

SPIS TREŚCI

NUMERU 12 (108)

Różne nietypowe metody
 oraz

Konkurs str. 1

Dwie gry str. 5
 i str. 9

Patrz w niebo str. 8

Zadania str. 15

Klub 44 str. 17

W następnym numerze:
 Wywiad z prof. dr Andrzejem
 Białynickim-Birulą

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
 dr Bogdan Cichocki
 dr hab. Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Tomasz Hofmokl
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bogdan Paczyński
 dr Zbigniew Płochocki
 doc. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 doc. dr Jerzy Sawicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 doc. dr Kazimierz Stepien

prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Stefan Turnau
 doc. dr Aniela Wolska
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.
 mgr Tomasz Chlebowski
 mgr Maciej Jędrzejczak
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
 dr inż. arch. Jacek Mazur
 dr Michał Szurek
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 2726/82 Z-86

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—
 Termin przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 25 listopada na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1983.
 — do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku 1983.

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach,
 w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę
 w tych oddziałach,
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW
 „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych
 i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW
 „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek
 bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta
 NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala
 Kolportażu Prasy i wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział
 w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest
 droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla
 zlecających instytucji i zakładów pracy.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
 „DELTE”:
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie
 Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik
 Deutschland,
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Spirale są wszędzie...



Gdy „mała delta” była jeszcze dodatkiem do „dużej”, w jednym z numerów pisaliśmy o spiralach. Opisywaliśmy, gdzie w przyrodzie (i technice) można spotkać spirale. A więc spiralę Archimedeusza zatacza mucha idąca wzdłuż promienia obracającej się płyty gramofonowej, spiralę logarytmiczną wykorzystuje się w obrotowych nożach (chodzi o to, by kąt cięcia był stały), a spiralna linia przecinająca południki Ziemi pod stałym kątem nazywa się loksodromą.

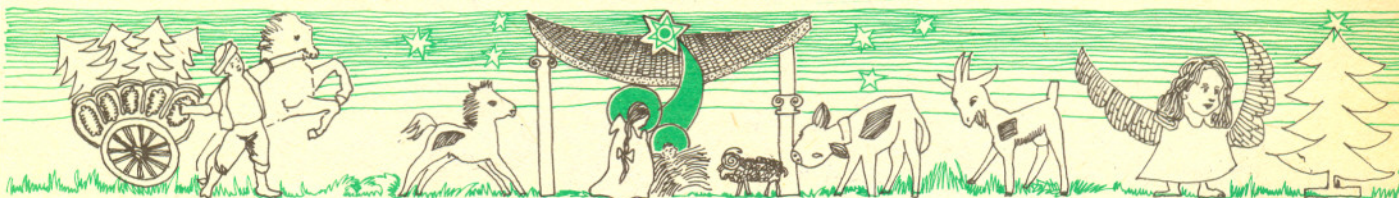
Nasz tegoroczny konkurs jest poświęcony spiralom właśnie, a konkretnie prosimy o

CIĘKAWY ZDJĘCIA SPIRAL

Można spiralę wytworzyć do potrzeb zdjęcia (np. puścić muchę z latarką po płycie) lub wyszperać ją w naturze.

Prosimy nie fotografować linii śrubowych (gwint, „spiralka” maszynki elektrycznej) ani cykloid.

Na zwycięzców czekają liczne nagrody.



Analiza wymiarowa

Mgr Tomasz TRATKIEWICZ

Nigdy nie zabieraj się do obliczeń, jeśli nie znasz odpowiedzi

John Archibald Wheeler

Prawa fizyki formułowane są jako relacje matematyczne między wielkościami fizycznymi. Relacje te muszą prowadzić do identycznych rezultatów niezależnie od użytych jednostek miar. Dlatego też zajmowanie się jednostkami, pomijając względy czysto pragmatyczne (wygoda obliczeń, kontrola poprawności rozwiązań) lub estetyczne (prostota czy elegancja matematycznego zapisu) nie wydaje się być, na pierwszy rzut oka, zbyt atrakcyjne.

W dalszym ciągu pokażemy w rozwiązywaniu jakich problemów może być pomocna analiza zależności fizycznych pod kątem jednostek miar — tzw. analiza wymiarowa. Warto przyrzeć się realnym możliwościom tej metody, gdyż niektórzy uważają ją za całkowicie zbędną, a inni skłonni są widzieć w niej narzędzie o niemal nieograniczonych możliwościach.

Każda wielkość fizyczna musi być wyrażona w ściśle zdefiniowanych i zrozumiałych dla każdego jednostkach. Umownie zapisuje się to w postaci

$$A = \{A\} [A],$$

gdzie A jest wielkością fizyczną, $\{A\}$ jej wartością liczbową, a $[A]$ — jednostką; np. $s = 2$ łokiec, s -długość; $\{s\} = 2$; $[s] =$ łokiec.

Jednostki obu stron równości (czy nierówności) muszą być zawsze identyczne, ponieważ nie ma żadnego sensu porównywanie wielkości fizycznych o różnych wymiarach. Podobnie jest z dodawaniem i odejmowaniem. Dopuszczalne jest natomiast mnożenie i dzielenie.

Wyrażenie funkcyjne postaci: \sin (droga), \log (ciśnienie) nie mają właściwie sensu, choć bywają czasami stosowane jako wygodny chwyt ułatwiający techniki rachunkowe (np. prostowanie funkcji) lub pewien skrót myślowy (np. definicja pH w chemii).

W zasadzie można dla każdej wielkości fizycznej zdefiniować jej własny wzorec. W równaniach fizycznych robiłoby się jednak wtedy od stałych wymiarowych, zapewniających jednorodność jednostek. Dlatego zawsze ogranicza się liczbę wzorców do niezbędnego minimum. Jednostki wielkości, którym przypisuje się wzorce to tzw. jednostki podstawowe. Pozostałe jednostki definiuje się na podstawie zależności spełnianych przez te wielkości. Np. wzorem definiującym jednostkę siły w układzie SI jest $F = am$, co zapisuje się w postaci

$[F] = \text{ms}^{-2}\text{kg}$ lub $[F] = \text{LT}^{-2}\text{M}$, gdzie L, T, M to dowolne wzorce długości, czasu i masy.



Z powyższych reguł wynika fakt stanowiący podstawę analizy wymiarowej — wymiar dowolnej wielkości fizycznej jest iloczynem potęg jednostek podstawowych. Poniżej przytaczamy kilka przykładów zastosowania analizy wymiarowej mających ilustrować tę metodę w działaniu, pokazać typowe wyniki, do jakich prowadzi oraz wskazać środki umożliwiające najefektywniejsze jej wykorzystanie.

A. Znaleźć pojemność elektryczną przewodzącej sfery znajdującej się w nieskończonym jednorodnym i izotropowym dielektryku.

Pojemność powinna zależeć od wymiaru liniowego — promienia oraz własności ośrodka — stałej dielektrycznej:

$$(1) \quad C = f(R, \epsilon).$$

Poszukujemy f w postaci

$$f(R, \epsilon) = D \cdot R^\alpha \cdot \epsilon^\beta, \text{ gdzie } D, \alpha, \beta \text{ — stałe bezwymiarowe.}$$

1. W układzie CGS

$$[C] = \text{cm}, [R] = \text{cm}, [\epsilon] = 1, \text{ czyli} \\ C = D(\epsilon) \cdot R.$$

2. W układzie SI

$$[C] = \text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2, [R] = \text{m}, \\ [\epsilon] = \text{m}^{-3} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2.$$

Porównując wymiary obu stron równości (1)

$$\text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{A}^2 = \text{m}^{\alpha-3} \text{s}^{4\beta} \text{kg}^{-\beta} \text{A}^{2\beta}$$

otrzymujemy układ równań

$$\alpha - 3\beta = -2, \quad \beta = 1.$$

Zatem $C = D' \epsilon R$.

Dokładne obliczenia dają $D(\epsilon) = \epsilon$, $D' = 4\pi$. Warto zauważyć, że

— zastosowanie układu SI dało lepsze rezultaty, co jest związane z większą liczbą jednostek podstawowych,

— przyjęcie, że C zależy dodatkowo od innych wielkości, np. gęstości czy ładunku, nie zmieniłoby wyniku.

B. Wahadło matematyczne o długości l ma w położeniu równowagi prędkość v_0 . O jaki kąt φ wychylił się to wahadło?

$$\varphi = f(v_0, l, g).$$

Postulujemy potęgową postać funkcji f

$$f(v_0, l, g) = C v_0^\alpha l^\beta g^\gamma.$$

Analizy dokonamy w układzie LT, tj. długość i czas przyjmujemy za wielkości podstawowe.

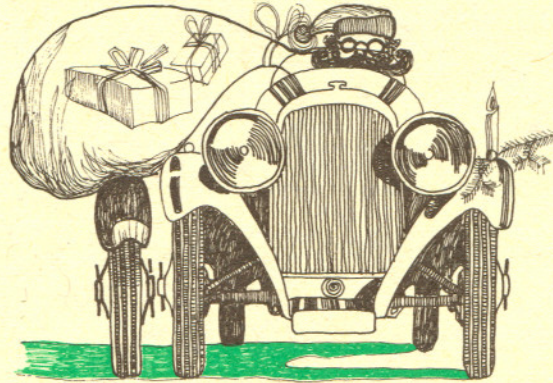
$$[\varphi] = 1, [l] = L, [g] = \text{LT}^{-2}, [v_0] = \text{LT}^{-1}.$$

Porównanie $[\varphi]$ i $[f]$ daje

$$\alpha = -2\gamma, \quad \beta = \gamma, \quad \text{czyli:}$$

$$\varphi = C \left(\frac{lg}{v_0^2} \right)^\gamma.$$

Ponieważ wielkość $\pi = lg/v_0^2$ jest bezwymiarowa, możemy stąd wywnioskować jedynie, że φ jest pewną funkcją π .



Po prześledzeniu tych przykładów jasne chyba będą następujące stwierdzenia:

1. Jeżeli u jest wielkością fizyczną zależną od wymiarowych wielkości X_1, \dots, X_{N-1}

$$u = f(X_1, \dots, X_{N-1}),$$

wtedy przy użyciu analizy wymiarowej można przedstawić ją w postaci

$$(1) \quad u = P(X_1, X_2, \dots, X_{N-1}) F(\pi_1, \pi_2, \dots),$$

gdzie $P(X_1, X_2, \dots, X_{N-1}) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_{N-1}^{\alpha_{N-1}}$, a π_1, π_2, \dots — wielkości bezwymiarowe utworzone z parametrów X_1, X_2, \dots, X_{N-1} .

W szczególności, gdy $u = \text{const.}$ i $[u] = 1$:

$$(2) \quad u = F(\pi_1, \pi_2, \dots),$$

natomiast gdy niemożliwe jest skonstruowanie wielkości bezwymiarowych:

$$(3) \quad u = CP(X_1, \dots, X_{N-1}).$$

2. Jeżeli wymiary u, X_1, \dots, X_{N-1} wyrażają się przez K jednostek podstawowych, to dla

$$N - K = 1$$

istnieje jednoznaczne rozwiązanie i można je znaleźć metodą analizy wymiarowej. Ma ono postać (3), gdzie nieokreślony pozostaje tylko bezwymiarowy współczynnik C . Jest to przypadek najbardziej korzystny, gdyż dostarcza najdokładniejszych informacji o poszukiwanej zależności. Warto zwrócić uwagę, że współczynnik jest przeważnie rzędu jedności.

Na zakończenie jeszcze kilka uwag. Za pomocą analizy wymiarowej nie możemy oczywiście odkrywać nowych praw fizycznych. Może ona dostarczać jedynie zależności wynikających z praw już dostępnych, a od naszej intuicji fizycznej zależy, do jakiego stopnia uda nam się zmniejszyć nieuniknione w tej metodzie niepewności (istotne jest np. właściwe wybranie jednostek podstawowych i układu parametrów).

Jednym z zastosowań analizy wymiarowej jest szacowanie wartości wielkości fizycznych czy też przybliżonego charakteru zależności opisujących zjawiska o złożonym modelu matematycznym. Metoda ta może też być pomocna w trakcie eksperymentów mających za zadanie wyznaczenie zależności pomiędzy wieloma parametrami. Dzięki możliwości tworzenia wielkości bezwymiarowych można znacznie zmniejszyć liczbę niezbędnych doświadczeń.

C. Jaki jest zasięg rzutu ciała o masie m wyrzuconego z prędkością v_0 pod kątem φ ? Opór ośrodka pomijamy.

$$l = f(v_0, g, \varphi, m).$$

Zakładamy

$$l = C \cdot v_0^\alpha \cdot g^\beta \cdot \varphi^\gamma \cdot m^\delta.$$

W układzie LMT równanie wymiarowe ma postać:

$$L = L^{\alpha+\beta} T^{-(\alpha+2\beta)} M^\delta.$$

Stąd

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + 2\beta = 0, \quad \delta = 0, \quad \text{czyli}$$

$$l = C(\varphi) \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

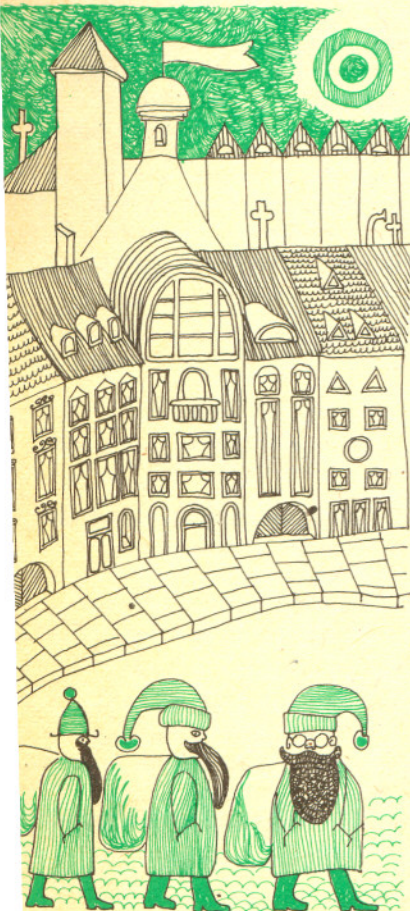
Prowadząc analizę wymiarową nieco inaczej można znaleźć także postać funkcji $C(\varphi)$. Zauważmy, że prędkość i przyspieszenie są wektorami, więc można prowadzić analizę niezależnie dla rzutów na oś x i oś y . Wystarczy w tym celu wprowadzić oddzielne wymiary dla osi poziomej (L_x) i pionowej (L_y).

