



## SPIS TREŚCI

NUMERU 5 (113)

Automat do dowodzenia twierdzeń <i>dr Michał Szurek</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Pojęcie wymiaru w topologii <i>doc. dr Teodor Przymusiński</i>	str. 4
Ruchy Browna (II) <i>dr Bogdan Cichocki</i>	str. 6
Zasada Antropiczna <i>dr Roman Juszkiewicz</i>	str. 10
Klub 44	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Turbulencje**

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmokr  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Paczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
prof. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wolska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. naczk.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczk.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Jerzy Ryll  
dr Michał Szurek  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. naczk.

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 4172/83 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zleceniodawców instytucji i zakładów pracy.

Termin przyjmowania prenumeraty:

- od prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych w miastach siedzibach oddziałów RSW „Prasa — Książka — Ruch” — do dnia 28 lutego 1983 r. — na II kwartał i dalsze okresy roku bieżącego,
- 31 maja 1983 r. — na III kwartał i II półrocze roku bieżącego,
- 31 sierpnia 1983 r. — na IV kwartał roku bieżącego,
- od instytucji, zakładów pracy i prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych na wsi i w małych miasteczkach do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

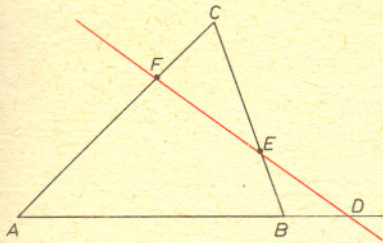
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

# Automat do dowodzenia twierdzeń

Dr Michał SZUREK



Rys. 1. Twierdzenie Menelausa

W szkolnych programach geometrii — nawet w klasach z rozszerzonym programem matematyki — nie znalazło się miejsca dla twierdzenia Cevy. Autor artykułu pragnie wykazać, że niezasłużenie. Proste do zapamiętania, przyjemne w dowodzie i obfite w ciekawe konsekwencje — czyż może być lepsze twierdzenie?

Twierdzenie Cevy najlepiej łączyć z twierdzeniem Menelausa:

Jeżeli prosta  $p$  przecina boki trójkąta lub ich przedłużenia (nie przechodząc przez żaden z wierzchołków ani nie będąc równoległą do żadnego z boków), to w oznaczeniach jak na rys. 1 mamy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = -1.$$

Prościej (i bez wektorów): każdy z mnożonych ułamków to stosunek długości odpowiednich odcinków wzięty ze znakiem plus, gdy punkt podziału leży wewnątrz boku, a minus, gdy leży na zewnątrz.

Banalny dowód twierdzenia Menelausa widzimy na rys. 2a i 2b.

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne:

Jeśli punkty  $D, E, F$  leżące na prostych zawierających (odpowiednio) boki  $AB, BC, CA$  trójkąta  $ABC$  spełniają równość

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = -1,$$

— to leżą one na jednej prostej.

Dowód. Gdyby bowiem prosta  $DE$  przecinała  $AC$  w punkcie  $F'$  (rys. 3) różnym od  $F$ , to w myśl twierdzenia Menelausa byłoby

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}'}{\vec{F'A}} = -1,$$

co wraz z założoną równością dałoby

$$\frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = \frac{\vec{CF}'}{\vec{F'A}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\vec{CF}}{\vec{CF}'} = \frac{\vec{FA}}{\vec{F'A}},$$

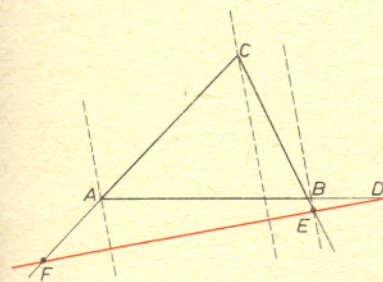
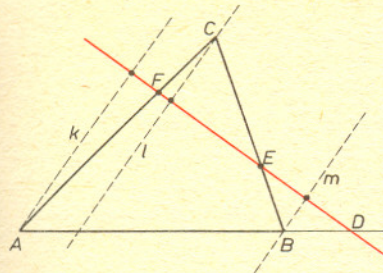
a to jest niemożliwe, gdyż jeden z tych ułamków jest większy, drugi zaś mniejszy od jedności.

A teraz tytułowe:

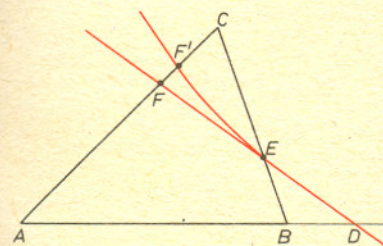
**Twierdzenie Cevy:** Przy dowolnym wyborze punktu  $O$  wewnątrz lub na zewnątrz trójkąta (jak na rysunku 4) mamy

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} = 1.$$

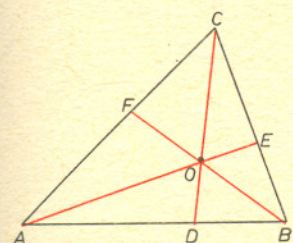
Dowód twierdzenia Cevy można zamknąć krótkim: zastosuj dwukrotnie twierdzenie Menelausa — najpierw do trójkąta  $ACD$  przeciętego przez  $BF$ , później do trójkąta  $BCD$  i tej samej prostej  $BF$ . Otrzymane dwie równości pomnóż stronami.



Rys. 2a, b. Dowód twierdzenia Menelausa: zastosuj twierdzenie Talesa do kąta  $D$  i widocznych na rysunku prostych równoległych np.  $\frac{CF}{FA} = \frac{l}{k}$ .



Rys. 3



Rys. 4. Twierdzenie Cevy

Otrzymujemy też (po identycznym jak dla odwrotnego twierdzenia Menelausa rozumowaniu)

**Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy:** Jeśli punkty  $D, E, F$  leżące na prostych zawierających odpowiednio boki  $AB, BC, CA$  trójkąta  $ABC$  spełniają równość

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1,$$

to proste  $AE, BF$  i  $CD$  przecinają się w jednym punkcie.

Odnajmy jeszcze trygonometryczną postać twierdzenia Cevy i twierdzenia doń odwrotnego: w oznaczeniach jak na rysunku 5 proste  $AE, CD$  i  $BF$  są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1.$$

Wynika ona z wersji „geometrycznej” np. przez zastosowanie twierdzenia sinusów. I oto koniec pracy. Teraz zbieramy owoce.

**Twierdzenie 1.** Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**Dowód** — natychmiast wynika ze znanego twierdzenia o stosunku podziału boku przez dwusieczną i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy!

**Twierdzenie 2.** Trzy środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**Dowód** — błyskawiczny.

**Twierdzenie 3.** Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**Dowód** — szybki; znów stosujemy twierdzenie odwrotne do Cevy (rys. 6).

**Twierdzenie 4.** Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego przecinają się w jednym punkcie (jest to tzw. punkt *Gergonne'a*).

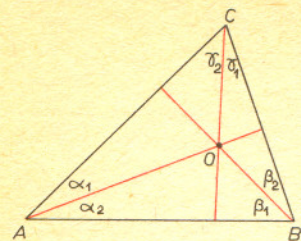
**Dowód** — bagatelka (patrz rys. 7).

**Twierdzenie 5.** Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych (rys. 8) przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem *Nagela*).

**Dowód** — już jest.

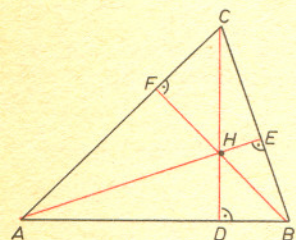
**Twierdzenie 5a.** Podobnie, tylko trochę inaczej (rys. 9).

**Twierdzenie 5b.** I jeszcze trochę inaczej (rys. 10).

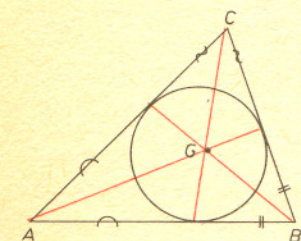


Rys. 5. Trigonometryczna postać twierdzenia Cevy:

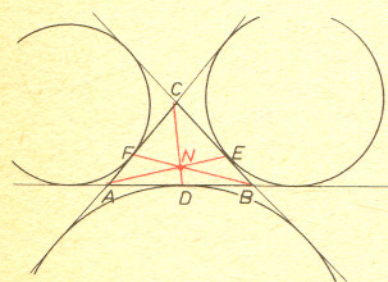
$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} = 1.$$



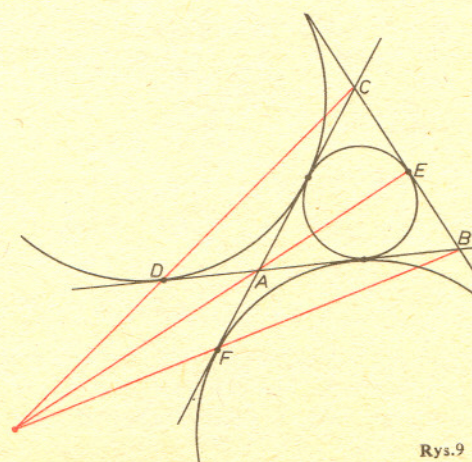
Rys. 6. Trójkąty  $ABF$  i  $ACD$  są podobne, więc  $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$ . Trójkąty  $ABE$  i  $DBC$  są podobne, więc  $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{DB}$ . Trójkąty  $BFC$  i  $AEC$  są podobne, więc  $\frac{BC}{AC} = \frac{FC}{EC}$ . Z tych trzech proporcji wynika, że  $AF \cdot BD \cdot EC = AD \cdot BE \cdot FC$ , a więc wysokości trójkąta przechodzą przez jeden punkt!



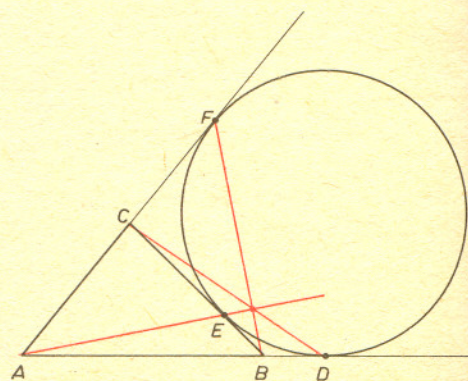
Rys. 7. Punkt *Gergonne'a* trójkąta  $ABC$



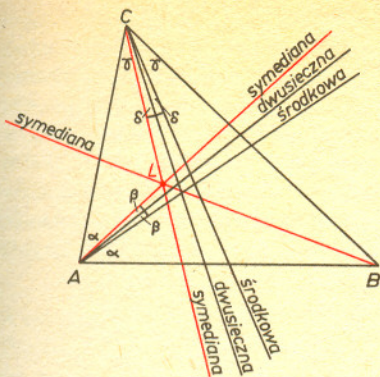
Rys. 8. Ponieważ  $AF = BE, AD = CE$  i  $FC = DB$ , więc proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecinają się w jednym punkcie  $N$ .



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11. Z równości zaznaczonych kątów i trygonometrycznej postaci twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wynika, że trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**Twierdzenie 6.** Nazwijmy *symedianą* (symetryczną medianą, mediana = = środkowa) odbicie symetryczne środkowej w dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka trójkąta. Wówczas: Trzy symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem *Lémoine'a* lub punktem *Grebesche'a*).

**Dowód.** Samo wychodzi z twierdzenia odwrotnego do Cevy w wersji trygonometrycznej (rys. 11).

I o tak ślicznym twierdzeniu nie wspomina się teraz w szkole! Słowo „teraz” zostało użyte rozmyślnie: prawie połowę artykułu „ściągnęliśmy” ze znanego w latach dwudziestych i trzydziestych podręcznika Jana Zydlera.

A teraz nieco trudniejsze zadanie: udowodnić następujące **twierdzenie Pascala**:

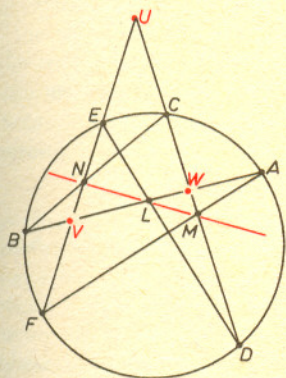
Jeśli przeciwległe boki sześciokąta  $ABCDEF$  wpisanego w okrąg przecinają się w punktach  $L, M, N$ , to punkty te leżą na jednej prostej.

**Dowód.** Oznaczmy przez  $U$  punkt przecięcia prostych  $EF$  i  $CD$ , przez  $V$  — punkt przecięcia  $AB$  i  $EF$ , przez  $W$  punkt przecięcia  $AB$  i  $CD$ . Stosując twierdzenie Menelaua do trójkąta  $UVW$  i, kolejno, prostych  $ED, AF, BC$ , a potem mnożąc otrzymane równości otrzymujemy, że dziewięć ułamków daje w iloczynie  $(-1)$ . Ponieważ jednak

$$\begin{aligned}
 \vec{VA} \cdot \vec{VB} &= \vec{VE} \cdot \vec{VF} \\
 \vec{WA} \cdot \vec{WB} &= \vec{WC} \cdot \vec{WD} \\
 \vec{UE} \cdot \vec{UF} &= \vec{UC} \cdot \vec{UD},
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

więc  $\frac{\vec{VL}}{\vec{LW}} \cdot \frac{\vec{WM}}{\vec{MU}} \cdot \frac{\vec{UN}}{\vec{NV}} = -1$ . Punkty  $L, M, N$  w myśl odwrotnego twierdzenia Menelaua leżą na prostej.

