

## SPIS TREŚCI

NUMERU 1 (109)

Neutrino i dwie populacje galaktyk <i>dr Daniele Fargion</i>	str. 2
Jak gromadzić zapasy <i>dr Maria Jankiewicz</i>	str. 4
Konkurs prac uczniowskich z matematyki	str. 6
Wywiad z prof. dr Andrzejem Białynickim-Birulą	str. 7
Lokalna supergromada <i>mgr Krzysztof Górski</i>	str. 9
Rzuć monetę, rzuć monetę ... <i>dr Edward Stachowski</i>	str. 11
Patrz w niebo	str. 12
Zadania	str. 12
Nieliniowe fale stacjonarne <i>dr Stefan Wojciechowski</i>	str. 13
Już umiemy	str. 16
Klub 44	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Historia teorii kwantów**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmokl  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Paczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
prof. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semański  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
doc. dr Kazimierz Stępień

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
Termin przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

— do dnia 25 listopada na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1983,  
— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku 1983.

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

- instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
- instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych:

- osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
- osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—


nr indeksu 35723/35550

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wolska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Michał Szurek  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 3018/82 Z-86



Dla rozwoju przemysłu konieczne są inwestycje  
Dla rozwoju rolnictwa konieczne są inwestycje  
W ogóle dla rozwoju konieczne są inwestycje

Jednak nie każda inwestycja  
wymaga pieniędzy  
Nie każda jest ograniczona przez możliwości  
surowcowe, materiałowe, energetyczne

Nasz naród ma wyjątkowo mocne tradycje  
w takim właśnie niematerialnym inwestowaniu  
Tak inwestowaliśmy wtedy, gdy  
w sformułowaniu  
„jeszcze nie zginęła”  
bardziej akcentowaliśmy „jeszcze”  
i wtedy, gdy „jeszcze” było tylko historycznym dodatkiem

Inwestowaliśmy w nasze umysły  
bo wiedzieliśmy, że  
póki myślimy, póty jesteśmy  
I bynajmniej nie szablą  
odbieraliśmy to, co próbowano nam wziąć  
z naszego myślenia, z naszej wyobraźni

Rozpoczynając kolejny rok  
dla naszego zespołu dziesiąty  
wspólnego inwestowania w myślenie  
chcemy by nam  
i Wam, Czytelnicy  
towarzyszyło przekonanie  
o ważności i skuteczności  
takiego działania

# Neutrino i dwie populacje galaktyk

Dr Daniele FARGION (Włochy)

Artykuł napisany specjalnie dla *Delty*

Można podać wiele przykładów związków między mikrofizyką zajmującą się oddziaływaniami cząstek elementarnych a astrofizyką opisującą obiekty o największych we Wszechświecie rozmiarach. Jest prawie oczywiste, że takie związki powinny istnieć — przecież cały mikroświat został „wymyślony” tylko po to, by wyjaśnić bogactwo struktur makroświata. W szczególności każdej stabilnej cząstce elementarnej odpowiada pewien element struktury Wszechświata: Słońce i typowe gwiazdy mają masy i rozmiary określone przez parametry fizyczne protonu. Z kolei białe karły, które są obiektami znacznie bardziej zwartymi, mają rozmiary związane z własnościami elektronu, a gwiazdy neutronowe — z własnościami neutronu.

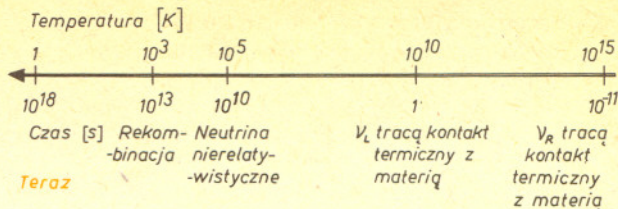
Więcej szczegółów nt. zależności własności obiektów astrofizycznych od cech ich elementarnych składników znajdzie Czytelnik w artykule Tomasza Kwasta w *Delcie* 4/1982.

Najlżejszą cząstką materii jest neutrino elektronowe. Jest to także cząstka stabilna, ponieważ nie znaleziono cząstek lżejszych, na które mogłaby się rozpaść nie naruszając zasady zachowania energii. Czy istnieje wobec tego we Wszechświecie struktura odpowiadająca neutrinom?

Masa spoczynkowa neutrino jest znikoma. Zgodnie z jedynym eksperymentem, który miał na celu jej wyznaczenie, zawiera się w przedziale  $14 \text{ eV} \leq m_\nu \leq 46 \text{ eV}$ . Dopóki wynik ten nie zostanie potwierdzony przez dalsze eksperymenty, nie można oczywiście twierdzić, że neutrino z całą pewnością jest cząstką masywną. Mimo to astrofizycy już teraz przypisują masywnym neutrinom wielką rolę w rozwoju Wszechświata. Po pierwsze ze względu na ich dużą gęstość, obecnie około  $100 \text{ w cm}^3$ , już masa rzędu kilkudziesięciu eV wystarczy, by neutrino miały dominujący wpływ na dynamikę Wszechświata jako całości. Jeśli suma mas trzech rodzajów neutrino (elektronowego, mionowego i tauonowego) przekracza  $100 \text{ eV}$ , to Wszechświat jest zamknięty, co oznacza, że obecnie obserwowana ekspansja zostanie w przyszłości zahamowana i rozpocznie się zapadanie. To jednak nie wszystko. Poza określeniem globalnej metryki masywne neutrino odpowiedzialne są za lokalne jej zaburzenia, które, zgodnie z przyjętym obecnie modelem, dają początek gromadom galaktyk.

W modelu Wielkiego Wybuchu Wszechświat na wczesnym etapie swego rozwoju wypełniony był plazmą o wielkiej temperaturze i gęstości, w stanie równowagi termodynamicznej. Rodzaj i liczba składników tej plazmy określona jest przez ekstrapolację, zgodną z prawami fizyki, warunków panujących obecnie, do obszaru niezwykle wysokich temperatur i gęstości. W wyniku adiabatycznego rozszerzania temperatura Wszechświata malała, a kolejne cząstki elementarne przestawały być w równowadze termodynamicznej ze zrównoważoną resztą.

Przy temperaturze  $T_1 \approx 10^{10} \text{ K}$  „oswobodziły się” neutrino, jeszcze wcześniej promieniowanie grawitacyjne, a od epoki rekombinacji,  $T_r \approx 10^3 \text{ K}$ , także promieniowanie elektromagnetyczne ekspanduje niezależnie od materii.



Rys. 1 Termiczna historia Wszechświata

W obecnym Wszechświecie nic nie pozostało z dawnej równowagi termodynamicznej, poza reliktywnym promieniowaniem elektromagnetycznym, grawitacyjnym oraz reliktywnymi neutrinami. Warto przy tym zaznaczyć, że dwa ostatnie „relikty” nie zostały jeszcze zaobserwowane.

Obserwowana izotropowość elektromagnetycznego promieniowania reliktywnego (temperatura promieniowania niezależna od kierunku) prowadzi do wniosku, że rozkład materii był w epoce rekombinacji bardzo równomierny. Obecnie obserwowane skupiska materii — galaktyki i gromady galaktyk, powstały znacznie później. Okazuje się, że dopiero rozkład uśredniony po obszarach zawierających wiele gromad galaktyk jest izotropowy.

Epoka rekombinacji to okres w rozwoju Wszechświata, w którym temperatura spadła na tyle (do ok.  $3000 \text{ K}$ ), że możliwe było łączenie się protonów i elektronów w atomy wodoru.

W jaki sposób z tak jednorodnego stanu początkowego mogły powstać obecnie obserwowane struktury?

W gazie złożonym z cząstek oddziałujących siłami grawitacji (zaniedbajmy na razie ruch cieplny) stan o jednorodnej gęstości nie jest stanem równowagi. Wystarczy bowiem niewielkie zwiększenie gęstości w pewnym miejscu przestrzeni, by pozostałe cząstki zaczęły „spadać” na to zaburzenie. Procesowi grawitacyjnego zapadania przeciwdziała chaotyczny ruch cieplny cząstek. Przewaga jednego z tych dwóch efektów powoduje, że fluktuacje o charakterystycznych rozmiarach zbyt małych, mniejszych niż tzw. długość fali Jeansa,  $\lambda_J$ , zanikają, a te o rozmiarach większych narastają.

Oszacujmy  $\lambda_J$  przed i po erze rekombinacji. Czas zaniku fluktuacji o rozmiarach  $\lambda$  w gazie bez oddziaływania grawitacyjnego zależy od prędkości dźwięku  $v$  (dźwięk to zaburzenie adiabatyczne) w tym gazie i jest równy

$$\tau = \lambda/v.$$

Aby taka fluktuacja mogła przetrwać, w czasie  $\tau$  powinno rozpocząć się grawitacyjne zgęszczanie. Charakterystyczny czas zapadania (łatwy do oszacowania wymiarowego) wynosi

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi}{G(\rho_r + \rho_m)}},$$

gdzie  $G$  — stała grawitacyjna, a  $\rho_r$  ( $\rho_m$ ) — gęstość energii promieniowania (materii). Porównanie tych czasów daje długość fali Jeansa

$$\lambda_J = v \sqrt{\frac{\pi}{G(\rho_r + \rho_m)}}.$$

Przed erą rekombinacji, kiedy promieniowanie określało dynamikę Wszechświata, długość fali Jeansa była rzędu rozmiarów horyzontu zdarzeń. Wszystkie zaburzenia o mniejszych rozmiarach ulegały dysypacji. Po rekombinacji własności materialnego Wszechświata określała tylko materia i długość fali Jeansa spadła gwałtownie do rozmiarów rzędu rozmiarów gromad gwiazd. Wszystkie zaburzenia o  $\lambda > \lambda_J$  mogły dalej narastać, a mniejsze zanikały przez typowe procesy dysypatywne — przewodnictwo cieplne i lepkość.

Horyzont zdarzeń to odległość, spoza której od czasu Wielkiego Wybuchu nie zdążył dotrzeć do nas żaden sygnał. Odległość horyzontu jest w przybliżeniu równa ilorazowi prędkości światła przez stałą Hubble'a (dzisiaj ok.  $5000 \text{ Mpc}$ ).

Obecnie obserwowane struktury są więc efektem narastania zaburzeń, które pojawiły się w epoce rekombinacji. Taki model powstawania gromad galaktyk napotyka jednak poważną trudność. Wiemy, jakie powinny być początkowe zaburzenia, bo znamy tempo ich narastania i obserwowany obecnie kontrast gęstości. Nie wiemy jednak, jaki mechanizm mógłby być odpowiedzialny za ich powstanie. Fluktuacje statystyczne o amplitudzie  $1/\sqrt{N}$  ( $N$  — liczba cząstek) są o wiele za małe. Być może zaburzenia inicjujące proces powstawania gromad galaktyk są pozostałością dużych niejednorodności materii w pobliżu pierwotnej osobliwości.

Źródłem wspomnianych trudności jest ostre ograniczenie obserwacyjne dopuszczalnego kontrastu gęstości w epoce rekombinacji. Ograniczenie to dają obserwacje anizotropii promieniowania reliktoowego; dopuszczalny kontrast jego temperatury wynosi  $\Delta T/T \approx 10^{-4}$ . Dla zaburzeń adiabatycznych ten sam rząd wielkości powinien mieć kontrast gęstości, co, jak się okazuje, jest za mało, by dostać obserwowany stosunek gęstości materii w gromadach galaktyk do średniej gęstości widocznej materii we Wszechświecie —  $\Delta \rho/\rho \approx 10^3$ .

**Kontrast gęstości to stosunek amplitudy zmian gęstości do gęstości średniej**

Niezerowa masa neutrina pozwala usunąć tę trudność. Neutrino przestają być w równowadze termodynamicznej już przy  $T_1 \approx 10^{10}$  K. Dopóki jednak ich prędkości w ruchu cieplnym są bliskie prędkości światła (neutrino relatywistyczne), ich własności zbliżone są do własności promieniowania. Dlatego też charakterystyczna długość spełniająca podobną rolę jak długość fali Jeansa jest rzędu rozmiarów horyzontu. W chwili, gdy neutrino przestają być relatywistyczne, tj. dla temperatur niższych niż  $T_n \approx 10^5$  K, prędkość dźwięku maleje i staje się taka jak dla gazu doskonałego. Długość fali Jeansa zależy wtedy od masy neutrin i dla  $m_\nu = 30$  eV jest równa (po uwzględnieniu jej wzrostu wywołanego rozszerzaniem się Wszechświata)

$$\lambda_J = 30 \text{ Mpc},$$

czyli jest tego samego rzędu co odległości między gromadami galaktyk. Pierwotne niejednorodności w gazie neutrinowym nie mają oczywiście wpływu na zaburzenia temperatury promieniowania reliktoowego, bo nie oddziałuje on już termicznie z cząstkami (jest wśród nich także foton) pozostającymi jeszcze w równowadze termodynamicznej. Tak więc dla temperatur między  $10^5$  K i  $10^3$  K zaburzenia w rozkładzie gęstości neutrin będą narastały w skalach większych niż 30 Mpc. Dokładne rachunki dają tempo wzrostu kontrastu

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{1}{T},$$

czyli do temperatury  $10^3$  K ( $T_n$ ) pierwotne zaburzenia wzrosną mniej więcej 100 razy. Rozległe „wyspy neutrinowe” przyspieszają znacznie narastanie zaburzeń w rozkładzie materii po epoce rekombinacji. Przed rekombinacją było to niemożliwe, ze względu na „wygładzające” działanie promieniowania. Dane obserwacyjne potwierdzają ten obraz, ponieważ dynamika gromad galaktyk wyraźnie określona jest przez ich niewidoczną część. Powszechnie interpretuje się tę niewidoczną masę jako wielkie otoczki neutrinowe.

Jedną z możliwych konsekwencji niezerowej masy neutrina jest to, że relatywistyczne neutrino może pojawić się w dwóch stanach: prawoskrętnym ( $\nu_R$ ), gdy spin jest ustawiony w kierunku ruchu lub lewoskrętnym ( $\nu_L$ ), gdy spin ustawiony jest przeciwnie do kierunku ruchu. Neutrino lewoskrętne obserwowane jest w laboratoriach, natomiast prawoskrętne, jeśli istnieje, ze względu na niezwykle słabe oddziaływanie z materią umyka jak dotąd naszemu detektorom.

Słabe oddziaływanie neutrina prawoskrętnego jest także przyczyną jego dużo szybszego niż dla neutrin lewoskrętnych

zerwania równowagi termodynamicznej. Nastąpiło to już przy temperaturze  $T_2 \gg 10^{15}$  K. Przy tej temperaturze plazma zawierała o wiele więcej cząstek elementarnych niż przy  $T_1 \approx 10^{10}$  K. Były tam zarówno cząstki, jak i antycząstki w niemal równych ilościach. Zapewniała to równowaga procesów anihilacji i kreacji par cząstka-antycząstka. Ze spadkiem temperatury (i gęstości) gęstość energii promieniowania stawała się zbyt mała dla podtrzymania kreacji par i kolejne pary cząstka — antycząstka anihilowały podgrzewając plazmę. Pomiedzy temperaturami  $T_2$  i  $T_1$  plazma była wielokrotnie w ten sposób podgrzewana, podczas gdy temperatura i gęstość neutrin prawoskrętnych malały zgodnie z ekspansją.