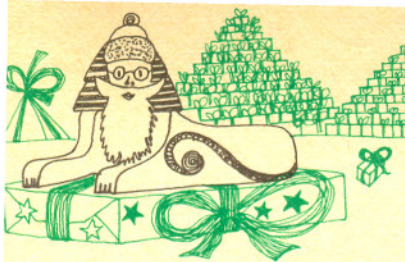
Teraz $l = f(v_{0x}, v_{0y}, g) = D v_{0x}^\alpha v_{0y}^\beta g^\gamma$ i z równania wymiarowego otrzymujemy

$$\alpha = 1, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \quad \text{a stąd}$$

$$l = C \cdot \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = C \cdot \frac{v_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{g}.$$

Stałą C można teraz wyznaczyć doświadczalnie — wystarczy zmierzyć zasięg dla jednej wartości kąta φ .





Analiza wymiarowa jest także podstawą wszelkich doświadczeń modelowych. Zmianę np. rozmiarów układu kompensuje się zmieniając inne parametry tak, by wielkości bezwymiarowe były w układzie modelowym takie jak w rzeczywistym. Często zapewnia to podobieństwo sytuacji fizycznych.

Bardziej zaawansowane problemy, rozwiązane poniżej, przekonają, miejmy nadzieję, Czytelników, że analiza wymiarowa to nie tylko „wyciąganie królika z kapelusza”.

KATASTROFA ULTRAFIOLETOWA

Zamknięte pudełko, którego ścianki utrzymywane są w stałej temperaturze, wypełnione jest promieniowaniem elektromagnetycznym wysyłanym i pochłanianym przez atomy ścianek. W stanie równowagi termodynamicznej promieniowanie to ma taką samą gęstość energii $u(T)$ w każdym punkcie wewnątrz pudełka, a co więcej w każdym punkcie taki sam jest rozkład energii pomiędzy różne częstotliwości, tzw. gęstość widmowa $q(\nu, T)$. Zsumowana po wszystkich częstotliwościach gęstość widmowa musi być oczywiście równa gęstości energii:

$$\int_0^{\infty} q(\nu, T) d\nu = u(T).$$

Połączenie dwóch różnych pudełek o tych samych temperaturach ścianek i różnych gęstościach widmowych światłowodem przepuszczającym tylko jedną częstotliwość doprowadziłoby do przepływu energii między pudełkami, co jest sprzeczne z II zasadą termodynamiki. Wynika stąd, że gęstość widmowa nie może zależeć ani od materiału, z którego zbudowane jest pudełko, ani od jego objętości; jest uniwersalną funkcją temperatury i częstotliwości. Z punktu widzenia fizyki klasycznej do wzoru określającego gęstość widmową mogą wchodzić, poza ν i T , tylko dwie stałe uniwersalne: prędkość światła c (elektrodynamika) i stała Boltzmanna k (termodynamika).

Załóżmy, że q jest iloczynem dowolnych potęg ν , T , c i k :

$$q(\nu, T) = A \nu^\alpha T^\beta c^\gamma k^\delta.$$

Porównując wymiary obu stron równania:

$$\text{kg}^1 \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} = (\text{s}^{-1})^\alpha \cdot \text{K}^\beta \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\gamma \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})^\delta,$$

dostajemy $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$ i $\delta = 1$.

Poszukiwana zależność ma więc postać:

$$q(\nu, T) = A \frac{kT}{c^3} \nu^2, \text{ gdzie } A \text{ jest stałą bezwymiarową.}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób prawo Rayleigha-Jeansa wyprowadzane w ramach klasycznej fizyki statystycznej. Opisuje ono doskonale wyniki eksperymentalne dla niewielkich częstotliwości, zupełnie natomiast zawodzi przy dużych częstotliwościach.

Neograniczony wzrost gęstości widmowej z ν prowadzi poza tym do absurdu (wyniku „katastrofa ultrafioletowa”), a mianowicie do nieskończonej wartości gęstości energii $u(T)$. Zgodnie z empirycznym prawem Stefana-Boltzmanna gęstość ta powinna być proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury.

Aby uniknąć tego paradoksu, konieczne jest wprowadzenie nowej uniwersalnej stałej wymiarowej spoza fizyki klasycznej. Możemy ją uwzględnić w analizie wymiarowej zakładając, że A jest teraz funkcją ν , T , c , k i nowej stałej κ . Ponieważ A jest bezwymiarowe, interesują nas wszystkie bezwymiarowe iloczyny potęg wymienionych parametrów:

$$[\nu^\alpha \cdot T^\beta \cdot c^\gamma \cdot k^\delta \cdot \kappa^\epsilon] = 1.$$

Ponieważ A musi zależeć od ν , więc $\alpha \neq 0$ i możemy przyjąć dla wygody $\alpha = 1$, bo dowolna potęga wielkości bezwymiarowej jest również wielkością bezwymiarową. Poza tym, ponieważ wymiaru nowej stałej nie znamy, możemy wprowadzić inną stałą $h = c^\gamma k^{\delta+1} \kappa^\epsilon$, dlaczego akurat taką — okaże się za chwilę.

Wymiar h musimy oczywiście wybrać tak, aby $[\nu \cdot T^\beta \cdot h \cdot k^{-1}] = 1$, czyli $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{K}^{-(\beta+1)}$.

Wykładnik β określimy na podstawie prawa Stefana-Boltzmanna. Gęstość energii jest równa całce z gęstości widmowej

$$u(T) = \frac{kT}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 \cdot 1(\nu \cdot T^\beta \cdot h \cdot k^{-1}) d\nu.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej całkowania $x = \nu T^\beta h k^{-1}$ łatwo zauważyć, że $u(T) \sim T^{1-3\beta}$. Zgodność z prawem Stefana-Boltzmanna dostaniemy więc dla $\beta = -1$. Gęstość widmowa ma teraz postać

$$q(\nu, T) = A \left(\frac{h\nu}{kT} \right) \frac{kT}{c^3} \nu^2, \text{ a } [h] = \text{J} \cdot \text{s}.$$

Nową stałą wymiarową h wprowadził w 1900 r. Planck ratując fizykę przed „katastrofą ultrafioletową”. Stała ta wiąże falowy opis promieniowania z opisem korpuskularnym i jest podstawową stałą mechaniki kwantowej.

CZAS TRWANIA DOSKONAŁE SPRĘŻYSTEGO ZDERZENIA KUL

Ograniczymy się w naszych rozważaniach do centralnych zderzeń identycznych jednorodnych kul, ponieważ chcemy czas zderzenia tylko oszacować. Poszukiwana wielkość powinna zależeć od średnicy kuli — D , prędkości względnej — v oraz stałych materiałowych: gęstości ρ i modułu sprężystości E :

$$T = f(D, E, v, \rho); N - K = 5 - 3 = 2 \text{ w układzie LTM.}$$

Aby uniknąć pojawienia się wielkości bezwymiarowych, wprowadzamy trzy niezależne jednostki długości w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach; wtedy

$$T = CD^\alpha E^\beta v^\gamma \rho^\delta, \text{ gdzie}$$

$$[D] = L_x^{1/3} \cdot L_y^{1/3} \cdot L_z^{1/3}, [E] = ML_x^{-1/3} \cdot L_y^{-1/3} \cdot L_z^{-1/3} \cdot T^{-2},$$

$$[v_x] = L_x T^{-1}, [\rho] = ML_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1}.$$

Wymiary D , E i ρ wyznaczaliśmy wykorzystując symetrię własności i kształtu kuli.

Równanie wymiarowe

$$T^1 = (L_x L_y L_z)^{1/3} \alpha (ML_x^{-1/3} L_y^{-1/3} L_z^{-1/3} T^{-2})^\beta \cdot (L_x T^{-1})^\gamma \cdot (ML_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1})^\delta$$

proceedzi do wyniku:

$$T = C \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}},$$

gdzie wielkość $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ jest równa prędkości dźwięku w ciele stałym. Jeśli $C \approx 1$, czas zderzenia jest w przybliżeniu równy czasowi przechodzenia fali dźwiękowej przez kulę. Dane doświadczalne potwierdzają w większości przypadków tę ocenę. Ścisłe rozwiązanie problemu jest trudne rachunkowo ze względu na złożoność modelu zderzenia.

LEPKOŚĆ GAZÓW RZECZYWISTYCH

Dane empiryczne wskazują, że lepkość gazów w znacznym przedziale temperatur spełnia zależność:

$$\eta = CT^A, \text{ } C, p \text{ — stałe dla danego gazu.}$$

Na podstawie tej informacji możemy oszacować charakter zależności sił międzycząsteczkowych od wzajemnej odległości molekuł.

Lepkość, związana z transportem pędu, jest wynikiem zderzeń cząsteczek, zatem o jej wartości decydować winny siły odpychania. Przyjmijmy, iż są one postaci:

$$F = \frac{A}{r^q}; \text{ } A \text{ — stała, } [A]_{SI} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{m}^q = \text{kg} \cdot \text{m}^{q+1} \text{s}^{-2}.$$

Lepkość powinna więc zależeć od: masy cząsteczki m , temperatury T , charakteru sił międzycząsteczkowych — czyli stałej A oraz stałej Boltzmanna k charakterystycznej dla zjawisk molekularnych

$$\eta = f(m, k, T, A),$$

$$\eta \sim k^\alpha T^\beta A^\gamma m^\delta; \text{ gdzie } \beta = p.$$

W jednostkach układu SI mamy:

$$\text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{kg}^1 \text{K}^0 = (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})^\alpha \cdot \text{K}^p \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{q+1} \text{s}^{-2})^\gamma \cdot \text{kg}^\delta.$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$q = \frac{2p+3}{2p-1}$$

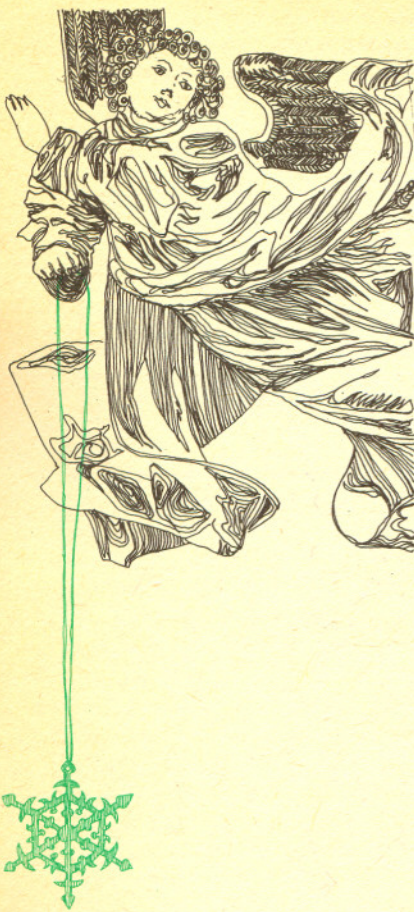
dla helu $p = 0,68$ stąd $q = 12$ i $F \sim \frac{1}{r^{12}}$,

dla CO_2 $p = 0,98$ $q = 5,2$ i $F \sim \frac{1}{r^{5,2}}$.

Wynik dla dwutlenku węgla sugeruje, iż za zderzenia odpowiedzialna jest także część długozasięgowa (przyciągająca) oddziaływań międzycząsteczkowych. I tak jest, gdyż przyciąganie cząsteczek powoduje zakrzywienie ich torów, doprowadzając do zderzeń nawet przy dużych parametrach zderzenia molekuł. Efekt ten zależy od temperatury i jest przyczyną odchylenia wartości wykładnika p od 1/2 przewidywanej przez teorię zjawisk transportu operującą modelem sztywnych kul. Otrzymana przez nas postać siły uśrednia oba efekty.

Kolineacja osiowa w zadaniach konstrukcyjnych

Dr Jerzy LISIEWICZ



Przekształcenia geometryczne stanowią pokazną część materiału programowego geometrii w szkole średniej. I słusznie. Przydatne są bowiem do rozwiązywania wielu zadań. Zwykle ułatwiają rozwiązanie, niekiedy czynią je bardziej ... eleganckim, a często pozwalają je znaleźć tam, gdzie inne metody zawodzą lub zmuszają nas do uciążliwego rachowania. Szczególnie efektowne jest rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych metodą przekształceń geometrycznych.

Na czym ta metoda polega?

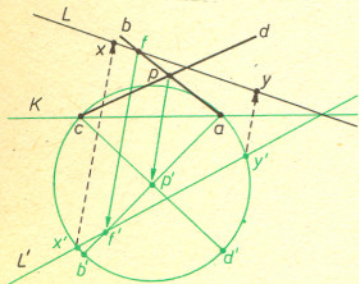
Krótko mówiąc — na tym, że zamiast operować zadanymi figurami posługujemy się ich obrazami, co — przy odpowiednim doborze przekształcenia — znacznie upraszcza rozwiązanie.

Na ogół wiadomo, jak wykorzystuje się do zadań konstrukcyjnych **podobieństwa** (wśród nich **izometrie**). Mało okazji ma natomiast uczeń szkoły średniej, by przy rozwiązywaniu tego typu zadań posłużyć się inwersją względem okręgu lub powinowactwem osiowym. A interesujące to przekształcenia choćby dlatego, że zmieniają kształt figury.

Dołączenie do płaszczyzny euklidesowej jeszcze jednego punktu, który należy do **każdej** prostej, sprawia, że niektóre okręgi przechodzą przy inwersji na proste. Dobierając odpowiednio przekształcenie (przyjmując ten a nie inny okrąg inwersji) potrafimy sprowadzić zadanie do łatwiejszego: zamiast na okręgach działamy na prostych.

Powinowactwo osiowe pozwala na coś więcej: na wykonywanie konstrukcji związanych z figurą, której w ogóle nie potrafimy narysować (używając jedynie cyrkla i linijki). Mam na myśli **elipsę**. Umiemy wprawdzie — jak się to mówi — *zadać* jednoznacznie elipsę np. przez wykreślenie dwóch jej średnic sprzężonych (dwa odcinki dzielone przez punkt przecięcia na połowy) — umożliwia to znalezienie (konstrukcyjnie!) dowolnie wielu punktów elipsy — ale uzyskuje się w ten sposób izolowane punkty przypadkowe, nieprzydatne nawet w najprostszych zadaniach, gdy szukamy punktów wspólnych elipsy i prostej.