Sądźmy, że Czytelnik potrafi przeprowadzić dowód w przypadku, gdy rysunek wygląda inaczej niż rys. 12 i wie, skąd wzięły się równości (\*).



Rys. 12

## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 331.** Uogólnić znany wzór  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$  na przypadek sumy  $n$  zbiorów. (Symbol  $|X|$  oznacza liczbę elementów skończonego zbioru  $X$ ).  
Rozwiązanie na str. 13

**M 332.** Niech  $\varphi(n)$  będzie liczbą mniejszych od  $n$  liczb naturalnych względnie pierwszych z  $n$  ( $n > 1$ ). Niech  $p_1, \dots, p_m$  będą czynnikami pierwszymi  $n$ . Wykazać, że

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Rozwiązanie na str. 11

**M 333.** Udowodnić, że jeżeli  $\sigma(n)$  jest sumą wszystkich naturalnych dzielników liczby  $n$  ( $n > 1$ ), to  $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$ . Wykazać, że dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n$  takie, że  $\varphi(n)\sigma(n) > n^2(1 - \varepsilon)$ .  
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 136.** Na poziomej powierzchni z tarciami (współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego są równe i wynoszą  $f$ ) spoczywa klocek (masa  $m$ ) przytwierdzony do sprężyny o stałej sprężystości  $k$ . Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a ona sama zajmuje położenie poziome i nie jest napięta. O ile należy przesunąć klocek wzdłuż osi sprężyny, aby po puszczeniu powrócił do pierwotnego położenia? Opór powietrza oraz tarcie wewnętrzne sprężyny możemy pominąć.  
Rozwiązanie na str. 15

# Pojęcie wymiaru w topologii

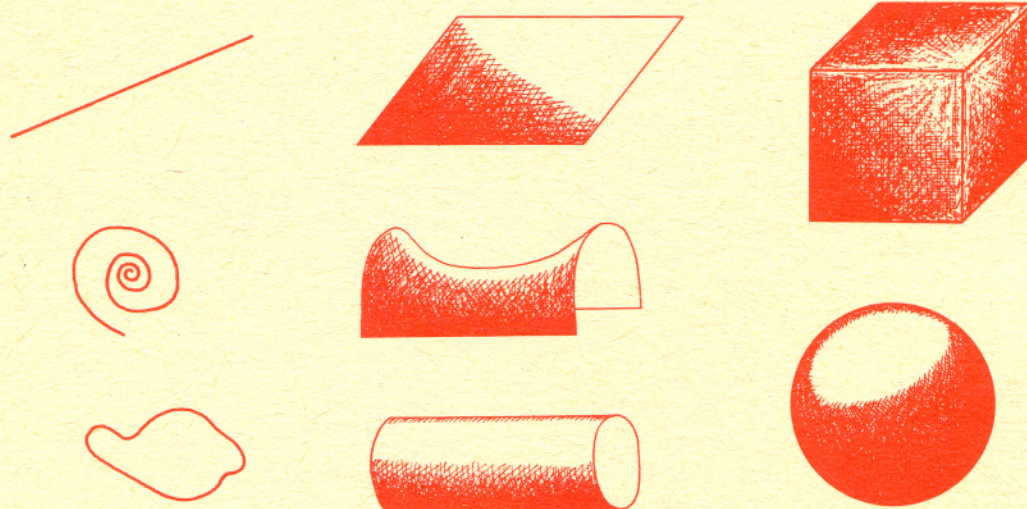
Doc. dr Teodor PRZYMUSIŃSKI

Teoria wymiaru jest jednym z najpiękniejszych działów topologii. Będąc przedmiotem jej badań pojęcie *wymiaru przestrzeni topologicznej* ma głęboko intuicyjną treść, prowadząc jednocześnie do wielu ciekawych i trudnych twierdzeń.

Któż z nas nie zastanawiał się kiedyś nad sensem pojęcia wymiaru figury geometrycznej i nie zadawał sobie pytania, dlaczego intuicja podpowiada nam, że jedne figury są jednowymiarowe, inne dwuwymiarowe, a jeszcze inne trójwymiarowe. Łatwo się każdy zgodzi, że cienki (tzn. taki, którego grubość można pominąć) kawałek drutu, prosty lub też dowolnie powyginany, czy też uformowany w okrąg lub inną figurę zamkniętą, jest tworem jednowymiarowym. Podobnie, nie budzi wątpliwości dwuwymiarowość powierzchni otrzymanej z kawałka cienkiej blachy powyginanej w dowolny sposób lub np. zwiniętej w rurkę. Za dwuwymiarową uznamy również bez wahania powierzchnię balonika o dowolnym kształcie. Nikt rozsądny nie będzie negował trójwymiarowości sześcianu czy też kuli.

które nie rozcina tej figury ani nie powoduje sklejenia żadnych jej punktów. A zatem, przekształcenie polegające na sklejeniu (złutowaniu) końców odcinka (drutu) w okrąg homeomorfizmem nie jest, podobnie jak nie jest nim przekształcenie polegające na rozcięciu papierowej rurki i otrzymaniu z niej płaskiego prostokąta. Homeomorfizmem jest jednak każde przekształcenie polegające na dowolnym wyginaniu, rozciąganiu lub kurczeniu figury. Dla zrozumienia pojęcia homeomorfizmu wygodnie jest wyobrazić sobie, że wszystkie figury wykonane są z nieskończonej elastycznej gumy.

Dwie figury nazywamy *homeomorficznymi*, gdy istnieje przekształcenie homeomorficzne jednej z nich na drugą. Na przykład prosty kawałek drutu jest homeomorficzny z powyginanym kawałkiem drutu dowolnej długości, okrąg jest homeomorficzny z elipsą, a nadmuchany balonik z balonikiem pozbawionym powietrza. Nietrudno wykazać natomiast, że odcinek nie jest homeomorficzny z okręgiem, bo otrzymanie jednej z tych figur z drugiej wymaga rozcinania bądź sklejenia. Z punktu widzenia topologii dwie figury homeomorficzne są uznane za *identyczne* lub *topologicznie nierozróżnialne*. Topologia zaś — jak już powiedzieliśmy wyżej — zajmuje się badaniem *niezmienników homeomorfizmów*, tj. badaniem tych własności figur, które zachowują się, tzn. nie ulegają zmianie przy przekształceniach homeomorficznych. Przykładem takiej własności jest np. *spójność*, czyli — mówiąc prościej — własność tworzenia przez figurę jednej całości. W szczególności zatem



Rys. 1. Przykłady figur jedno, dwu i trójwymiarowych

A jednak znalezienie właściwej definicji wymiaru, mimo iż jest to pojęcie tak bardzo intuicyjne, okazało się trudne. Zaczęto zajmować się tym zagadnieniem już w latach osiemdziesiątych XIX wieku, a dopiero w latach dwudziestych i trzydziestych naszego stulecia powstała poprawna teoria wymiaru.

Zastanówmy się nad przyczynami tych trudności. W tym celu musimy najpierw wyjaśnić, co to jest *topologia*, bo przecież nie bez powodu mówimy tutaj o pojęciu wymiaru w topologii. Otóż topologia jest nauką o niezmiennikach homeomorfizmów. To brzmi jeszcze bardziej skomplikowanie niż samo słowo „topologia”, ale dość łatwo jest wyjaśnić intuicyjny sens tych pojęć. Dowolny podzbiór  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$ , a zatem w szczególności dowolny podzbiór trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$  będziemy nazywali figurą. Otóż, *homeomorfizmem* lub *przekształceniem homeomorficznym* nazywamy (nieformalnie) każde takie przekształcenie jednej figury (przestrzeni topologicznej) na drugą,

odcinek — będący figurą spójną — nie jest homeomorficzny z niespójną figurą złożoną z dwóch rozłącznych odcinków. Możemy teraz sformułować podstawowe warunki, które powinna spełniać prawidłowa definicja wymiaru.

- (1) Każda taka definicja powinna być zgodna z intuicją, a w szczególności wymiar  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$  musi być równy  $n$ .
- (2) Wymiar winien być określony dla dowolnej figury (przestrzeni topologicznej).
- (3) Wymiar powinien być niezmiennikiem homeomorfizmów, tzn. dwie homeomorficzne figury powinny mieć ten sam wymiar.

Przyjrzyjmy się teraz, na trzech przykładach, trudnościom, które pojawiają się na drodze do sformułowania takiej definicji. Bodaj pierwszym narzucającym się sposobem zdefiniowania wymiaru jest uznanie za jednowymiarowe tych figur, które mają dodatnią długość, a nie mają powierzchni, za dwuwymiarowe tych figur,

które mają powierzchnię, a nie mają objętości itd. Otóż taka definicja, nawet jeżeli pominać znaczne trudności z właściwym określeniem pojęć długości, powierzchni i objętości (czym zajmuje się tzw. teoria miary), okazuje się przydatna tylko w bardzo specjalnych przypadkach. Nie spełnia ona bowiem żadnego z warunków (1)—(3). Dla ilustracji tej tezy wspomnijmy tylko, że stosunkowo łatwo można skonstruować na prostej dwie homeomorficzne figury, z których jedna ma długość dodatnią, a nawet nieskończoną, a druga zerową.

A oto inna, również narzucająca się, „definicja” wymiaru. Przyjmijmy, że figura jest jednowymiarowa, gdy każdy jej punkt ma pewne „otoczenie”, które jest homeomorficzne z odcinkiem; dwuwymiarowa, gdy każdy jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z kołem itd. Dla przykładu, okrąg jest jednowymiarowy, gdyż każdy jego punkt ma otoczenie, które po wyprostowaniu staje się odcinkiem. Podobnie, powierzchnia kuli (globusa) jest dwuwymiarowa, gdyż każdy jej punkt ma otoczenie, które po odpowiednim wygładzeniu (przeniesieniu na mapę) staje się kołem. Taka definicja spełnia warunki (1) i (3), ale nie spełnia warunku (2). Figury, których każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z odcinkiem (kołem, kulą etc.) nazywają się rozmaitościami.

(Rozmaitościami są wszystkie figury przedstawione na rys. 1.) Rozmaitości tworzą jednak wąską, choć ciekawą klasę przestrzeni (por. rys. 3).

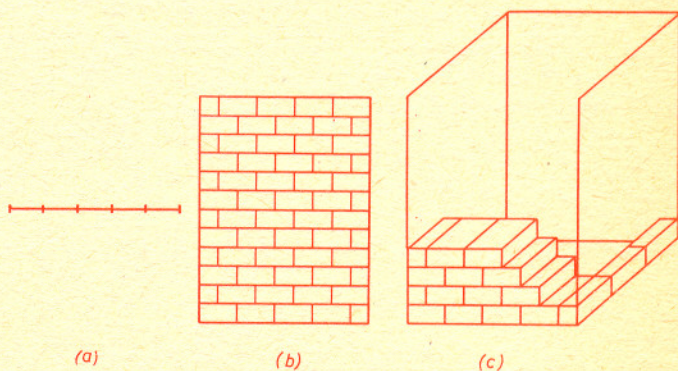
A oto jeszcze jedna nieudana, lecz pouczająca próba zdefiniowania wymiaru. Wydaje się intuicyjnie oczywiste, że figura leżąca na prostej euklidesowej jest jednowymiarowa tylko wtedy, gdy zawiera pewien odcinek. Pozostałe figury nazwiemy zerowymiarowymi (zerowymiarowy jest np. zbiór liczb wymiernych, a także każdy zbiór skończony). W ten sposób określiliśmy wymiar dla dowolnego podzbioru prostej. Podobnie postępujemy w przypadku podzbiorów płaszczyzny. Zgodnie z intuicją, figurę leżącą na płaszczyźnie nazwiemy dwuwymiarową tylko wtedy, gdy zawiera ona pewne koło. W przeciwnym razie rozpatrujemy dwa przypadki: jeżeli figura jest homeomorficzna z zerowymiarową figurą leżącą na prostej, to naturalnie również przypisujemy jej wymiar zero, a jeżeli tak nie jest, to uznajemy ją za jednowymiarową. Okazuje się, że taka definicja wymiaru figur leżących na płaszczyźnie jest absolutnie poprawna. Niestety, próba określenia w podobny sposób wymiaru podzbiorów trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$  kończy się niepowodzeniem. Przyczyna tkwi w tym, że nie każda jednowymiarowa figura leżąca w  $E^3$  jest homeomorficzna z pewną figurą leżącą na płaszczyźnie. Nie mamy zatem w tym przypadku metody pozwalającej na odróżnienie figur jedno- i dwuwymiarowych (zob. niżej oraz rys. 3).

Zanim przejdziemy do podania właściwej definicji wymiaru, zauważmy jeszcze, że z warunków (1) i (3) wynika, że jeżeli w ogóle istnieje prawidłowa definicja wymiaru, to przestrzenie euklidesowe  $E^n$  i  $E^m$  nie mogą być homeomorficzne dla różnych liczb  $n$  i  $m$ . Istotnie, wymiar pierwszej z nich musiałby być  $n$ , a drugiej  $m$ , podczas gdy figury homeomorficzne mają ten sam wymiar. Fakt niehomeomorficzności różnych przestrzeni euklidesowych, choć wydaje się intuicyjnie oczywisty, nie jest wcale prosty i udowodniony został dopiero w 1911 roku, na kilka lat przed powstaniem teorii wymiaru. Łatwo natomiast wykazać, że prosta euklidesowa  $E^1$  nie jest homeomorficzna z płaszczyzną  $E^2$ . Wynika to stąd, że po wyjęciu dowolnego punktu z prostej przestaje ona być spójna, co nie zachodzi w wypadku płaszczyzny (zob. niżej).

