I^6 wybrano losowo trzy. Co jest bardziej prawdopodobne: czy utworzą one trójkąt ostrokątny czy prostokątny?
49. W n -tym wierszu trójkąta Pascala jest P_n liczb parzystych i N_n liczb nieparzystych. Znaleźć wszystkie wartości n , dla których a) $P_n = N_n$, b) $P_n = N_n + 1$, c) $P_n = N_n - 1$.
50. W czworokącie $ABCD$ wpisany jest koło boki BC i CD są równej długości. Dowiedz, że przekątna AC jest dłuższa od $\frac{1}{2}(AB + AD)$.
51. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$.

Rozwiązania zadań z numeru 2/1983



Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $f^{-1}(x) = \log_a x$ dla różnych wartości parametru a

46. Lemat. Funkcja $\varphi(t) = (1/t) \ln t$ w przedziale $0 < t < e$ rośnie od $-\infty$ do $1/e$, a w przedziale $e < t < \infty$ maleje od $1/e$ do 0. W punkcie $t = e$ osiąga swą wartość maksymalną równą $1/e$. (Dowód banalny przy użyciu rachunku różniczkowego).

Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy $a > 1$. Niech $f(x) = a^x$. Wówczas $f^{-1}(x) = \log_a x$. Każdy punkt stały funkcji f (czyli taki punkt x , że $f(x) = x$) jest pierwiastkiem równania $f(x) = f^{-1}(x)$. Innych pierwiastków nie ma; wynika to z wypukłości f i wklęsłości f^{-1} (szczegóły pomijamy — patrz rysunki). Punkty stałe funkcji f to pierwiastki równania $(1/x) \ln x = \ln a$. Z lematu wynika, że równanie to ma dwa pierwiastki, gdy $\ln a < 1/e$, ma jeden pierwiastek, gdy $\ln a = 1/e$, nie ma pierwiastków, gdy $\ln a > 1/e$ (czyli, odpowiednio, gdy $a < e^{1/e}$, $a = e^{1/e}$, $a > e^{1/e}$).

Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy $0 < a < 1$. Dane równanie jest równoważne równaniu $g(x) = 0$, gdzie $g(x) = a^x - \log_a x = e^{-cx} + (1/c) \ln x$, $c = -\ln a > 0$. Granice funkcji g przy $x \rightarrow 0+$ i $x \rightarrow +\infty$ wynoszą odpowiednio $-\infty$ i $+\infty$, zaś jej pochodna równa się

$$g'(x) = -ce^{-cx} + \frac{1}{cx} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{c} - \varphi(e^{cx}) \right] \quad \left(\varphi(t) = \frac{\ln t}{t} \right).$$

Jeśli $c \leq e$ (czyli $a \geq e^{-e}$), to zgodnie z lematem wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest nieujemne (dodatnie poza co najwyżej jednym punktem), zatem funkcja g jest ściśle rosnąca i równanie $g(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek. Jeśli $c > e$ (czyli $a < e^{-e}$), to na mocy lematu wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ujemne w pewnym przedziale (α, β) , a dodatnie poza $\langle \alpha, \beta \rangle$, zatem funkcja g jest monotoniczna (rosnąca—malejąca—rosnąca) w przedziałach $(0, \alpha)$, (α, β) , (β, ∞) i równanie $g(x) = 0$ ma nie więcej niż trzy pierwiastki. Aby się przekonać, że ma ono dokładnie trzy pierwiastki, wystarczy znaleźć punkty x_1, x_2 takie, że $0 < x_1 < x_2$, $g(x_1) > 0 > g(x_2)$. Otóż warunki te spełniają na przykład liczby $x_1 = 1/c$, $x_2 = \varphi(c)$, bowiem $g(x_1) = (1/e) - \varphi(c) > 0$, $g(x_2) = (1/c) \ln(\varphi(c)) < 0$; napisane nierówności wynikają natychmiast z lematu.

Reasumując: Liczba pierwiastków rozważanego równania wynosi

$$\begin{cases} 3 & \text{gdy } 0 < a < e^{-e} \\ 2 & \text{gdy } 1 < a < e^{1/e} \\ 1 & \text{gdy } a = e^{1/e} \\ 0 & \text{gdy } a > e^{1/e} \end{cases}$$

Uwaga. Zadanie to ma wyraźny związek z zadaniami 13 i 25 („Delta” 1/1982 i 7/1982 — teksty, „Delta” 5/1982 i 11/1982 — rozwiązania); badanie liczby pierwiastków równania $a^x = \log_a x$ stanowiło jedną z metod rozwiązania obu tamtych zadań.

47. Niech j_n będzie liczbą, której zapis dziesiętny składa się z n jedynek, a r_n — resztą z dzielenia j_n przez N (gdzie N jest daną liczbą naturalną). Ponieważ reszty r_n mają tylko skończenie wiele wartości, w ciągu tych reszt muszą występować powtórzenia. Niech więc $r_n = r_m$, $n > m$. Różnica $j_n - j_m$ jest wtedy liczbą podzieloną przez N , a jej zapis składa się z $n - m$ jedynek i m zer.