Wyznamy stosunek temperatur neutrin prawo- i lewoskrętnych tuż po utracie równowagi termodynamicznej przez neutrino lewoskrętne. Możemy przyjąć, że proces adiabatycznego rozprężania jest quasistacjonarny, ponieważ dla plazmy w równowadze termodynamicznej czas relaksacji jest dużo krótszy niż charakterystyczny czas ekspansji. Interesujący nas stosunek temperatur wyznaczmy z prawa zachowania entropii, które obowiązuje dla takich procesów. Entropia na jednostkę objętości ( $s$ ) w temperaturze  $T$  jest proporcjonalna do  $g(T)T^3$ , gdzie  $g(T)$  jest efektywną liczbą cząstek w równowadze termicznej o temperaturze progowej poniżej  $T$ . Jeśli  $R$  jest typową odległością między cząstkami, to

$$g(T)T^3R^3 = \text{const.}$$

Temperatura progowa dla danego typu cząstek to temperatura, powyżej której gęstość promieniowania będącego w równowadze z materią jest wystarczająco duża, by zachodziła obfita kreacja par cząstka-antycząstka. Dla cząstki o masie  $m$  temperatura progowa

$$T = \frac{mc^2}{k},$$

gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna.

Porównując entropię w  $T_1$  i  $T_2$  otrzymujemy

$$(1) \quad (TR)_1^3 \left( N_{B1} + \frac{7}{8} N_{F1} \right) = (TR)_2^3 \left( N_{B2} + \frac{7}{8} N_{F2} \right),$$

gdzie  $N_{B1}$  ( $N_{F1}$ ) jest efektywną liczbą bozonów (fermionów) w temperaturze  $T_1$ , a  $N_{B2}$  ( $N_{F2}$ ) w temperaturze  $T_2$ .

Efektywna liczba cząstek jest równa

$$g(T) = N_B + \frac{7}{8} N_F,$$

gdzie  $N_F$  jest liczbą rodzajów fermionów, a  $N_B$  liczbą rodzajów bozonów. Czynniki  $\frac{7}{8}$  ma swoje źródło w różnicy własności statystycznych fermionów i bozonów.

Temperatura  $T_2$  odpowiada energii  $kT_2 \approx 80$  GeV i w równowadze termodynamicznej są następujące bozony: 8 gluonów (nośniki oddziaływań silnych), 3 bozony W (przenoszą oddziaływania słabe) i jeden foton, co daje  $N_{B2} = 12$ . Wkład do  $N_{F2}$  dają neutrino i antyneutrino lewoskrętne (3), trzy naładowane leptony (elektron, mion i lepton tau) i ich antycząstki oraz 36 kwarków i antykwarków. W sumie otrzymujemy  $N_{F2} = 45$ .

Dla  $T \sim T_1$  ( $kT_1 \sim 1$  MeV) pozostaje tylko foton, a więc  $N_{B1} = 1$ , oraz elektrony, pozytony i neutrino —  $N_{F1} = 5$ . Wynika stąd, że ciepło wytworzone podczas kolejnych anihilacji zwiększyło wartość iloczynu  $TR$

$$\frac{(TR)_1}{(TR)_2} = 2,4 \text{ razy.}$$

Ponieważ od temperatury  $T_2$  temperatura neutrin prawoskrętnych spada jak  $1/R$ , więc poszukiwany stosunek temperatur

$$(2) \quad \frac{T_L}{T_R} = 2,4,$$

natomiast stosunek ich gęstości

$$\frac{n_L}{n_R} = \left(\frac{T_L}{T_R}\right)^3 = 14.$$

Wynika stąd, że obecnie Wszechświat jest zdominowany przez neutrino lewoskrętne.

Możemy teraz znaleźć dwa takie momenty rozwoju Wszechświata, albo dwa takie przesunięcia ku czerwieni  $z_L$  i  $z_R$ , dla których parametry gazu złożonego z neutrino lewoskrętnych są identyczne z parametrami gazu złożonego z neutrino prawoskrętnych. Przesunięcia te wiąże zależność

$$T_L(z_L) = T_R(z_R).$$

Wynikają stąd równości podstawowych parametrów gazu

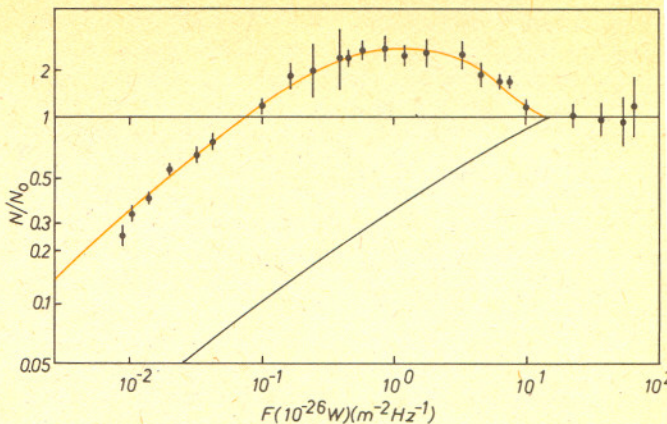
$$n_L(z_L) = n_R(z_R) \quad \text{oraz} \quad v_L(z_L) = v_R(z_R).$$

Poza tym  $1+z \sim \frac{1}{T}$ , a więc przesunięcia spełniają zależność

$$(3) \quad \frac{1+z_L}{1+z_R} \simeq \frac{1}{2,4}.$$

Niezależnie od szczegółów mechanizmu narastania zaburzeń neutrinowych i powstawania gromad galaktyk można stąd wysnuć wniosek, że warunki powstawania „wysp” złożonych z neutrino prawoskrętnych dla  $z = z_R$  są identyczne jak dla neutrino lewoskrętnych przy  $z = z_L$ . Czy oznacza to, że w historii Wszechświata istniały dwie populacje galaktyk odpowiadające  $z_R$  i  $z_L$ ?

Jak wiadomo, współczesne teleskopy sięgają nie dalej niż do  $z \simeq 1$ . O wiele większe odległości obejmują obserwacje radioźródeł. Systematyczne badania źródeł promieniowania radiowego prowadzi od dawna grupa astronomów z Cambridge (Wielka Brytania). W czasie tych badań okazało się, że poza płaszczyzną Galaktyki radioźródła rozmieszczone są równomiernie, co oznacza, że są to obiekty pozagalaktyczne. Zliczenia prezentowane są zwykle w formie zależności  $N/N_0$  od mocy promieniowania odbieranej przez jednostkę powierzchni anteny, na jednostkę przedziału częstości ( $F$ );  $N_0$  jest liczbą radioźródeł przy założeniu braku ewolucji źródeł i ich jednorodnego rozmieszczenia oraz przy pominięciu ekspansji.



Rys. 2 Unormowane wyniki zliczeń radioźródeł. Czarna krzywa odpowiada typowym modelom kosmologicznym.

Typowe modele kosmologiczne np. model Friedmana przewidują monotoniczny wzrost  $N/N_0$  z  $F$ , co jest całkowicie sprzeczne z obserwacjami (rys. 2). Fakt ten jest jednym z argumentów za koniecznością uwzględnienia ewolucji galaktyk przy próbie interpretacji obserwacji radioastronomicznych.

Spróbujmy teraz pofantazjować i porównajmy te trudne do interpretacji obserwacje z pełnym niepewnych założeniami modelem. Załóżmy, że nasza galaktyka należy do drugiej populacji. Bezpośrednie oszacowanie jej wieku oraz nieciągłość na rys. 2 sugerują, że  $z_L \simeq 0,7 \div 1$ .

Wtedy z zależności (3)  $z_R \simeq 2,6 \div 3,8$ .

Tak więc w obszarze  $3 \gtrsim z \gtrsim 1$  można się spodziewać wielu galaktyk z pierwszej populacji. Jak widać na rys. 2 gęstość radioźródeł rośnie w tym obszarze 100 razy. Jak dotychczas nie udało się znaleźć zadowalającego wyjaśnienia tego wzrostu. Być może są to radioźródła związane z galaktykami we wnętrzu rozległych „wysp” utworzonych z neutrino prawoskrętnych. Czy powyższe argumenty za tym, że tak jest w istocie, można będzie traktować poważnie, zależy od bardziej szczegółowych obliczeń modelowych, a przede wszystkim od wyników obserwacji w widmie optycznym galaktyk o  $z \gtrsim 1$ .

## Jak gromadzić zapasy

Dr Maria JANKIEWICZ

Odpowiedź na pytanie zawarte w tytule może być natychmiastowa, choć nieściśła. Zapasy należy gromadzić tak, aby rzadko było widać dno spizarni, a jednocześnie aby one się w niej mieściły. Gdybyśmy chcieli tę odpowiedź uściślić, okazałoby się, że nie jest to takie proste, gdyż w grę wchodzi przypadek; nie wiemy dokładnie ani kiedy uzupełnimy zapasy, ani w jakiej ilości. Istnieją skomputeryzowane domowe spizarnie i jakże potrzebne modele przemysłowe, na przykład model spiętrzania wody w zbiorniku. Stały Czytelnik *Delta* miał okazję nabyć pewne wiadomości o modelach matematycznych i ich stosowaniu (*Delta* 7/1978). Przystąpimy zatem do opisu wybranego modelu teorii tam (zapór), która to właśnie zajmuje się badaniem praw rządzących fluktuacjami zawartości zbiornika magazynującego wodę. Model wiąże się z nazwiskiem Morana, który zainicjował około 1954 roku badania w teorii tam. Strumień wody wpływający do zbiornika określają chwile  $0 = T_0 < T_1 < \dots$ , w których następują wpływy  $S_0, S_1, \dots$ . Zmienne losowe  $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ ,  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  są nieujemne i niezależne (niezależność

zmiennych losowych — np. *Delta* 12/1978). Taki nieciągły strumień wpływu otrzymujemy na przykład wtedy, gdy jest on jednocześnie strumieniem przelewów z innego zbiornika. Woda w zbiorniku jest spiętrzana i używana zgodnie z określonymi regułami. Używa się jej np. do napędu elektrowni lub pobiera do spożycia. Podstawową charakterystyką modelu jest zapas wody  $Z(t)$  w chwili  $t$ . Przy ustalonym  $t$  jest to zmienna losowa, a przy zmieniającym się  $t$  proces stochastyczny. W modelu Morana przyjmuje się, że zużycie wody jest ciągłe w czasie, a prędkość wypływu w chwili  $t$  jest funkcją zapasu  $r(Z(t))$ . Jeśli zbiornik jest pusty, to prędkość wypływu musi być równa zero, przyjmujemy zatem, że funkcja  $r$  spełnia założenie  $r(0) = 0$ , a ponadto, że  $r$  jest dodatnia i ciągła w zbiorze  $(0, \infty)$ . W punkcie zero funkcja  $r$  może być prawostronnie nieciągła, zatem  $r(u) = c$ ,  $u > 0$ ,  $c > 0$  lub  $r(u) = \frac{1}{u}$ ,  $u > 0$ , są dopuszczalnymi funkcjami wypływu. Na razie dla uproszczenia modelu przyjmujemy jeszcze, że pojemność zbiornika jest nieskończona, czyli nie ma przelewów. Możliwość przelewu uwzględnimy w jednym z przykładów. Naszym celem jest określenie zapasu wody w dowolnej chwili przy danym strumieniu wpływu, danej funkcji wypływu i zapasie początkowym  $Z_0$ . Najpierw wyobraźmy sobie następującą sytuację deterministyczną. W zbiorniku mamy zapas  $x$ , nic do niego nie wpływa, a wypływ odbywa się zgodnie z regułą Morana.

Przez  $q = q(x, t)$  oznaczamy zapas po czasie  $t$ . Ponieważ prędkość wypływu jest pochodną funkcji  $q$  względem  $t$ , mamy więc równanie

$$(1) \quad \frac{dq}{dt} = -r(q), \quad t > 0,$$

przy warunku początkowym  $q(x, 0) = x$ .

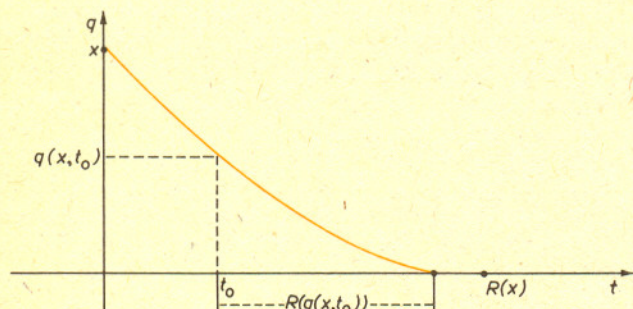
Rozwiążmy równanie (1) przy założeniu, że dla zapasu  $x$  skończony jest czas  $R(x)$ , po którym ten zapas zniknie. Gdyby prędkość wypływu  $r$  była jednostkowa ( $r(u) = 1, u > 0$ ), wówczas byłoby  $R(x) = x$ . Z równania (1) otrzymujemy

$$(2) \quad -\frac{1}{r(q)} dq = dt,$$

gdzie  $dq$  jest przyrostem funkcji  $q$  odpowiadającym przyrostowi czasu  $dt$ . Gdy czas  $t$  zmienia się od 0 do  $R(x)$ , zapas  $q$  zmienia się od  $x$  do 0. Całkując (2) obustronnie mamy

$$(3) \quad \int_0^x \frac{1}{r(q)} dq = \int_0^{R(x)} 1 dt = R(x).$$

Stąd czas  $R(x)$  potrzebny do zniknięcia zapasu  $x$  przy braku wpływów jest równy polu pod wykresem funkcji  $1/r$  w przedziale  $\langle 0, x \rangle$ .



Rys. 1

Funkcja  $R$  w prosty sposób wyznacza funkcję  $q$ . Patrząc na rys. 1 widzimy związek

$$(4) \quad R(x) - R(q(x, t)) = t, \quad t \leq R(x).$$

Z wzoru (3) wynika, że funkcja  $R$  jest rosnąca w przedziale  $(0, \infty)$ , gdyż pole pod wykresem funkcji dodatniej rośnie, gdy powiększymy przedział. Istnieje więc funkcja odwrotna  $R^{-1}$  w przedziale  $(0, \infty)$ . Przyjmując  $R^{-1}(u) = 0$  dla  $u \leq 0$  i korzystając ze związku (4) otrzymujemy

$$(5) \quad q(x, t) = R^{-1}(R(x) - t).$$

Teraz, jeżeli przyjmimy deterministyczne chwile wpływów  $0 = t_0 < t_1 < \dots$ , deterministyczne wpływy  $s_0, s_1, \dots$  oraz zapas początkowy  $z_0$ , to możemy przy użyciu funkcji  $q$  określić zapas  $z(t)$  w dowolnej chwili  $t > 0$ . Ponieważ dla  $t \in (t_0, t_1)$  nie ma wpływów, więc zapas w tym przedziale czasu określa funkcja  $q(z_0 + s_0, t - t_0)$ . W chwili  $t_1$  następuje nowy wpływ  $s_1$ , który należy dodać do wartości  $q(z_0 + s_0, t_1 - t_0)$ , aby otrzymać nowy warunek początkowy dla funkcji  $q$ , aktualny do chwili  $t_2$ .