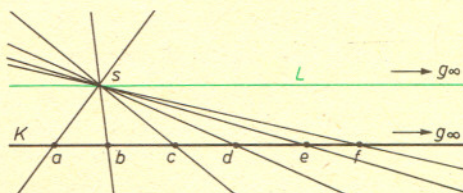
A jeśli skorzystamy z powinowactwa osiowego? Popatrzmy ... Niech średnice sprzężone \overline{ab} i \overline{cd} elipsy przecinają się w punkcie p (rys. 1). Zbudujemy na \overline{ac} — jako na przeciwprostokątnej — równoramienny trójkąt prostokątny acp' i z punktu p' zakreślmy okrąg promieniem ap' . Jeśli za oś powinowactwa przyjmiemy prostą K przechodzącą przez a i c , zaś punkt p' za obraz punktu p przy tym powinowactwie, to określone tak przekształcenie przeprowadza zadaną (choć nie narysowaną) elipsę na wykreślony okrąg. Aby znaleźć punkty x, y przecięcia elipsy jakąś prostą L , wystarczy wykreślić L' (obraz prostej L przy skonstruowanym powinowactwie) i odszukać (na L) przeciwobrazy punktów x', y' przecięcia L' z okręgiem. Na rysunku 1 dokonano tego prowadząc przez x', y' proste równoległe do $\overline{pp'}$ (a więc proste należące do kierunku powinowactwa).



Rys. 1

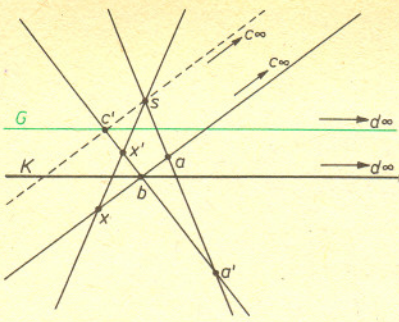
No, dobrze — powie mi uczeń klasy III — z elipsą się udało, bo to krzywa ograniczona. A ja znam jeszcze dwie inne stożkowe: parabolę i hiperbolę; obie „ciągną się bez końca”. Parabola w jednym kierunku (w kierunku swej osi), hiperbola nawet w dwóch (kierunkach jej asymptot). Czy dla nich istnieje przekształcenie, które umożliwi podobne konstrukcje?

Owszem, istnieje. Nosi nazwę **kolineacji osiowej** i działa podobnie jak powinowactwo osiowe. Żeby je zastosować, musimy jednak uzupełnić naszą płaszczyznę euklidesową tak, by i te „najdalsze” punkty paraboli lub hiperboli (zwane zwykle punktami „w nieskończoności” lub punktami „niewłaściwymi”) mogły być wykorzystane do konstrukcji.



Rys. 2

Sposób tego uzupełnienia przedstawia rysunek 2. Widzimy tam prostą K i punkt s poza nią. Łączymy **każdy** punkt prostej K z punktem s i otrzymujemy **pek** prostych o wierzchołku s . Czy istotnie **pek**? Nie. Brak w nim jednej prostej: prostej L , równoległej do K . Umówmy się, że prosta L również łączy punkt s z pewnym punktem na prostej K (takim „w nieskończoności”), z jej — jak powiemy — **punktem niewłaściwym**. Wspólny punkt niewłaściwy dwóch prostych równoległych oznacza się tak, jak zaznaczony jest punkt g^∞ na rysunku 2.



Rys. 3

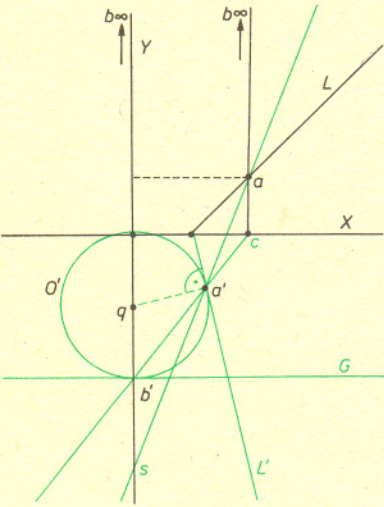
Na tak wzbogaconej płaszczyźnie (zwanej płaszczyzną rzutową) każde dwie proste przecinają się, parabola i hiperbola stają się krzywymi zamkniętymi, ale ... nie wnikajmy aż w takie szczegóły. Przetłumaczymy nasze zdanie odnoszące się do płaszczyzny rzutowej na język zwykłej płaszczyzny: „Połączyć punkt s z punktem niewłaściwym jakiejś prostej L ” oznacza „poprowadzić przez s prostą równoległą do L ”.

Określę teraz kolineację osiową płaszczyzny rzutowej. Niech będzie dana prosta K (oś kolineacji) i punkt s (środek kolineacji) poza nią. Przyjmijmy jeszcze dwa punkty a, a' takie, że s leży na prostej aa' ($a \neq s \neq a'$ i $a \notin K$ i $a' \notin K$).

Położenie x' — obrazu punktu x płaszczyzny — określone jest dwoma warunkami:

- 1) Punkty s, x, x' mają być współliniowe;
- 2) Każda prosta (np. ax) i jej obraz ($a'x'$) przecinają się na prostej K .

Spójrzmy na rysunek 3. Pokazano tam przede wszystkim, jak znaleźć obraz zadanego punktu x . Punktu x' szukamy na prostej sx (bo s, x, x' mają być współliniowe) i jednocześnie na prostej ba' (gdzie b jest punktem, w którym prosta ax przecina oś kolineacji).



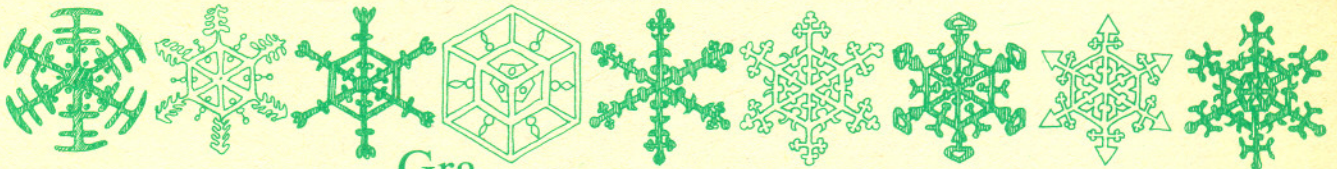
Rys. 4

Ale to nie wszystko. Połączmy punkt s z punktem niewłaściwym (c^∞) prostej ax (czyli wykreślmy przez s równoległą do ax). Jako obraz punktu niewłaściwego otrzymamy ... punkt c' . I to nie przypadek. Łatwo sprawdzić, że obrazem **dowolnego** punktu niewłaściwego (prócz d^∞ na K) jest tu punkt właściwy. Mało tego. Obrazy wszystkich punktów niewłaściwych płaszczyzny leżą na jednej prostej (zwanej prostą **graniczną**), równoległej do osi K .

Teraz już chyba łatwo dostrzec, że kolineacja osiowa może przeprowadzić dowolną stożkową na elipsę (wszystkie punkty właściwe), a nawet na okrąg. Dokonajmy tego np. dla paraboli zadanej równaniem $x^2 - 4y = 0$. Wierzchołkiem tej paraboli jest $p(0, 0)$, jej osią oś Y układu współrzędnych, a skoro dla $x = 2$ jest $y = 1$, to punkt $a(2, 1)$ należy do tej paraboli. I to nam wystarczy.

Przyjmijmy okrąg O o środku q styczny do osi X jako ten, na który ma przejść parabola (rys. 4). Oś X niech będzie osią kolineacji, a prosta G równoległa do X i styczna do O — prosta **graniczna**. Obrazem punktu b^∞ paraboli jest tu punkt b' na G . Znajdźmy jeszcze obraz punktu a : połączmy a z b linią prostą (czyli poprowadźmy przez a równoległą do Y) przecinającą oś X w punkcie c ; cb' przecina okrąg w szukanym punkcie a' . Środek kolineacji uzyskamy jako punkt s przecięcia prostych $b^\infty b'$ i aa' .

Gdyby nam teraz polecono znaleźć punkty wspólne paraboli zadanej (ale nie narysowanej; bo jak?) z jakąś prostą, znaleźlibyśmy obraz prostej przy tej kolineacji osiowej, wykonalibyśmy konstrukcję na okręgu i prostej i ... wrócilibyśmy na prostą i parabolę. Na rysunku 4 rozwiązałem konstrukcyjnie inne zadanie: Przez dany punkt a poprowadzić do naszej paraboli **styczną**. Gdy ma się już skonstruowany okrąg, będący obrazem paraboli przy określonej kolineacji, rozwiązanie sprowadza się do wykreślenia L' stycznej do okręgu w punkcie a' (obraz punktu a) i znalezienia jej przeciwobrazu — L .

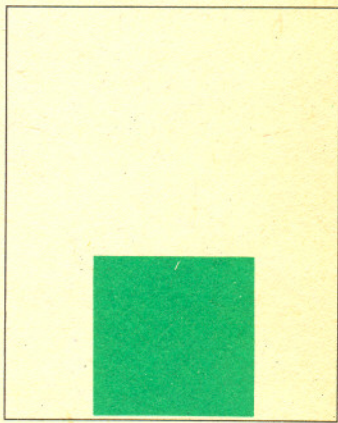
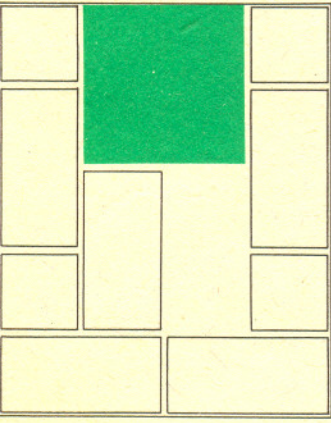


Gra

W starym belgijskim czasopiśmie „Math-Jeunes” znaleźliśmy jeszcze jednego protoplastę kostki Rubika. W prostokącie 4×5 jest 10 żetonów ułożonych jak na rysunku z lewej. Celem gry jest przemieszczenie dużego kwadratu 2×2 w położenie jak na rysunku z prawej, przez przesuwanie prostokątnych żetonów poziomo i pionowo. Według „Math-Jeunes” wymaga to ponad 100 posunięć.

Można oczywiście wybrać sobie inne docelowe położenie kolorowego kwadratu. Czy każde?

A oto bardziej skomplikowane pytanie. Czy można w naszej układance przestawić dowolne dwa np. kwadraciki 1×1 (albo: dwa dolne poziome prostokąty) nie zmieniając położenia pozostałych klocków? Nie wiemy.





Jak w nocy zmierzyć odległość Słońca?

Dr Tomasz KWAST

Triangulacja jest powszechnie stosowaną metodą mierzenia rozmiarów i kształtu Ziemi. Jest to metoda elegancka dzięki swej prostocie, a zarazem dostatecznie dokładna na potrzeby współczesnej nauki. Coś w rodzaju triangulacji stosuje się też w astronomii w celu wyznaczania odległości ciał niebieskich. Jej idea polega na zaobserwowaniu położenia interesującego nas obiektu na tle gwiazd (uważanych za nieskończenie dalekie) z dwóch dostatecznie odległych punktów przestrzeni. W przypadku Ziemi najbardziej odległe obserwatoria mogą leżeć na przeciwnych końcach A i B średnicy Ziemi (patrz rysunek), nie jest to jednak konieczne. Obserwatorzy mogą znajdować się w dość dowolnych punktach A' i B' i z nich obserwować obiekt G , gdyż znając kierunki ku niemu z dwóch dowolnych punktów obserwacji oraz „bazę” $AO = R$ można zawsze obliczyć kąt p zwany *paralaksą* obiektu, pod jakim byłoby z niego widać tę bazę. Obliczenie odległości r nie stanowi wtedy żadnego problemu.

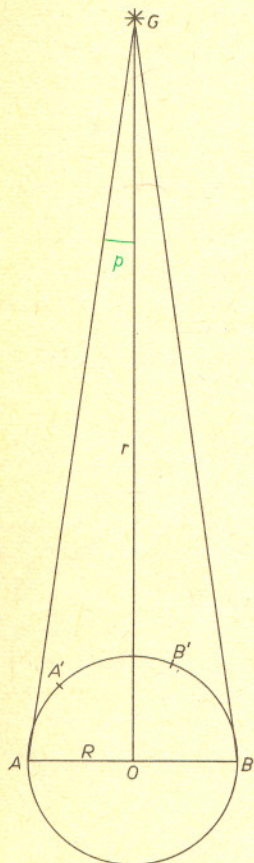
Takie wyznaczanie odległości praktykuje się w dwóch wariantach. Pomiary odległości ciał Układu Słonecznego wykonuje się z użyciem ziemskiego promienia jako bazy — kąt p nazywa się wtedy *paralaksą dzienną* obiektu. Nazywa się tak, ponieważ fikcyjny obserwator ma w zasadzie możliwość zmiany położenia z A do B wskutek dziennego obrotu Ziemi. Odległości gwiazd wyznacza się analogicznie, z tym że bazą jest promień okołosłonecznej orbity Ziemi. Kąt p nazywa się wtedy *paralaksą roczną*, gdyż obserwator przenosi się z A do B wykorzystując ruch roczny Ziemi.