Przejdźmy teraz do podania poprawnej definicji wymiaru. Najpierw jednak wyjaśnimy pojęcie domkniętego podzbioru danej figury. Zamiast podawania formalnej definicji powiemy tylko niezbyt ściśle, że podzbiór danej figury (przestrzeni topologicznej) jest *domknięty*, gdy zawiera wszystkie punkty tej figury leżące na jego brzegu. Na przykład, na płaszczyźnie kwadrat wraz z brzegiem (obwodem) jest domknięty. Po wyjęciu z niego któregośkolwiek punktu leżącego na brzegu otrzymujemy już jednak zbiór niedomknięty. Zauważmy, że kwadrat — będący figurą dwuwymiarową — można tak pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi, by żaden punkt nie należał do więcej niż trzech zbiorów (rys. 2b). Wydaje się również intuicyjnie oczywiste, że takiego pokrycia na ogół nie można poprawić w ten sposób, by żaden punkt nie należał do więcej niż dwóch zbiorów.

Podobnie, sześcian — będący figurą trójwymiarową — można tak pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi, by każdy punkt należał do co najwyżej czterech zbiorów (rys. 2c). Nie można jednak ich liczby zmniejszyć do trzech.

Analogicznie, jednowymiarowy odcinek można pokryć dowolnie małymi zbiorami domkniętymi tak, by każdy punkt należał do co najwyżej dwóch zbiorów (rys. 2a). Nie możemy jednak żądać, by te zbiory były rozłączne.



Rys. 2. Pokrycia małymi zbiorami domkniętymi

Powyższe rozważania, które oczywiście wymagają ścisłego dowodu, prowadzą do następującej definicji wymiaru.

**Definicja wymiaru.** *Wymiarem* figury nazywamy taką najmniejszą liczbę naturalną  $n$ , że istnieje pokrycie tej figury dowolnie małymi zbiorami domkniętymi o tej własności, że każdy punkt należy do co najwyżej  $n + 1$  zbiorów.

Okazuje się, że tak określone pojęcie wymiaru spełnia wszystkie warunki (1)—(3), a zatem w szczególności prawdziwe jest następujące

**Zasadnicze twierdzenie teorii wymiaru.** Wymiar przestrzeni euklidesowej  $E^n$  jest równy  $n$ .

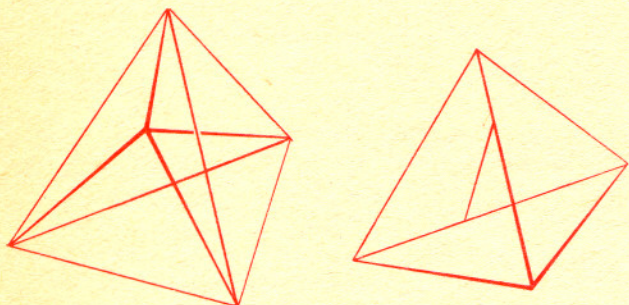
Prawdziwe są również następujące twierdzenia.

**Twierdzenie o monotoniczności wymiaru.** Jeżeli figura  $A$  jest zawarta w figurze  $B$ , to wymiar figury  $A$  nie przekracza wymiaru figury  $B$ .

**Twierdzenie o sumie.** Jeżeli figura  $A$  jest sumą dwóch domkniętych figur  $B$  i  $C$ , to wymiar figury  $A$  nie przekracza większego z wymiarów figur  $B$  i  $C$ .

Mówimy, że figura daje się zanurzyć w  $n$ -wymiarową przestrzeń euklidesową  $E^n$ , gdy jest ona homeomorficzna z pewną figurą leżącą w  $E^n$ . Nie każda figura jednowymiarowa daje się zanurzyć w prostą  $E^1$  (na przykład okrąg). Istnieją także figury jednowymiarowe, które nie dają się zanurzyć w płaszczyznę  $E^2$  (rys. 3). Okazuje się jednak, że każdą figurę jednowymiarową można zanurzyć w trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$ . Wynika to z następującego ważnego i głębokiego twierdzenia.

**Twierdzenie o zanurzeniu.** Każda figura  $n$ -wymiarowa daje się zanurzyć w  $(2n+1)$ -wymiarową przestrzeń euklidesową  $E^{2n+1}$ .

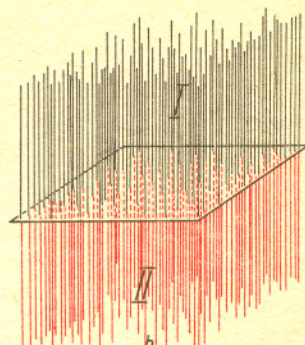
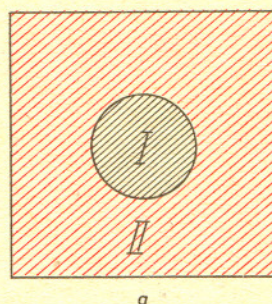


Rys. 3. Jednowymiarowe figury nie dające się zanurzyć w płaszczyźnie

Zauważmy, że zgodnie z definicją figura jest zerowymiarowa tylko wtedy, gdy ma ona pokrycie dowolnie małymi i rozłącznymi zbiorami domkniętymi. A zatem zerowymiarowa jest na przykład każda figura skończona, a także zbiór liczb wymiernych (lub niewymiernych) na prostej lub na płaszczyźnie. Powiemy, że domknięta figura leżąca w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$  *rozcina* tę przestrzeń, gdy po jej

usunięciu z przestrzeni  $E^n$  pozostała część przestaje być spójna, tzn. rozpada się na kilka kawałków. Na przykład okrąg i prosta rozcinają płaszczyznę  $E^2$  (rys. 4a). Zauważmy, że są to figury jednowymiarowe. Okazuje się, że żadna figura zerowymiarowa nie rozcina płaszczyzny. Podobnie, powierzchnia kuli, a także dowolna płaszczyzna rozcina trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$  (rys. 4b). Żadna jednak figura jednowymiarowa nie ma tej własności. Fakty te wynikają z następującego twierdzenia.

**Twierdzenie o rozcinianiu.** Żadna figura domknięta wymiaru mniejszego niż  $n-1$  nie rozcina  $E^n$ .

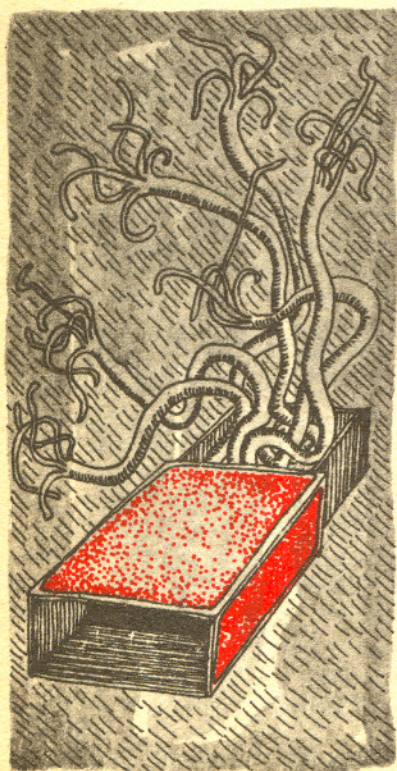


Rys. 4. Rozcinanie przestrzeni  $E^2$  i  $E^3$

Wymieniliśmy zaledwie kilka twierdzeń składających się na piękną i bogatą teorię wymiaru. Wszystkich zainteresowanych tą teorią odsyłamy do interesującej i przystępnie napisanej książeczki R. Dudy pt. „O pojęciu wymiaru” (Biblioteczka Matematyczna 31, PZWS, Warszawa 1972).

## Ruchy Browna (II)

Dr Bogdan CICHOCKI



W poprzednim numerze „Deltę” opisaliśmy zmagania fizyków XIX wieku z problemem tzw. ruchów Browna. Przypomnijmy podstawowe fakty. W roku 1827 Robert Brown odkrył zygzakowate ruchy wykonywane przez drobne ziarenka zawieszone w cieczy. Ruchy te obserwowano dla wszystkich substancji, o ile zostały one tak rozdrobione, że ziarenka miały średnicę co najwyżej kilku mikronów. Próby wyjaśnienia przyczyn ruchów Browna napotkały poważne trudności. Wszystkie hipotezy sprowadzające owe przyczyny do działania czynników zewnętrznych po konfrontacji z doświadczeniem musiały zostać odrzucone. Wyjaśnienie zagadki na gruncie teorii kinetyczno-molekularnej również wydawało się niezadowalające. Jeżeli bowiem przyjmujemy, że ruchy Browna są wynikiem zderzeń molekuł cieczy z zawieszonymi w niej ziarenkami, to: po pierwsze, proste oszacowanie wykazuje, że prędkość, jaką uzyska ziarenko na skutek jednego zderzenia z molekułą cieczy, ma niezwykle małą wartość; po drugie, jak sugerowali przeciwnicy hipotezy atomowej, ziarenka są bombardowane równomiernie ze wszystkich stron i w rezultacie nie powinny w ogóle się poruszać. Co więcej, jeżeli wyliczmy średnią prędkość ziarenek na podstawie zasady ekwipartycji energii, to uzyskamy wartość ok. 10 tys. razy większą niż obserwowana w eksperymentach. Tak wyglądała sytuacja na przełomie XIX i XX wieku. Wiek XX przyniósł jednak rozwiązanie zagadki. A oto, jak do tego doszło.

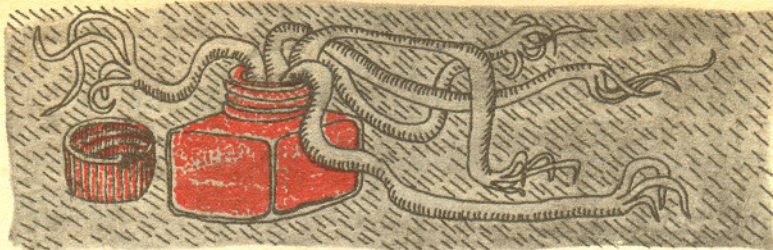
Pierwszym ważnym momentem było skonstruowanie przez Siedentopfa i Zsigmondy'ego w roku 1903 tzw. ultramikroskopu. Zasada działania tego przyrządu była bardzo prosta. Od 1868 roku znano zjawisko Tyndalla polegające na rozpraszaniu światła przez ośrodki mętne — ośrodki, które są właśnie omawianymi przez nas zawiesinami drobnych cząsteczek w cieczach i gazach. Wiązka światła

Przez dwa lata (1977/78 i 1978/79) Polskie Radio nadawało prowadzoną przez nas audycję Radiodelta. Dziś Radiodelty już nie ma.

Piszemy o tym dlatego, że niestety nie ma już też wśród nas Redaktora Jana Małkowskiego, który nauczył nas "jak to się robi", jak przygotować audycję, jak mówić, jak nagrywać.

I za tę troskliwą opiekę jesteśmy Mu wdzięczni. I zawsze będziemy.

Redakcja Delt



Schemat ultramikroskopu

padająca na taki ośrodek jest rozpraszana przez cząsteczki zawiesiny. Dla cząsteczek kulistych o rozmiarach dużo mniejszych od długości fali padającej  $\lambda$  natężenie światła rozproszonego jest, zgodnie z prawem Rayleigha, proporcjonalne do kwadratu objętości cząsteczki i odwrotnie proporcjonalne do czwartej potęgi  $\lambda$ . W ultramikroskopie naczynie z zawiesiną oświetlane jest z boku przez bardzo silną wiązkę światła, a obserwowane przez zwykły mikroskop w kierunku prostopadłym do wiązki. Do obserwatora dociera wtedy tylko światło rozproszone. Na ciemnym tle widoczne są jasne punkciki wszędzie tam, gdzie znajdują się ziarenka zawiesiny. W ten sposób można obserwować ziarenka o rozmiarach nawet rzędu kilku nanometrów ( $1\text{nm} = 10^{-3} \mu\text{m}$ ). Niektórych Czytelników może ten fakt zaskoczyć. Przecież wiadomo, że zdolność rozdzielcza mikroskopu jest co do rzędu wielkości równa długości fali świetlnej, a ta zawiera się w granicach ok.  $0,3 \mu\text{m}$  do  $0,7 \mu\text{m}$ . Nie ma w tym żadnej sprzeczności. Ultramikroskop nie pozwala bowiem dostrzec kształtów ziarenek, lecz jedynie stwierdzić ich obecność w danym punkcie przestrzeni. Jest to jednak całkowicie wystarczające, by śledzić ich ruchy. Przypomnijmy, że intensywność ruchów Browna wzrastała wraz ze zmniejszeniem się rozmiarów cząsteczek zawiesiny. Tymczasem ultramikroskop pozwolił na obserwację ziarenek o średnicy ok. 100 razy mniejszej od średnicy tych, które widziano przez zwykły mikroskop.

Eksperymentatorzy drugiej połowy XIX w. mieli poważne trudności z uzyskaniem ilościowych wyników dla ruchów Browna i posługiwali się w związku z tym głównie subiektywnym pojęciem ich intensywności. Teraz dysponowali przyrządem, który umożliwił im precyzyjne pomiary. Brakowało tylko teorii. Pełną teorię ruchów Browna sformułowano niebawem. W 1905 r. A. Einstein opublikował bowiem pracę, w której podał prawidłowy opis tych ruchów traktując je jako szczególny przypadek procesu dyfuzji i otrzymując w rezultacie wzór na przesunięcie cząsteczek zawiesiny. Einstein posługiwał się jednak abstrakcyjnym jak na owe czasy sformułowaniem fizyki statystycznej i nie wnikał w mechanizm zjawiska. Mechanizm ten pozostawał w związku z tym dalej niejasny. Ale w rok później pod wpływem pracy Einsteina wyniki swoich przemyśleń przedstawił M. Smoluchowski. Używając prostych argumentów ostatecznie rozwikłał zagadkę. Prześledźmy szczegóły jego rozumowania.