W ten sposób wykres zapasu wyznaczamy sklejając wykresy funkcji  $q$  przy odpowiednich warunkach początkowych, a punkty sklejania są punktami nieciągłości. Oznaczając dla wygody przez  $z_n$  zapas tuż przed chwilą wpływu  $t_n$ , łatwo napisać wzory rekurencyjne

$$(6) \quad z_{n+1} = q(z_n + s_n, t_{n+1} - t_n),$$

$$(7) \quad z(t) = q(z_n + s_n, t - t_n), \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dokładniej:  $z_n$  jest granicą lewostronną wartości  $z(t)$ , gdy  $t$  dąży do  $t_n$  przez wartości mniejsze od  $t_n$ .

W modelu losowym Morana zapas wody  $Z(t)$ , przy ustalonym  $t$ , jest funkcją określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych o wartościach w  $R_+$  ( $R_+ = \langle 0, \infty \rangle$ ). Natomiast przy ustalonym  $\omega \in \Omega$  tenże zapas jest funkcją określoną na  $R_+$  i o wartościach w  $R_+$ .

Tę ostatnią nazywamy trajektorią procesu zapasu. Zauważmy, że wzory (6), (7) określają trajektorię zapasu, jeśli przyjmiemy w nich  $t_n = T_n(\omega), s_n = S_n(\omega), n = 0, 1, \dots, z(t) = Z(t)(\omega), t \geq 0$ .

Podamy teraz przykłady stosowanych w teorii tam funkcji zapasu  $q$ .

**Przykład 1. Wypływ stały.** Niech  $r(u) = 1, u > 0$ . Wtedy  $R(u) = u, R^{-1}(u) = u$ , a funkcja  $q$  ma postać

$$q(x, t) = [x - t]^+,$$

gdzie  $[u]^+ = \max(0, u)$ . Tym szczególnym modelem zajmuje się teoria obsługi masowej (teoria kolejek). W niej  $T_n$  interpretuje się jako chwilę wejścia  $n$ -tej jednostki (klienta) do systemu,  $s_n$  jako czas obsługi  $n$ -tej jednostki, a  $Z(t)$  jako czas czekania jednostki, która zgłosiłaby się do systemu w chwili  $t$  (wirtualny czas czekania). Ważną charakterystyką wówczas jest czas czekania  $n$ -tej jednostki (aktualny czas czekania)  $Z_n$  określony równością  $Z_n(\omega) = z_n, \omega \in \Omega$  (zob. wzór (6)).

**Przykład 2. Wypływ proporcjonalny.** Niech  $r(u) = u, u > 0$ . Można sprawdzić, że wtedy  $R(x) = +\infty$  dla dowolnego  $x > 0$ . Jednak równanie (1) można rozwiązać, choć nie mamy wówczas postaci (5) rozwiązania. Nie wglębiając się w rachunki podamy postać funkcji zapasu

$$q(x, t) = x \exp(-t) \quad (x e^{-t}), \quad t \geq 0.$$

Zauważmy, że w tym modelu funkcja  $q$  jest dodatnia dla dowolnie dużego  $t$  i każdego dodatniego  $x$ . Zatem przy tej funkcji wypływu zbiornik nigdy nie jest pusty.

Równanie (1) z tą funkcją  $r$  jest także równaniem zapasu substancji promieniotwórczej.

**Przykład 3. Wyjście proporcjonalne przesunięte.** Wystarczy przesunąć wykres funkcji  $r$  z przykładu 2 w górę o stałą, aby  $R(x)$  było skończone. Niech  $r(u) = 1 + u, u > 0$ . Wtedy  $R(u) = \ln(1 + u), R^{-1}(u) = \exp(u) - 1$ , a funkcja  $q$  przyjmuje postać

$$q(x, t) = [(1 + x) \exp(-t) - 1]^+.$$

Gdy zapotrzebowanie nie może być mniejsze od pewnej dodatniej stałej, czyli prędkość wpływu jest odseparowana od zera, wówczas funkcja  $q$  jest równa zero począwszy od pewnego  $t$ ; w tym przykładzie od  $t = \ln(1 + x)$ .

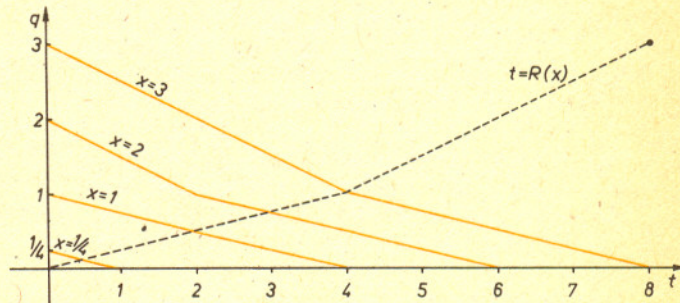
**Przykład 4. Wejście przedziałami stałe, skończona pojemność zbiornika.** Założenie o ciągłości funkcji  $r$  w  $(0, \infty)$  nie jest konieczne do rozwiązania równania (1). Przyjmijmy

$$r(u) = \begin{cases} 1/4, & 0 < u \leq 1, \\ 1/2, & 1 < u \leq 3, \\ +\infty, & 3 < u. \end{cases}$$

Ta funkcja  $r$  uwzględnia skończoną pojemność zbiornika, gdyż przy zapasie większym od trzech powoduje przelew. Obliczamy

$$R(u) = \begin{cases} 4u, & 0 < u \leq 1, \\ 4 + 2(u - 1), & 1 < u \leq 3, \\ 8, & 3 < u, \end{cases}$$

$$R^{-1}(u) = \begin{cases} u/4, & 0 < u \leq 4, \\ 1 + (u - 4)/2, & 4 < u \leq 8. \end{cases}$$



Rys. 2

Wybrane funkcje  $q$  dla pewnych wartości początkowych  $x$  są przedstawione na rys. 2.

Funkcja wpływu może być nieciągła, gdy sterujemy zapasem wody. Jeśli spada on poniżej krytycznego poziomu, wyłączamy niektóre ujścia zmniejszając prędkość wypływu albo odwrotnie, jeśli zbyt się podnosi, włączamy dodatkowe ujścia (zapasowy zbiornik), aby zapobiec przelewowi.

Określenie trajektorii procesu zapasu jest dopiero wstępem do właściwego jego badania. W modelu Morana znane są wzory wyrażające chwilowy rozkład prawdopodobieństwa  $P\{Z(t) \leq z\}$ ,  $z \geq 0$ , warunek dostateczny istnienia granicy  $\lim P\{Z(t) \leq z\}$  i postać tego granicznego rozkładu. Przy dodatkowym założeniu, że rozkład zmiennych losowych  $\tau_n$  jest wykładniczy, niezależny od  $n$  (rozkład wykładniczy — np. *Delta* 12/1978) znany jest również warunek konieczny i dostateczny istnienia rozkładu granicznego oraz jego postać.

Inną ważną charakterystyką modelu, badaną w teorii tam, jest tzw. czas do pierwszego wyschnięcia zbiornika mimo uzupełnień, czyli czas od chwili  $t = 0$  do chwili, w której zbiornik po raz pierwszy jest pusty. Czas ten jest również zmienną losową, a w modelu Morana znana jest postać jej rozkładu prawdopodobieństwa.

Poza modelem Morana badano do tej pory wiele innych modeli teorii tam, w których strumień wpływu był ciągły albo oba strumienie wpływu i wypływu były nieciągłe. Jednocześnie wiele problemów pozostało do rozwiązania nawet w tak stosunkowo dobrze zbadanym modelu Morana, jak chociażby wspomniany warunek konieczny i dostateczny istnienia granicznego rozkładu zapasu bez założenia wykładniczości odstępów między chwilami wpływów.

## Wyniki Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Tradycyjnym zwyczajem ogłaszamy kolejny konkurs uczniowskich prac matematycznych. W tym roku po raz pierwszy w konkursie zabraknie prac maturalnych, bo nowy regulamin matur nie przewiduje takich prac. Sądźmy jednak, że wielu naszych Czytelników zechce swoje rozważania nad matematyką opracować i przysłać na nasz konkurs.

Skrót zwycięskiej pracy  
będzie opublikowany w *Delcie* 3/1983.

## Regulamin konkursu uczniowskich prac z matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Dety* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Jury w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel Ministerstwa Oświaty i Wychowania, dr Alicja Derkowska, dr Marek Kordos, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, prof. dr Wojciech Żakowski, na posiedzeniu w dniu 09.09.1982, biorąc pod uwagę temat pracy, jej wykonanie oraz przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. Złoty medal Mariuszowi Skałbie (IV LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie) za pracę „O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb”;
  2. Srebrny medal Januszowi Kalinowskiemu (XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu) za pracę „Powierzchnie stopnia drugiego i rysowanie kwadryk za pomocą komputera WANG 2200T”;
  3. Brązowy medal Mirosławowi Matłędze (Technikum Budowlane w Cieszynie) za pracę „Rożnięcia powierzchni jednostronnych”;
  4. Dwa wyróżnienia:  
Rogerowi Bielawskiemu (VI LO w Bydgoszczy) za pracę „Własności sumy potęg kolejnych liczb naturalnych”,  
Lechowi Zielińskiemu (XIV LO im. K. Gottwalda w Warszawie) za pracę „Wprowadzenie relacji porządku w przestrzeniach liniowych nad ciałem liczb rzeczywistych”;
  5. Dyplomy uczestnictwa w finale Konkursu:  
Jarosławowi Drozdowskiemu (XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu) za pracę „Rozwiązywanie problemów ekonomicznych metodą programowania liniowego”,  
Michałowi Wojciechowskiemu (XIV LO im. K. Gottwalda w Warszawie) za pracę „Pewne uogólnienie konstrukcji Steinera”.
- Ministerstwo Oświaty i Wychowania przyznało nagrody pieniężne laureatom i nauczycielom finalistów:
- Lucynie Rędziaż, Józefowi Łozińskiemu, Bogusławowi Adamkowi, Irenie Ołdak i Jerzemu Bednarczukowi.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury tego Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Dety*.

# Jakie twierdzenia matematyczne są ważne?

Hipoteza Weila (zwyczajowo nazywana wciąż hipotezą, choć jest to już twierdzenie) wygląda dość niepozornie w stosunku do swego znaczenia. Opisuje ona liczbę rozwiązań pewnych równań algebraicznych nad ciałami skończonymi. Używana jest jednak w silny sposób w wielu działach matematyki, w tym w teorii liczb i geometrii algebraicznej. Nie sposób w kilku zdaniach omówić całego bogactwa jej zastosowań.

Lematowi Kuratowskiego-Zorna poświęcił artykuł w *Delcie* Zbigniew Sawoń (nr 9/1982). Twierdzenie to orzeka o istnieniu — w pewnych przypadkach — elementu maksymalnego ze względu na pewną własność. Dokładne sformułowanie brzmi: jeżeli  $<$  jest częściowym porządkiem w zbiorze  $X$  takim, że każdy podzbiór liniowo uporządkowany ma ograniczenie górne w  $X$ , to w zbiorze  $X$  jest przynajmniej jeden element maksymalny ze względu na  $<$ , tj. taki element  $x$ , że nie ma różnego od  $x$  elementu  $y$  takiego, że  $x < y$ . Typowym zastosowaniem tego twierdzenia jest wykorzystanie go do dowodu, że każda przestrzeń liniowa ma bazę. Dokładniej omawia to wspomniany artykuł Z. Sawonia.

Twierdzenia Hilberta o bazie i o zerach dotyczą układów równań algebraicznych. Pierwsze z nich — w nieco uproszczonej wersji — mówi, że z każdego układu równań wielomianowych

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

o współczynnikach z dowolnego ciała da się wybrać układ skończony i to tak, by nie zmienić zbioru rozwiązań układu. Twierdzenie o zerach (często używana jest niemiecka nazwa Nullstellensatz) dotyczy układów równań nad ciałem liczb zespolonych (ogólniej: nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym). Jedno ze sformułowań stwierdza, że układ równań postaci  $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ , gdzie  $a_1, \dots, a_n$  są stałymi, jest jedynym układem równań opisującym pojedynczy punkt  $(a_1, \dots, a_n)$   $n$ -wymiarowej przestrzeni zespolonej  $C^n$ . Zwróćmy uwagę, że układ  $x_1^2 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  nie opisuje punktu „pojedynczego”, tylko „podwójny”, bo wielomian  $x_1^2$  ma w zerze pierwiastek podwójny. Nie opisuje także punktu równanie  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ , mające nad ciałem liczb zespolonych wiele rozwiązań.

Każda grupa abelowa o skończonej liczbie generatorów jest sumą prostą grup cyklicznych.

rozmowa z  
profesorem dr Andrzejem  
BIAŁYNICKIM-BIRULĄ

— *Panie Profesorze, w trakcie swoich studiów matematycznych wiele razy słyszałem z ust wykładowców, że „to twierdzenie jest ważne”. Kryteria oceny były zwykle dla mnie niejasne, ale często były na pewno różne. Czy mógłby Pan powiedzieć nam, co rozumie Pan przez „ważne twierdzenie” i jak poznać, które jest ważne?*

— Nie zawsze można od razu stwierdzić, czy twierdzenie, które właśnie pojawiło się na rynku matematycznym, na arenie współczesnej nam matematyki jest ważne czy nie. Rozstrzyga to czas. Najczęściej jednak wiadomo „od razu”, czy odkryte twierdzenie jest ważne, czy też mniej ważne. Tak zresztą przeważnie jest z odkryciami i wynalazkami w każdej dziedzinie.

Waga twierdzeń matematycznych może mieć dwa źródła. Po pierwsze, znaczenie twierdzenia może wynikać stąd, że opisuje ono, wyjaśnia jakiś bardzo ciekawy i znaczący fakt, że zapełnia lukę w naszej wiedzy matematycznej. Po drugie, o randze twierdzenia może decydować jego dowód. Może on wносить coś nowego do zasobu naszych metod matematycznych. Waga twierdzenia może oczywiście wynikać z obu tych powodów jednocześnie. Są tacy matematycy, którzy uważają, że twierdzenie jest ważne tylko wtedy, gdy w jego dowodzie została użyta jakaś nowa metoda. Są jednak i tacy matematycy (ja do nich należę), którzy uważają, że waga twierdzenia może być związana z odkryciem pewnych nowych faktów (bez wprowadzenia nowych metod). Waga twierdzenia może polegać również na tym, że zamyka ono pewną teorię, pewien etap w rozwoju matematyki. To jest jednak rzadkie. Ważne twierdzenia na ogół otwierają, a nie zamykają drogę dalej.