Wracając do Słońca widzimy wobec tego, że trzeba zaobserwować jego położenie (np. krawędzi czy małej plamy) z dwóch miejsc na Ziemi i tak otrzymać jego paralaksę dzienną, a co za tym idzie odległość. Niestety, przeszkody są następujące:

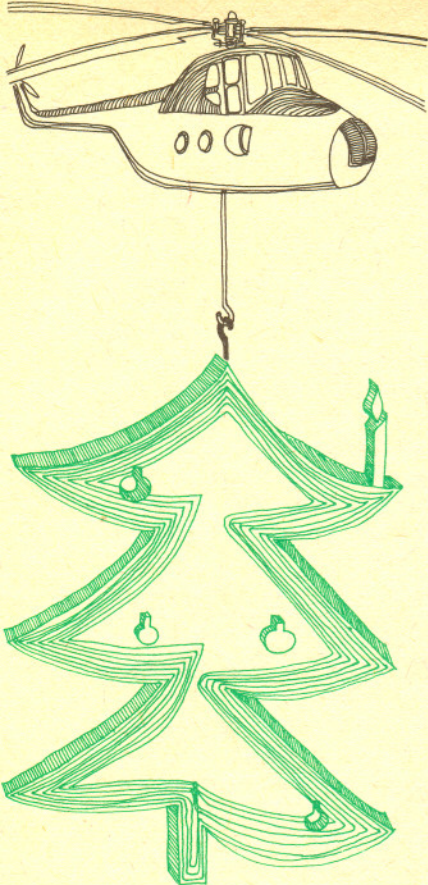
- paralaksa Słońca, jak się okazało, jest kątem tak małym, że bezpośredni pomiar mógłby być obarczony sporym błędem,
- Słońce nagrzewając atmosferę powoduje takie jej falowanie, że precyzyjny pomiar kąta jest niemożliwy,
- w dzień nie widać tła gwiazd.

Wybrnąć z tej, zdawałoby się, beznadziejnej sytuacji pomogła sama przyroda. Otóż od dawna obserwuje się systematycznie szereg planetoid, tak że ich orbity są znane z wysoką dokładnością. Przez znajomość orbity rozumiemy to, że dla każdego momentu czasu możemy obliczyć odległość planetoidy od Ziemi w jednostkach średniej odległości Ziemi od Słońca. Ta średnia odległość jest zwana *jednostką astronomiczną* (1 j.a.). Innymi słowy, mechanika nieba zapewnia nam dobrą znajomość *stosunków* odległości planetoidy i Słońca od Ziemi w każdym momencie czasu. Dzięki temu wykonujemy bezpośredni pomiar odległości planetoidy, a nie Słońca. Jest to możliwe i nietrudne, jako że robi się to w nocy, gdy widać gwiazdy i atmosfera jest spokojniejsza, a sama planetoida jest obiektem punktowym, przez co pomiar jest łatwy technicznie. Co więcej, przyroda jeszcze bardziej sprawę ułatwia. Mianowicie jest kilka planetoid, które zbliżają się czasem do Ziemi bardziej niż na 1 j.a., a zatem ich mierzona paralaksa dzienna jest wtedy kątem stosunkowo dużym. W najkorzystniejszej sytuacji bywa Eros (nr katalogowy 433), którego orbita jest niewiele obszerniejsza od ziemskiej (wielka półoś wynosi 1,458 j.a.), zaś mocno wydłużona (łmimośród wynosi 0,223). Dzięki temu Eros może się zbliżyć do Ziemi na odległość zaledwie 0,15 j.a. Jego paralaksa dzienna wynosi wtedy ok. $1'$, co jest doskonale mierzalne. Znając stosunek odległości Erosa i Słońca w chwili obserwacji i rozmiary Ziemi (R) obliczenie odległości r Słońca w kilometrach jest już fraszką.

Na szeroką skalę zakrojona akcja obserwacyjna odbyła się już w 1931 r., kiedy położenie Erosa na tle gwiazd zaobserwowały 24 obserwatoria. Uzyskane wtedy wyniki niewiele różnią się od uznawanych obecnie. Za paralaksę Słońca przyjmuje się teraz $p = 8''794 = 4,263 \cdot 10^{-5}$ rad. Ponieważ promień (równikowy) Ziemi wynosi $R = 6378$ km, to na odległość średnią Słońca otrzymujemy $r = 149,6$ mln km. Jest to jedna z podstawowych stałych astronomicznych.



PROBABILISTYKA W ANALIZIE



W jednym z instytutów PAN w trakcie badań nad teorią masowej obsługi (specjaliści od tej teorii nie lubią, gdy nazywać ich fachowcami od kolejek) pojawiło się zadanie: czemu jest równa granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!}}{e^{nx}}$$

„Wyskoczyła” ona w dość naturalny sposób w modelu przepływu, w którym uwzględnione są zbiorniki. Jeśli mianowicie strumień np. listów przepływa przez „zbiornik” — pocztę Z , to strumień Y u adresatów ma nieco inne parametry niż „wejściowy” X . Zakładając np. że opóźnienie przesyłki jest proporcjonalne do zasobu listów w drodze, otrzymujemy dość prosto równanie przepływu.

Proporcjonalność opóźnienia przesyłki do wielkości zasobu sugeruje naturalny pomysł: zastąpić „opóźniacz” Z przez kilka niezależnych mniejszych: Z_1, \dots, Z_n . Wspomniana granica pojawia się przy badaniu rozkładu granicznego ($n \rightarrow \infty$). Nie o tym jednak chcemy napisać, a o tym, jak można obliczyć (i faktycznie tak obliczyliśmy) tę granicę. Metodę rozwiązania problemu podał docent Stanisław Kwapien z Uniwersytetu Warszawskiego.

Przypomnijmy sobie najpierw rozkład Poissona. To taki rozkład, w którym

$$P(X = k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Parametr a jest równy wartości oczekiwanej $E(X)$ i równy jest także wariancji $D^2(X)$.

Potrzebne będzie jeszcze **Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Levy'ego**:

jeżeli niezależne zmienne losowe X_i mają ten sam rozkład i $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D^2(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$, to

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

jednostajnie względem $x \in (-\infty, +\infty)$. Prawa strona jest dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 1.

Niech teraz X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem równym x . Mamy więc $E(X_i) = D^2(X_i) = x$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots$. Wprowadźmy zmienne losowe

$$Y_n = X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}.$$

Mają one też rozkłady Poissona (suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Poissona o parametrach a i b ma rozkład Poissona o parametrze $a+b$), $E(Y_n) = nx = D^2(Y_n)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} &= P(Y_n < n) = P(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1} < n) = \\ &= P\left(\frac{X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1} - nx}{\sqrt{nx}} < \frac{n - nx}{\sqrt{nx}}\right) = P\left(\frac{X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1} - nx}{\sqrt{nx}} < \frac{n(1-x)}{\sqrt{nx}}\right). \end{aligned}$$

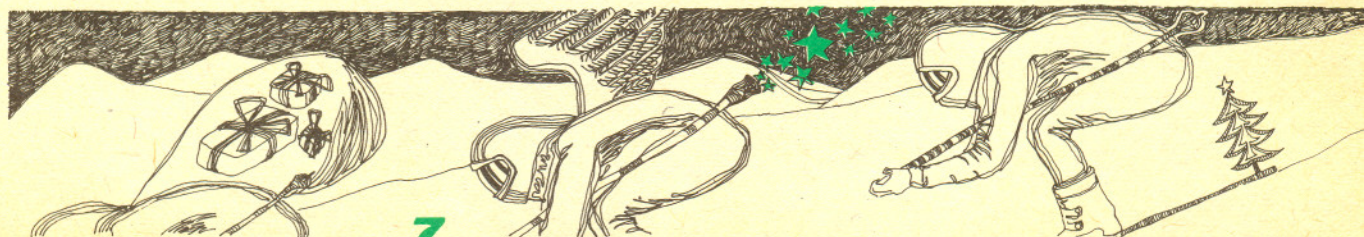
Ponieważ jednak, jak łatwo wyliczyć

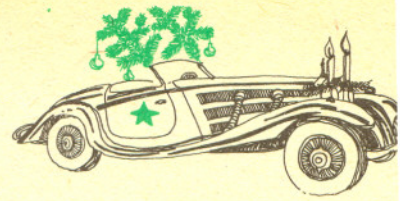
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1-x)}{\sqrt{nx}} = \begin{cases} +\infty & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \\ -\infty & \text{dla } x > 1, \end{cases}$$

to Centralne Twierdzenie Graniczne daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!}}{e^{nx}} = \begin{cases} 1 & \text{gdym } x < 1 \\ 1/2 & \text{gdym } x = 1 \\ 0 & \text{gdym } x > 1. \end{cases}$$

dr Jan GADOMSK





Patrz w niebo

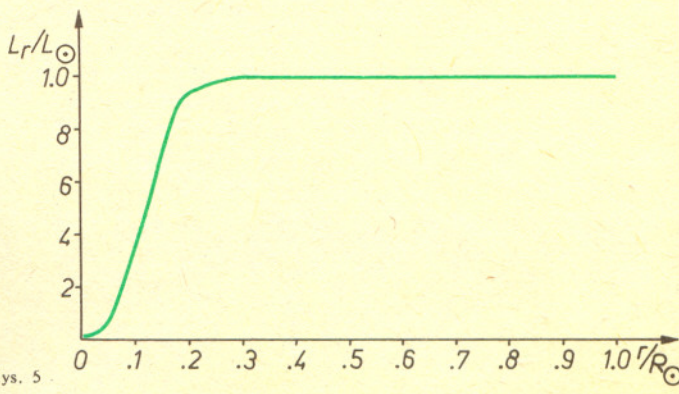
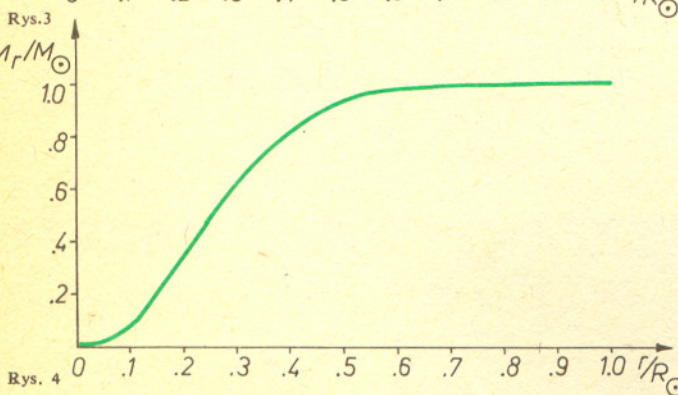
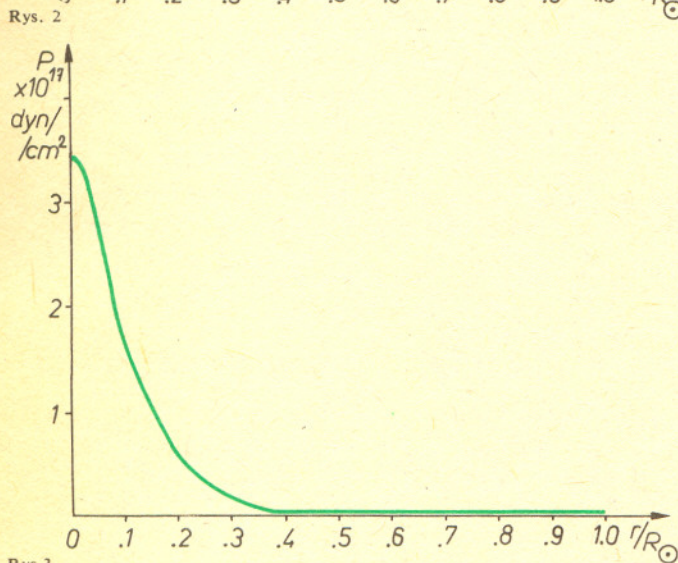
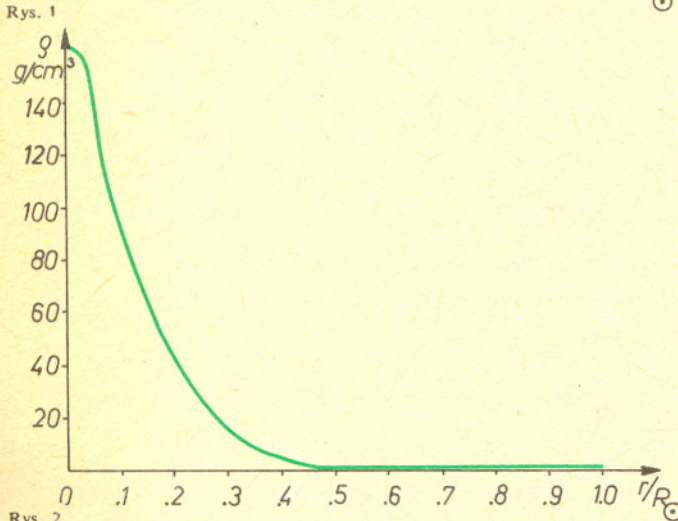
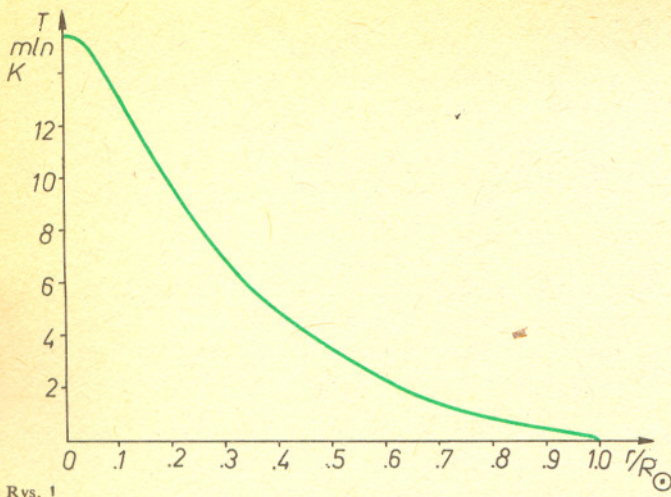
W artykule T. Kwasta w tym numerze „Deltę” przedstawiono dwa (z czterech) podstawowe równania budowy wewnętrznej gwiazdy: równanie bilansu ciepła stacjonarnej gwiazdy i równanie promienistego transportu energii. Po uzupełnieniu tego układu równaniami ciągłości (zachowania materii) i równowagi hydrostatycznej (ciśnienie gazu i promieniowania musi równoważyć „ciężenie” wyższych warstw) oraz równaniem stanu (opisującym zależność ciśnienia od temperatury i gęstości) możemy w zasadzie je rozwiązać otrzymując zależność temperatury, gęstości, ciśnienia, M_r (masy zawartej w kuli o promieniu r) i L_r (energii produkowanej w kuli o promieniu r) od promienia r .