Swoje rozważania rozpoczął Smoluchowski od odparcia zarzutów Nagëliego. Stwierdził, że rzeczywiście przyrost prędkości ziarenka na skutek zderzenia z jedną molekułą cieczy jest bardzo mały, ale wyciąganie z tego wniosku, iż ziarenko będzie stało w miejscu to błąd. Jak sam pisze: „Jest to taki sam błąd rozumowania, jak gdyby człowiek uprawiający grę hazardową (np. rzucanie kostki) sądził, że nigdy większej straty ani też większego zysku mieć nie będzie, niż wynosi stawka na jeden rzut. Wiemy dobrze, że szczęście i nieszczęście zwykle niezupełnie się równoważą; że im dłużej gra trwa, tym większa jest przeciętna suma albo wygrana, albo stracona”.

Aby uściślić ten argument, Smoluchowski przytoczył proste obliczenie. Niech prawdopodobieństwa rzutów korzystnego i niekorzystnego są równe  $1/2$ . Prawdopodobieństwo  $P_m$  otrzymania w  $n$  próbach  $m$  wyników korzystnych i  $n - m$  niekorzystnych, a zatem nadwyżki  $2m - n$  jednych nad drugimi, dane jest przez rozkład Bernoulliego

$$P_m = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{m}$$





Dla dużych  $n : n! \approx (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}$

Stąd znajdujemy, że średnia  $\nu = \langle |2m - n| \rangle$  wartości bezwzględnej tej nadwyżki wynosi

$$\nu = 2 \sum_{m=n/2}^n \frac{(2m-n)}{2^n} \binom{n}{m} = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2}, \quad \text{gdzie } n \text{ jest parzyste.}$$

Dla bardzo dużych  $n$  stosując wzór Stirlinga można sprowadzić powyższą średnią do

$$\nu = \sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

czyli  $\nu$  jest proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z liczby prób. Ziarenko zawieszony uderzane jest przez molekuły cieczy średnio  $10^{20}$  razy w ciągu sekundy. Zatem przeciętna nadwyżka uderzeń z jednej strony nad uderzeniami z drugiej strony będzie w tym czasie  $10^{10}$ . Jeśli nawet wynik pojedynczego zderzenia jest bardzo mały, to sumaryczny efekt może być znaczny. Ziarenko będzie się poruszać!

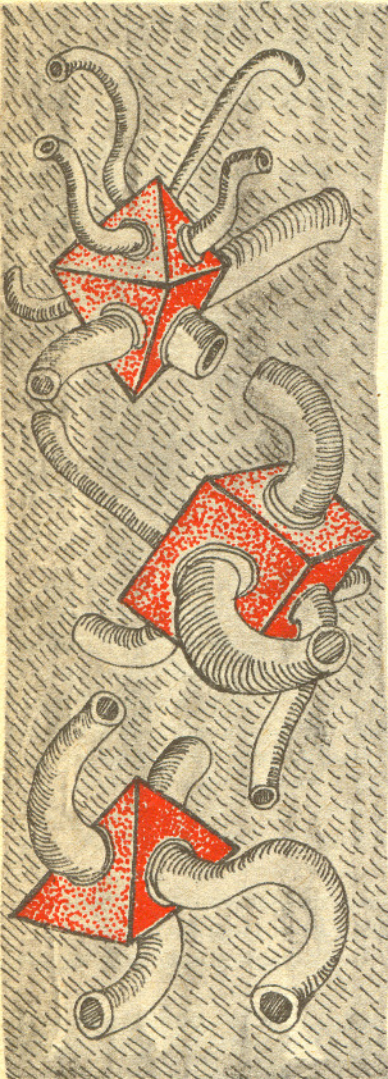
Pozostała do wyjaśnienia sprawa średniej prędkości. Aby rozwikłać ten problem, Smoluchowski postawił na początek pytanie: jaki jest tor ruchu cząsteczki Browna? Zauważył, stwierdził, że cząsteczka ta ma ogromną masę w porównaniu z masą pojedynczej molekuly cieczy. Również średnia wartość jej prędkości jest zgodnie z zasadą ekwipartycji energii bardzo duża. W związku z tym jedno czy kilka uderzeń ze strony molekuł cieczy nie jest w stanie zmienić kierunku ruchu rozpędzonej cząsteczki Browna. Będzie się ona poruszać po linii prostej przez bardzo długi okres czasu w porównaniu ze średnim czasem między kolejnymi zderzeniami, który jest rzędu  $10^{-20}$ s. Będzie się tak poruszać praktycznie aż do momentu zatrzymania. Po czym, na skutek fluktuacji liczby zderzeń z różnych stron zostanie rozpędzona w innym kierunku itd. Zatem tor jej ruchu będzie się składał z prostych odcinków ukierunkowanych w sposób chaotyczny. Jeżeli chcielibyśmy zmierzyć prędkość ziarenka i porównać ją z wartością wynikającą z zasady ekwipartycji energii, to musielibyśmy zrobić to na jednym z tych odcinków. Tymczasem, jak oszacował Smoluchowski, średni czas ruchu cząsteczki Browna po prostej jest rzędu  $10^{-8}$ s. Ruchu o tak krótkim czasie trwania nie jesteśmy w stanie obserwować nawet pod ultramikroskopem. Stąd Smoluchowski wyciągnął natychmiast wniosek, że nie pomiar średniej prędkości, ale pomiar średniego oddalenia się ziarenka od położenia początkowego może być ilościowym testem przewidywań teorii kinetyczno-molekularnej. W celu wyznaczenia tego oddalenia Smoluchowski przyrównał ruch cząsteczki Browna do procesu, który dziś zwiemy błędzeniem przypadkowym. W rezultacie otrzymał następujący wzór, poprzednio wyprowadzony przez Einsteina,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t,$$

gdzie  $\langle r^2 \rangle$  — średni kwadrat przesunięcia ziarenka w płaszczyźnie obserwacji w czasie  $t$ ,  $a$  — promień ziarenka,  $\eta$  — współczynnik lepkości cieczy,  $T$  — temperatura,  $k_B$  — stała Boltzmanna równa  $R/N_A$  ( $R$  — stała gazowa,  $N_A$  — liczba Avogadro).

Już wstępna analiza tego wzoru przekonuje nas, że Einstein i Smoluchowski znaleźli właściwe rozwiązanie. Przeciętne przesunięcie cząsteczki Browna, które można utożsamiać z intensywnością jej ruchów, jest bowiem proporcjonalne do temperatury, odwrotnie proporcjonalne do lepkości cieczy i rozmiarów cząsteczki oraz nie zależy od substancji, z której cząsteczka jest zbudowana. Dokładnie tak, jak wynikało to z ówczesnie dostępnych jakościowych wyników obserwacji. Nie musiano ograniczać się jednak tylko do stwierdzenia tego rodzaju zgodności. Dysponując ultramikroskopem eksperymentatorzy mogli natychmiast przystąpić do precyzyjnych pomiarów.

Pierwsze rezultaty ilościowe, jakie otrzymał Swedberg w 1907 roku, potwierdzały przewidywaną przez wzór Einsteina — Smoluchowskiego zależność od lepkości ośrodka i promienia cząsteczek. Decydujące znaczenie miały jednak wyniki prac Perrina z roku 1908. Perrin udoskonalił znacznie metody pomiarów opracowując m.in. metodę sporządzania zawiesin składających się z ziarenek o jednakowych rozmiarach. Przyjmując, że wzór na średni kwadrat

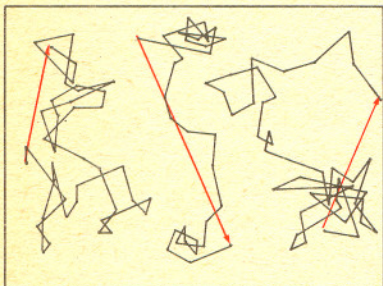


W rzeczywistości, na skutek zastosowania szeregu przybliżeń końcowa wartość średniego kwadratu przesunięcia, którą otrzymał Smoluchowski w pracy z 1906 r., różniła się od wyniku Einsteina o czynnik

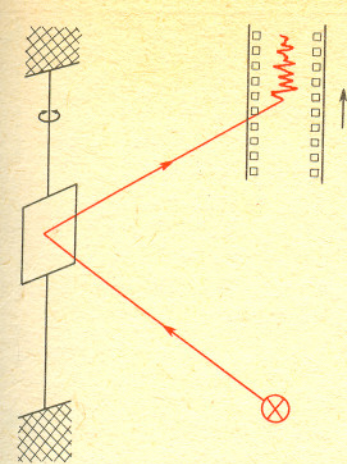
$$\sqrt{\frac{27}{64}}.$$

W późniejszych pracach

Smoluchowskiego rozbieżność ta już nie występowała.



Położenia cząsteczek Browna o średnicy ok.  $1 \mu\text{m}$  rejestrowane co 30 sekund. Kolejność zaznaczono łącząc punkty odcinkami. Odcinek czerwony to całkowite przesunięcie cząsteczki Browna.

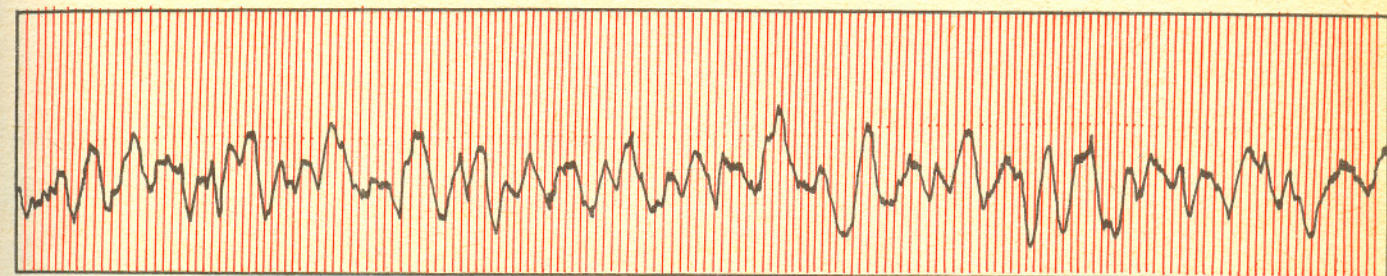


Schemat eksperymentu Kapplera ze zwierciadłem Smoluchowskiego

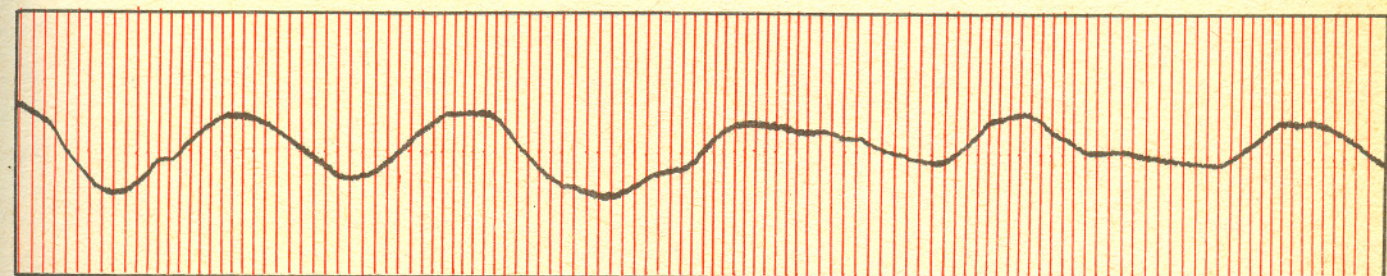
przesunięcia cząsteczki Browna jest prawidłowy, wyznaczył za jego pomocą na podstawie danych eksperymentalnych liczbę Avogadro. Uzyskany przez niego wynik:  $N_A = 6,85 \cdot 10^{23}$ . Znane ówczesnie wartości liczby Avogadro otrzymywane na zupełnie innej drodze, m.in. przez samego Perrina, wahały się w granicach od  $6 \cdot 10^{23}$  do  $7 \cdot 10^{23}$  (obecnie znamy tę liczbę z dużą dokładnością, jest ona równa  $6,023 \cdot 10^{23}$ ). Taka zgodność rezultatów musiała przekonać najzagorzalszych przeciwników hipotezy atomowej. Tak też się stało. Jeden z głównych oponentów W. Ostwald napisał w 1909 r.: „Doszedłem do przekonania, że od niedawna posiadamy doświadczalny dowód dyskretnej czy ziarnistej natury materii, którego od setek, a nawet tysięcy lat daremnie szukała hipoteza atomistyczna”.

