



## SPIS TREŚCI

NUMERU 11 (107)

Atomowe wzorce częstotliwości, zegary atomowe i atomowa skala czasu <i>dr Karol Radecki</i>	str. 1
Zdjęcie światła w locie <i>mgr Tomasz Kotowski</i>	str. 5
Zadania <i>dr Andrzej Radliński</i>	str. 7
Malowanie atomami <i>dr Andrzej Radliński</i>	str. 8
Nim zaświeci gwiazda <i>dr Michał Różycki</i>	str. 12
Patrz w niebo	str. 15
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 15
Klub 44	str. 16

**W następnym numerze:**  
**Analiza wymiarowa**

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Tomasz Hofmökł  
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bogdan Paczyński  
 dr Zbigniew Płochocki  
 doc. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 doc. dr Jerzy Sawicki  
 prof. dr Zbigniew Semadeni  
 prof. dr Grzegorz Sitarski  
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Stefan Turnau  
 doc. dr Aniela Wolska  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Zakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.  
 mgr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
 dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 2700/82 Z-86

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
 Termin przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 25 listopada na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1983,  
 — do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku 1983.

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:  
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

# Atomowe wzorce częstotliwości, zegary atomowe i atomowa skala czasu

Dr Karol RADECKI

## PODSTAWY FIZYCZNE DZIAŁANIA ATOMOWYCH WZORCÓW CZĘSTOTLIWOŚCI

Atomowe wzorce częstotliwości należą do najwyższej klasy wzorców. Posiadają one doskonałą odtwarzalność i stabilność częstotliwości. Przy ich budowie wykorzystuje się zdolność emisji lub absorpcji przez atomy promieniowania elektromagnetycznego, o znanej z dużą dokładnością częstotliwości. Najczęściej stosowanymi są atomy wodoru, cezu i rubidu. Emitowana lub absorbowana częstotliwość  $f_0$  jest związana z różnicą energii między poziomami energetycznymi  $p$  i  $q$  atomu następującą relacją:

$$hf_0 = E_q - E_p,$$

gdzie  $h$  jest stałą Plancka. Dla odosobnionego atomu energie  $E_p$  i  $E_q$ , a więc i częstotliwość  $f_0$  można uważać za stałe, ponieważ dotychczas nie stwierdzono eksperymentalnie ich zmienności, a w szczególności zjawiska starzenia się atomu. Wykorzystywana we wzorcach częstotliwości różni się nieco od częstotliwości  $f_0$  na skutek wpływu zewnętrznych pól magnetycznych i elektrycznych oraz innych czynników.

Należy zwrócić uwagę, że zdolność emisji lub absorpcji w rzeczywistości dotyczy pewnego pasma częstotliwości  $\Delta f$ , i w związku z tym mówi się o szerokości linii rezonansu atomowego (rys. 1).

Do celów wzorcowych są wykorzystywane linie o możliwie małej względnej szerokości  $\frac{\Delta f}{f}$ ,

która zależy głównie od własności atomów i konstrukcji wzorca. W szczególności, szerokość linii jest tym większa, im większy jest czas oddziaływania pola mikrofalowego na atom.

W atomowych wzorcach wykorzystuje się przejścia magnetyczne między poziomami energetycznymi w nadsubtelnej strukturze stanu podstawowego  $^2S_{1/2}$  atomów. Struktura taka powstaje w wyniku oddziaływania własnych momentów pędu (spinów) jądra i elektronu walencyjnego atomu. Różnica energii między tymi poziomami odpowiada częstotliwości  $f_0$ , która leży w zakresie mikrofal.

Poziomy struktury nadsubtelnej są opisane przez liczby kwantowe  $F = I + 1/2$  i  $F = I - 1/2$ , gdzie  $I$  jest liczbą kwantową spinu jądra. W obecności stałego zewnętrznego pola magnetycznego poziomy struktury nadsubtelnej ulegają rozszczepieniu na  $2F + 1$  poziomów (rys. 2). Do celów wzorcowych są wykorzystywane przejścia między poziomami o liczbie kwantowej  $m_F = 0$ . Częstotliwość dla tego przejścia jest najmniej zależna od natężenia pola magnetycznego i wynosi:

$$f = f_0 + C_H \cdot H^2.$$

Wartości współczynnika  $C_H$  oraz częstotliwości  $f_0$  dla atomów wodoru, rubidu i cezu podano w tabeli.