Nie będziemy tutaj rozwiązywać tego skomplikowanego układu równań różniczkowych, jednak chcielibyśmy przedstawić wynik obliczeń numerycznych dla jednego przypadku — dla Słońca. Wynik ten jest przedstawiony na wykresach obok. Pierwszy rysunek przedstawia zależność temperatury od odległości od środka Słońca. Widać, że w centrum panuje temperatura ok. 15,5 mln K umożliwiającą zachodzenie jądrowych reakcji cyklu $p-p$ (Patrz w niebo, „Delta” 11/1982) i w mniejszym stopniu cyklu CNO. Gęstość (rys. 2) i ciśnienie (rys. 3) spadają dużo szybciej idąc od centrum Słońca niż temperatura. Wszystkie 3 parametry osiągają na powierzchni wartości o wiele rzędów niższe niż w centrum. Temperatura w atmosferze Słońca jest niższa niż 6000 K (ponad 2000 razy mniej niż w środku), potem znowu podnosi się w koronie do ok. 2 mln stopni w dużych odległościach od powierzchni, w wyniku grzania gazu przez akustyczne fale uderzeniowe. Średnia gęstość Słońca wynosi ok. $1,4 \text{ g/cm}^3$, w atmosferze jest ona jednak setki milionów razy mniejsza niż w centrum.

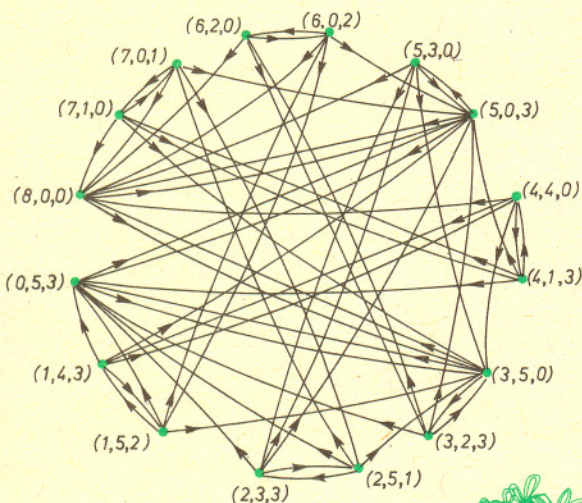
Większa część masy zawarta jest w głębokich warstwach Słońca (ze względu na ich dużą gęstość). Połowa masy mieści się w centralnej kuli o objętości tylko 1,56% objętości Słońca (rys. 4). Jeszcze drastyczniej ma się sprawa z produkcją energii (rys. 5), która zachodzi tylko w samym pobliżu środka naszej gwiazdy. 90% mocy gwiazdy produkowane jest w kuli o objętości mniejszej niż 0,6% objętości Słońca.

W kolejnych numerach „Deltę” postaramy się przedstawić szczegóły dotyczące równań budowy wewnętrznej gwiazdy i modele dzięki tym równaniom uzyskiwane.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



- (8, 0, 0)
- (7, 1, 0) (7, 0, 1)
- (6, 2, 0) ~~(6, 1, 1)~~ (6, 0, 2)
- (5, 3, 0) ~~(5, 2, 1)~~ ~~(5, 1, 2)~~ (5, 0, 3)
- (4, 4, 0) ~~(4, 3, 1)~~ ~~(4, 2, 2)~~ (4, 1, 3)
- (3, 5, 0) ~~(3, 4, 1)~~ ~~(3, 3, 2)~~ (3, 2, 3)
- (2, 5, 1) ~~(2, 4, 2)~~ (2, 3, 3)
- (1, 5, 2) (1, 4, 3)
- (0, 5, 3)



Do klasycznych zadań arytmetyki należą zadania o przelewaniu. Oto przykładowe

Ośmiolitrowy gąsiorek wypełniony jest winem. Należy odlać 4 litry, mając 2 naczynia: pięciolitrowe i trzylitrowe. Jak to zrobić?

Podobne zadania rozwiązuje Szczepan Jeleński w *Lilqvati* — jedynej w swoim czasie książce z matematyki popularnej, książce ciekawej, choć przepisanej z W. W. Rouse-Ball'a *Recreations Mathématiques*.

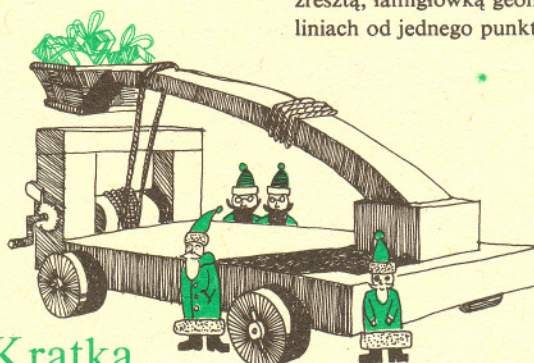
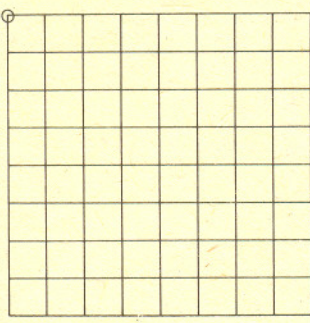
Rozwiązania podane u Jeleńskiego nie są poparte żadnym rozumowaniem. Ot, sprawdziliśmy i zgadza się. Tymczasem zadanie o przelewaniu należy do prostej teorii grafów. Wypiszmy wszystkie możliwe stany wina w trzech naczyniach. Jest ich tyle, ile uporządkowanych rozkładów liczby 8 na trzy składniki

$$8 = x + y + z,$$

przy czym $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 5$, $0 \leq z \leq 3$. Poza tym odrzucimy te stany, które nie odpowiadają „fizycznym” ograniczeniom w naszym zadaniu: zawsze albo co najmniej jedno naczynie jest pełne, albo co najmniej jedno puste; nie można dojść zatem np. do stanu (6, 1, 1).

Zaznaczmy 16 punktów odpowiadających tym 16 stanom i połączmy np. łukami każde dwa stany, z których drugi powstaje z pierwszego przez (jednokrotne) przelanie. Pojawi się przed nami *graf skierowany*: strzałki oznaczają kierunek przelewania.

Zadanie nasze przestało już być arytmetyczne, a stało się, prostą zresztą, łamigłówką geometryczną: przejść po zaznaczonych liniach od jednego punktu do drugiego.



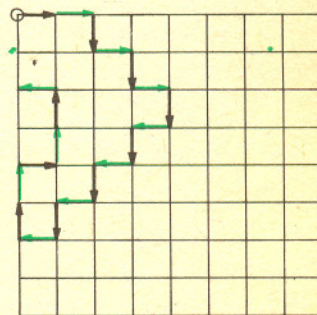
Kratka

Rysunek obok przedstawia kratkę o 9 liniach poziomych i 9 pionowych. Proponujemy użycie jej do następującej gry:

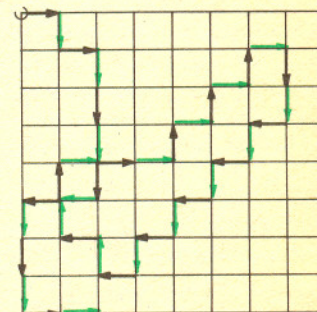
1. Gracze kolejno rysują strzałki jednostkowej długości, pionowe lub poziome, na nie zajętych liniach kratki.
2. Pierwsza strzałka zaczyna się w oznaczonym rogu, a kolejna zaczyna się w końcu poprzedniej.
3. Przegrywa ten, kto nie może narysować strzałki.

Gra może być dwu, lub więcej osobowa. Na rysunkach przedstawione są dwie końcówki w wersji dwuosobowej.

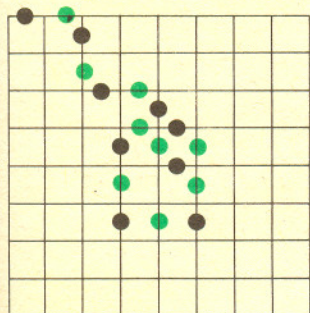
Uważny Czytelnik z łatwością dostrzeże, że strzałki mogą być zastąpione kreskami, czy innym „zajmowaniami” odcinków kratki. Aktualny koniec jest w tym punkcie, do którego prowadzi nieparzysta (1 lub 3) liczba zajętych odcinków. Pozwala to nie marnować na każdą partię nowej kratki, a grać stawiając pionki na liniach zwyczajnej szachownicy.



Partię wygrał „zielony” — niezależnie od ruchu „czarnego” ma on ruch wygrywający.



Partię wygrał „czarny” — wystarczy, aby poszedł w górę; „zielony” musi wtedy pójść w lewo i wówczas ruch „czarnego” w lewo lub w dół kończy grę.

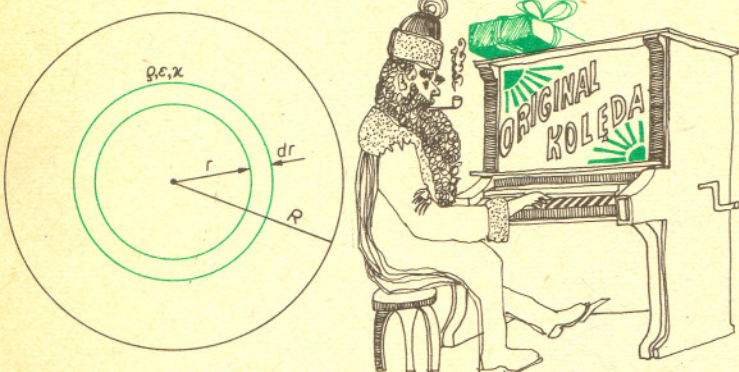


Czy równania budowy wewnętrznej gwiazd są zbędne?

Dr Tomasz KWAST

Już nie raz przy okazji omawiania zagadnień związanych z budową gwiazd autorzy powoływali się na dość tajemnicze „równania budowy wewnętrznej”. Otóż jest duża szansa, że w jednym z najbliższych numerów „Deltę” ukaże się rzetelne ich wyprowadzenie, a co za tym idzie, powoływanie się na nie przestanie być tak gołosłowne, jak jest dotychczas. Mając tę nadzieję na przyszłość zobaczymy teraz, co ciekawego można się dowiedzieć z dwóch spośród równań opisujących budowę wnętrza gwiazdy. Aby jednak już uniknąć wspomnianej gołosłowności, musimy choćby w kilku zdaniach przedstawić, skąd się te dwa wybrane równania biorą.

Założmy więc, że interesuje nas stacjonarna i kulista gwiazda o promieniu R , masie M i mocy (jasności) L . Niech L_r oznacza moc produkowaną w gwiazdzie w kuli o promieniu r , zaś ϵ moc produkowaną przez jednostkę masy materii gwiazdy. Moc kuli o promieniu o dr większym będzie o dL_r większa, co jest równe mocy warstewki kulistej zaznaczonej na rysunku, czyli mocy



produkowanej w jednostce objętości $\rho\epsilon$ (ρ oznacza gęstość materii gwiazdy) pomnożonej przez pole „podstawy” $4\pi r^2$ i „wysokość” dr . Tak otrzymujemy pierwsze poszukiwane równanie (różniczkowe) określające produkcję energii w gwiazdzie:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon.$$

Drugie obiecane równanie będzie opisywać tzw. promienisty transport energii w gwiazdzie. Transport energii może w zasadzie odbywać się jeszcze na drodze przewodnictwa cieplnego oraz przez konwekcję. Przewodnictwo ciepłe gazu jest z natury rzeczy nieznaczne i z góry można ten mechanizm pominąć, zaś konwekcja, owszem, może w gwiazdzie zachodzić, ale nie będziemy się tu zajmować ani nią, ani warunkami jej wystąpienia — ograniczamy się do przypadku gwiazdy w całości „promienistej”, czyli w której energia przenosi się jedynie w postaci samego promieniowania.

Niech więc tzw. współczynnik nieprzezroczystości κ będzie tak określony, że w słupku gazu o jednostkowej podstawie (przez którą przepływa energia w tempie $L_r/4\pi r^2$) i wysokości dr zostanie zaabsorbowane $\frac{L_r}{4\pi r^2} \kappa dr$ energii. Ilość zaabsorbowanego

w tym słupku pędu otrzymamy dzieląc tę energię przez prędkość światła c . Ale ilość pochłoniętego pędu jest w tym przypadku spadkiem ciśnienia promieniowania — dP_{prom} na drodze dr .

Skoro jeszcze $P_{\text{prom}} = \frac{1}{3} aT^4$ (T jest tu temperaturą materii we wnętrzu gwiazdy, zaś a stałą fizyczną równą $7,565 \cdot 10^{-16}$ Pa/K⁴), to już łatwo dostajemy równanie (też różniczkowe) promienistego transportu energii w gwiazdzie:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa \rho}{4acT^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}.$$

Te dwa równania z pewnymi uzupełnieniami i odpowiednio „spreparowane” pozwolą nam wyciągnąć bardzo ważne wnioski ogólne co do budowy gwiazd. Najciekawsze przy tym, że w ogóle nie będziemy próbować rozwiązywać tych równań.

Uzupełnieniami muszą być znane skądinąd zależności ϵ i κ od warunków panujących w materii wnętrza gwiazdy. W dość dobrym przybliżeniu przyjmuje się formuły empiryczne: $\epsilon = \epsilon_0 \rho T^n$, zaś $\kappa = \kappa_0 \rho T^b$, gdzie ϵ_0 i κ_0 zależą tylko od składu chemicznego materii, $n \approx 18$ i $b \approx -3,5$.

Wprowadźmy teraz bezwymiarowe zmienne x, φ, l, t przez podstawienia: $r = xR, \rho = \varphi \frac{M}{4\pi R^3}, L_r = lL, T = t \frac{\mu HGM}{kR}$, gdzie μ oznacza średnią masę atomową materii gwiazdy, H masę atomu wodoru, G stałą grawitacji, k stałą Boltzmanna. Dzięki tym podstawieniom w całej grupie gwiazd zbudowanych według tego samego modelu (tzn. o tych samych $\mu, \epsilon_0, \kappa_0, n, b$) jednakowym x odpowiadają jednakowe φ, l i t . Nasze dwa równania różniczkowe po wszystkich niezbędnych podstawieniach przyjmują postać:

$$\frac{dl}{dx} = \Lambda x^2 \varphi^2 t^n, \quad \frac{dt}{dx} = -\Theta \varphi^2 t^{b-3} l/x^2,$$

gdzie

$$\Lambda = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \left(\frac{\mu HG}{k} \right)^n \frac{M^{n+2}}{LR^{n+3}}$$

$$\text{i } \Theta = \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{3\kappa_0}{4ac} \left(\frac{\mu HG}{k} \right)^{b-4} \frac{M^{b-2} L}{R^{b+3}}$$

są stałymi dla gwiazd zbudowanych według tego samego modelu.