Rozważania Smoluchowskiego znalazły jeszcze jedno potwierdzenie w pięknych doświadczeniach wykonanych w latach trzydziestych XX w. przez E. Kapplera. Otóż Kappler przeprowadził szereg eksperymentów ze zwierciadłem zawieszonym na sprężystej nici. Zwierciadło takie bombardowane przez cząsteczki powietrza wykonuje niewielkie, chaotyczne drgania, które są niczym innym jak odpowiednikiem ruchów Browna. Możemy je obserwować w prosty sposób kierując na zwierciadło promień świetlny i rejestrując na ekranie ślad promienia odbitego. Teorię tego zjawiska opracował już wcześniej Smoluchowski. W porównaniu z teorią „klasycznych” ruchów Browna wymagała ona uwzględnienia siły sprężystości nici. W oparciu o rezultaty Smoluchowskiego i wyniki pomiarów Kappler wyznaczył liczbę Avogadro z dokładnością do 1%. Ale nie tylko. W miejsce ekranu wstawił bowiem kliszę fotograficzną.

a



b



Typowe wyniki eksperymentu Kapplera.

Prędkość przesuwania kliszy:

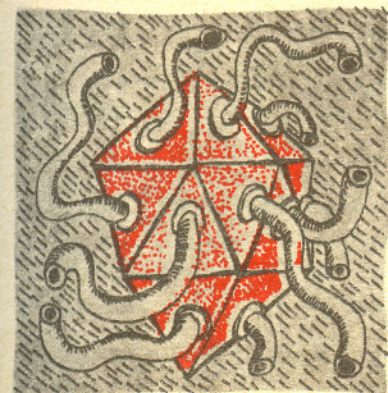
a) 0,046 cm/s, b) 0,416 cm/s. Odstęp między

sąsiednimi liniami poziomymi: a)  $\Delta t = 3,5$  s,

b)  $\Delta t = 0,553$  s.

Przesuwając kliszę uzyskiwał na niej obraz drgań zwierciadła w postaci zygzakowatej krzywej. Im większa była szybkość przesuwania kliszy, tym więcej szczegółów w postaci coraz mniejszych zygzaków było rejestrowanych. Ale po osiągnięciu pewnej szybkości dalsze jej zwiększanie nie powodowało już wykrywania nowych zwrotów zwierciadła. To, co Smoluchowskiemu wydawało się niemożliwe, stało się faktem. Kappler rejestrował elementarne ruchy zwierciadła — odpowiadające prostoliniowym ruchom cząsteczki Browna! Mógł zatem wyznaczyć ich średnią prędkość. Wynik zgadzał się doskonale z zasadą ekwipartycji energii.

Warto wskazać czynniki, które umożliwiły ten pomiar. Po pierwsze, ośrodkiem był bardzo rozrzedzony gaz (ciśnienie  $p = 0,01$  mmHg), co spowodowało w stosunku do cieczy drastyczne zmniejszenie częstości zderzeń molekuł ośrodka z jednostką powierzchni umieszczonego w nim ciała. Poza tym intensywność ruchów Browna zwierciadła zależała jedynie od momentu skręcającego nici. Zwierciadło mogło być zatem bardzo duże (jedynym ograniczeniem to wytrzymałość nici) i w konsekwencji mogło mieć duży moment bezwładności. W przypadku ziarenka zawieszzonego w cieczy tor zakreślany w ciągu 1 sekundy składał się z około  $10^8$  prostych odcinków. W doświadczeniu Kapplera opisane czynniki spowodowały, że tych odcinków było bardzo mało, średnio jeden na kilka sekund. Można je było zatem obserwować.





Model Friedmana opisaliśmy w *Delcie* 5/1982.



Parametr  $\Omega$  określa stosunek efektywnej energii potencjalnej  $e_p$  do energii kinetycznej ekspansji  $e_k$ :  $\Omega = |e_p|/e_k$ .  
 Przy  $\Omega > 1$  W. jest grawitacyjnie związany; ekspansja po pewnym czasie zostaje wyhamowana i rozpoczyna się etap kurczenia. Przy  $\Omega \leq 1$  W. posiada nieujemną energię całkowitą i ekspansja trwa wiecznie. Model  $\Omega = 1$  nosi nazwę „płaskiego”, ponieważ geometria powierzchni stałego czasu w takim modelu jest płaska (euklidesowa). Fakt, że przedział, w którym zawarta jest wartość  $\Omega$ , „zacieśnia” się wokół jedności przy  $t \rightarrow 0$  jest zrozumiały, bowiem z definicji  $|\Omega - 1| = |e_k + e_p|/e_k = \text{const}/e_k$ . Ekspansja jest hamowana przez grawitację, a zatem przy  $t \rightarrow 0$ ,  $e_k \rightarrow \infty$  i wobec tego  $\Omega \rightarrow 1$ .

Pierwsze dojrzałe teorie kosmologiczne (mówiące o powstaniu i rozwoju Wszechświata) pojawiły się w latach dwudziestych naszego stulecia. Za swą podstawę miały ogólną teorię względności, a dokładniej modele Friedmana z tej teorii wyprowadzone. Ogromna popularność tematu i wielka ilość odkryć astronomicznych sprawiły, że podstawa taka przestała wystarczać. Zaczęto coraz jawniej postulować, aby kosmologię oprzeć na *całej* fizyce i by za stan, od którego odtwarzamy wstecz minione dzieje Wszechświata aż do jego początku, uznać *całość* naszej wiedzy o Wszechświecie, a więc nie tylko istnienie galaktyk czy gwiazd, lecz także by nie zapominać o tym, że na Ziemi pojawiło się życie. Słowem, zażądano od kosmologii, aby jej modele były na tyle precyzyjne, by przewidywały również zaistnienie kosmologów. Niżej przedstawiamy artykuł o tym, jak ten postulat jest omawiany wśród astronomów.

## Zasada Antropiczna,

lub o tym, co zdaniem niektórych wynika z faktu istnienia życia na Ziemi oraz o braku dowodów na istnienie życia na Marsie i innych ciekawostkach przyrodniczych

Dr Roman JUSZKIEWICZ

### Problem warunków początkowych

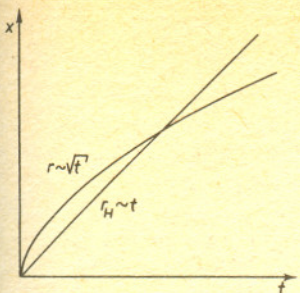
Z obserwacji astronomicznych wnioskujemy, że Wszechświat rozszerza się, tj. że gromady galaktyk oddalają się od siebie z prędkością  $H_0 r$ , gdzie  $r$  oznacza odległość między daną parą gromad, a  $H_0$  — tzw. parametr Hubble’a ( $H$  jest funkcją czasu kosmologicznego  $t$ , a wskaźnik „o” oznacza obecną wartość tego parametru). Wiemy również, że ze wszystkich kierunków na niebie dociera do nas promieniowanie elektromagnetyczne ciała doskonale czarnego o temperaturze 3 K, oraz że Wszechświat składa się w 25% z helu i w 75% z wodoru (pomijając śladowe ilości pierwiastków ciężkich).

Jedynym modelem kosmologicznym, który pozwolił wytłumaczyć (i przewidzieć!) te obserwacje, jest model Friedmana, oparty na założeniu, że cała przestrzeń wypełniona jest materią w sposób jednorodny i izotropowy. Zgodność tych przewidywań z obserwacjami przemawia za tym, że nasz Wszechświat rozpoczął swoje istnienie od wielkiego wybuchu  $1/H_0 \approx 20$  miliardów lat temu, oraz że materia rozmieszczona jest w przestrzeni niezwykle równomiernie — o tym, że wielkoskalowy rozkład materii jest rzeczywiście jednorodny świadczą również bezpośrednie obserwacje. Największe zagęszczenia i „dziury” w rozmieszczeniu galaktyk w obszarze o promieniu 10 miliardów lat świetlnych, które udało nam się wykryć, nie przekraczały swymi rozmiarami 200—300 milionów lat świetlnych. Wielkoskalowej symetrii towarzyszą odstępstwa od izotropii i jednorodności w „małej” skali ( $< 300$  mln lat świetlnych) w postaci gromad galaktyk, galaktyk i gwiazd.

Model Friedmana wyjaśnia, skąd wziął się hel, skąd promieniowanie tła oraz dlaczego ekspansja odbywa się zgodnie z prawem Hubble’a, nie tłumaczy jednak *dlaczego* Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Symetria jest jednym z warunków początkowych modelu. Poza tym, w ramach określenia warunków początkowych należy zadać wartości  $H$  oraz tzw. parametru  $\Omega$  w jakiejś ustalonej chwili czasu.

*Problem horyzontu* spowodowany jest tym, że w modelu Friedmana odległość  $r$  pomiędzy dwiema cząstkami rośnie w miarę ekspansji jak  $\sqrt{t}$ , podczas gdy „odległość do horyzontu”  $r_H$ , określająca drogę przebytą przez światło od chwili  $t = 0$  rośnie jak  $t$ . W szczególności, w chwili wybuchu

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = \infty, \quad \left. \frac{dr_H}{dt} \right|_{t=0} = \text{const.}$$



Rys. 1. Wzrost odległości cząstek ( $r$ ) i odległości do horyzontu ( $r_H$ ) w czasie ekspansji

Innymi słowy, ekspansja po wybuchu następowała z „prędkościami nadświetlnymi” (patrz rysunek).

Fizycy nie przepadają za takim sformułowaniem, jako że maksymalną dopuszczalną prędkością jest prędkość światła. Na szczęście nie ma tu żadnej sprzeczności, gdyż w ścisłym ujęciu wielkość  $\frac{dr}{dt}$ , odnosząca się do obszarów większych niż horyzont, nie może być traktowana jak potocznie rozumiana prędkość liniowa. Jednakże do naszych celów takie jej wyobrażenie w zupełności wystarczy.

Konsekwencją zachowania się  $r(t)$  i  $r_H(t)$  jest fakt, że np. w chwili  $t = 1$  s każdy z przyczynowo rozłącznych obszarów, biorących udział w globalnej ekspansji, miał masę barionową (protonów i neutronów) nie większą niż  $0,1 M_{\odot}$ ! Naturalnie z upływem czasu  $r_H$  zaczyna dopędzać  $r$ , ale mimo to, jeszcze do chwili obecnej, odległe przestrzenie Wszechświata obserwowane przez nas w jakimś kierunku, nie zdołały skomunikować się z obszarami znajdującymi się w przeciwnym kierunku.

Trudno jest wymyślić proces fizyczny, który mógłby zsynchronizować zachowanie wszystkich tych obszarów nie popadając w konflikt z zasadą przyczynowości. W tej sytuacji wielkoskalowa izotropia i jednorodność Wszechświata (powodująca, iż np. gromada znajdująca się w odległości  $10^{10}$  lat świetlnych nad nami oddala się z dokładnie taką samą co do wartości i przeciwnie skierowaną prędkością, jak równoodległa gromada na antypodach) wygląda dość tajemniczo.

**Problem „plaskości”.** Nie znamy dokładnej wartości  $\Omega_0$ , obserwacje pozwalają jednak na ustalenie, że  $0,01 < \Omega_0 < 10$ . Oznacza to, że we wczesnym Wszechświecie parametr  $\Omega$  mógł tylko bardzo nieznacznie różnić się od jedności, np. przy  $t = 1$  s było  $|\Omega - 1| < 10^{-15}$ . Innymi słowy, we wczesnym Wszechświecie z całkowicie nieznanymi powodów energia kinetyczna ekspansji była w każdym punkcie przestrzeni dokładnie równa grawitacyjnej energii potencjalnej.

Mogłoby się wydawać, że przedstawione powyżej problemy są czysto akademickie. W końcu zadaniem fizyki powinno być poszukiwanie lokalnych praw, którym podlegają różne wielkości fizyczne. Prawa te zazwyczaj formułowane są w postaci równań różniczkowych i nie jest oczywiste, że teoria fizyczna powinna również ustalać jakieś reguły wyboru warunków początkowych (brzegowych) dla tych równań. Zasady mechaniki Newtona pozwalają np. na wyznaczenie toru kamienia, rzuconego pod kątem  $30^\circ$  do poziomu z prędkością początkową  $10$  m/s, próżno by jednak w ramach mechaniki szukać odpowiedzi na pytanie *dlaczego* warunki początkowe były takie, a nie inne.

Przy takim podejściu wszystkie pytania dotyczące warunków początkowych, stawiane na gruncie kosmologii, wydają się wykraczać poza obręb tej nauki w sferę metafizyki i religii. Jest to stara pozytywistyczna sztuczka — gdy nie wiesz, jak odpowiedzieć na pytanie, powiedz, że jest źle postawione.

Zdaniem Stevena Hawkinga z Uniwersytetu w Cambridge (W. Brytania) zwolennicy takiego poglądu na problem warunków początkowych podobni są do tych, którzy w minionych stuleciach zwalczali badania naukowe twierdząc, iż wszystkie zjawiska zachodzące w przyrodzie są dziełem Boga i jako takie są niemożliwe do ogarnięcia naszym marnym rozumem. Na szczęście większość kosmologów, podobnie jak Hawking, uważa, że „... początkowy stan Wszechświata jest tak samo odpowiednim obiektem dla badań naukowych, jak lokalne prawa fizyczne i nie będziemy mieli kompletnej teorii dopóty, dopóki nie potrafimy wyjść poza tłumaczenie w rodzaju: rzeczy są takie, jakie są, ponieważ były takie, jakie były”.

Pierwsza poważna próba pokonania problemu warunków początkowych podjęta została przez Charlesa Misnera z Uniwersytetu w Maryland (Stany



Zasada przyczynowości mówi, iż żadna informacja ani oddziaływanie nie może być przekazane z jednego punktu w przestrzeni do drugiego z prędkością przewyższającą prędkość światła.