— *Czy słynna hipoteza Weila coś kończy, czy raczej otwiera?*

— Do dowodu hipotezy Weila stworzono szereg zupełnie nowych metod matematycznych ...

— *Zupełnie jak do Wielkiego Twierdzenia Fermata ...*

— Właśnie, dość podobnie. Z tym że Wielkie Twierdzenie Fermata samo w sobie według mnie nie przysłało się zbyt wiele. Natomiast hipoteza Weila (już teraz: twierdzenie Grothendiecka-Deligne'a) jest twierdzeniem bardzo użytecznym, które ma i będzie zapewne mieć wiele różnych zastosowań.

— *Są jeszcze twierdzenia o charakterze czysto technicznym, którymi podpieramy się właściwie tylko raz, ewentualnie w kilku typowych sytuacjach. Lemat Kuratowskiego-Zorna jest chyba taki.*

— Lemat Kuratowskiego-Zorna jest przykładem twierdzenia, którym „podpieramy się” w wielu przypadkach. Obecnie jest to pewien skrót myślowy, powołanie się na ten lemat pozwala na pominięcie powtórzenia jego dowodu. Są też twierdzenia o charakterze raczej technicznym, ale o podstawowym znaczeniu dla dyscypliny, której dotyczą. Za takie można uznać np. twierdzenia Hilberta o bazie i o zerach. Taki techniczny charakter ma też wiele twierdzeń z klasyfikacji algebr Liego. Służą one głównie do rozbijania dowodów na przypadki.

— *Twierdzenia „o klasyfikacji” są ważne, ale chyba nie bardzo ważne. Na przykład twierdzenie podające postać dowolnej grupy abelowej skończonej generowanej. Nie jest to przecież „bardzo ważne” twierdzenie teorii grup.*

— O nie, całej teorii grup to twierdzenie oczywiście nie kończy, ale kończy ono, przynajmniej w pewnym sensie, teorię skończonej generowanych grup abelowych. Korzystając z tego twierdzenia, po części też z jego dowodu, można przedstawić daną grupę w postaci sumy prostych grup cyklicznych, co właściwie pozwala rozwiązać wszystkie problemy dotyczące tej grupy. To twierdzenie kończy, dobija, teorię skończonej generowanych grup abelowych.

— *W teorii grup bardzo ważny jest czy raczej był, rozwiązany niedawno problem: wyliczyć wszystkie grupy proste.*

— To jest typowy przykład zagadnienia, które nadawało ton, stymulowało rozwój pewnej gałęzi matematyki, w tym przypadku teorii grup. Rozwiązanie tego problemu pozwoli na dowodzenie wielu twierdzeń teorii grup przez rozpatrywanie przypadków, podobnie jak to miało miejsce w teorii grup Liego, o czym przed chwilą mówiłem. Często tak bywa, że jakiś konkretny problem stymuluje rozwój danej dziedziny matematyki. W przypadku teorii grup — był to problem klasyfikacji grup skończonych — dla teorii problem centralny. Czasami te najbardziej stymulujące problemy nie zajmują tak centralnej pozycji, a mimo to przyciągają uwagę wielu matematyków i przyczyniają się do rozwoju różnych dziedzin matematyki, do takich problemów zaliczyłbym Wielkie Twierdzenie Fermata.

— *Mówił Pan o kryteriach ważności twierdzeń. Sądzę, że jest jeszcze co najmniej jedno takie kryterium: twierdzenie może być ważne ze względów „światopoglądowych”. Takie jest chyba twierdzenie Gödla ...*

— Tak, to jest twierdzenie tego typu. Ale jest ono również bardzo ważne ze względu na metody, które Gödel wprowadził przy obu swoich głównych twierdzeniach: o zupełności i o nierozstrzygalności. Dowody ich były potem wykorzystywane i w innych sytuacjach. To jest niewątpliwie kamień milowy w rozwoju logiki, również jeśli chodzi o metody.

— *Znaczenie twierdzenia matematycznego wiąże się także z kwestią ważności gałęzi matematyki, do której należy. Ta zaś kwestia jest moim zdaniem silnie sprężona z naszą wiarą (lub: niewiarą) w coś takiego jak „rzeczywistość matematyczna” — w to, że te przestrzenie, które badamy w matematyce, istnieją „naprawdę” i że kierunek rozwoju matematyki jako całość jest mniej więcej wyznaczony. Czy rzeczywiście można taki kierunek zauważyć? Jest na przykład pogląd, że cała matematyka się algebraizuje ...*



Wielkie Twierdzenie Fermata — nieudowodnione jeszcze przypuszczenie, że równanie  $x^n + y^n = z^n$  (gdzie  $n$  jest liczbą naturalną większą od 2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $x, y, z$ . Piotr Fermat twierdził w 1660 r., że znalazł zadziwiający dowód tego faktu. Nie zostawił jednak żadnych szczegółów. O Wielkim Twierdzeniu Fermata i roli, jaką odegrało ono w rozwoju algebry, pisaliśmy w nr 5/1981.

Twierdzenie Gödla o zupełności orzeka, że teoria jest niesprzeczna (tzn. nie można z aksjomatów tej teorii wywnioskować jednocześnie jakiegoś zdania i jego zaprzeczenia) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona model (tzn. gdy istnieje pewna „rzeczywistość” matematyczna, w której spełnione są aksjomaty teorii po odpowiedniej interpretacji symboli występujących w jej języku).

Twierdzenie Gödla o nierozstrzygalności mówi, że dla każdej dostatecznie bogatej teorii  $T$  (mówiąc dokładniej: dla teorii zawierającej zwięźłą arytmetykę liczb naturalnych) istnieje takie zdanie w języku tej teorii, że ani ono, ani jego zaprzeczenie nie wynika z aksjomatów teorii  $T$ .

Topologia algebraiczna polega — największym przybliżeniu — na badaniu obiektów geometrycznych (precyzyjnie: przestrzeni topologicznych) metodami algebry. Przykładowo, z każdym takim „obiektem geometrycznym” (np. wielościanem, kulą, sferą, torusem itd.) można związać wiele grup, opisujących w dość zadowalający sposób wiele ich geometrycznych własności.



#### Rozwiązanie zadania M 320

Równanie nasze ma pierwiastki wymierne wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta = b^2 - 4ac$  jest kwadratem liczby całkowitej. Ponieważ  $b$  jest nieparzyste, więc  $i$  i  $r$  musi być

$$\text{nieparzyste: } r = 2i + 1, \quad r^2 = 8 \frac{i(i+1)}{2} + 1.$$

Oznaczając jednak  $a = 2n + 1, b = 2p + 1, c = 2q + 1$  mamy  $\Delta = (2p + 1)^2 - 4(2n + 1) \times$

$$\times (2q + 1) = 8 \left( \frac{p(p+1)}{2} - 2nq - n - q \right) + 5,$$

tj.  $\Delta = 8N + 5$ , gdzie  $N$  jest całkowite.

Sprzeczność.

— Co do „rzeczywistości matematycznej” to na pewno większość z nas, większość matematyków uważa, że ich działalność jest badaniem jakiejś tam rzeczywistości, chociaż są również i tacy, którzy matematykę traktują aksjomatycznie. Dla nich dowodzenie twierdzeń jest po prostu pewną grą — niczym więcej — gra ta polega na wyciąganiu wniosków z aksjomatów i twierdzeń już udowodnionych, nie jest opisem żadnej rzeczywistości.

— *Matematyka jako gałąź logiki?*

— Tak, jako system dedukcyjny. Ale tacy matematycy są w zdecydowanej mniejszości. Czy istnieje jakiś kierunek rozwoju matematyki? Na pewno tak, ale jest on raczej związany z tym, że pewne gałęzie matematyki w niektórych momentach wkraczają na arenę, są badane szczególnie intensywnie, a po pewnym czasie przechodzą albo w zapomnienie, albo do ...

— ... *elementarnej wykształcenia.*

— Może raczej do wyższego, w każdym razie do zasobów wiedzy matematycznej.

— *Do klasyki?*

— Tak, bardzo często po pewnym czasie następuje ich renesans: okazuje się, że powstałe w międzyczasie metody mogą być zastosowane do zapomnianej już problematyki, zapoczątkowując jej ponowny rozkwit. Dobrym przykładem jest teoria niezmienników, stworzona w XIX wieku, potem trochę zapomniana, a ostatnio znowu odżywająca. David Hilbert powiedział „Gdy byłem młody, każdy dobry matematyk zajmował się choć trochę teorią niezmienników, dzisiaj żaden dobry matematyk się nią nie zajmuje”.

— *To może odrodzi się i polska szkoła matematyczna?*

— Odnowa zapomnianych dziedzin dotyczyć może raczej dziedzin bardziej związanych z „konkretami” matematycznymi, a nie z podawaniem ogólnych prawd. Polska szkoła matematyczna była związana z takimi dziedzinami matematyki jak topologia, podstawy, analiza funkcjonalna w ogólnym sensie, algebra ogólna. Ich celem było stworzenie pewnego języka i ogólnych metod. To już znalazło się w skarbcu matematyki. Wyczerpała się tym samym siła napędowa rozwoju tych dyscyplin. Wspominał Pan jeszcze o „algebraizacji” matematyki ...

— *Tak, miałem na myśli teorię kategorii, której używa się w prawie całej matematyce.*

— „Algebraizacja” nie jest tu dobrym terminem. Każda młoda dyscyplina matematyki na początku operuje niezbyt dobrze sprecyzowanymi pojęciami i metodami (jeśli nawet wszystko się zgadza z punktu widzenia logiki). Po pewnym czasie to bardzo utrudnia rozwój. Nastaje potrzeba formalizacji, jak gdyby skodyfikowania osiągnięć. To łączy się na ogół z algebraizacją. Ale nie obawiałbym się, że matematyce grozi przerosł wpływów formalnej algebry. Jakoś tak jednak jest, że właśnie korzystając z metod formalnych można często dobrze usystematyzować i wyjaśnić uzyskane rezultaty. Powstanie (wyodrębnienie się z topologii) i rozwój topologii algebraicznej może być bardzo dobrym tego przykładem. Warto jednak zdać sobie sprawę z tego, że zagadnienia, nad którymi pracują matematycy, stają się coraz trudniejsze. Nie można im sprostać, nie mając dobrze opanowanego warsztatu i to również od strony formalnej. Minęły te czasy, kiedy genialny samouk mógł rozwiązać poważny problem. Dziś niezbędne w pracy jest bardzo dobre opanowanie tych sformalizowanych metod, które są wynikiem pracy całych pokoleń matematyków.

— *Dawniej można było coś odkryć w teorii liczb nie będąc profesjonalistą.*

— Jeżeli jakaś dyscyplina matematyczna właśnie się tworzy, to może się zdarzyć, że znane metody „nie chwytają” i trzeba po prostu stworzyć nowe. I jeżeli ktoś ma tzw. „świeżą głowę”, może bez przygotowania zdziałać coś twórczego i ważnego. Ale w dziedzinach klasycznych szanse genialnych samouków są znikome. Ten mój (i nie tylko mój) pogląd wcale nie kłóci się z tym, że według mnie w rozwoju matematyki bardzo dużą rolę odgrywają indywidualności. Ale to są matematycy, którzy nie tylko mają genialne pomysły, ale też doskonale opanowany warsztat matematyczny, są bardzo dobrze wykształconymi matematykami, a nie samoukami. Wynikiem pracy takich uczonych może być nawet wytyczenie rozwoju jakiejś dyscypliny (czasami, choć rzadko: kilku dyscyplin) nawet na dziesięciolecie. Typowym przykładem jest działalność Alexandra Grothendiecka w geometrii algebraicznej. Bez niego byłaby ona zapewne zupełnie inna. No, bez niego i Jean-Pierre Serre’a.

— *Grothendieck ma teraz około 50 lat?*

— Tak, ponad 50.

— *O ile pamiętam, medal Fieldsa dostał na Kongresie w Moskwie w 1966 roku?*

— Tak, ale te podstawowe jego pomysły pochodzą z 1958 roku. W tym to roku w ciągu omalże jednego miesiąca Grothendieck doszedł do swoich głównych wyników. Była to prawdziwa eksplozja. Potem dobrych parę lat zabrało spisanie tego wszystkiego na papierze.

— *Bardzo podobna historia zdarzyła się 300 lat temu, kiedy to w Oxfordzie wybuchła zaraza i młody Newton wrócił do domu na wieś. W ciągu krótkiego pobytu na wsi doszedł do większości swoich odkryć, dzięki którym zyskał potem nieśmiertelną sławę. Historia lubi się powtarzać. Czy działalność Grothendiecka też jest niedoceniana lub ostro atakowana przez część współczesnych?*

— Nie, świat współczesny jest pod tym względem bardziej sprawiedliwy, zresztą jak można atakować prawdziwe twierdzenia. Nie mówię tu o marginesach społeczności matematycznej, tam mogą się pojawić nieprzychylnie gesty. Uogólnienia, których dokonał Grothendieck, są tak znaczne, że niekiedy trzeba osobnego wykładu, by wytłumaczyć związek między twierdzeniem

a jego sformułowaniem w wersji Grothendiecka. Przy czym uogólnienia Grothendiecka są zawsze bardzo głębokie.

— *Kiedy dzieci w szkołach będą uczyć się o Grothendiecku?*

Kiedys, jako student myślałem, że ludzkość osiągnie taki poziom, że w kioskach zamiast, no powiedzmy „Boksu” czy „Przeglądu Sportowego” ludzie będą kupować „Fundamenta Mathematicae”, a w szkołach dzieci będą się uczyć „poważnej” matematyki. Ale teraz już tak nie myślę ...

— *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał *Michał SZUREK*

## Lokalna Supergromada

*Mgr Krzysztof GÓRSKI*

Jednym z najważniejszych przedsięwzięć dzisiejszej astronomii jest realizowany przez kilka grup naukowych w Stanach Zjednoczonych i jedną w Związku Radzieckim systematyczny program badań największych rozpoznawalnych dotychczas skupisk materii we Wszechświecie — tzw. supergromad. Badania te mają kapitalne wręcz znaczenie dla kosmologii. W pewnym sensie centralnym jej problemem jest znalezienie zadowalającej odpowiedzi na pytanie: „Jak powstały galaktyki?”. Obecnie nikt nie jest jeszcze w stanie odpowiedzieć na nie jednoznacznie. Teoria powstawania galaktyk rozwijana jest obecnie przez zwolenników jej dwóch rozłącznych, dopełniających się wariantów. Aby w ogóle we Wszechświecie powstały jakiegokolwiek obiekty, konieczne jest istnienie pierwotnych niejednorodności. Na razie nie wiadomo jeszcze, skąd się owe niejednorodności wzięły i jak wyglądały, więc zakłada się a priori ich istnienie w najprostszej z możliwych postaci. Tu właśnie różnią się poglądy kosmologów-teoretyków. Jedni zakładają, że w „cieczy” wypełniającej Wszechświat, złożonej z materii i promieniowania, silnie ze sobą sprzężonych w dostatecznie wczesnych epokach, zaburzenia była tylko gęstość składowej materialnej. Zaburzenia takie nazywają się izotermicznymi. Drudzy — przeciwnie — twierdzą, że zaburzenia tzw. adiabatyczne, istniały w „cieczy” traktowanej jako całość.