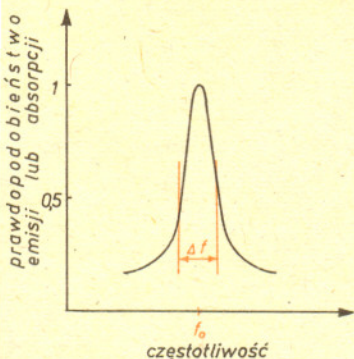
Pierwiastek	Izotop	$I$	Przejście energetyczne	$f_0$ [Hz]	$C_H$ [Hz/(A/m) <sup>2</sup> ]
Wodór	<sup>1</sup> H	$\frac{1}{2}$	$F = 1, m_F = 0 \rightarrow F = 0, m_F = 0$	1420405751	0,4356
Rubid	<sup>87</sup> Rb	$\frac{3}{2}$	$F = 2, m_F = 0 \rightarrow F = 1, m_F = 0$	6834682608	0,0905
Cez	<sup>133</sup> Cs	$\frac{7}{2}$	$F = 4, m_F = 0 \rightarrow F = 3, m_F = 0$	9192631770	0,0673

W praktyce, dla obserwacji przejścia energetycznego stosuje się bardzo słabe zewnętrzne pole  $H_0$ . W celu uzyskania dużego natężenia linii rezonansowej jest konieczne zachwianie naturalnej populacji obsadzeń poziomów, między którymi zachodzi przejście energetyczne.

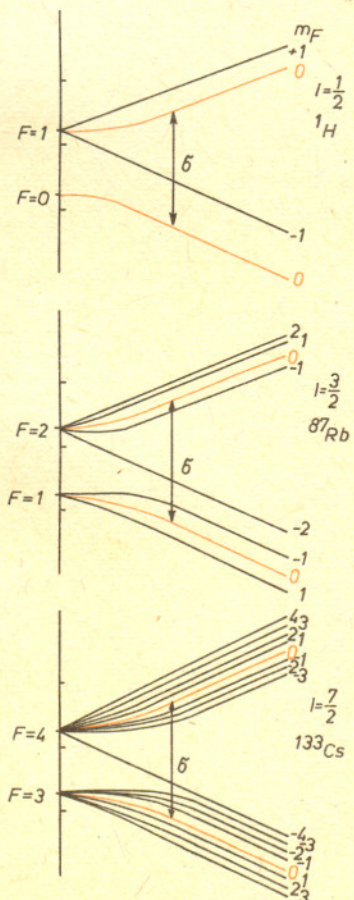
Jak wiadomo, w stanie równowagi cieplnej stosunek liczby atomów znajdujących się w górnym stanie energii  $E_2$  do liczby atomów znajdujących się w dolnym stanie energii  $E_1$ , określa wzór

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left[\frac{-(E_2 - E_1)}{kT}\right],$$

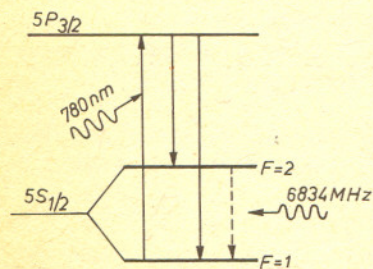
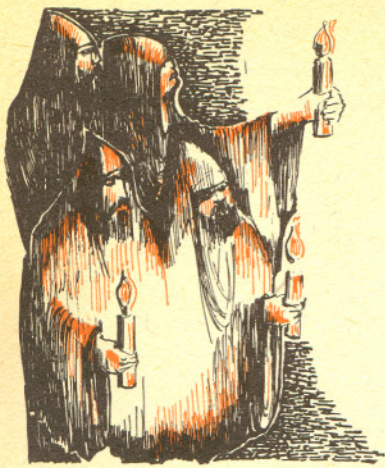
gdzie  $k$  jest stałą Boltzmann.



Rys. 1. Linia rezonansu atomowego.



Rys. 2. Rozszczepienie poziomów nadsubtelnej struktury nadsubtelnej stanu  $^2S_{1/2}$  atomów wodoru, rubidu i cezu w polu magnetycznym.



Rys. 3. Ilustracja pompowania optycznego.