**Rozwiązanie zadania M 332**

Niech  $n = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_m^{l_m}$  będzie rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze. Ponieważ zawsze  $p_1 \cdot \dots \cdot p_k \mid n$ , więc oznaczając przez  $A_j$  zbiór  $\{p_j, 2p_j, \dots, n\}$  mamy  $|A_1 \cap \dots \cap A_k| =$

$$= \frac{n}{p_1 \cdot \dots \cdot p_k}$$

Wynika stąd, że liczb podzielnych przez jedną z liczb  $p_1, \dots, p_m$  jest  $|A_1 \cup \dots \cup A_m| =$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \frac{n}{p_{j_1} \cdot \dots \cdot p_{j_k}}$$

(patrz zadanie M 331). Wystarczy teraz zauważyć, że

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \frac{1}{p_{j_1} \cdot \dots \cdot p_{j_k}}, \text{ by uzyskać poszukiwany wzór.}$$



Ze jest to odwracanie kota ogonem, każdy widzi.



#### Rozwiązanie zadania M 333

Niech  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$  będzie rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze. Każdy dzielnik liczby  $n$  pojawi się dokładnie raz jako składnik sumy otrzymanej przez wykonanie mnożenia

$$s = (1 + p_1 + \dots + p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_m + \dots + p_m^{k_m})$$

i wobec tego

$$\sigma(n) = s = p_1^{l_1} \left( 1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{l_1}} \right) \cdot \dots \cdot p_m^{l_m} \left( 1 + \dots + \frac{1}{p_m^{l_m}} \right).$$

Czyli

$$\sigma(n) = n \cdot \frac{\left( 1 - \frac{1}{p_1^{l_1+1}} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{1}{p_m^{l_m+1}} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{1}{p_m} \right)}.$$

Ponieważ  $\varphi(n) = n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{1}{p_m} \right)$ , więc mamy stąd nierówność  $\varphi(n) \sigma(n) < n^2$ .

Równocześnie, gdy  $2^k > \frac{1}{e}$ , to  $\varphi(2^k) \cdot \sigma(2^k) > 2^{2k}(1 - e)$ , co kończy dowód drugiej części zadania.

Zjednoczone) przed kilkunastu laty. Zauważył on, iż kłopoty z modelem Friedmana mogą wynikać z nieuzasadnionego ekstrapolowania tego modelu wstecz oraz z przekonania, iż znając obecny stan Wszechświata można ze wszystkimi szczegółami odtworzyć jego stan początkowy. W rzeczywistości nie zawsze jest to możliwe. Wie o tym doskonale każdy, kto w dzieciństwie budował zamki z piasku na brzegu morza. Wygląd brzegu po kilku godzinach jest taki sam niezależnie od tego, jaki był „stan początkowy” układu (tj. od tego, ile zamek miał wież, jak głęboka była fosa itd.). Pięknym przykładem ścierania pamięci w układzie są gwiazdy: ich struktura wewnętrzna jest niezależna od wielu szczegółów związanych z warunkami, w jakich powstają.

Misner doszedł do wniosku, iż niezależnie od tego, czy wczesny Wszechświat był izotropowy i jednorodny czy też nie, wskutek (jakichś) procesów nieodwracalnych (takich jak lepkość neutrinowa czy silne mieszanie) rozkład materii zostałby „wygładzony” — zapanowałyby obserwowana pełna izotropia i jednorodność. Zadanie fizyków polegałoby zatem na odszukaniu takich procesów. Niestety, programu Misnera nie udało się zrealizować, co spowodowało wzrost zainteresowania pomysłem, znanym jako

### Zasada Antropiczna

Około 20 lat temu Robert Dicke z Uniwersytetu w Princeton (New Jersey, Stany Zjednoczone) zastanawiając się nad pytaniem: „Dlaczego Wszechświat jest taki stary?” doszedł do dość nieoczekiwanego wniosku, że jest tak dlatego, ponieważ ... my istniejemy! Rzeczywiście: pierwiastki ciężkie produkowane są w wnętrzach gwiazd, które po upływie czasu rzędu kilku miliardów lat (a więc porównywalnego z  $1/H_0$ ) eksplodują jako supernowe, rozsiewając wkoło tlen, azot i węgiel. Zatem, gdyby wiek Wszechświata był znacznie mniejszy od obserwowanej wartości  $1/H_0$  — nie byłoby pierwiastków ciężkich, bez których powstanie życia byłoby niemożliwe. Gdyby natomiast Wszechświat był znacznie starszy od  $1/H_0$ , cała materia zostałaby zamieniona w beużyteczny żużel i trudno byłoby wykrzesać życie z kosmicznego śmietnika, zawierającego jedynie gwiazdy neutronowe, białe karły i czarne dziury.

Dicke zauważył również, że w podobny sposób można „wytłumaczyć” początkową wartość  $\Omega$  oraz izotropię i jednorodność Wszechświata. Okazuje się przy tym, że gdyby w chwili  $t = 1s$  było  $1 - \Omega \geq 10^{-6}$ , czyli inaczej mówiąc, gdyby energia kinetyczna była zaledwie o jedną milionową większa od potencjalnej, to w epoce odpowiadającej  $T = 4000 K$  energia kinetyczna ekspansji zdominowałaby energię potencjalną tak dalece, iż uniemożliwiłoby to powstanie galaktyk, ponieważ całkowita energia obłoków będących „zarodkami” galaktyk byłaby dodatnia. W takim modelu również gwiazdy nigdy nie mogłyby powstać i nie zostałyby wytworzone pierwiastki ciężkie, bez których nie jesteśmy w stanie wyobrazić sobie życia.

Gdyby natomiast w chwili  $t = 1s$  parametr  $\Omega$  był większy od 1 zaledwie o jedną milionową, to Wszechświat zacząłby się kurczyć już po upływie 100 tysięcy lat od wielkiego wybuchu. Ekspansja zostałaby zatrzymana przy temperaturze rzędu  $10^4 K$ , po czym rozpoczęłyby się etap kurczenia i ponownego wzrostu temperatury. W takim Wszechświecie byłoby nam zdecydowanie za gorąco, a poza tym również nie mogłyby w nim powstać gwiazdy i pierwiastki ciężkie.

Wszechświat silnie niejednorodny i anizotropowy byłby również nieprzyjazny życiu: w okolicy roiłoby się od czarnych dziur o wielkich masach, fal uderzeniowych i strumieni twardego promieniowania gamma.

Problem wyboru warunków początkowych zbliżony jest do problemu wyboru odpowiednich wartości dla stałych fizycznych. W obu przypadkach znane obecnie prawa fizyki nie dostarczają kryteriów wyboru. Nie wiadomo na przykład, dlaczego stała struktury subtelnej  $\alpha = e^2/\hbar c$  (gdzie  $e$  oznacza ładunek elektronu, a  $\hbar$  — stałą Plancka) określająca siłę oddziaływań elektromagnetycznych, jest rzędu  $10^{-2}$ . Oddziaływania grawitacyjne opisać można przy pomocy analogicznej „stałej sprzężenia”  $\alpha_G = G m_p^2/\hbar c$  (gdzie  $m_p$  oznacza masę



protonu, a  $G$  — stałą grawitacyjną) równej  $10^{-38}$ . Oddziaływania grawitacyjne są znacznie słabsze od elektromagnetycznych: stosunek siły grawitacji do siły kulombowskiej działającej pomiędzy dwoma protonami wynosi  $\alpha_G/\alpha = 10^{-36}$ . Czy można na „wyjaśnić” posługując się Zasadą Antropiczną? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Wykazał to na początku lat siedemdziesiątych Brandon Carter z Uniwersytetu w Cambridge (W. Brytania). Otóż nasze Słońce zajmuje na diagramie H-R położenie pomiędzy błękitnymi olbrzymami (które żyją krócej) a czerwonymi karłami (żyjącymi dłużej). Jedyne gwiazdy typu Słońca spełniają jednocześnie dwa warunki, które wydają nam się niezbędne do tego, aby w ich otoczeniu mogło rozwinąć się życie: posiadają tempo ewolucji bardziej powolne od tempa ewolucji biologicznej (przynajmniej nam znanej) i świecą dostatecznie jasno, aby planeta znajdująca się na stabilnej (a więc dostatecznie odległej) orbicie mogła być ogrzana na tyle, aby umożliwić spontaniczne tworzenie się cząsteczek organicznych.

Carter zauważył, że gdyby wartość  $\alpha$  była o 1% większa od wartości obserwowanej, wszystkie gwiazdy byłyby czerwonymi karłami, gdyby natomiast była o tyle mniejsza — Wszechświat wypełniony byłby jedynie błękitnymi olbrzymami. Podobny efekt wystąpiłby, gdyby wartość  $\alpha$  była równa obserwowanej, natomiast  $\alpha_G$  byłaby odpowiednio mniejsza o rząd wielkości od wartości obserwowanej (czerwone karły) lub większa (błękitne olbrzymy).

Szczęśliwych koincydencji, takich jak obserwowany stosunek  $\alpha/\alpha_G$ , jest więcej. Na przykład, gdyby stała sprzężenia dla oddziaływań jądrowych była nieco słabsza od obserwowanej, okazałaby się niewystarczająca do tego, aby związać protony i neutrony. Istnienie pierwiastków cięższych od wodoru byłoby wówczas niemożliwe. Stabilne pierwiastki ciężkie nie istniałyby również, gdyby różnica mas neutronu i protonu nie była w przybliżeniu równa podwojonej masie elektronu. Tak precyzyjne dostrojenie warunków początkowych oraz stałych fizycznych, umożliwiające powstanie życia stwarzają poczucie celowego działania. Z wrażeniem tym Carter poradził sobie tak, jak Darwin poradził sobie z Lamarckiem. Wprowadził on pojęcie „zespołu statystycznego” wszechświatów, które Dicke i Peebles interpretują następująco:

„Proszę sobie wyobrazić zabawę w rosyjską ruletkę, w której bierze udział bardzo duża liczba osób używających losowo rozdanych nabitych i nie nabitych rewolwerów. Pod koniec tej morderczej zabawy znakomity probabilista po dokonaniu wyczerpującej analizy statystycznej dojdzie do wniosku, że prawdopodobieństwo przypadkowego wyciągnięcia nie nabitych rewolwerów przez pozostałych przy życiu graczy jest bardzo wysokie. A teraz proszę sobie wyobrazić zespół wszechświatów wszystkich rodzajów. Nie powinno nas dziwić, że nasz Wszechświat nie jest „typowy”, ponieważ uśrednione po zespole cechy takiego wszechświata z powodzeniem mogą okazać się wrogie życiu. Możemy być obecni jedynie w takim wszechświecie, który czyni zadość naszym potrzebom”.

Inaczej mówiąc, gdyby warunki początkowe i stałe fizyczne nie były dobrane w sposób właściwy, to nie miałby kto zadać pytania: „dlaczego Wszechświat jest taki, jakim go widzimy?”.

Wygląda na to, że posługując się Z. A. (Zasadą Antropiczną) można udzielić odpowiedzi na wszystkie kłopotliwe pytania. Czy rzeczywiście? Wróćmy do rozumowania Dicke’go, przedstawionego na początku tego rozdziału. Z rozumowania tego wynika, że wiek Wszechświata nie może być dowolny. Zmniejszanie stopnia dowolności w wyjaśnianiu zjawisk przyrody zawsze było celem nauki, i w tym sensie w takim rozumowaniu nie ma nic niezwykłego; tym co odróżnia jego sposób myślenia od konwencjonalnego jest struktura logiczna jego argumentów.

Dicke nie wyprowadza swoich wniosków z żadnej fundamentalnej teorii ani nie przewiduje wyników przyszłych doświadczeń, lecz przeciwnie, „odwraca kota ogonem”, używając naszej wiedzy o obecnym stanie Wszechświata (istnienie życia) jako wyjaśnienia faktów związanych z jego przeszłością (wartość  $H_0$ ). Jest to zatem rodzaj przewidywania przeszłości, opartego na przyszłości tej przeszłości. Wygląda to bardziej na błędne koło, niż na wyjaśnienie czegokolwiek.



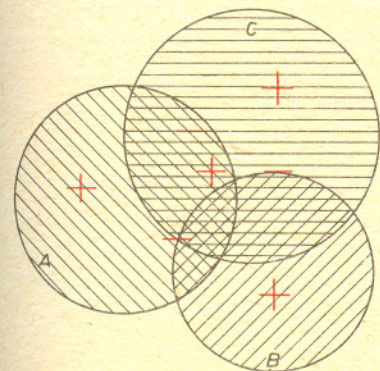
Rozwiązanie zadania M 331  
Zachodzi następujący wzór

$$(*) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{k+1} |A_{j_1} \cap \dots \\ \dots \cap A_{j_k}|,$$

gdzie drugie sumowanie jest po wszystkich takich układach wskaźników  $j_1, \dots, j_k$ , że  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ , przy czym przecięcia nieparzystej liczby podzbiorów bierzemy ze znakiem plus, a parzystej ze znakiem minus. Dla  $n = 3$  wzór (\*) wygląda tak

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

p. rysunek. Łatwy (indukcyjny) dowód wzoru (\*) opuścimy.



Zamiast powiedzieć „rzeczy są takie, jakie są, ponieważ były takie, jakie były” mówimy, że rzeczy są takie, jakie są”. Czy zatem nie są to po prostu, jak mawiał Kubuś Puchatek, ...