*Każde realistyczne zaburzenie, o których dalej będzie mowa, jest kombinacją (superpozycją) zaburzeń, których modele rozwijane są przez obie grupy.*

Dalsza procedura to zbadanie, jak pierwotne zaburzenia ewoluowały w trakcie rozszerzania się i stygnięcia całego Wszechświata, w szczególności — co działo się w krytycznej epoce rekombinacji materii, gdy składowa promienista i materialna przestały ze sobą silnie oddziaływać i ciśnienie we Wszechświecie spadło praktycznie do zera. Okazuje się, że zaburzenia izotermiczne są „wzmrożone” w promieniowanie i do momentu rekombinacji utrzymują się na pierwotnym poziomie. Zaburzenia adiabatyczne przechodzą w tym czasie bardzo interesującą ewolucję polegającą na tym, że epoka rekombinacji działa na nie jak filtr tłumiący zaburzenia o małych masach, mniejszych niż około (w zależności od wariantu teorii)  $10^{13}$  —  $10^{15} M_{\odot}$  — mas Słońca (co odpowiada w przybliżeniu masie gromady galaktyk).

Po rekombinacji materii zaburzenia jej gęstości zaczynają narastać i kolejnym interesującym momentem w ich ewolucji jest okres, w którym ich gęstość staje się znacząco większa (powiedzmy kilkakrotnie) niż gęstość otaczającego je tła. Zaczyna się wówczas grawitacyjny kolaps takiego protoobektu. Ponieważ zakłada się, że pierwotne zaburzenia były tym mniejsze, im większa była ich masa, otrzymuje się dwa następujące scenariusze powstania obecnej struktury Wszechświata.

W pierwszym, zaproponowanym pod koniec lat sześćdziesiątych przez R. Dicke’go i P. J. E. Peebles’a z Princeton (USA), pierwotne zaburzenia są izotermiczne i wobec tego pierwsze powstające we Wszechświecie obiekty mają małą masę, konkretnie ok.  $10^6 M_{\odot}$  (co odpowiada mniej więcej masie gromady kulistej gwiazd). Następnie w „gazie” złożonym z tych obiektów zachodzi kolaps mniejszych początkowo zaburzeń o większej masie — odpowiadających, powiedzmy, galaktykom. „Gaz” potem tworzą galaktyki i powstają ich grupy i gromady, itd. Schemat ten nosi nazwę ciągłego grawitacyjnego grupowania.

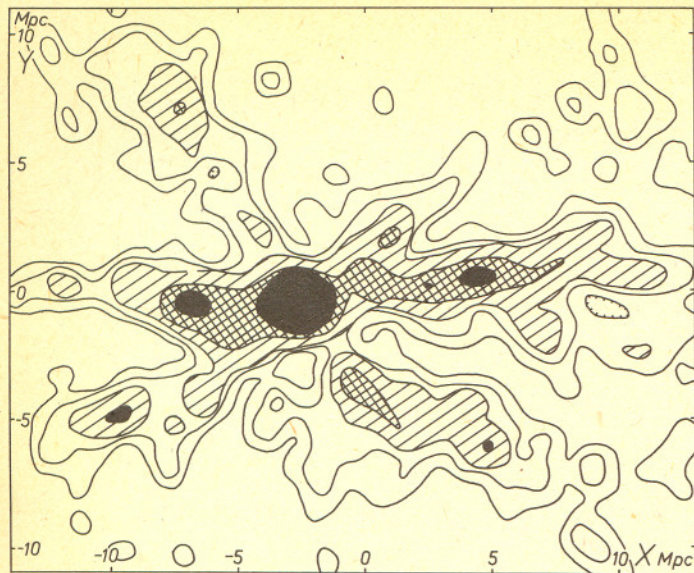
*Ten „gaz” to ośrodek złożony z oddziałujących ze sobą tylko grawitacyjnie wielu punktów materialnych (mogą to być gwiazdy, gromady kuliste, galaktyki itd).*

Drugi scenariusz, zaproponowany na początku lat siedemdziesiątych przez J. Zeldowicza z Moskwy i rozwijany później przez jego grupę, opiera się na założeniu, że pierwotne zaburzenia były adiabatyczne. Jak powiedziano wyżej, istnieje wtedy pewna charakterystyczna, dość duża masa, poniżej której zaburzenia zostały w czasie ewolucji stłumione.

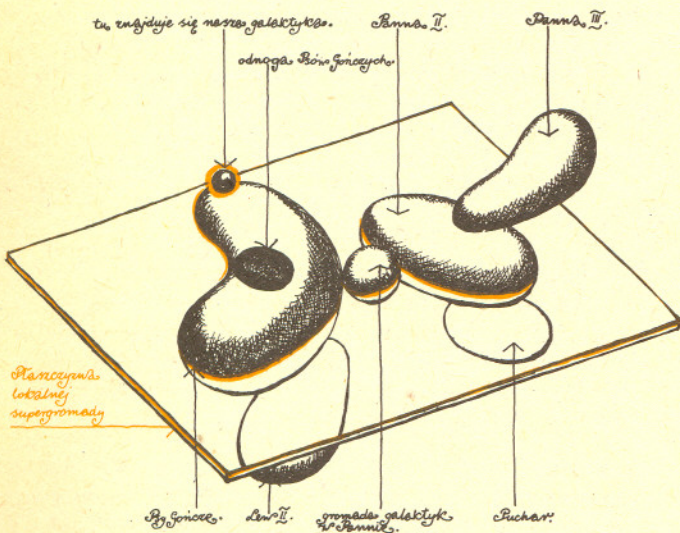
Przedstawiciele tej grupy twierdzą, że kolaps tych protoobektów zachodził anizotropowo i doprowadził do powstania olbrzymich, spłaszczonych struktur (nazywanych przez Rosjan blinami, zaś przez Anglosasów — pancakes) poroździelanych wielkimi pustymi obszarami przestrzeni (z grubsza można się tu dopatrywać analogii ze strukturą plastra miodu). Dopiero w następnym etapie miała się rozpocząć fragmentacja blinów i powstawanie galaktyk.

Tak, w bardzo uproszczonym zarysie, przedstawiają się idee leżące u podstaw dwóch konkurujących poglądów na kwestię powstania obecnej struktury Wszechświata. Oczywiście tylko obserwacje mogą te teorie zweryfikować. Wydaje się, że po około pięćdziesięciu latach od narodzin kosmologii obserwacyjnej doszliśmy do okresu, w którym zdobycze astronomii instrumentalnej umożliwiają jej intensywny rozwój w sensie ilości i jakości danych obserwacyjnych. Po wielu latach badań rozkładu przestrzennego galaktyk w oparciu o znane ich położenia na Niebie i dedukowane z jasności odległości przyszedł czas żmudnych, ale płodnych bezpośrednich analiz odległości poszczególnych galaktyk w dużych obszarach Nieba. Informacje o odległości uzyskuje się badając przesunięcie linii absorpcyjnych w widmach galaktyk w kierunku niższych częstotliwości — tzw. redshift. Odzwierciedla ono rozbieganie się galaktyk odkryte przez Hubble’a w latach dwudziestych. Tzw. prawo Hubble’a wiąże odległość od nas badanej galaktyki z jej prędkością ucieczki, wyznaczoną tak jak w klasycznym efekcie Dopplera, z przesunięcia linii widmowych.

W obecnym stanie rozwoju techniki obserwacyjnej uzyskanie widma jednej galaktyki zajmuje ok. pół godziny pracy teleskopu.



Rys. 1 Konturowa mapa gęstości galaktyk w Lokalnej Supergromadzie



Rys. 2 Lokalna Supergromada w 3 wymiarach

Dla porównania Hubble potrzebował pracować w tym celu na teleskopie 2,5 metrowym całą noc! Ostatnia dekada przyniosła systematyczne przeglądy redshiftów galaktyk w kilku obszarach Nieba. Ich efektem było odkrycie w strukturze przestrzennej rozkładu galaktyk kilku gigantycznych aglomeracji, które noszą obecnie nazwy związane z gwiazdozbiorami, w których je widać na Niebie. Są to supergromady w Herkulesie, Perseuszu i w Warkoczu Bereniki oraz tzw. Lokalna Supergromada.

Adekwatność terminu supergromada można zrozumieć, zważywszy że np. w Warkoczu Bereniki obserwuje się strukturę leżącą ok. 400 mln lat świetlnych od nas i rozciągającą się na Niebie na obszarze o szerokości co najmniej 20°!!

Pomiary prędkości pojedynczych galaktyk w ramach supergromad pokazują, że rozmiary tych gigantów są tak duże, iż charakterystyczny czas przelotu galaktyki przez supergromadę, do której należy, jest kilka razy większy niż wiek Wszechświata! Oznacza to, że obserwujemy i badamy wreszcie obiekty, które w najmniej (w porównaniu z galaktykami) zafałszowany późniejszą ewolucją sposób informują nas o tym, jak wyglądały pierwotne zaburzenia gęstości we Wszechświecie.

Przejdźmy teraz do zasadniczego tematu tego artykułu. Już przed II wojną światową astronomowie zauważyli, że po tej stronie naszej Galaktyki, która odpowiada północnej stronie Nieba, istnieje znaczny w stosunku do strony drugiej nadmiar galaktyk.

Od początku lat 50-tych G. de Vaucouleurs z Austin w Teksasie badał i nazwał Lokalną Supergromadą kompleks galaktyk z gromadą galaktyk w Pannie w centrum, rozciągający się na olbrzymim obszarze gwiazdozbiorów Panny, Lwa, Psów Gończych, Pucharu, Smoka i Pompy (ponad 90° szerokości). Na peryferiach tego obiektu znajduje się Grupa Lokalna, której największymi członkami są galaktyka M 31 w Andromedzie i nasza Galaktyka. Niedawno Amerykanie B. Tully i R. Fisher zebrali informacje o prędkościach 2200 (!) galaktyk leżących bliżej niż trzykrotna odległość gromady w Pannie (40 mln lat świetlnych) i na tej podstawie Tully dokonał znakomitego studium morfologii Lokalnej Supergromady (L. S.).

Spójrzmy na rysunek pierwszy. Widzimy na nim poziomicową mapę gęstości przestrzennej 672 jasnych galaktyk w L. S. Nasza Galaktyka znajduje się 10 jednostek (tzn. ~ 10 Mpc, czyli ok. 31 mln lat świetlnych) nad punktem o współrzędnych (0,0). Kolejne poziomicie wyznaczają gęstość galaktyk równą odpowiednio: 0,5, 1, 2, 4 i ponad 8 galaktyk na  $Mpc^3$ . W centrum znajduje się gromada galaktyk w Pannie, na prawo od niej obłok w Psach Gończych, na lewo obłok nazwany Panna II. W lewo ku górze obłok galaktyk — Panna III, w prawo w dół — Lew II, w lewo w dół — Puchar, w prawo ku górze od gromady w Pannie — tzw. odnoga Psów Gończych. Tully podaje, że:

- tylko 20% jasnych galaktyk znajduje się w gromadzie w Pannie;
- 40% jasnych galaktyk leży w Pannie II i Psach Gończych;
- pozostałe 40% leży w kilku (~ 5) obłokach poza płaszczyznę wyznaczoną przez gromady galaktyk Panna, Panna II i Psy Gończe.

Uderzające jest to, że cały kompleks widoczny na rysunku zajmuje tylko 5% objętości zawierającego go prostopadłościanu, tzn. większość objętości zajmowanej przez L. S. jest pusta! Panna II i Psy Gończe stanowią spłaszczone zespół zawierający się w elipsoidzie trójosiowej o stosunku osi równym 6 : 3 : 1. Panna III, Puchar i Lew II mają wydłużone kształty cygar skierowanych ku gromadzie galaktyk w Pannie. Dotychczasowe dane wskazują, że średni rozrzut prędkości galaktyk w ramach poszczególnych obłoków jest bardzo mały — ok. 100 km/s (dla porównania, prędkość Słońca w Galaktyce ~ 220 km/s). Za Lokalną Supergromadą (patrząc z Ziemi) znajduje się „dziura” w rozkładzie galaktyk sięgająca następnej supergromady w Warkoczu Bereniki.

Spójrzmy teraz na rysunek drugi. Jest on próbą schematycznego przedstawienia Lokalnej Supergromady w trzech wymiarach. Należy rozumieć, że narysowane na nim powierzchnie zawierają ok. 95% galaktyk należących do L. S.

Co o tym wszystkim sądzić? Wydaje się, że taki obraz Supergromady odsłonięty przez Tully'ego faworyzuje teorię Zeldowicza i sprawia duże trudności interpretacyjne zwolennikom ciągłego grawitacyjnego grupowania. Tzn. łatwiej wyobrazić sobie, że obiekt ten powstał wskutek anizotropowego kolapsu wielkiej masy gazu w kierunku ku płaszczyźnie L. S. fragmentacji na kilka obłoków (z silnym przyplływowym oddziaływaniem na te leżące poza płaszczyznę L. S.), niż skupienia wielkiej ilości oddziałujących ze sobą galaktyk w bardzo małej części (~ 5%) dostępnej im objętości (wygląda na to, że teoria ciągłego grawitacyjnego grupowania bardzo nie lubi wyraźnych i rozległych dziur w rozkładzie galaktyk).

Trudno jednak ostatecznie weryfikować teorie fizyczne na podstawie analizy pojedynczego obiektu. Dlatego rozpoczynając ten artykuł passus o kapitalnym znaczeniu systematycznych i jeszcze dokładniejszych badań L. S. i innych takich obiektów na pewno nie jest przesadzony.



## Rzuć monetę, rzuć monetę

Dr Edward STACHOWSKI

W długiej serii rzutów monetą liczba orłów jest — z dużym prawdopodobieństwem — bliska liczbie reszek. Jakiego rzędu jest ta bliskość? Czy przy wydłużaniu serii różnica  $R - O$  (liczba reszek minus liczba orłów) zmierza do zera, czy może rośnie nieograniczenie?