W szczególności jeśli mają to być gwiazdy zbudowane jak Słońce, to Λ i Θ muszą być takie same dla nich i dla Słońca. Ze stałości Λ mamy wtedy

$$\left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{n+2} = \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{n+3},$$

zaś z Θ

$$\left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{b-2} \frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{b+3},$$

gdzie symbol \odot oznacza parametry Słońca. Dołączywszy tradycyjne prawo promieniowania $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ ($\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}$ W/m²K⁴ jest tzw. stałą Stefana) zapisane w postaci

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot} \right)^4,$$

gdzie T oznacza teraz temperaturę powierzchni gwiazd, mamy trzy równości, z których łatwo można znaleźć 6 związków między każdymi dwoma parametrami spośród M, L, R i T . Pomijając dla prostoty zapisu mianowniki zawierające parametry Słońca i podstawiając liczbowe wartości n i b dostajemy na koniec:

$T = R^{1,32}$ — gwiazdy większe są zarazem gorętsze,

$M = R^{1,41}$ — wykładnik mniejszy od 3 dowodzi, że gwiazdy większe mają mniejszą średnią gęstość,

$L = R^{7.28}$ — wykładnik większy od 2 potwierdza, że gwiazdy większe są znacznie gorętsze (ich jasność powierzchniowa jest większa),

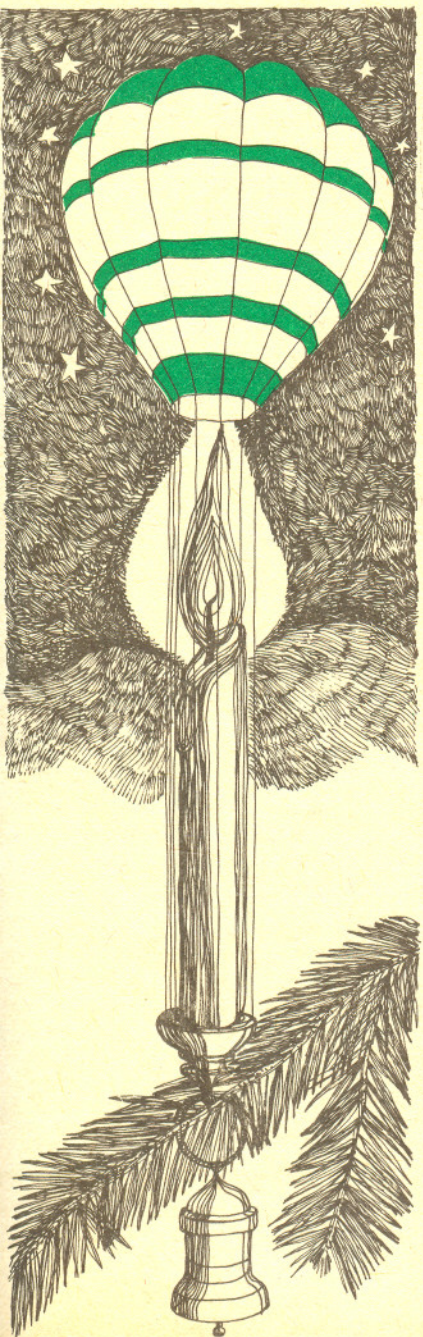
$T = M^{0.93}$ — gwiazdy masywniejsze są gorętsze, z tym że tu zależność jest akurat prawie proporcjonalna,

$L = M^{5.15}$ — jest to tzw. zależność masa-jasność, z której widać, że gwiazdy masywniejsze są dość drastycznie jaśniejsze, czyli dużo szybciej zużywają swoje zapasy energii — zatem szybciej ewoluują i żyją krócej niż gwiazdy mało masywne,

$L = T^{5.52}$ — wykładnik większy od 4 jeszcze raz potwierdza, że gwiazdy gorętsze są zarazem większe, a ponadto jest to nic innego, jak równanie ciągu głównego na diagramie Hertzsprunga-Russella!

No i proszę — tyle istotnych informacji bez rozwiązywania równań budowy! Rzecz jasna, nie są one tak całkiem zbędne — ostatecznie były punktem wyjścia dla naszego rozumowania, jak również nadal nie znamy budowy żadnej gwiazdy, czyli wartości

gęstości, ciśnienia, temperatury itd. w każdym punkcie wewnątrz niej. Ale i tak dowiedzieliśmy się sporo, aczkolwiek nie można zapominać o założeniach leżących u podstaw naszych wniosków. Założeniem było wszak przyjęcie empirycznych formuł na ϵ i κ z konkretnymi wykładnikami — w rzeczywistości wykładniki te zależą od temperatury, a nawet sama postać formuł nie jest w pełni uniwersalna. Milczącym założeniem było przyjęcie jednorodności gwiazd, czyli stałości μ w całej objętości gwiazdy. Wreszcie założenie promienistego transportu energii jest spełnione tylko w gwiazdach podobnych do Słońca, zaś w gwiazdach masywnych występuje konwektywne jądro, a u mało masywnych podpowierzchniowa warstwa konwektywna. Wskutek tego wszystkiego znalezione przez nas związki są wprawdzie poprawne jakościowo, ale ilościowo opisują dość dobrze jedynie gwiazdy podobne do Słońca, czyli środkowej części rzeczywistego ciągu głównego. W całości nie może on zatem być linią prostą na diagramie H-R z logarytmicznymi skalami na osiach, co doskonale potwierdzają obserwacje. W każdym razie najważniejsze jest, że samo istnienie ciągu głównego, jak widzimy, nie jest wynikiem przypadkowego gromadzenia się gwiazd na dość dowolnie wybranym wykresie, lecz prawidłowością będącą bezpośrednią konsekwencją podstawowych praw przyrody.



SKĄD SIĘ BIORĄ POMYSŁY?

Głupie pytanie, prawda? Nie ma jednak głupich pytań — bywają za to głupie odpowiedzi.

Niektóre „pomysły” biorą się ... nie wiadomo skąd, choć i w matematyce matką wynalazków jest potrzeba. Często jednak to, co odbieramy jako „nieprawdopodobne skojarzenie” jest dla lepszego od nas specjalisty zupełnie typowe.

Spotykamy się z tym już w szkole podstawowej, gdy umiemy rozwiązać zadanie za pomocą równań, ale musimy bez nich, bo „jeszcze nie było”. Potem przyzwyczajamy się tak, że nawet nie umiemy zadania takiego jak *Ojciec ma obecnie tyle lat, ile miesięcy miał syn w chwili, gdy był 9 razy młodszy od ojca. Ojciec jest starszy od syna o 26 lat i 8 miesięcy. Ile lat ma teraz ojciec?* (egzamin wstępny do XIV LO w W-wie, 1982)

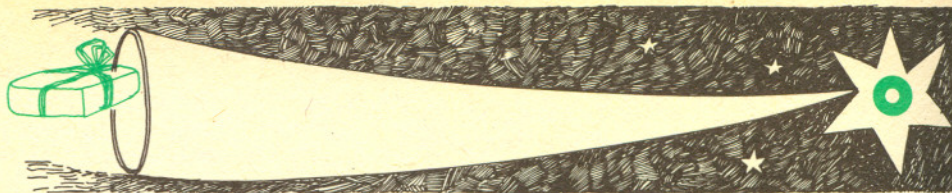
rozwiązać inaczej niż za pomocą równań, choć przecież można. Można, ale po co? Przecież między innymi po to uczymy się różnych nowych rzeczy, aby łatwiej rozwiązywać problemy.

Jest i druga strona medalu. W pogoni za coraz bardziej ogólnymi teoriami często nie umiemy już wrócić: znając teorię grup, nie umiemy jej zupełnie stosować. To bardzo niebezpieczne.

Na duże niebezpieczeństwo narażeni są tu algebraicy; współczesna algebra abstrakcyjna bardzo niewiele przypomina algebrę, którą znamy ze szkoły. Nic więc dziwnego, że właśnie w tej dyscyplinie niedługo po genialnych pomysłach francuskiej szkoły pojawiła się idea „powrotu do natury”: formułowanie wszystkiego w języku algebry szkolnej. Można? Można, ale po co. Oto bowiem zdanie

n jest liczbą pierwszą

rozebrane „na atomy”, tj. sprowadzone do podstawowych pojęć i relacji pierwotnych — *należenia elementu do klasy* (zbioru): n jest elementem każdej takiej klasy z , że klasa, której jedynym elementem jest klasa bez elementów, jest klasą z i dla każdego elementu m klasy z rodzina wszystkich tych klas, które po zmniejszeniu o jeden element należą do klasy m , jest elementem klasy z i dla wszystkich takich h i k , że elementy każdej klasy z takiej, że klasa, której jedynym elementem jest klasa bez elementów, jest elementem klasy z i dla każdego elementu klasy z klasa wszystkich tych klas, które po zmniejszeniu o jeden element należą do m jest elementem klasy z i jeżeli dla każdego elementu x klasy n istnieje taki element y klasy h , że wszystkie elementy klasy y są elementami klasy k i elementy klasy y nie mają wspólnych elementów, oraz wszystkimi, a zarazem jedynymi elementami elementów klasy y są elementy klasy x , to h lub k jest rodziną wszystkich tych klas, które po usunięciu jednego elementu stają się klasą bez elementów.



CO MAMY WSPÓLNEGO

Oto kilka zadań:

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

2. Wykazać, że spośród równoległoscianów o danych długościach boków największą objętość ma prostopadłościan.

3. Wykazać, że dla każdej funkcji mającej ciągłą pochodną na odcinku $\langle 0, 1 \rangle$ i takiej, że $f(0) = f(1) = 1$ zachodzi

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right|^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$

W każdym z nich chodzi o udowodnienie pewnej nierówności i każde z nich można rozwiązać mniej lub bardziej pomysłowo. Ale dla wszystkich znających trochę algebrę liniową wspólna ich cecha jest oczywista: w ich rozwiązaniu „z pewnością” pojawi się nierówność Schwarz’a ...

Nierówność Schwarz’a (łączona również z nazwiskami Buniakowskiego i Cauchy’ego) dotyczy wektorów w przestrzeni, w której wprowadzono iloczyn skalarny. Taki iloczyn skalarny to forma do mnożenia wektorów, z tym że wynikiem takiego mnożenia jest liczba. W przestrzeni kartezjańskiej R^n określamy go przez

$$\alpha \cdot \beta = \text{suma iloczynów wszystkich współrzędnych, tj. } \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

W przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $\langle 0, 1 \rangle$ możemy na przykład przyjąć $f g = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Spośród kilku warunków — aksjomatów, jakie ma spełniać mnożenie skalarne wektorów, wymienimy, że musi być ono rozdzielne względem dodawania. Nie ma mowy o łączności, bo wynikiem mnożenia dwóch wektorów nie jest wektor, tylko liczba. Mnożenie skalarne powinno jednak być przemienne. Ponadto żądamy, by kwadrat skalarny niezerowego wektora był dodatni.

Nierówność Schwarz’a formułuje się łatwo: dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni z iloczynem skalarnym (takim, jak opisaliśmy) mamy

$$(xy)^2 \leq x^2 y^2.$$

Dowodzi się też nietrudno. Pamiętając, że xy, y^2 itd. to liczby i wiedząc, że dla $y \neq 0$ jest zawsze $y^2 > 0$, mamy

$$0 \leq \left(x - \frac{xy}{y^2} \cdot y \right)^2 = x^2 - 2x \cdot \left(\frac{xy}{y^2} \right) \cdot y + \frac{(xy)^2}{y^4} \cdot y^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{(xy)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{y^2} = x^2 - \frac{(xy)^2}{y^2} \text{ i już.}$$

Zastosowanie nierówności Schwarz’a do zadań 1 i 2 zostawiamy Czytelnikom; w zadaniu 2 trzeba oczywiście wiedzieć, jaki jest związek między objętością równoległoscianu a iloczynem skalarnym wektorów krawędzi. Wykażemy za to nierówność z trzeciego zadania.

Scałkujemy lewą stronę przez części, dobierając we wzorze $\int uv' = uv - \int u'v$ funkcję f jako u i funkcję $x+c$ jako v ; stałą c dobierzemy później. Mamy

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+c) f'(x) dx = (x+c)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x+c) f'(x) dx,$$

$$\text{więc } \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |x+c| \cdot |f'(x)| dx \leq (\text{Schwarz!}) \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 (x+c)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{(1+c)^3}{3} - \frac{c^3}{3}} \cdot \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{3c^2 + 3c + 1}{3}} \cdot \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 dx}. \text{ Weźmiemy teraz } c = -\frac{1}{2} \text{ i samo wyjdzie, co trzeba.}$$



Mamy pytania do Czytelników:

- 1) Dlaczego przyjęliśmy akurat $c = -\frac{1}{2}$. Czy można było wziąć inną stałą? I co by wtedy wyszło?
- 2) Dla jakich funkcji wykazana nieostra nierówność zamienia się w równość? Wskazówka: prześledzić każdy krok dowodu. Można też odczytać z zaprezentowanego dowodu nierówności Schwarza, że zamienia się ona w równość, gdy wektory są prostopadłe (tj. ich iloczyn skalarny wynosi 0).