### Wielkie myśli o niczym?

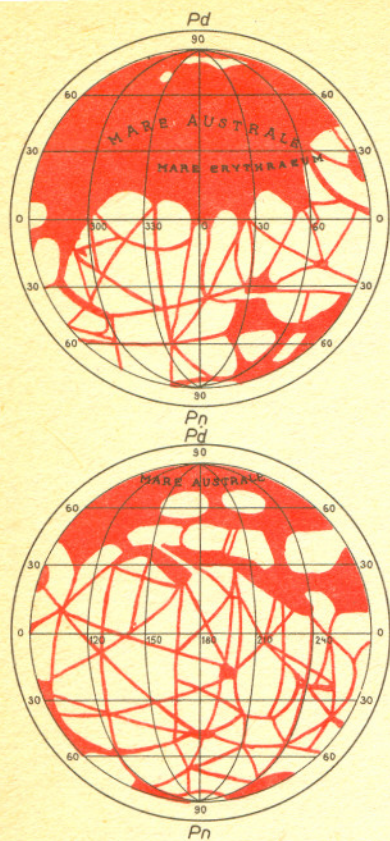
Liczba zarzutów, które można skierować pod adresem Z. A. jest doprawdy imponująca. Po pierwsze, są to zarzuty, o których była mowa przed chwilą (metodologiczne). Po drugie, lwia część argumentów, którymi posługują się zwolennicy Z. A. oparta jest na wątpliwym założeniu, iż znamy ogólne warunki, niezbędne do powstania życia, podczas gdy w rzeczywistości cała nasza (bardzo skromna!) wiedza na ten temat dotyczy jedynie możliwości powstania życia tu, na Ziemi. Wreszcie, po trzecie, Z. A. (a zwłaszcza jej najbardziej radykalne wersje) oparta jest na założeniu, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy istnieniem świadomych obserwatorów a warunkami początkowymi oraz stałymi fizycznymi. O tym, że tak nie jest, można się przekonać wymyślając wszechświaty, które powinny wyprodukować takich samych obserwatorów, mimo iż różnią się od siebie pod względem warunków początkowych lub stałych fizycznych. Jeden z takich modeli został zaproponowany przez Peeblesa i Dicke'go, którzy doszli do wniosku, że jak na wymagania Z. A. „... Wszechświat jest przesadnie rozbudowany; właściwie pojedyncza galaktyka zanurzona w asymptotycznie płaskiej przestrzeni powinna wystarczyć”.

Mimo tych wszystkich zarzutów trudno jest uznać rozważania oparte na Z. A. za całkowicie jałowe. Nawet gdyby cała „ideologia” dorabiana do tej zasady okazała się w końcu fałszywa, pozostaną zagadkowe koincydencje, na które jej zwolennicy zwrócili uwagę i które tak czy owak wymagają uzasadnienia. Dalsze losy Z. A. będą zależały od tego, czy i w jakim stopniu koincydencje te uda się wytłumaczyć wychodząc od „pierwszych zasad” jakiejś (nieznanej obecnie) fundamentalnej teorii. Jeżeli program taki się powiedzie, to udziałem Z. A. będzie to samo, co stało się udziałem koncepcji vis vitalis, eteru, flogistonu, cieplika itd ...

Istnieją już pierwsze oznaki przemawiające za tym, iż tak właśnie się stanie. Mam tu na myśli między innymi prace Jakuba B. Zeldowicza z Uniwersytetu Moskiewskiego (ZSRR), poświęcone badaniu procesów kreacji cząstek, zachodzących w silnie anizotropowym Wszechświecie w tzw. erze Plancka,  $t_{ep} \geq 10^{-43}$  s. Według Zeldowicza energia zgromadzona w anizotropowym polu grawitacyjnym jest tak wydajnie przekazywana produkowanym cząstkom, iż anizotropia zanika już po upływie czasu tego samego rzędu wielkości, co  $t_{ep}$ .

Przed rokiem pojawiła się również niezwykle interesująca praca Alana Gutha (Uniwersytet w Stanford, Stany Zjednoczone). Zauważył on, że odstępstwo od adiabatycznej ekspansji w epoce  $t \geq 10^{-35}$ s, spowodowane przez przemianę fazową (której fizycy spodziewają się na podstawie teorii Wielkiej Unifikacji) doprowadzi do „rozęcia” horyzontu (w czasie przejścia fazowego odległość do horyzontu będzie rosła wykładniczo,  $r_H \sim \exp(t/10^{-35})$ , a nie potęgowo, jak w modelu standardowym). Efekt ten pozwala rozwiązać problem horyzontu, choć nie podaje konkretnego mechanizmu izotropizującego. Najciekawszą konsekwencją przemiany fazowej zachodzącej w epoce Wielkiej Unifikacji jest „wypłaszczenie” Wszechświata — po przejściu  $\Omega = 1$  z konieczną dokładnością przy „dowolnych” (tj.  $|\Omega - 1|$  rzędu 1) odstępstwach od jedności przed przejściem. W ten sposób problem horyzontu i problem „płaskości” Wszechświata zostałyby rozwiązane „za jednym zamachem”!

Aby wszystko, co zostało tutaj powiedziane o konsekwencjach istnienia życia na Ziemi nie zostało potraktowane poważniej, niż na to zasługuje, pozwolę sobie zakończyć ten artykuł żartem wymyślonym przez pewnego złośliwca (mógł to być G. B. Shaw, ale głowy nie daję), który zastanawiając się nad pytaniem: „czy fakt, że włoskiemu astronomowi Schiaparelliemu udało się zaobserwować kanały na Marsie dowodzi istnienia życia na tej planecie?” doszedł do wniosku, że chyba nie. Tym natomiast, czego odkrycie kanałów dowodzi jego zdaniem z całą pewnością jest ... istnienie włoskiego astronoma Schiaparelliego.



Rys. 2. „Kanały” na Marsie



Teoria Wielkiej Unifikacji przewiduje, że w dostatecznie wysokiej temperaturze ( $kT > 10^{15}$  GeV, gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna) oddziaływania słabe, elektromagnetyczne i silne mają jednakową stałą sprzężenia, tj. ulegają „ujednoczeniu”. Temperatury takie panowały przy  $t < 10^{-35}$ s.



### Rozwiązanie zadania F 136

Rozważmy zachowanie klocka po uzyskaniu swobody ruchu. Nadajmy osi współrzędnych zwrot od punktu zamocowania sprężyny do klocka i obierzmy początek układu w położeniu początkowym klocka. Gdy współrzędna początkowa  $x_p$  jest mała

$$k|x_p| \leq fmg,$$

siłę sprężystości równoważy tarcie statyczne i nie wystąpi ruch. Gdy  $k|x_p| > fmg$ , wystąpi ruch, którego równanie ma postać:

$$ma_x = -kx + \begin{cases} -fmg & \text{gdy } v_x > 0 \\ +fmg & \text{gdy } v_x < 0. \end{cases}$$

Nasz klocek zachowuje się więc jak oscylator harmoniczny z przesuniętym (i zmieniającym się przy zawracaniu) położeniem równowagi  $x_0$  i częstością  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

$$x_0 = \begin{cases} x_{0+} = -fmg/k & \text{gdy } v_x > 0 \\ x_{0-} = +fmg/k & \text{gdy } v_x < 0. \end{cases}$$

Równanie ruchu klocka można zapisać jako

$$ma_x = -k(x - x_0) \quad \text{lub} \\ a_x = -\omega^2(x - x_0),$$

którego rozwiązaniem jest zależność współrzędnej od czasu

$$(1) \quad x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \varphi),$$

a dokładniej

$$x(t) = \begin{cases} -fmg/k + A_+ \sin(\omega t + \varphi) & \text{gdy } v_x > 0 \\ +fmg/k + A_- \sin(\omega t + \varphi) & \text{gdy } v_x < 0. \end{cases}$$

$A_+$  i  $A_-$  zmieniają się w trakcie kolejnych zawróceń klocka. Rys. 1 przedstawia przykładowy wykres  $x(t)$  dla dodatniego wychylenia i zerowej prędkości początkowej. Widzimy, iż jest on „zsztyty” z połówek sinusoid o tym samym okresie i malejących amplitudach. Są to w swoisty sposób gasnące drgania, a tłumienie przejawia się w kolejnych zmianach położenia równowagi, mimo że utrata energii następuje w sposób ciągły! Ostatecznie klocek zatrzymuje się gdzieś w przedziale  $[x_{0+}, x_{0-}]$ , a punkt końcowy zależy od warunków początkowych. Do analizy tego ruchu świetnie nadaje się wykres  $v_x = f(x)$  (tzw. wykres fazowy).

Z (1) otrzymujemy prędkość klocka:

$$(2) \quad v_x = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Eliminując z (1) i (2) czynnik trygonometryczny otrzymujemy się:

$$\left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 + (x - x_0)^2 = A^2.$$

Rysunkowi 1 odpowiada wykres fazowy przedstawiony na rys. 2. Tworzą go półokręgi ze środkami ułożonymi na przemian w punktach  $(x_{0-}, 0)$  i  $(x_{0+}, 0)$ , o promieniach  $A_-$ ,  $A_+$ . Ruchowi klocka odpowiada tor punktu na płaszczyźnie fazowej (tzw. trajektoria fazowa).

Rozwiązanie zadania otrzymujemy natychmiast wykreślając trajektorię fazową „od tyłu” (tj. od punktu zatrzymania się klocka:  $(0, 0)$ ).

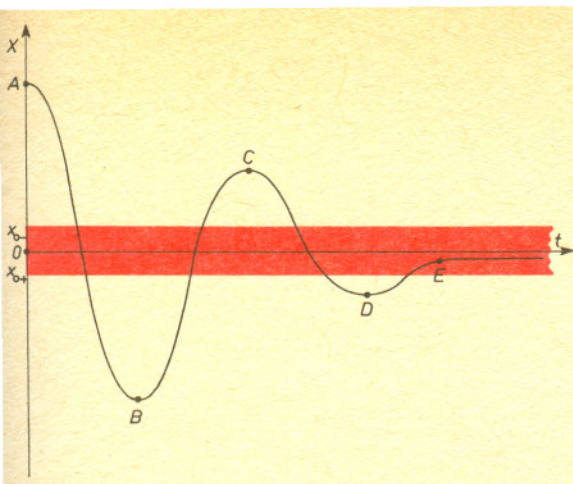
Gdy klocek dociera do punktu  $x = 0$  od strony współrzędnych ujemnych, jego kolejnymi punktami zawracania są:

$$x_1 = -2|x_0| \\ x_2 = 4|x_0| \\ x_3 = -6|x_0|, \text{ itd.}$$

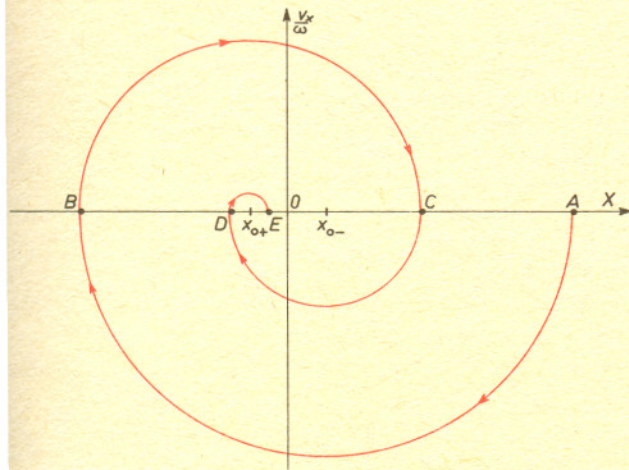
$$\text{Ogólnie: } x_p = (-1)^n 2n \frac{fmg}{k}, \quad n \in N.$$

Puszczenie klocka w takich położeniach gwarantuje powrót do położenia początkowego, z nie napiętą sprężyną.

Jako ćwiczenie pozostawiamy uzyskanie rozwiązania w drugim przypadku. Warto również przećwiczyć kreślenie wykresów fazowych zadając inne, niż na rys. 1 i 2 warunki początkowe. A jak zmienia się kształt trajektorii fazowej, gdy oporu ośrodka nie można zaniedbać?



Rys. 1



Rys. 2



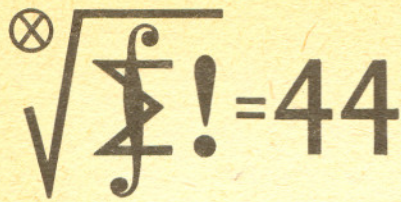
Gdak, gdak ...

Pierwsze cztery paragrafy (z sześciu ogółem) 26-stronicowej pracy Keenana Lie „Kosymplicjalny kowymiar koalgebr (Nagoya Math. Journal, 47, 1972) mają tytuły: 1. Koalgebry i komoduły, 2. Abelowe obiekty kogrupowe w  $(A, C)$ , 3. Kosymplicjalne kohomologie, 4. Kosymplicjalne koalgebry.

Nie brzmi to może tak ładnie jak tytuł pracy Wacława Sierpińskiego: „O pewnym dowodzie pewnego twierdzenia i pewnym zagadnieniu dotyczącym się pewnych przypadków błędnego stosowania pewnych zasad do rozkładu pewnych liczb całkowitych na pewne sumy potrójne”. Jednakże ten drugi tytuł jest tytułem fikcyjnej pracy Sierpińskiego, wspomnianej w prymaaprilisowym „Przewodniku bibliograficznym”, nr 13 z 1925 r. Praca Keenana Lie jest zaś autentyczna!

Kącik Czytelniczy





Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Uwaga. Zgodnie z zapowiedzią (patrz Regulamin, „Delta” 9/1981), w numerach 6 i 7 zadania ligowe nie ukazują się (przerwa wakacyjna). W numerze 6 zamieszczone będą rozwiązania zadań z numerów 2 i 3 (tj. zadań 47–51), a w numerze 7 w ogóle nie będzie rubryki „Klub 44”. Następnego zadania ligowe ukaza się w numerze 8.