Wiadomo (prawo wielkich liczb Bernoulliego), że ciągi  $\frac{O_n}{n}$

( $O_n$  — liczba orłów w  $n$  rzutach) i  $\frac{R_n}{n}$  dążą do  $\frac{1}{2}$ . Odejmując,

widzimy że  $\frac{O_n - R_n}{n} \rightarrow 0$ , ale nie daje to żadnych specjalnych

informacji o granicy  $\lim(O_n - R_n)$ . Co znaczy, że  $\frac{O_n}{n}$  dążą do

$\frac{1}{2}$ ? Jest to tylko (to właśnie orzeka prawo wielkich liczb)

zbieżność „według prawdopodobieństwa”. Precyzując ten termin powiemy, że ciąg zmiennych losowych  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  „dąży” do liczby  $a$ , (co będziemy oznaczali przez  $X_n \rightarrow a$ ), jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  mamy

$$(1) \quad \lim P\{|X_n - a| > \varepsilon\} = 0.$$

Tego typu zbieżność w teorii prawdopodobieństwa nazywamy właśnie zbieżnością stochastyczną lub zbieżnością według prawdopodobieństwa. Intuicyjnie znaczy ona, że prawdopodobieństwa odchyień większych od  $\varepsilon$  są dla dużych  $n$  dowolnie małe.

W naszym przypadku

$$(2) \quad \frac{O_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{R_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

oraz, co łatwo z tego wynika,

$$\frac{O_n - R_n}{n} \rightarrow 0.$$

Ciekawe jest następujące pytanie: co można powiedzieć o ciągu różnic między liczbą orłów i reszek, tzn. o ciągu  $\{O_n - R_n\}_{n=1}^{\infty}$  lub jeżeli ktoś woli  $\{R_n - O_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Okazuje się, że ciągi te są nieograniczone w tym samym sensie, w którym powyższe ciągi „dążyły” do  $1/2$  lub  $1$ . Dokładniej, pokażemy że dla każdego  $\varepsilon > 0$  i każdego  $k$  naturalnego

$$P\{|O_n - R_n| \leq k\} < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych  $n$ . Znaczący to, że dla dostatecznie dużych  $n$  prawdopodobieństwo że  $|O_n - R_n|$  nie przekroczy liczby  $k$  jest dowolnie małe lub inaczej, prawdopodobieństwo że  $|O_n - R_n|$  przekroczy  $k$  jest dowolnie bliskie 1.

Przejdźmy do dowodu. Pokażemy, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  i dowolnego  $k$  istnieje liczba  $N$  taka, że dla wszystkich  $n > N$

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k\} < \varepsilon$$

(zastąpiliśmy  $n$  przez  $2n$  oraz  $k$  przez  $2k$  w celu uproszczenia rachunków).

Mamy  $|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k \Leftrightarrow |O_{2n} - n| \leq k$ ,

stąd

$$\begin{aligned} P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k\} &= P\{|O_{2n} - n| \leq k\} = P\{O_{2n} = n - k \vee \\ &\vee O_{2n} = n - k + 1 \vee \dots \vee O_{2n} = n + k - 1 \vee O_{2n} = n + k\} = \\ &= P\{O_{2n} = n - k\} + P\{O_{2n} = n - k + 1\} + \dots + \\ &+ P\{O_{2n} = n + k - 1\} + P\{O_{2n} = n + k\}. \end{aligned}$$

Największym spośród  $2k + 1$  składników jest  $P\{O_{2n} = n\}$  (najbardziej prawdopodobną liczbą orłów w  $2n$  rzutach monetą jest  $n$ ). Mamy więc

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k\} \leq (2k + 1) P\{O_{2n} = n\}$$

ale

$$P\{O_{2n} = n\} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga (zob. Delta 7/1981)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

otrzymujemy

$$P\{O_{2n} = n\} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{2\pi n e^{-2n} n^{2n} n^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

a stąd

$$P\{|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k\} \leq \frac{2k + 1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Niech  $\varepsilon > 0$  i  $k$  będą dowolnymi ustalonymi liczbami. Ponieważ

ciąg  $\left\{\frac{2k + 1}{\sqrt{\pi n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny do zera, to istnieje takie  $N$ , że dla

$n > N \left(\geq \frac{(2k + 1)^2}{\pi \varepsilon^2}\right)$  mamy  $\frac{2k + 1}{\sqrt{\pi n}} < \varepsilon$  no i już. Przykładowo

dla  $k = 250$ ,  $\varepsilon = 0,001$  mamy  $N > 79\,896\,100\,000$  (przy 160 miliardach rzutów różnica między liczbą orłów a reszek przekroczy 500 z prawdopodobieństwem 99,9%).

Wystarczy więc rzucać „dowolnie długo”, aby nadwyżki jednego wyniku nad drugim stały się dowolnie duże z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności. Fakt ten na ogół nie jest znany, „zdrowy rozsądek” podsuwa bowiem myśl, że liczby wyników poszczególnych rodzajów wykazują tendencję do wyrównywania się w miarę coraz dłuższych serii prób.

Rozważania dotyczące rzutów monetą można uogólnić na dowolny schemat Bernoulliego. Jeżeli przez  $S_n$  oznaczymy liczbę sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$ , to prawo wielkich liczb Bernoulliego orzeka, że

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow p.$$

Wartością oczekiwaną liczby sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego jest  $np$ . W sposób analogiczny jak poprzednio można wykazać, że wyrazy ciągu  $\{|S_n - np|\}_{n=1}^{\infty}$  będą większe od dowolnej liczby z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności dla dostatecznie dużych  $n$ . Przykładowo, jeżeli rozpatrujemy rzuty kostką i  $S_n$  oznacza liczbę „szóstek” w  $n$  rzutach, to

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \frac{1}{6},$$

a ciąg  $\left\{|S_n - \frac{n}{6}|\right\}_{n=1}^{\infty}$  jest nieograniczony.

Dokładniej, dla zmiennej losowej  $S$  o rozkładzie Bernoulliego mamy z prawdopodobieństwem 1:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p)} \ln \ln n} = 1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p)} \ln \ln n} = -1.$$

W jednym z poprzednich numerów *Delty* (12/1982) T. Kwast pokazał, że prawie wszystkie gwiazdy układają się na diagramie Hertzsprunga-Russella wzdłuż pewnych, określonych linii. W szczególności ogromna większość gwiazd leży na ciągu głównym. Chcemy dzisiaj zaprezentować inny, również bardzo często używany diagram, tzw. diagram dwukolorowy. Zanim przejdziemy do jego omawiania — parę słów przypomnienia.

U-B

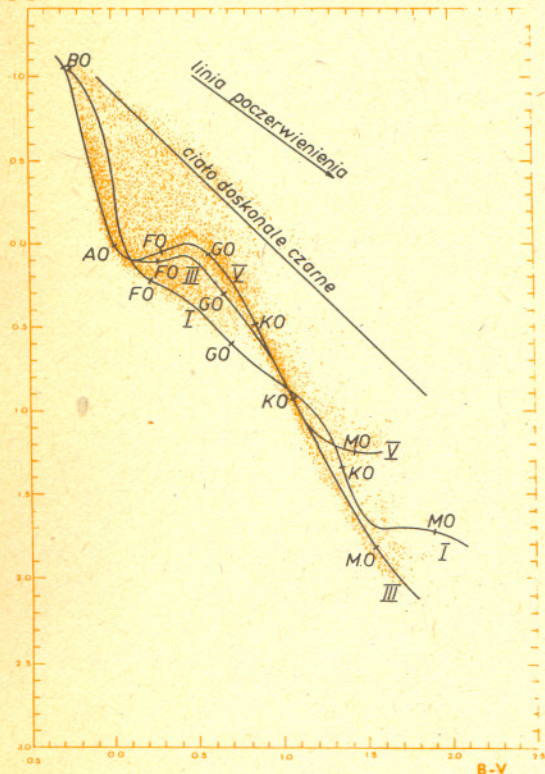


Diagram dwukolorowy dla 46 tysięcy gwiazd

Wszystkie pojedyncze gwiazdy dzieli się na typy i klasy w zależności od ich parametrów. I tak, ze względu na temperaturę powierzchni wyróżniamy kilka typów, oznaczając je literami O (> 30000 K), B, A, F, G, K i M (< 3500 K). Można podzielić również gwiazdy na klasy w zależności od ich rozmiarów: nadolbrzymy (klasa I), jasne olbrzymy (II), olbrzymy (III), podolbrzymy (IV) i karły (V). Istnieją jeszcze mniejsze gwiazdy niż karły, ale nie będziemy się nimi tu zajmować.

Temperaturę i rozmiary gwiazd stosunkowo łatwo wyznaczamy analizując ich widma. Dużym ułatwieniem jest tutaj stosowanie tzw. fotometrii wielobarwnej. Otóż okazuje się, że wystarczy zmierzyć jasność gwiazdy w dwóch długościach fali (kolorach, np. niebieskim i żółtym), aby z dość dobrą dokładnością wyznaczyć temperaturę jej powierzchni. Bardzo często stosowana jest w astronomii fotometria trójbarwna UVB (ultraviolet, blue, visual). Wyniki obserwacji gwiazd podaje się w postaci trójki liczb: V (jasność w barwie żółtej), B-V („kolor I”, o ile gwiazda w barwie niebieskiej jest słabsza niż w barwie żółtej) i U-B („kolor II”, nadfiolet – błękit). Okazuje się, że kolory te zachowują się również w pewien określony sposób, co widać na rysunku. Na jego osiach umieszczono oba kolory. Przedstawiono na nim kolory ponad 46000 gwiazd, wszystkich, których kolory zmierzono do 1975 r.

Zaznaczono kilka linii, wzdłuż których układu się większość gwiazd. 3 linie krzywe są to oczekiwane kolory dla ciągu głównego (V klasa jasności), olbrzymów (III) i nadolbrzymów (I). Linia prostą zaznaczono kolory ciała doskonale czarnego, tzn. takiego ciała, które emituje tyle samo światła, co pochłania. Jak widać, wiele gwiazd układu się powyżej krzywych I, III i V. Zagadka ta została wyjaśniona z chwilą odkrycia istnienia materii międzygwiazdowej, która pochłania silnie promieniowanie krótkofalowe, co powoduje, że gwiazdy wydają się bardziej czerwone, niż to wynika z temperatury ich powierzchni. Zjawisko to jest bardzo podobne do obserwowanego poczerwienienia Słońca nisko nad horyzontem, kiedy to promienie świetlne muszą przebyć dużo dłuższą drogę w atmosferze, niż wtedy, gdy Słońce jest np. w zenicie. Łatwo pokazać, że w wyniku poczerwienienia międzygwiazdowego kolory gwiazd przesuwają się w prawo w dół na diagramie dwukolorowym, wzdłuż prostej równoległej do strzałki zaznaczonej na rysunku. A więc znając klasę jasności gwiazdy można łatwo wyznaczyć wielkość poczerwienienia, co z kolei (jeśli znamy rozkład materii międzygwiazdowej) pozwala na oszacowanie odległości gwiazdy.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 319. Czy szereg (utworzony z kolejnych liczb pierwszych)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3+5}} + \frac{1}{\sqrt{7+11+13}} + \frac{1}{\sqrt{17+19+23+29}} + \dots$$

jest zbieżny, czy rozbieżny?

Mówimy, że szereg  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$  jest zbieżny, gdy ciąg sum częściowych  $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots$  jest zbieżny.

Rozwiązanie na str. 14.

M 320. Wykazać, że równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$  o całkowitych nieparzystych współczynnikach  $a, b, c$  nie może mieć pierwiastków wymiernych.

Rozwiązanie na str. 8.

M 321. Wykazać, że jeżeli  $H$  jest ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) ostrokątnego trójkąta  $ABC$  o bokach  $a, b, c$ , to odległości  $x, y, z$  punktu  $H$  od wierzchołków  $A, B, C$  spełniają równanie  $ayz + bzx + cxy = abc$ .

Rozwiązanie na str. 13.

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 128. Jednorodne pole magnetyczne porusza się z prędkością  $u$ . Prostopadle do kierunku indukcji tego pola wstrzelono naładowaną cząstkę o prędkości  $v$  (patrz rysunek). Spełniony jest przy tym warunek:  $|u| \ll c$  i  $|v| \ll c$ .

Wiadomo, że siła, z jaką pole magnetyczne działa na poruszający się w nim ładunek, nie wykonuje pracy, zatem po opuszczeniu pola cząstka powinna wracać z identyczną energią

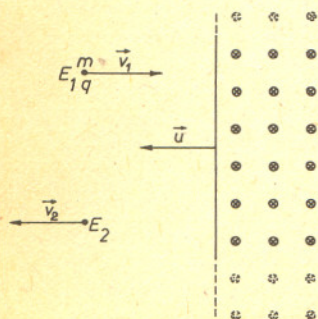
kinetyczną  $E_2 = \frac{mv^2}{2}$ .

Jednakże prowadząc rozważania w układzie odniesienia związanym z polem magnetycznym

i przechodząc ponownie do układu laboratoryjnego otrzymuje się wynik  $E_2 = \frac{m(v+2u)^2}{2}$

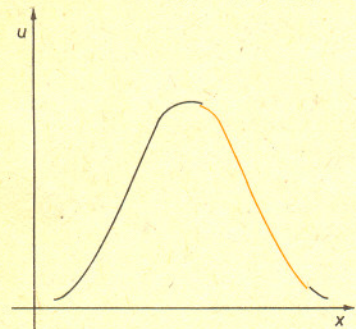
Wyjaśnić sprzeczność.

Rozwiązanie na str. 15.



# Nieliniowe fale stacjonarne

Dr Stefan  
WOJCIECHOWSKI



Rys. 1



Rys. 2

Rozchodzenie się sygnału w ośrodku fizycznym opisywane jest równaniami falowymi. Ich postać istotnie zależy zarówno od własności ośrodka, jak i od energii sygnału. Jak dotychczas poznaliśmy dosyć dobrze własności liniowego równania falowego, czyli takiego, że suma dwóch dowolnych jego rozwiązań jest również rozwiązaniem. Tylko w nielicznych przypadkach natomiast udało się wyznaczyć ewolucję czasową fal nieliniowych.

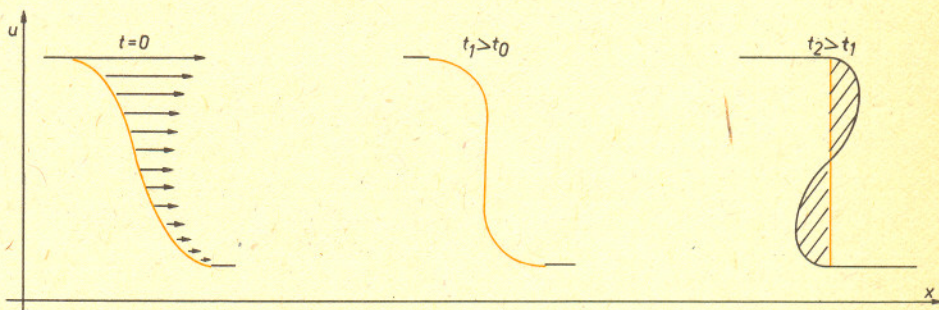
Rozważmy na początek najprostsze równanie falowe

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

gdzie  $u(x, t)$  jest amplitudą fali, zaś  $c$  prędkością rozchodzenia się sygnału. Jeśli prędkość ta jest stała, to rozwiązaniem równania jest fala stacjonarna  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  wędrująca z prędkością  $c$  w prawo, o profilu zadanym przez warunek początkowy  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Kształt profilu w chwili początkowej możemy obrać w formie np. paczki falowej (rys. 1) albo frontu falowego jak na rysunku 2.