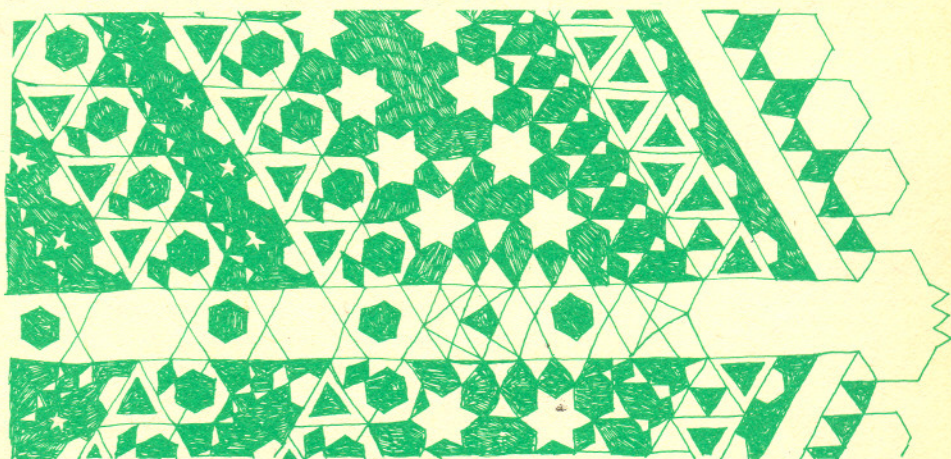
I jeszcze dwa

Zadania, w których rozwiązaniu wygodnie jest stosować nierówność Schwarza

1. (Uogólnione twierdzenie Ptolemeusza): Jeżeli a, b, c, d są długościami kolejnych boków dowolnego czworokąta, natomiast e i f — długościami jego przekątnych, to $ac + bd \geq ef$. (Werner Mnich, Matematyka nr 1/1981)
2. Niech będą dane dwa trójkąty: trójkąt T_1 o bokach długości a_1, b_1, c_1 oraz trójkąt T_2 o bokach długości a_2, b_2, c_2 . Udowodnić, że istnieje trójkąt T o bokach długości

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2}}.$$

(Józef Stojanowski, Matematyka nr 6/1980)



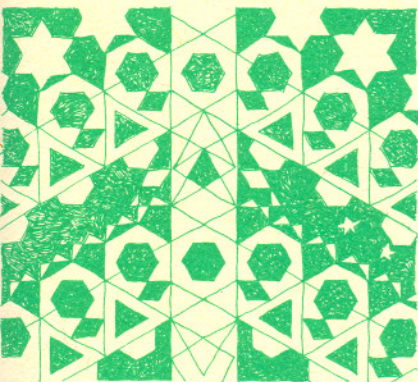
JEDEN MODEL — RÓŻNE ZJAWISKA

Dość często w fizyce i chemii stosowany jest model gazu doskonałego, zbioru chaotycznie poruszających się i nieoddziałujących cząsteczek. Model ten możemy stosować nie tylko dla gazów rzeczywistych, ale również dla roztworów (gazem jest tu ciało rozpuszczone), czy też przewodników elektrycznych (gazem są swobodne elektrony). Wszystkie te gazy wywierają na ścianki naczynia ciśnienie, które wyrównuje się przy połączeniu różnych naczyń. Jakie więc zjawiska odpowiadają wyrównywaniu się ciśnień elektronów i roztworów?

Nacyniem dla gazu elektronowego jest cały przewodnik, którego brzeg (ścianki naczynia) działa siłami elektrycznymi na elektrony próbujące opuszczać przewodnik. Ciśnienie tego gazu jest ogromne (setki tysięcy atmosfer) i zależy od rodzaju przewodnika. Łącząc różne przewodniki doprowadzamy do wyrównywania się ciśnień i w miejscu kontaktu pojawia się różnica potencjałów. Zamknięcie takiego obwodu złożonego z dwóch przewodników nic jednak nie daje, gdyż napięcie z obu kontaktów znosi się. Wiemy jednak, że ciśnienie gazu zależy od temperatury. Podgrzewanie więc jednego z kontaktów zmienia odpowiadające mu napięcie i w obwodzie zaczyna płynąć prąd zwany termoelektrycznym. Otrzymaliśmy nowy rodzaj ogniwa elektrycznego i przy okazji termometru. I, jak to zwykle bywa w termodynamice gazów, możemy teraz zamienić przyczynę ze skutkiem. Przepływ prądu elektrycznego przez niepodgrzany obwód złożony z dwóch przewodników prowadzi do pojawienia się różnicy temperatur między kontaktami.

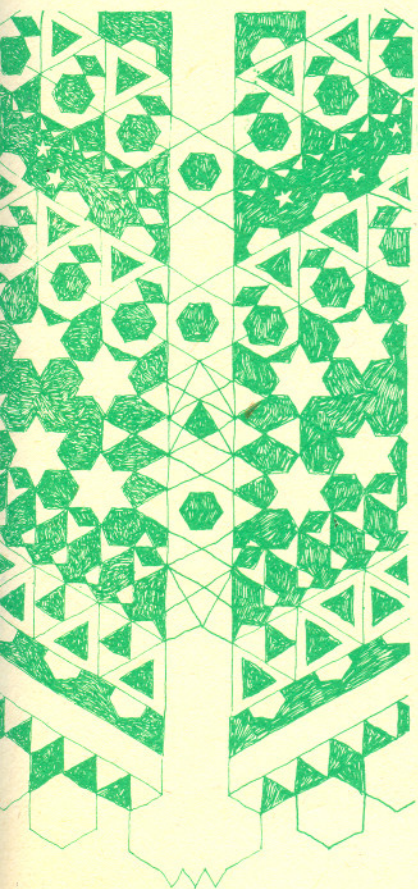
Ciało rozpuszczone w cieczy jest również gazem i wywiera na ścianki naczynia dodatkowe ciśnienie. Możemy się o tym przekonać robiąc z półprzepuszczalnej błony zwierzęcej (np. z pęcherza rybiego) balon wypełniony wodnym roztworem cukru. Błona nie przepuszcza cząsteczek cukru, choć przepuszcza wodę. Jeżeli więc balon włożymy do czystej wody, to zacznie się nadymać wciągając do wnętrza wodę, aż wreszcie pęknie. Podobne zjawisko zachodzi pomiędzy komórkami żywego organizmu regulując w nim przepływ różnych płynów. Szczególnie spektakularne jest tu pompowanie przez drzewa wody z gruntu aż do ich wierzchołków. Warto na koniec dla porządku zauważyć, że wszystkie rodzaje gazów doskonałych spełniają to samo równanie stanu Clapeyrona

$$pv = nRT.$$



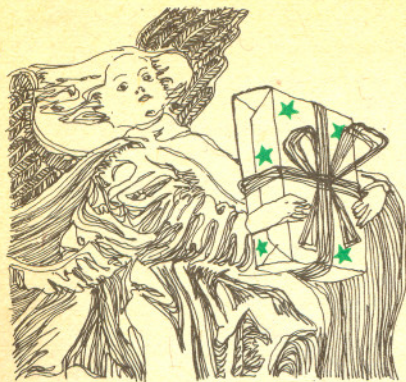
Nietypowe metody nauczania

Jak doniosła prasa, Ministerstwo Oświaty i Wychowania zdecydowało, że ci uczniowie, którzy wybierają się na stodia humanistyczne nie muszą zdawać matematyki na egzaminie dojrzałości. Oczekujemy, że przyszli matematycy i fizycy nie będą zdawać polskiego. Po co na przykład nam, przedstawicielom naok ścisłych, informacja że Kordiana napisał Mickiewicz?



Jak zajrzeć do wnętrza Słońca czyli co robi astronom w kopalni złota

Dr Michał RÓŻYCZKA

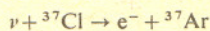


Wszyscy wiemy, że Słońce świeci dzięki odbywającym się głęboko w jego wnętrzu reakcjom jądrowym (Patrz w niebo, „Delta” 11/1982). Jak jednak sądzę, większość Czytelników „Delt” miałaby kłopoty z objaśnieniem, skąd tę wiedzę czerpiemy: obserwujemy przecież tylko atmosferę Słońca, a w panujących w niej warunkach żadne reakcje jądrowe odbywać się nie mogą. Do takiego a nie innego opisu źródeł słonecznej energii dotarto dość zawiłą drogą kolejnych — miejmy nadzieję coraz lepszych — domysłów. W latach 30-tych naszego wieku okazało się, że w warunkach, jakich oczekiwano we wnętrzach gwiazd, może dochodzić do samorzutnej syntezy jąder atomów helu z protonów, który to proces niezbyt ściśle nazywa się w astrofizyce „spalaniem wodoru”. Z czysto formalnego punktu widzenia to, że energia wyświecana przez Słońce pochodzi z tak rozumianego spalania wodoru, trzeba było na początku po prostu założyć. Opierając się na tym i innych jeszcze założeniach (dla przykładu — jest wśród nich takie, które mówi o braku systematycznych ruchów materii we wnętrzu Słońca) otrzymano układ równań różniczkowych — tzw. układ równań budowy. Jego rozwiązaniem jest zbiór funkcji opisujących zmiany różnych parametrów (gęstości, ciśnienia itp.) z odległością od środka Słońca (Patrz w niebo w tym numerze „Delt”). Rozwiązania, które dla odległości równej promieniowi Słońca zgadzają się z parametrami znanymi z obserwacji jego powierzchni, noszą nazwę modeli Słońca. Dla niewielkich odległości od środka podają one tak duże wartości gęstości (ok. 150 g/cm³) i temperatury (ok. 15 mln K), że wydajność reakcji jądrowych jest w tych warunkach zgodna z oczekiwaną, a wyjściowe założenie okazuje się wewnątrznie niesprzeczne. Oparte na nim modele mają inne jeszcze pożądane własności (np. „długowieczność” rzędu tej, jakiej wymaga od Słońca paleontologia); tak więc nie pozostaje nam nic innego, jak uznać, iż postulując swego czasu nuklearną naturę słonecznej energii odnaleziono właściwy trop.

Tego, co nam o wnętrzu Słońca opowiadają rozwiązania równań budowy nie sposób jednak nazwać inaczej, niż domysłem. Jego rzetelna, tj. eksperymentalna, a nie logiczna, weryfikacja stała się możliwa dopiero na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych. Pamiętamy zapewne, że większość energii wydzielanej podczas spalania wodoru ma postać kwantów promieniowania gamma, które w swej wędrówce ku powierzchni Słońca wielokrotnie dzielą się w oddziaływaniach z różnymi atomami i jonami na kwanty o coraz to większej długości fali. Po ok. 100 000 lat takiej połączonej z rozdrabnianiem się podróży docierają do powierzchni Słońca jako światło widzialne, które samo w sobie nie jest oczywiście żadnym dowodem na to, iż we wnętrzu Słońca reakcje jądrowe rzeczywiście zachodzą (gdyby wnętrze to było zupełnie martwe już od 99 999 lat, to i tak dowiedzielibyśmy się o tym nie wcześniej, niż za rok).

Na szczęście dla eksperymentatorów, spalaniu wodoru towarzyszy emisja uważanych do niedawna za bezmasowe neutrin, dla których wnętrze Słońca jest całkowicie przezroczyste i które już po 8 minutach od chwili wyprodukowania trafiają na Ziemię. Zaobserwowanie strumienia słonecznych neutrin byłoby więc równoważne tytułowemu „zajrzeniu do wnętrza Słońca” połączonemu z uzyskaniem najświeższych o tym wnętrzu informacji. Jako niesłychanie przenikliwe neutrina są, niestety, bardzo trudno wykrywalne (trudno się temu dziwić, skoro — jak powiedzieliśmy przed chwilą — mogą bez przeszkód przelatywać przez Słońce).

Przy konstruowaniu detektora neutrin słonecznych postanowiono wykorzystać reakcję



niezrównowagi rozpadu beta, w wyniku której jądro atomu chloru przekształca się w nietrawne jądro atomu argonu o okresie połowicznego rozpadu 35 dni. Na powierzchni Ziemi chlor może zamienić się w argon także pod wpływem promieniowania kosmicznego; na szczęście efekt ten można wyeliminować umieszczając detektor dostatecznie głęboko pod ziemią (objaśnia to druga część tytułu). Jeszcze do niedawna umieszczanie obserwatorium głęboko pod ziemią byłoby tylko absurdem niezgodnym z „naturą” astronomii. Dotychczas starano się umieszczać instrumenty „jak najbliżej nieba” — na szczytach wysokich gór, na pokładzie satelitów itp. Uruchomiony w końcu lat sześćdziesiątych i działający do dziś detektor neutrinowy Davisa jest zbiornikiem o pojemności ok. 400 000 l wypełnionym perchloroetylenem (C₂Cl₄) i umieszczonym na głębokości ok. 1600 m w kopalni złota Homestack znajdującej się w Południowej Dakocie. W regularnych odstępach czasu jest on przedmuchiwany helem, który wynosi zeń cały wyprodukowany przez neutrina argon (zwykle ok. 100 atomów). Zaadsorbowany na filtrach węglowych argon trafia następnie pod liczniki proporcjonalne, gdzie rozpadające się jądra są





skrzętnie liczone (mimo iż wydaje się to nieprawdopodobne, błąd takich zliczeń nie przekracza 5%, co stwierdzono wpuszczając do zbiornika znaną liczbę atomów argonu).

Od kilku już lat wiemy, że neutrin słonecznych jest „za mało”: ponad trzykrotnie mniej, niż chcą tego modele Słońca. Rozbieżność tę próbowano usunąć na różne sposoby konstruując mniej lub bardziej „dziwnione”, lub jeśli ktoś woli „naciągane” modele, jednak w ramach astrofizyki nie osiągnięto właściwie niczego. Na obserwowany deficyt składa się prawdopodobnie kilka efektów, wśród których niebagatelną rolę mogą odgrywać hipotetyczne oscylacje stanu neutrin. Jeśli rzeczywiście mają one masę różną od zera (jak to się zdaje wynikać z przeprowadzonych ostatnio eksperymentów), to mogą w drodze ze Słońca na Ziemię zmieniać swój stan w sposób uniemożliwiający detekcję. Na ostateczne rozwiązanie problemu przyjdzie prawdopodobnie poczekać do chwili zainstalowania w kopalni złota lub w innym równie egzotycznym dla astronoma miejscu, nowego, dokładniejszego i czulszego detektora, w którym substancją czynną będzie prawdopodobnie lit lub gal.



Rozważmy płaską pętlę z prądem stałym umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym. Przewodnik niech będzie nieważki, jednorodny, giętki i nierozciągliwy. W położeniu równowagi energia zwoju

$$V = -p_m \cdot B, \quad p_m \text{ — moment magnetyczny zwoju,}$$

będzie minimalna. Wynika stąd, że zwoj ustawi się tak, by p_m było równoległe do B , czyli w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola. W płaszczyźnie tej żaden kierunek nie jest wyróżniony, więc zwoj przyjmie kształt okręgu. Ponieważ $p_m = S \cdot I$, gdzie S jest polem powierzchni obejmowanej przez zwoj, więc

spośród figur płaskich o zadanym obwodzie największe pole ma koło.