Przy stosowanych we wzorcach atomowych temperaturach  $T$ , dla wszystkich wykorzystywanych przejść,  $E_2 - E_1 \ll kT$ , co oznacza, że względna różnica populacji obsadzeń jest bardzo mała. Stan inwersji obsadzeń uzyskuje się bądź drogą przestrzennej separacji atomów znajdujących się w rozważanych stanach energetycznych, bądź w procesie optycznego pompowania. Przestrzenna separacja atomów jest najstarszą metodą wytwarzania stanu inwersji obsadzeń i dotyczy wiązek atomów lub molekuł (substancji gazowej) posiadających różny od zera dipolowy moment elektryczny lub magnetyczny.

W przypadku atomów wodoru, rubidu i cezu, które są obdarzone dipolowym momentem magnetycznym, przestrzennej separacji pożądaných atomów można dokonać przepuszczając strumień tych atomów przez silne niejednorodne pole magnetyczne. Na atomy działa wówczas siła o składowych

$$F_i = \mu \cdot \text{grad } H_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

której wartość i kierunek zależy od gradientu pola magnetycznego oraz przestrzennej orientacji momentu magnetycznego  $\mu$  atomu. Ponieważ przejściu (patrz rys. 2) towarzyszy taka zmiana orientacji w przestrzeni wektora  $\mu$ , że kierunek działania siły zmienia się na przeciwny, zatem możliwa jest przestrzenna separacja pożądaných atomów w wiązce. W praktyce, wysoka sprawność separacji uzyskuje się przy przepuszczeniu wiązki atomowej między nadbiegunnikami wielobiegunowego magnesu w polu o gradiente większym niż  $3000 \text{ A/cm}^2$ .

W procesie optycznego pompowania różnica populacji obsadzeń poziomów powstaje w wyniku działania na zbiorowisko atomów promieniowania optycznego, pochodzącego z zewnętrznego źródła światła. Rys. 3 ilustruje zjawiska występujące przy optycznym pompowaniu. Pokazano tu uproszczony schemat poziomów energetycznych atomu rubidu  $^{87}\text{Rb}$ . Zewnętrzne promieniowanie optyczne (o długości fali  $\lambda = 780 \text{ nm}$ ) powoduje przejście ze stanu podstawowego  $^2S_{1/2} F = 1$  do stanu wzbudzonego  $^2P_{3/2}$ . Ponieważ atomy rubidu w wyniku emisji spontanicznej wracają do obu stanów podstawowych  $^2S_{1/2} F = 1$  i  $F = 2$  z jednakowym prawdopodobieństwem, istnieje tendencja do zwiększania populacji stanu  $^2S_{1/2} F = 2$ . Optyczne pompowanie charakteryzuje się dużą efektywnością pod warunkiem odpowiedniego doboru właściwości światła pompującego, tj. polaryzacji, natężenia, rozkładu widmowego.

### BUDOWA ATOMOWYCH WZORCÓW CZĘSTOTLIWOŚCI

Najszerze zastosowanie w badaniach naukowych i technice znajdują trzy typy wzorców:

- 1) wzorce z wiązką atomową cezu,
- 2) maszyny wodorowe,
- 3) wzorce z pompowaniem optycznym w parach rubidu.

Wzorce z wiązką cezową oraz z pompowaniem optycznym w parach rubidu należą do grupy wzorców typu biernego. We wzorcach tych pożądanе przejście energetyczne jest wymuszane przez zewnętrzne pole mikrofalowe o częstotliwości odpowiedniej dla danego przejścia. Natomiast maser wodorowy jest tzw. wzorcem czynnym, w którym energia danego przejścia stanowi użytkowy sygnał o częstotliwości wzorcowej.

#### Wzorec z wiązką atomową cezu

Na rys. 4 pokazano schemat funkcjonalny wzorca atomowego z wiązką cezu. W naczyniu próżniowym jest umieszczone źródło wiązki atomowej. W wyniku przestrzennej separacji atomów w niejednorodnym polu wielobiegunowego magnesu A, do rezonatora mikrofalowego wchodzi atomy znajdujące się np. w niższym stanie energii. W rezonatorze pod wpływem pola mikrofalowego (o częstotliwości  $f = 9,2 \text{ GHz}$ ) część atomów przechodzi do stanu wzbudzonego (stosowana jest również inna geometria wiązki atomowej niż pokazana na rys. 4, która pozwala na wykorzystanie obu zjawisk emisji i absorpcji mikrofal przez atomy).