Na ogół prędkość rozchodzenia się sygnału nie jest stała i może zależeć zarówno od położenia oraz czasu, jak i od amplitudy. Jeśli jednak ograniczymy się do stacjonarnego i przestrzennie jednorodnego ośrodka reagującego na zaburzenie nieliniowo, to wtedy  $c$  jest tylko funkcją  $u$ . W najprostszym przypadku  $c(u) = u$ , czyli

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$



Rys. 3

Wzrost prędkości z amplitudą powoduje skracanie się czoła fali w wyniku doganiania go przez zaburzenia o dużej amplitudzie (rys. 3). W końcu amplituda staje się niejednoznaczna funkcją położenia i następuje załamanie się jak dla fal na wodzie. W przypadku fali dźwiękowej natomiast oznacza to tworzenie się frontu fali uderzeniowej (patrz artykuł A. Kuszla, *Delta* 10/1981). W opisie takich fal, jak fala dźwiękowa, niejednoznaczność amplitudy usuwa się przez wprowadzenie nieciągłego czoła fali, które umieszcza się w takim położeniu, żeby zakresowane pola po obu stronach nieciągłości były równe. Warunek ten wynika z zasady zachowania energii.

Czy zatem w świecie fal nieliniowych nic nie pozostaje ze statecznej wędrowki niezmiennego profilu falowego? Byłoby tak, gdyby nie fakt, że istnieją dwa efekty, które pominięto w równaniu (2), a mianowicie dyssypacja (czyli rozpraszanie) energii oraz rozplywanie się fal wskutek dyspersji. Każdy z nich wystarczy, żeby skompensować zmianę kształtu fali wywołaną zależnością prędkości od amplitudy. Co więcej, równoważenie się przeciwnych wpływów nieliniowości i dyssypacji (lub dyspersji) umożliwia powstanie fali stacjonarnej. Są to jednak fale o bardzo szczególnych profilach, podczas gdy w przypadku równania (1) każdy początkowy profil rozchodzi się bez zmiany kształtu.

## Wynik równowagi efektów nieliniowych i dyssypacji: front falowy Burgersa.

Uwzględnienie rozpraszania energii propagującej się fali wymaga uzupełnienia równania (2)

członem  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , co daje tzw. równanie Burgersa

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Prędkość fali jest proporcjonalna do amplitudy, a mały parametr  $\mu$  mierzy tempo rozpraszania energii. Tak otrzymane równanie opisuje rozchodzenie się fal akustycznych w gazie wzdłuż długiej, cienkiej rury, gdy natężenie fali można przyjąć za stałe na całym przekroju poprzecznym. Dodatkowo trzeba także założyć, że nieduże są prędkości przemieszczania się gazu. Amplituda  $u(x, t)$  ma wtedy znaczenie prędkości w punkcie  $x$  i chwili  $t$  bardzo cienkiej warstwy gazu.



### Rozwiązanie zadania M 321

Mamy  $S_{ABC} = S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}$  i ponieważ  $\sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle AHC = 180^\circ - \sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle C$ , więc otrzymujemy

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} yz \sin A + \frac{1}{2} zx \sin B + \frac{1}{2} xy \sin C$$

( $R$  jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ ).

$$\text{Równocześnie } \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\sin C = \frac{c}{2R} \text{ i wobec tego } \frac{abc}{4R} =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{ayz}{R} + \frac{bzx}{R} + \frac{cxy}{R} \right), \text{ skąd wynika}$$

$$\text{równość } abc = ayz + bzx + cxy.$$

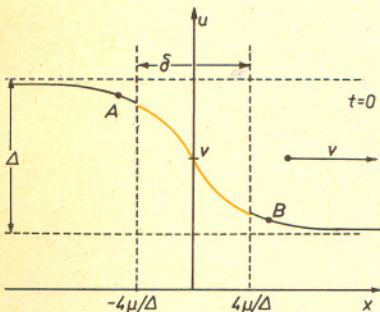


### Rozwiązanie zadania M 319

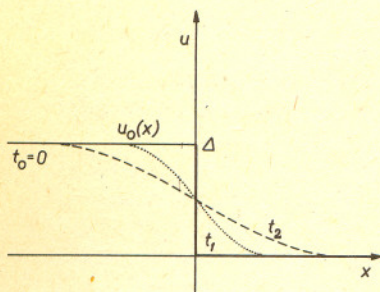
Niech  $a_1 = 1, a_2 = 3 + 5, a_3 = 7 + 11 + 13,$  itd. Przez  $b_1, b_2, b_3, \dots$  oznaczmy zaś odpowiedniej długości sumy kolejnych liczb parzystych:  $2, 4 + 6, 8 + 10 + 12, \dots$ . Dla  $k > 2$  mamy zatem  $a_k \geq b_k$ . Ponieważ jednak  $b_k = k(k^2 + 1) > k^3$ , więc

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_k}} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

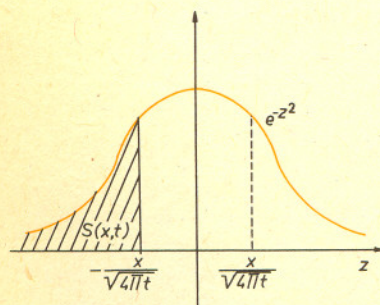
a suma tego ostatniego szeregu nie przekracza 2.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Żeby zrozumieć wpływ dyssypacji na zachowanie się rozwiązań, poszukamy fali stacjonarnej  $u(x, t) = f(x - vt)$ . Wstawienie  $u(x, t)$  do równania (3) pozwala wyznaczyć następujący front faldy:

$$(4) \quad f(x - vt) = v + \frac{\Delta}{2} \operatorname{th} \left[ \frac{\Delta}{4\mu} (vt - x) \right]$$

o kształcie wykresu tangensa hiperbolicznego (rys. 4). Widać zatem, że o ile składnik nieliniowy  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  powodował skracanie się czoła fali kończące się falą uderzeniową (rys. 3), to człon dyssypacyjny wpływa przeciwnie wymuszając rozplywanie się profilu fali. Efektem równowagi między tymi procesami jest fala stacjonarna (4). Ilościowo wygląda to następująco: Człon dyssypacyjny jest proporcjonalny do  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , a człon nieliniowy rośnie z  $\Delta$ . Przy

dostatecznie małej szerokości  $\delta$  frontu faldowego druga pochodna  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  w punktach A i B

wykresu (rys. 4) staje się na tyle duża, żeby oba człony były porównywalne, a efekty ich wpływu wzajemnie się kompensowały. Dlatego szerokość frontu faldowego dana jest zależnością

$$\delta = \frac{8\mu}{\Delta}, \text{ co zapewnia, że zarówno ze wzrostem amplitudy całkowitej } \Delta, \text{ jak i ze zmniejszaniem}$$

się parametru  $\mu$  druga pochodna  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  osiągnie dostatecznie dużą wartość w punktach A i B.

Natomiast jednolita prędkość  $v$  fali stacjonarnej (4) jest wynikiem uśrednienia się ruchu elementów fali o prędkościach zmieniających się w przedziale od  $v - \frac{\Delta}{2}$  do  $v + \frac{\Delta}{2}$ .

Zauważmy, że równanie Burgersa bez członu nieliniowego to również równanie dyfuzji

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

opisujące rozchodzenie się ciepła, którego ogólne rozwiązanie ma postać

$$(6) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x-y)^2}{4\mu t} \right] u_0(y) dy.$$

Na ogół nie potrafimy występującej tu całki obliczyć analitycznie. Z tego względu, dla uproszczenia rozważań przyjmijmy warunek początkowy  $u(x, 0) = u_0(x)$  jak na rysunku 5. Jest to uzasadnione, gdyż funkcja  $u_0(x)$  bardzo dobrze przybliża kształt fali (4) w chwili  $t = 0$  dla dużych  $\Delta$ , bardzo małych wartości parametru  $\mu$  oraz  $v = \frac{\Delta}{2}$ . Rozwiązanie (6) sprowadza się

$$\text{wtedy do całki} \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[ -\frac{(x-y)^2}{4\mu t} \right] \Delta dy = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}} \exp(-z^2) dy$$

nietrudnej do zbadania graficznie. Wartość amplitudy jest równa  $u(x, t) = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} S(x, t)$ , gdzie

$S(x, t)$  oznacza zakreskowane pole na rys. 6, a stąd można już łatwo odczytać zmianę frontu faldowego z upływem czasu.

Dotychczasowe rozważania, pomimo że dotyczyły szczególnego rozwiązania, pozwoliły nam zrozumieć rolę poszczególnych składników równania Burgersa. Ale fala stacjonarna (4) ma również charakter uniwersalny: można wykazać, że każde zaburzenie początkowe spełniające

$$\text{warunki} \quad u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v + \frac{\Delta}{2} \text{ i } u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} v - \frac{\Delta}{2}$$

przybiera dla dostatecznie dużych  $t$  postać (4), czyli wskutek dyssypacji wszystkie „zmarszczki” zaburzenia początkowego wtapiają się stopniowo w profil wędrującego na prawo tangensa hiperbolicznego.

W świetle uniwersalności rozwiązania (4) zrozumiała staje się również przyczyna wprowadzenia nieciągłego czoła fali na rys. 3. W granicy przy  $\mu \rightarrow 0$  równanie Burgersa przechodzi w (2), a rozwiązanie (4) staje się falą w postaci nieciągłego progu o skoku  $\Delta$ . Próg ten porusza się na prawo z prędkością  $v$ . Taka też ustala się (dla dużych  $t$ ) prędkość nieciągłości na rys. 3.

### Wynik równowagi efektów nieliniowych i dyspersji: soliton

Najprostszym rozwiązaniem liniowego równania faldowego (1) jest płaska fala monochromatyczna  $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  poruszająca się ze stałą prędkością  $c = \frac{\omega}{k}$ . Każde inne (a ściślej:



**Rozwiązanie zadania F 128**

Prawidłowym wynikiem jest:  $E_2 = \frac{m(v+2u)^2}{2}$

Sprzeczność wynika z pominięcia w układzie laboratoryjnym pola elektrycznego, związanego z poruszającym się polem magnetycznym, którego praca zwiększa energię kinetyczną cząstki.

Gdy cząstka w układzie laboratoryjnym ma prędkość  $v$ , wtedy w układzie odniesienia poruszającym się wraz z polem magnetycznym jej prędkość:  $v' = v - u$ .

Siła działająca na cząstkę w tym układzie:  
 $F' = q(v' \times B') = qv \times B' - qu \times B'$

W obrębie pola magnetycznego cząstka porusza się po półokręgu, którego promień jest równy

$$R = \frac{m(v+u)}{|q|B'}$$

Zasada względności wymaga, aby 1°  $F = F'$  czyli  $F = qv \times B' - qu \times B'$ , wtedy równania Newtona w obu układach mają taką samą postać.

2° W obu układach cząstka ulegała przesunięciu wzdłuż granicy pola o tę samą odległość  $2R$ .

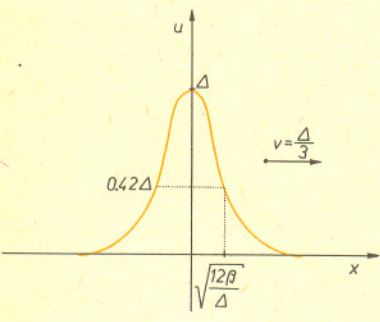
Wzór 1° jest słuszny dla dowolnej wartości  $v$ , zatem gdy ładunek pozostaje w spoczynku względem układu laboratoryjnego ( $v = 0$ ), działa nań tylko pole elektryczne, którego natężenie  $E = -u \times B'$ . Przy prędkościach różnych od zera siła  $F$  ma więc postać

$$F = q(v \times B' + E)$$

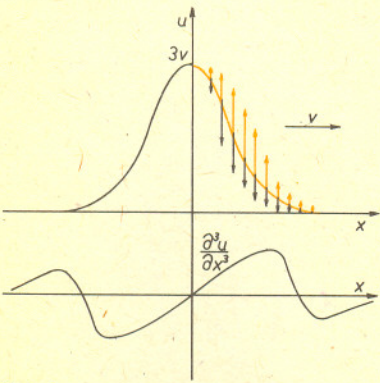
W warunkach zadania pole  $E$  jest jednorodne, skierowane równoległe do granicy pola magnetycznego i ma wartość  $E = u \times B'$ . W trakcie przelotu przez obszar pola magnetycznego pole  $E$  wykonuje pracę:

$$W = \int qE \cdot v dt = q \int Ev \cos(v, E) dt = |q|E \cdot 2R = 2mu(v+u)$$

Dokładnie tyle samo wynosi różnica energii kinetycznych  $E_1$  i  $E_2$ .



Rys. 7



Rys. 8

każde parzyste w chwili  $t = 0$  rozwiązanie można przedstawić w postaci sumy takich fal o różnych częstotliwościach:

$$u(x, t) = \int A(k) \cos(\omega t - kx) dk, \quad \text{gdzie } \frac{\omega(k)}{k} = c(k)$$

Tylko dla fali opisywanej równaniem (1) prędkość jest taka sama dla dowolnego  $k$ . Jeśli natomiast rozważymy równanie falowe np.:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

to fala płaska będzie także jego rozwiązaniem, ale pod warunkiem, że  $\omega = -\beta k^3$ . Odpowiada to zależności prędkości fali  $c(k) = -\beta k^2$  od jej długości.

Rozwiązanie dowolnego równania liniowego o tej własności także można przedstawić w postaci sumy fal płaskich, ale poruszających się z różnymi prędkościami. W wyniku tego następuje zmiana kształtu profilu początkowego, co początkowo przejawia się w rozplywaniu się paczki falowej, a następnie w jej rozpadzie na mniejsze pakiety fal oraz ciągi fal sinusoidalnych. Szczegółowe zachowanie się rozwiązań wyznaczone jest przez związek dyspersyjny  $\omega = \omega(k)$ .

Uwzględnienie efektów słabej dyspersji w równaniu nieliniowym może natomiast prowadzić do formowania się fali stacjonarnej  $u(x, t) = f(x - vt)$ . Tak się właśnie dzieje, jeśli równanie (2)

uzupełnimy członem dyspersyjnym  $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ , gdzie mały współczynnik  $\beta$  określa szybkość dyspersji;

otrzymamy wtedy tzw. równanie Kortewega — de Vriesa (KdV)

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Opisuje ono rozchodzenie się na płytkiej wodzie długich fal powierzchniowych o małej amplitudzie. Amplituda  $u$  jest w tym przypadku wysokością fali ponad powierzchnię swobodną wody.