48. Podamy rozwiązanie w przypadku kostki I^n (dowolnego wymiaru). Niech A, O, B będą trzema wierzchołkami tej kostki takimi, że $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Wybierzmy układ współrzędnych tak, by punkt O był jego początkiem, a pozostałe wierzchołki kostki I^n były punktami o współrzędnych 0 i 1. We współrzędnych punktów A i B jedynki występują na różnych pozycjach, bo tylko wtedy iloczyn skalarny wektorów \vec{OA} i \vec{OB} jest zerem. Zatem trójkątów prostokątnych o wierzchołkach w rogach kostki I^n , z kątem prostym przy wierzchołku O , jest tyle, na ile sposobów można wybrać dwa rozłączne niepuste podzbiory zbioru numerów

$$\{1, \dots, n\}. \text{ Liczba ta równa się } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1).$$

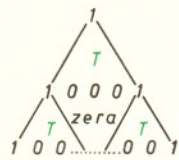
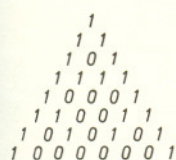
(Uzasadnienie: k numerów można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a spośród pozostałych $n - k$ numerów można wybrać podzbiór niepusty na $2^{n-k} - 1$ sposobów). Mnożymy teraz tę liczbę przez 2^n (bo tyle wierzchołków ma kostka I^n , a w każdym z nich można umieścić punkt O) i dzielimy przez $\binom{2^n}{3}$, czyli liczbę wszystkich trójkątów możliwych do utworzenia. Otrzymany iloraz jest prawdopodobieństwem wybrania trójkąta prostokątnego:

$$\begin{aligned} & \left[2^n \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1) \right] : \left[\frac{1}{6} \cdot 2^n (2^n - 1)(2^n - 2) \right] = \\ & = 3 \left[2^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right] : [(2^n - 1)(2^n - 2)] = \\ & = 3 \left[2^n \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n - 1 \right) - (2^n - 1) \right] : [(2^n - 1)(2^n - 2)] = \\ & = [3(3^n - 2^{n+1} + 1)] : [(2^n - 1)(2^n - 2)]. \end{aligned}$$

Dla $n = 6$ wynik równa się w przybliżeniu 0,46236559..., a więc nieco bardziej prawdopodobne jest wybranie trójkąta ostrokątnego.

Rozwiązania zadań z numeru 3/1983

49. Podany obok schemat przedstawia trójkąt Pascala napisany modulo 2: zera i jedynki znajdują się na tych pozycjach, gdzie



w zwykłym trójkącie Pascala są, odpowiednio, liczby parzyste i nieparzyste. W każdym wierszu, którego numer jest potęgą dwójki, wszystkie wyrazy — z wyjątkiem skrajnych jedynek — są zerami (czyli wartości symbolu Newtona „ n nad k ” dla $n = 2^m$, $0 < k < n$, są parzyste — pomijamy prościutki dowód tego faktu).

Ustalmy m i niech T oznacza część trójkąta utworzoną przez wiersze o numerach od 0 do $2^m - 1$. Wówczas w wierszach od 2^m do $2^{m+1} - 1$ tworzą się dwa rozłączne trójkąty, identyczne z T , ich wierzchołkami są wspomniane skrajne jedynki wiersza 2^m . Trójkąty te oddzielone są blokiem złożonym z samych zer. Zatem liczba jedynek w każdym wierszu, którego numer nie jest postaci 2^m , jest równa podwojonej liczbie jedynek w pewnym wierszu wcześniejszym. Stąd przez łatwą indukcję wynika, że liczba jedynek N_n w każdym wierszu jest potęgą dwójki. Jeśli teraz $P_n - N_n$ równa się ± 1 lub 0, to $n = N_n + P_n - 1 = 2N_n + (P_n - N_n) - 1$ jest liczbą postaci 2^k lub $2^k - 1$ lub $2^k - 2$. Dla takich n , odpowiednio, n -ty wiersz jest typu 1000...0001, 1111...111, 10101...101. Stąd odpowiedź: a) równość $P_n = N_n$ jest niemożliwa, b) $P_n = N_n + 1$ tylko dla $n = 4$, c) $P_n = N_n - 1$ dla $n = 2^k - 2$, $k = 1, 2, 3, \dots$

50. Oznaczmy przez O i r środek i promień koła, a przez x i y miary połówek kątów AOD i AOB . Mamy więc: $x > 0$, $y > 0$, $x + y < \pi$, $\sphericalangle AOD = 2x$, $\sphericalangle AOB = 2y$, $\sphericalangle COB = \sphericalangle COD = \pi - (x + y)$, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD + \sphericalangle COD = \pi + x - y$, skąd $AD = 2r \sin x$, $AB = 2r \sin y$, $AC = 2r \sin(\pi + x - y)/2 = 2r \cos(x - y)/2$. Wobec tego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (AD + AB) = r(\sin x + \sin y) = \\ & = 2r \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} < 2r \cos \frac{x-y}{2} = AC. \end{aligned}$$

51. Skorzystamy z przedstawienia liczby e w postaci sumy szeregu $\sum 1/n!$. Niech s_n oznacza n -tą sumę częściową, a $r_n = e - s_n$ resztę. Zatem

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!},$$

$$\sin(2\pi n!) = \sin(2\pi n! s_n + 2\pi n! r_n) = \sin(2\pi n! r_n);$$

ostatnia równość bierze się stąd, że $n! s_n$ jest liczbą całkowitą. Ponieważ $(n+k)! = n!(n+1)(n+2)\dots(n+k) > n!(n+1)^k$, więc

$$\begin{aligned} 2\pi n! r_n &= 2\pi n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right. \\ &< 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = 2\pi \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{2\pi}{n} \\ &> 2\pi n! \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Gdy $n > 4$, wszystkie czony otrzymanych nierówności są liczbami z przedziału $(0, \pi/2)$ i z monotoniczności funkcji sinus w tym przedziale wnosimy, że $\sin \frac{2\pi}{n+1} < \sin 2\pi n! r_n < \sin \frac{2\pi}{n}$, co można przepisać w postaci

$$2\pi \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} < n \sin(2\pi n! r_n) < 2\pi \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}.$$

Stąd, w myśl znanego wzoru $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, na mocy twierdzenia o trzech ciągach,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! r_n) = 2\pi.$$