Dwa nieważki, naelektryzowane ładunkami o przeciwnych znakach koraliki nanizano na sztywne druty krzywoliniowe (bez załamań). W położeniu równowagi siły elektrostatyczne muszą działać wzdłuż normalnej do obu drutów, ponieważ jakiegokolwiek składowe styczne wyprowadzałyby układ z tego położenia. Stanowi równowagi odpowiada również minimalna energia, co wymaga najmniejszej odległości ładunków. Wynika stąd, że:

najkrótszy odcinek łączący dwie gładkie krzywe jest do nich prostopadły.

W wierzchołkach dowolnego czworoboku $ABCD$ umieszczono cztery jednakowe masy. Środek ciężkości takiego układu można wyznaczyć na trzy sposoby. Najpierw znajdujemy środek ciężkości X mas A i D . Dzieli on \overline{AD} na połowy. Podobnie środek ciężkości Y mas C i B jest środkiem odcinka \overline{CB} . Środek ciężkości całego układu leży więc w środku odcinka \overline{XY} . W taki sam sposób można znaleźć środek ciężkości mas $ABCD$ wyznaczając środki ciężkości par AB i CD albo BD i AC . Środek ciężkości układu jest jednak tylko jeden, zatem:

odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi czworoboku przecinają się w jednym punkcie dzielącym te odcinki na połowy.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 316. Z ilu co najmniej czworoboków można złożyć sześcian?

Rozwiązanie na str. 16

M 317. Wykazać, że istnieje liczba podzielna przez 5^{1000} , której zapis dziesiętny nie zawiera zer.

Rozwiązanie na str. 16

M 318. Wykazać, że jeżeli liczby p i $8p^2 + 1$ są pierwsze, to $8p^2 - 1$ też jest pierwsza.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 126. W ognisku soczewki skupiającej znajduje się punktowe źródło światła. Przyjmijmy, że soczewka nie odbija, nie rozprasza i nie pochłania padającego na nią światła oraz iż spełnione są ściśle prawa optyki geometrycznej. Wykazać, że soczewka przyciągana jest w kierunku źródła światła.

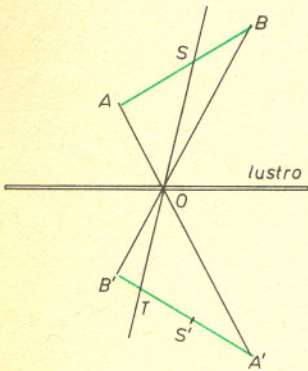
Rozwiązanie na str. 16

F 127. Małe kuleczki szklane można „zawiesić” w pionowej wiązce laserowej, podobnie jak piłki ping-pongowe w strumieniu powietrza. Wyjaśnić problem stabilności kuleczek.

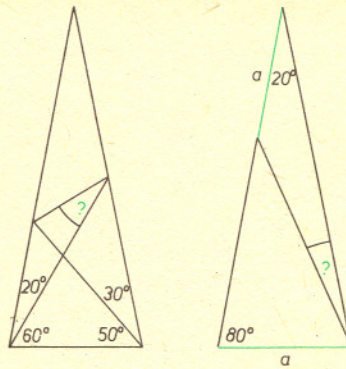
Rozwiązanie na str. 16

Lustro

Srodką koła nie da się skonstruować za pomocą samej linijki. Ustawmy bowiem koło pochyło do lustra (jak to w przekroju widzimy na rysunku); możemy także uważać, że obraz powstał z koła przez rzutowanie z punktu O na lustro. Jeśli byśmy umieli skonstruować środek S tylko linijką, to ktoś wykonując „rzuty” naszych operacji — czyli prowadząc proste przez obrazy punktów, przez które my prowadzimy — dostaliby jako środek koła punkt T — a więc nie S' .



Zadania nie z trygonometrii



m u z y k a	1 8 6 2 7 3
m u z y k a	1 8 6 2 7 3
m u z y k a	1 8 6 2 7 3
+ m u z y k a	+ 1 8 6 2 7 3
= k o l e d y	= 7 4 5 0 9 2

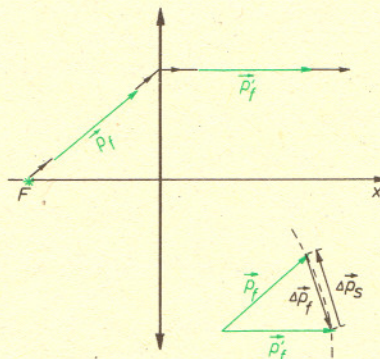
Czy to jedyne rozwiązanie?



Rozwiązanie zadania F 126.

Zgodnie z prawami optyki geometrycznej soczewkę opuszcza wiązka światła równoległa do głównej osi optycznej. Rysunek przedstawił bieg jednego z promieni. Pędy fotonów padających i opuszczających soczewkę są różne. Zmiana pędu wynosi Δp_f . Soczewka uzyskuje więc pęd:

$$\Delta p_s = -\Delta p_f.$$



Sumaryczny pęd uzyskany przez soczewkę jest sumą zmian pędów odpowiadających wszystkim promieniom. Z symetrii wynika, iż pęd ten jest skierowany ku źródłu. Mamy więc do czynienia z efektem „przyciągania soczewki przez źródło światła”. Przy innych położeniach źródła sytuacja mogłaby być odmienna (jaka?).

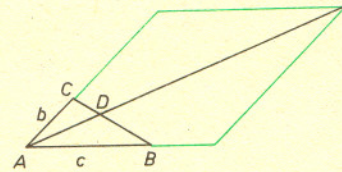
Stacyczny dowód wzoru na długość dwusiecznej

Niech wzdłuż boków \overline{AB} i \overline{AC} działają dwie równe siły wielkości bc jednostek. Ich wypadkowa ma długość $2 \cdot bc \cdot \cos \frac{A}{2}$ (z reguły równoległoboku).

Sily te są równe odpowiednio $b \cdot \overline{AB}$ i $c \cdot \overline{AC}$ i wobec tego (rysunek) równoważne z $(b+c) \cdot \overline{AD}$, gdzie \overline{AD} jest dwusieczną kąta A .

Stąd mamy

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$



Rozpatrzmy takie oto zadanie:

Udowodnić, że w paraboli środki równoległych cięciw leżą na prostej równoległej do osi symetrii.

Możemy je rozwiązać tak:

Z punktu P rzucamy dwa kamienie o jednakowej masie: jeden w kierunku PT do góry, drugi z tą samą prędkością wzdłuż prostej PT , lecz w dół. Z jednorodności ziemskiego pola grawitacyjnego wynika, że w każdej chwili t odcinek łączący te dwa kamienie jest równoległy do stycznej do paraboli w początkowym punkcie P . Składowe poziome prędkości obu ciał są jednakowe, a więc środek masy (znajdujący się oczywiście w środku odcinka łączącego chwilowe położenie ciał) spada ruchem jednostajnie przyspieszonym po prostej pionowej przechodzącej przez P .

Planety poruszają się po elipsach. Czy da się — naśladując powyższe rozumowanie — znaleźć jakąś własność „geometryczną” elipsy?



Rozwiązanie zadania F 127.

Decydującym czynnikiem dla możliwości zawieszenia kulki jest ciśnienie wywierane przez światło. Natężenie światła laserowego jest wystarczająco duże, by ciśnienie to mogło równoważyć ciężar kulki o średnicy rzędu $1 \mu\text{m}$. Dla zapewnienia stabilności w kierunku pionowym wystarczy niewielka rozbieżność wiązki światła, nawet tak mała jak rozbieżność wiązki laserowej. Stabilność dla wychyleń w kierunku poziomym wynika ze zjawiska załamania światła w kulce. Gdy kulka odchyła się nieco od osi symetrii wiązki, pozostając jednak cały czas w jej obrębie, pojawia się siła działająca na kulkę ku osi. Można się o tym przekonać robiąc rysunek biegu promieni i śledząc zmiany pędów fotonów.



Rozwiązanie zadania M 316.

Każdą z podstaw $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sześcianu S musimy pokryć co najmniej dwoma czworoscianami. Ich łączna objętość nie przekroczy $1/3$ objętości sześcianu. Ponieważ żaden czworoscian nie zawiera pary ścian równoległych, otrzymujemy w ten sposób co najmniej cztery czworosciany o łącznej objętości nie większej niż $2/3$ objętości całego sześcianu. Wynika stąd, że nie można złożyć sześcianu z czterech czworoscianów. A oto rozkład na pięć czworoscianów: $ABCB'$, $ACDD'$, $AB'A'D'$, $C'CB'D'$, $BCB'D'$.



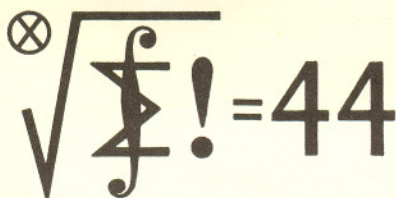
Rozwiązanie zadania M 317.

Zapis liczby 5^k kończy się cyfrą 5. Niech teraz w liczbie $a_0 = 5^{1000}$ pierwsze od prawej zero leży na pozycji i_0 . Wtedy podzielna przez a_0 liczba $a_0 + a_0 \cdot 10^{i_0} - 1$ ma już co najmniej i_0 ostatnich cyfr różnych od zera. Konstrukcję tę możemy powtarzać, otrzymując liczby a_k , przy czym w zapisie dziesiętnym a_k co najmniej $i_k - 1 \geq k$ ostatnich cyfr jest niezerowych i $a_0 | a_k$. Zapiszmy teraz $a_{1000} = 10^{1000} A + B$, gdzie $B < 10^{1000}$ i zauważmy, że $B = a_{1000} - 10^{1000} A = a_{1000} - 2^{1000} \cdot 5^{1000} \cdot A$ dzieli się przez 5^{1000} i ma wszystkie cyfry niezerowe.



Rozwiązanie zadania M 318.

Jeżeli $3|p$, to p^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, a więc $3|8p^2 + 1$. Wobec tego p musi być podzielne przez 3, czyli $p = 3$. Wtedy zarówno $8p^2 + 1 = 73$, jak i $8p^2 - 1 = 71$ są pierwsze.



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 4/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	-38,45pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	-30,00pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	-23,48pkt
Jaecok Uryga	- Bytom	-22,86pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	-18,16pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	-17,27pkt

Współczynniki trudności zadań 22, 23, 24:

1,99 2,53 2,81

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkic rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania, (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami.

Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

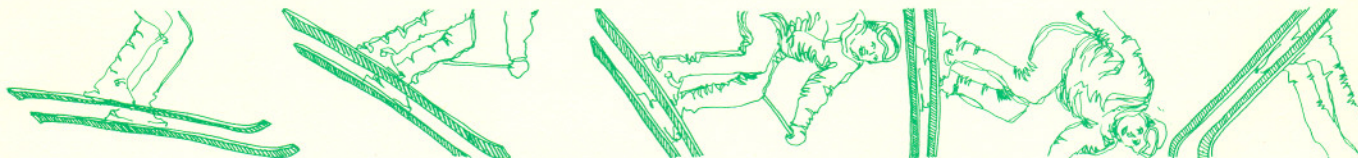
Zadania nr 40, 41, 42

Termin nadsyłania rozwiązań:

40. Liczby rzeczywiste a_0, a_1, \dots, a_n spełniają warunki: $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n, a_n > 0$. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ leżą w przedziale $\langle -1, 0 \rangle$. Co można powiedzieć o pierwiastkach zespolonych?

41. Dane są trzy okręgi współśrodkowe o promieniach 1, $\sqrt{7}$, 4. Obliczyć największe możliwe pole trójkąta mającego po jednym wierzchołku na każdym z tych okręgów.

42. Na każdym polu szachownicy (8×8) stoi pionek. Zdejmujemy pionki z szachownicy trójkami: w jednym ruchu można zdjąć trzy pionki stojące na trzech kolejnych polach w jednym rzędzie poziomym lub pionowym. Przypuśćmy, że udało się wykonać 21 ruchów; pozostał więc jeden pionek. Czy można określić jego położenie?



Rozwiązania zadań z numeru 8/1982

28. Sprawdzamy bezpośrednio, że $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 6, f(6) = 6, f(7) = 8, f(8) = 7$ oraz że $f(x) \geq 7$ dla wszystkich większych x . Oczywiście dla liczb wszystkich większych x mamy $f(x) = x+1$; ale dla liczb złożonych $x > 8$ jest $f(x) \leq x-2$, co nietrudno wykazać np. przez indukcję względem długości rozkładu x na czynniki pierwsze. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby $x > 8$ dwukrotne zastosowanie operacji f da liczbę $ff(x) < x$. Jeśli więc $x_0 > 8$, to $x_2 < x_0$; jeśli nadal $x_2 > 8$, to $x_4 < x_2$ itd; po skończeniu wielu krokach dojdziemy do wartości x_n równej 7 lub 8 i dalej będzie się powtarzać 7, 8, 7, 8, 7, 8, ... Ten sam wynik dostaniemy, gdy wystartujemy od $x_0 = 7$ lub 8. Jeśli natomiast $x_0 \leq 6$, to po kilku krokach osiągniemy $x_n = 6$ i dalej $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 6$. Tak więc jedynie liczby 6, 7, 8 mogą wystąpić w ciągu x_n nieskończenie wiele razy.

29. Przykład rozcięcia kwadratu $ABCD$ na 8 trójkątów ostrokątnych: niech K i L oznaczają środki boków AB i CD , niech P będzie punktem leżącym wewnątrz prostokąta $AKLD$, ale na zewnątrz kół mających za średnice odcinki AK i AD , oraz niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej KL . Trójkąty $AKP, APD, DPL, LPQ, LQC, QBC, QKB, KQP$ mają żądane własności. Można udowodnić, że nie da się rozciąć kwadratu na mniej niż 8 trójkątów ostrokątnych.

30. Odpowiedź na oba pytania jest pozytywna. Oto przykład pary funkcji wypukłych, których wykresy przecinają się w nieskończenie wielu punktach: $f(x) = x^2, g(x) = x^2 + \sin x$. Aby otrzymać parę funkcji wypukłych o wykresach przecinających się w n punktach, wystarczy wziąć te same dwie funkcje na przedziale $\langle 0, (n-1)\pi \rangle$ i przedłużyć je do funkcji liniowych na przedziałach $(-\infty, 0)$ i $\langle (n-1)\pi, +\infty \rangle$, których wykresami są półproste styczne do wykresów funkcji f i g w punktach 0 oraz $(n-1)\pi$.