Postaramy się zrozumieć, jak dyspersja wpływa na formowanie się fal nieliniowych. W tym celu rozpatrzmy falę stacjonarną (rys. 7)

$$(10) \quad u(x, t) = \Delta \frac{1}{\text{ch}^2 \left[ \sqrt{\frac{\Delta}{12\beta}} \left( x - \frac{\Delta}{3} t \right) \right]}$$

nazywaną solitonem. Prędkość tej fali wyznaczona jest przez amplitudę  $v = \frac{\Delta}{3}$ , a szerokość

zależy od ilorazu amplitudy i współczynnika dyspersji, która równoważy tutaj zmiany kształtu fali związane z nieliniowością. Bardzo słaba dyspersja wymaga zatem utworzenia się na tyle wąskiej paczki falowej, żeby duże wartości  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  uczyniły człon dyspersyjny porównywalnym

z członem nieliniowym  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Dokładniej prześledzimy wpływ dyspersji rozpatrując liniową część równania KdV, czyli równanie (8). Ścisłe rozwiązanie tego równania zawiera trudne do zbadania całki, ale szczęśliwie można się ograniczyć do przeanalizowania tendencji zmian pakietu z rys. 7 w ciągu bardzo krótkiego przedziału czasowego  $\Delta t$ . Jest to uzasadnione, ponieważ profil (10) nie zmienia kształtu, a więc w przeciągu czasu  $\Delta t$  wpływ dyspersji powinien przeciwdziałać efektom nieliniowym.

Rozwiązanie w chwili  $t + \Delta t$  można przybliżyć następująco:

$$(11) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \Delta t + (\text{mała proporcjonalna do } \Delta t^2),$$

a korzystając z równania (8) mamy

$$(12) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left[ -\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) \right] \Delta t$$

Wobec tego prędkość wzrostu amplitudy jest równa  $-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ .

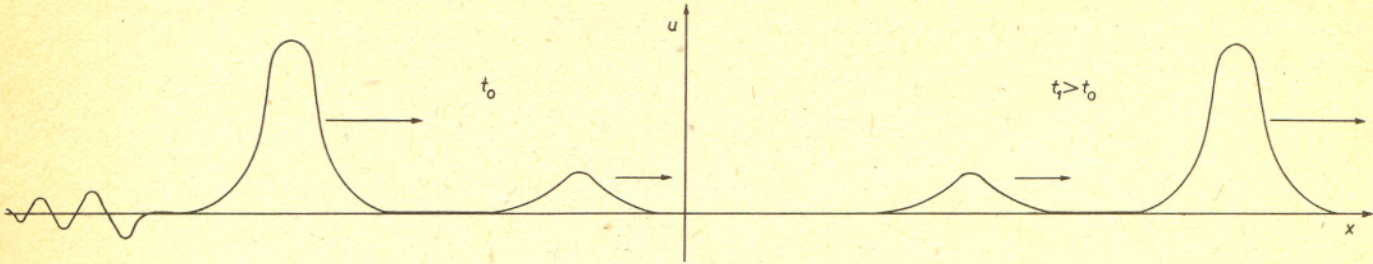
Zilustrowaliśmy to na rys. 8, gdzie czarne strzałki określające kierunek zmiany amplitudy są proporcjonalne do wartości trzeciej pochodnej  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t)$ . Uwzględnienie nieliniowości wymaga

dorysowania strzałek pomarańczowych o długości proporcjonalnej do  $-u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Na czole fali (zaznaczonym kolorem pomarańczowym), które podlega procesowi nieliniowego skracania się, kierunki strzałek są przeciwne. Wypadkowa prędkość wzrostu amplitudy wycinka wykresu



w punkcie  $x$  jest ich sumą i wynosi  $-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Jest ona równa prędkości wzrostu wskutek

przesuwania się fali, czyli wynosi  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x-vt) = -v \frac{\partial u}{\partial x}$ , gdzie  $v$  oznacza prędkość solitonu.



Rys. 9

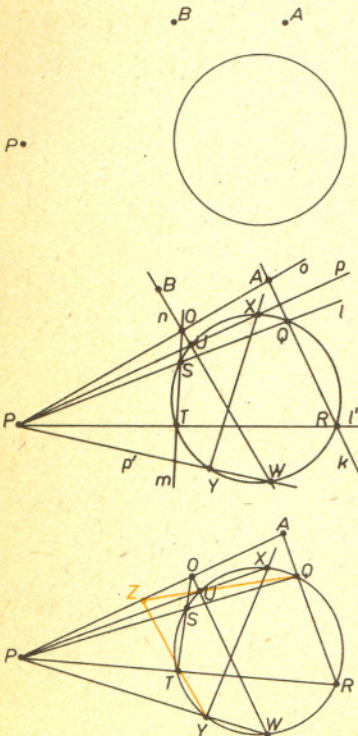
Solitony odgrywają równie uniwersalną rolę w opisie ewolucji czasowej rozwiązań równania KdV, jak fala Burgersa w opisie rozwiązań równania Burgersa. Można wykazać, że dowolne zaburzenie początkowe spełniające warunki  $u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  oraz  $u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  rozpada się (rys. 9) na pewną liczbę solitonów oraz oscylujący ogon, którego amplituda zanika nie wolniej niż  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . Po dostatecznie długim czasie pozostają więc tylko solitony poruszające się na prawo ze stałą prędkością proporcjonalną do amplitudy.

W trakcie ewolucji większe solitony doganiają mniejsze, przez moment tworzą z nimi wspólną paczkę falową, a następnie odsuwają się już z prawej strony od solitonu mniejszego. W rezultacie solitony ustawiają się w kolejności wzrastających amplitud. Potem następuje już tylko ich wzajemne oddalanie się od siebie na skutek różnic prędkości.

Rozpatrywane przez nas równania: KdV i Burgersa odgrywają szczególnie ważną rolę w teorii fal nieliniowych. Przyczyna leży w tym, że ściśle równania hydrodynamiki i aerodynamiki są zbyt skomplikowane, żebyśmy mogli znaleźć ich pełne rozwiązania i trzeba się uciekać do metod przybliżonych.

Uwzględnienie najważniejszych poprawek do równania (2) wynikających z dyspersji i dyssypacji na ogół prowadzi do równania KdV lub Burgersa. Inną, niezwykle ważną cechą tych równań jest możliwość wyznaczenia (pomimo nieliniowości) rozwiązań ogólnych, co stwarza możliwość daleko głębszego wniknięcia w naturę fal nieliniowych niż pozwalają na to elementarne rozważania tego artykułu.

## Już umiemy



W numerze 1/1982 rozpoczęliśmy serię *Zadań, których nie umiemy rozwiązać* następującym:

Dany jest okrąg i trzy punkty  $A, B, P$ . Narysować proste przez  $A$  i  $B$  wyznaczające na okręgu takie cięciwy  $UW$  i  $XY$ , żeby proste  $UX$  i  $WY$  przecinały się w punkcie  $P$ .

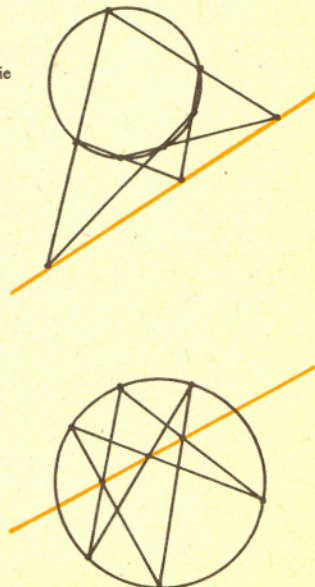
Istotnie nie umieliśmy rozwiązać tego zadania, a dziś, dzięki naszemu Czytelnikowi, Karolowi Kamińskiemu (uczniowi V klasy TM w Piotrkowie Trybunalskim), już umiemy. Nadesłał nam bowiem następujące rozwiązanie (używał tylko linijki!):

Przez punkt  $A$  kreślimy dowolną sieczną  $k$  uzyskując punkty  $Q$  i  $R$  i dalej, jak na rysunku, znajdujemy kolejno proste i punkty  $l, l', S, T, m, o, O, n, U, W, p, p', X$  i  $Y$ . Rozwiązanie to jest dobre, bardzo za nie dziękujemy.

Pozostałym Czytelnikom dajemy teraz szansę — nie czytajcie dalej, sami wykażcie poprawność rozwiązania.

Sposób dowodu, który tu proponujemy, opiera się na twierdzeniu Pascala należącym do geometrii rzutowej i mówiącym co następuje: Przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w stożkową (a więc nie tylko okrąg, ale również elipse, parabolę bądź hiperbolę) przecinają się na jednej prostej.

Ze względu na rzutowość tego twierdzenia (ostatnim razem o geometrii rzutowej pisaliśmy w *Delcie* 5/1982) w przypadku euklidesowym mogą oczywiście mieć miejsce trzy możliwości: pierwsza — opisana w twierdzeniu (jeśli wszystkie punkty przecięcia istnieją), druga — gdy istnieją tylko dwa, prosta przez nie przechodząca jest równoległa do nieprzecinających się przeciwległych boków sześciokąta, trzecia — gdy wszystkie pary boków przeciwległych złożone są z prostych równoległych. Wykorzystamy to twierdzenie do dowodu, że prosta  $XY$  przechodzi przez punkt  $A$ . W sześciokącie  $QSTYWU$  boki przeciwległe przecinają się w punktach  $P, O$ , a więc i trzecia para boków przeciwległych musi się przeciąć w punkcie  $Z$  leżącym na prostej  $o$ . W sześciokącie  $XUQRTY$  dwa przecięcia to  $P$  i  $Z$ , a więc i trzecia para ( $QR$  i  $XY$ ) musi się przeciąć na prostej  $o$ , a więc w punkcie  $A$ . Konstrukcja p. Karola Kamińskiego jest więc poprawna i rozwiązuje także zadanie dla wszystkich stożkowych. Udowodnienie jego stwierdzenia, że o ile prosta  $n$  nie będzie przecinała okręgu w dwóch punktach, to dla takiego okręgu i takich punktów  $A, B, P$  rozwiązanie nie istnieje, pozostawiamy Czytelnikom.



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkiece rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

## Klub 44

### Zadania nr 43, 44, 45

Termin nadsyłania rozwiązań: 31.03.1983 r.

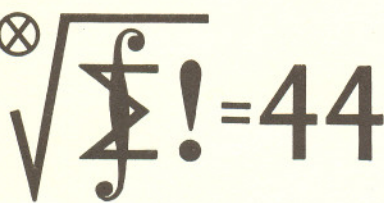
43. Dany jest czworościan  $ABCD$ . Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oznaczmy przez  $A_n, B_n, C_n$  punkty leżące odpowiednio na krawędziach  $AD, BD, CD$  takie, że  $A_nD = \frac{1}{n}AD, B_nD = \frac{1}{n}BD, C_nD = \frac{1}{n}CD$ . Niech  $P_n$  będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkty  $A_n, B_{n+1}, C_{n+2}$ . Udowodnić, że istnieje prosta zawarta we wszystkich płaszczyznach  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
44. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{500}.$$

45. Liczby rzeczywiste  $x_1, \dots, x_n$  spełniają układ równań

$$\cos x_1 = x_2, \cos x_2 = x_3, \dots, \cos x_{n-1} = x_n, \cos x_n = x_1.$$

Czy stąd już wynika, że  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ?



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Rozwiązania zadań z numeru 9/1982

31. Niech  $s_i = a_1 + \dots + a_i$ . Założenia dowodzonego twierdzenia, napisane w terminach ciągu  $\{s_i\}$ , przybierają postać warunków:  $s_{i+k} = s_i + s_k$  (dla wszystkich  $i$ ),  $s_k \geq 0$ . Teza orzeka istnienie wskaźnika  $m$  takiego, że  $s_n \geq s_m$  (dla  $n > m$ ). Otóż wystarczy za  $m$  przyjąć numer najmniejszej liczby w zbiorze  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Jeśli bowiem  $n$  daje przy dzieleniu przez  $k$  iloraz  $q$  i resztę  $r$  ( $1 \leq r \leq k$ ), to  $s_n = s_{r+qk} = s_r + qs_k \geq s_r \geq s_m$ .

32. Rysunki prezentują dwunastokąty mające 0, 1, 2, 3, 4, 6 i 12 osi symetrii, a więc 0, 1 i wszystkie dzielniki liczby 12. Ponieważ obrazem wierzchołka względem dowolnej osi symetrii jest wierzchołek, więc osi nie może być więcej niż 12. Wszystkie osie symetrii (dowolnego) wielokąta przecinają się w jednym punkcie i (ponieważ obrazem osi symetrii względem osi symetrii jest też oś symetrii) dzielą płaszczyznę na jednakowe kąty. Jeśli osi jest  $n > 1$ , kąt ten wynosi  $\pi/n$ . Zatem wykonując symetrie względem dwóch sąsiednich osi otrzymujemy obrót o kąt  $2\pi/n$  o środku w punkcie przecięcia osi, który zachowuje wielokąt. Obierzmy dowolny wierzchołek i obróćmy go o  $2\pi/n, 2 \cdot 2\pi/n, \dots, (n-1) \cdot 2\pi/n$ . Otrzymamy w ten sposób (wraz z obranym)  $n$  wierzchołków. Jeśli są jeszcze nie „użyte” wierzchołki, to obieramy jeden z nich i powtarzamy operację itd ... Po wyczerpaniu wierzchołków będzie ich  $mn = 12$ , gdzie  $m$  jest liczbą powtórzeń operacji. Ostatecznie  $n = 0$ , lub  $n \mid 12$ .

33. Czynniki mnożenia są liczby czterocyfrowe  $m$  i  $n$ . Druga i trzecia cyfra liczby  $n$  to 0 i 7. Pierwszą i czwartą cyfrę tej liczby oznaczmy przez  $x$  i  $y$ . Z zapisu działania wynika, że  $10^4 \leq ym < 10^5, 10^3 \leq 7m < 10^4, 10^3 \leq xm < 10^4, 10^7 \leq mn$ , skąd dostajemy nierówności  $x < y$  oraz  $n \geq m^{-1}10^7 = 7(7m)^{-1}10^7 > 7 \cdot 10^3$ , tak że  $x \geq 7$ . Z założenia  $x \neq 7$ . Zatem  $x = 8, y = 9, n = 8079, m \geq n^{-1}10^7 > 1237$ , a ponieważ  $xm = 8m < 10^4$ , więc  $m < 1250$ . Liczby  $m, xm, 7m, ym, mn$  piszą się bez użycia cyfry 7, wobec czego ostatnią cyfrą liczby  $m$  nie może być 1, 3, 7. Dla  $m \in \langle 1244, 1249 \rangle$  drugą cyfrą liczby  $7m$  jest siódemka. Pozostają cztery możliwe wartości  $m$ : 1238, 1239, 1240, 1242. Bezpośrednim sprawdzeniem przekonujemy się, że tylko  $m = 1238$  spełnia postawione warunki.