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr.  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

**Klub 44**

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 10/1982

Jacek Uryga	- Bytom	48,82pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	40,29pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	39,06pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	36,52pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	29,55pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	28,92pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	22,09pkt
Współczynniki trudności zadań 34, 35, 36:		
2,57	2,87	1,33

Witamy w Klubie 44 pana Jacka Urygę z Bytomią, który z nadwyżką 4,82 przekroczył barierę 44 punktów w siódmej kolejce swoich startów. Gratulujemy!

**Zadania nr 55, 56, 57**

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1983

55. Dane są liczby dodatnie  $a, b, c$ . Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie  $a^x + b^x = c^x$ ?

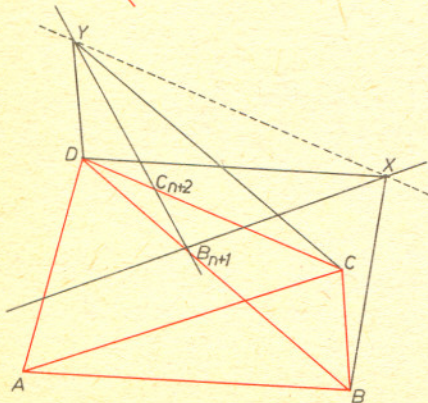
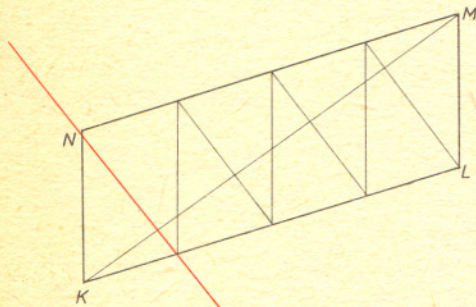
56. Wykazać prawdziwość lub nieprawdziwość następujących stwierdzeń:

- a) Jeżeli zbiór wierzchołków wielokąta ma oś symetrii, to wielokąt ma oś symetrii.
  - b) Jeżeli zbiór wierzchołków wielokąta ma środek symetrii, to wielokąt ma środek symetrii.
- Gdy któreś z nich okaże się fałszywe, zaproponować takie wzmocnienie założeń, by uzyskać twierdzenie prawdziwe.

57. Dla danej liczby naturalnej obliczamy iloczyn jej cyfr, to samo robimy z otrzymaną liczbą i kontynuujemy to postępowanie tak długo, aż dojdziemy do liczby jednocyfrowej. Wyznaczyć wszystkie liczby, dla których w wyniku opisanej procedury dostajemy cyfrę 1.

Zadanie 56 przysłał nasz Czytelnik, pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

**Rozwiązania zadań z numeru 1/1983**

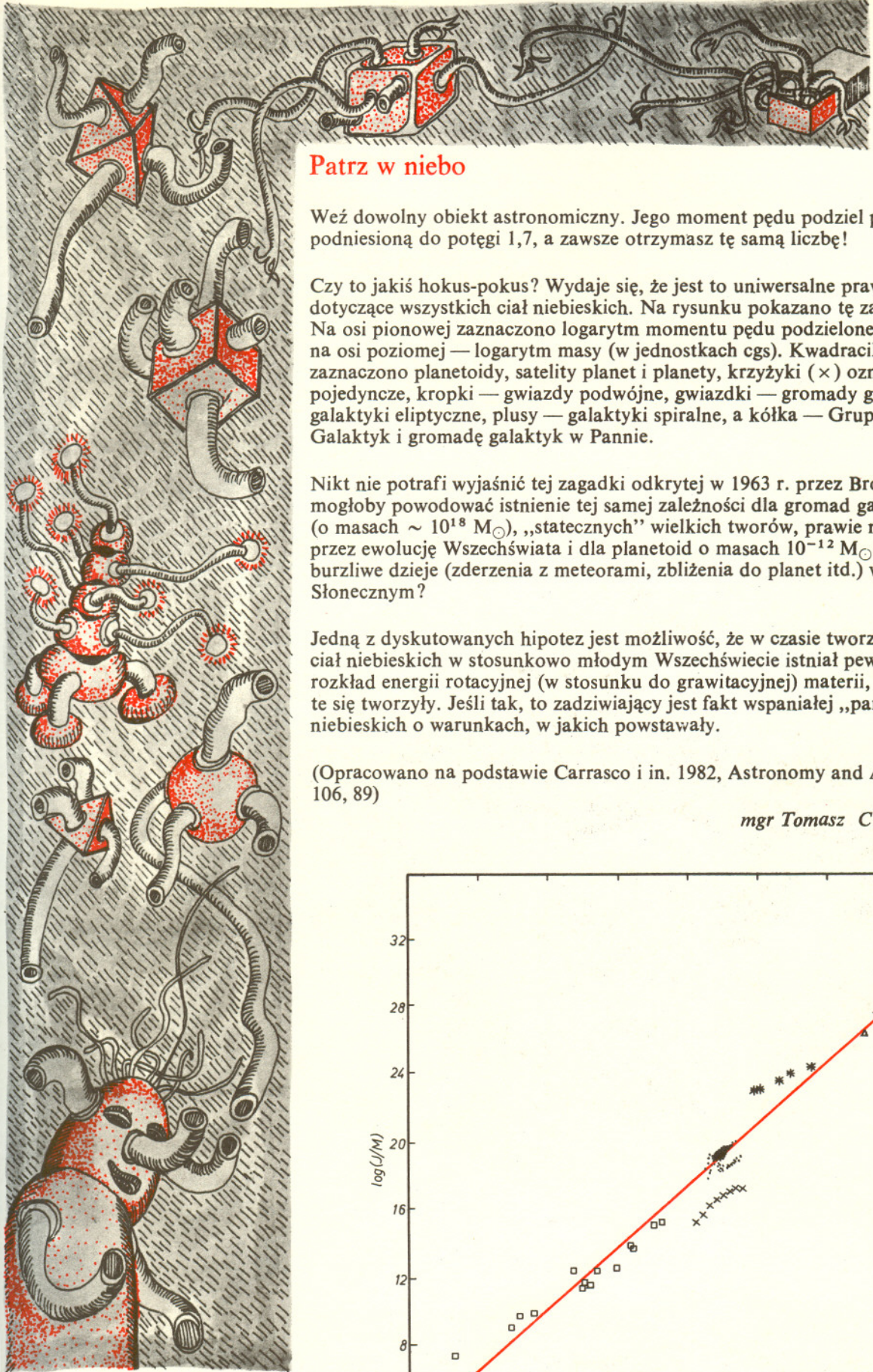


43. Lemat. Jeśli prosta przechodząca przez wierzchołek  $N$  równoległoboku  $KLMN$  dzieli bok  $KL$  w stosunku  $1:k$  ( $k$  naturalne), to ta sama prosta dzieli przekątną  $KM$  w stosunku  $1:(k+1)$ .

Dowód lematu łatwo odczytać z rysunku 1. Przystępujemy do właściwego rozwiązania. Uzupełniamy trójkąty  $DAB$  i  $DBC$  do równoległoboków  $DABX$  i  $DBCX$  (rys. 2). Ustalmy  $n$ . Na mocy lematu prosta  $XA_n$  przecina odcinek  $\overline{DB}$  w punkcie  $B_{n+1}$ , a prosta  $YB_{n+1}$  przecina odcinek  $\overline{DC}$  w punkcie  $C_{n+2}$ . Ze współliniowości trójek punktów  $A_n, B_{n+1}, X$  oraz  $B_{n+1}, C_{n+2}, Y$  wynika, że  $X \in P_n, Y \in P_n$ . Zatem prosta  $XY$  leży w płaszczyźnie  $P_n$  (dla dowolnego  $n$ ).

Rys. 1 44. Podnieśmy równanie  $\sqrt{y} = \sqrt{500} - \sqrt{x}$  stronami do kwadratu:  $y = 500 + x - \sqrt{2 \cdot 5^3 \cdot x}$ . Wyrażenie podpierwiastkowe musi być pełnym kwadratem, więc  $x = 5k^2$ , skąd  $y = 500 + 5k^2 - \sqrt{2 \cdot 5^3 \cdot k^2} = 5(10 - k)^2$ . Podstawiając za  $k$  wartości całkowite od 0 do 10 dostajemy wszystkie rozwiązania danego w zadaniu równania.

45. Z założeń wynika, że każdy z punktów  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) jest punktem stałym funkcji  $f(x) = \cos(\cos(\dots(\cos x)\dots))$  (złożenie  $n$ -krotne). Różniczkując tę funkcję otrzymujemy iloczyn  $n-1$  czynników postaci  $(-\sin(\cos(\dots)))$  i jeszcze czynnik  $(-\sin x)$ . Wszystkie czynniki, z wyjątkiem tego ostatniego, są co do modułu nie większe od  $\sin 1$ , więc  $|f'(x)| < 1$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  (jeśli tylko  $n \geq 2$ ). Punkty stałe funkcji  $f$  to miejsca zerowe funkcji  $h(x) = x - f(x)$ . Ale  $h'(x) = 1 - f'(x) > 0$ , więc funkcja  $h$  może mieć tylko jedno miejsce zerowe. Zatem  $x_1 = \dots = x_n$ .



## Patrz w niebo

Weź dowolny obiekt astronomiczny. Jego moment pędu podziel przez masę podniesioną do potęgi 1,7, a zawsze otrzymasz tę samą liczbę!

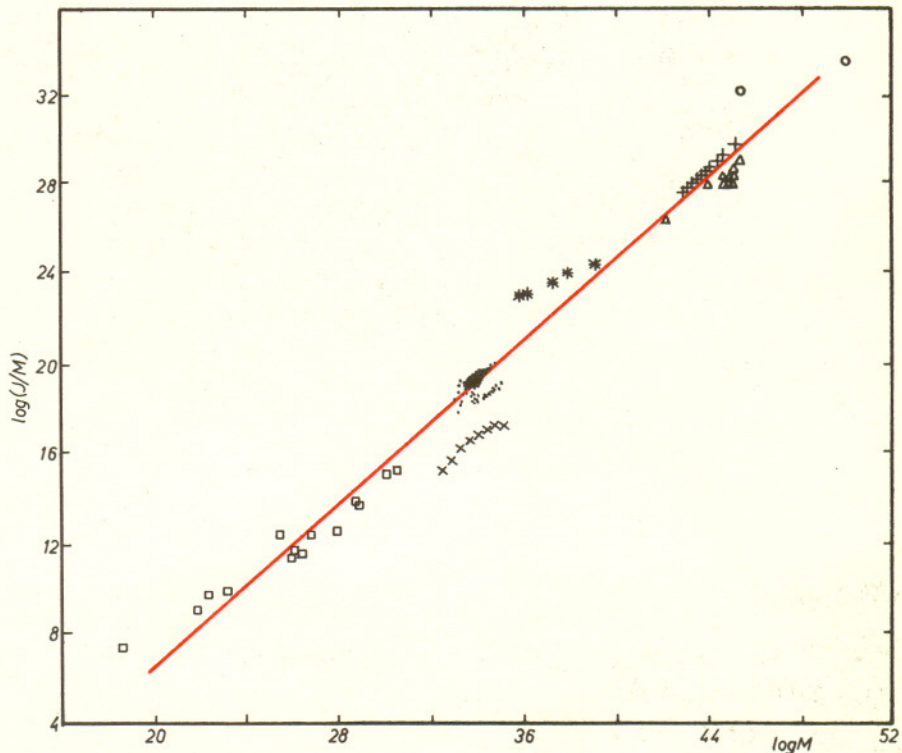
Czy to jakiś hokus-pokus? Wydaje się, że jest to uniwersalne prawo przyrody dotyczące wszystkich ciał niebieskich. Na rysunku pokazano tę zależność. Na osi pionowej zaznaczono logarytm momentu pędu podzielonego przez masę, na osi poziomej — logarytm masy (w jednostkach cgs). Kwadracikami zaznaczono planetoidy, satelity planet i planety, krzyżyki (×) oznaczają gwiazdy pojedyncze, kropki — gwiazdy podwójne, gwiazdki — gromady gwiazd, trójkąty — galaktyki eliptyczne, pluse — galaktyki spiralne, a kółka — Grupę Lokalną Galaktyk i gromadę galaktyk w Pannie.

Nikt nie potrafi wyjaśnić tej zagadki odkrytej w 1963 r. przez Broschego. Co mogłoby powodować istnienie tej samej zależności dla gromad galaktyk (o masach  $\sim 10^{18} M_{\odot}$ ), „statecznych” wielkich tworów, prawie nie tkniętych przez ewolucję Wszechświata i dla planetoid o masach  $10^{-12} M_{\odot}$  przeżywających burzliwe dzieje (zderzenia z meteorami, zbliżenia do planet itd.) w Układzie Słonecznym?

Jedną z dyskutowanych hipotez jest możliwość, że w czasie tworzenia się wszystkich ciał niebieskich w stosunkowo młodym Wszechświecie istniał pewien stały rozkład energii rotacyjnej (w stosunku do grawitacyjnej) materii, z której obiekty te się tworzyły. Jeśli tak, to zadziwiający jest fakt wspaniałej „pamięci” ciał niebieskich o warunkach, w jakich powstawały.

(Opracowano na podstawie Carrasco i in. 1982, *Astronomy and Astrophysics* 106, 89)

*mgr Tomasz CHLEBOWSKI*



Zależność między właściwym momentem pędu ( $J/M$ ) a masą różnych obiektów astronomicznych.