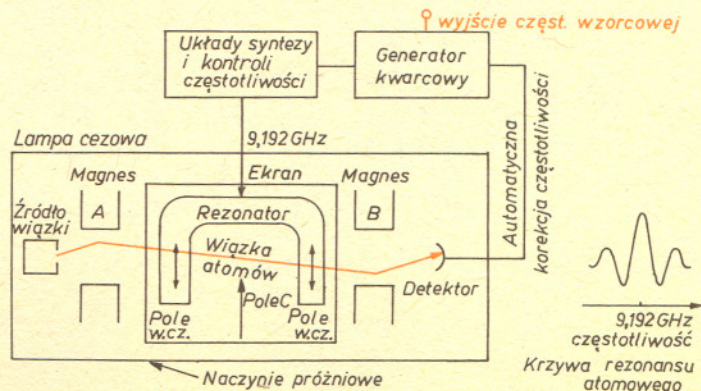


#### Rozwiązanie zadania M 313

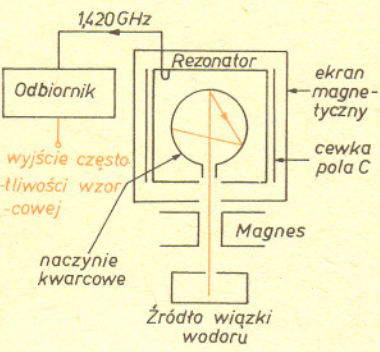
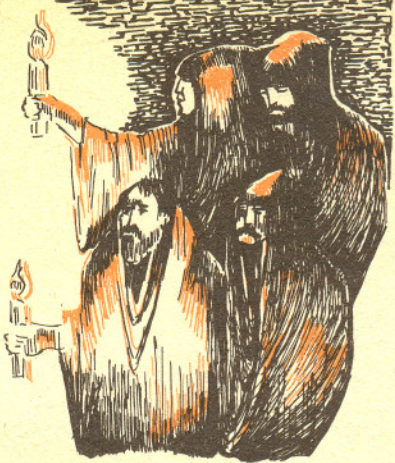
Calkowitymi pierwiastkami równania  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k = 0$  o calkowitych współczynnikach mogą być tylko dzielniki  $a_0$  — w naszym przypadku „tylko”  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 36, \pm 40, \pm 45, \pm 60, \pm 72, \pm 90, \pm 120, \pm 180, \pm 360$ : 48 możliwości! Możemy sobie jednak zaoszczędzić rachunków, zauważając, że jeżeli  $x_0$  jest calkowitym pierwiastkiem równania  $p(x) = 0$ , a  $m$  — dowolną liczbą calkowitą, to  $p(m) = p(m) - p(x_0) = a_0 + \dots + a_k m^k - a_0 - \dots - a_k x_0^k = a_1(m - x_0) + \dots + a_k(m - x_0) \cdot (m^{k-1} + m^{k-2}x_0 + \dots + x_0^{k-1})$  dzieli się przez  $m - x_0$ .

Weźmiemy  $m = 1$  i  $m = -1$ . Mamy:  $1^3 - 13 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 360 = -378$ , a więc każdy calkowity pierwiastek  $x_0$  naszego równania musi spełniać warunek  $(x_0 - 1) | 378 = 2 \cdot 27 \cdot 7$  — warunek ten spełniają tylko liczby 2, 3, 4, 8, 10, 15, -1, -2, -5, -6, -8, -20. Z kolei podstawiając  $m = -1$  otrzymujemy  $(x_0 + 1) | 368 = 16 \cdot 23$  co ogranicza zbiór możliwych pierwiastków do  $\{3, 15, -5\}$ .

Teraz już łatwo sprawdzić, że jedynym pierwiastkiem calkowitym jest 15 — przy zwykłym sprawdzaniu doszlibyśmy do niego prawdopodobnie nie wcześniej niż za dziesiątą próbą.



Rys. 4. Schemat funkcjonalny atomowego cezowego wzorca częstotliwości.



Rys. 5. Schemat funkcjonalny masera wodorowego.

W obszarze pobudzenia zastosowano stałe pole magnetyczne  $C$ , w celu rozszczepienia poziomów energetycznych w atomach tak, aby móc wywołać pożądane przejścia. Magnes  $B$ , taki sam jak magnes  $A$ , wydziela atomy pobudzone i kieruje je do detektora. Rejestrowane natężenie wiązki jest proporcjonalne do prawdopodobieństwa wymuszenia przez pole mikrofalowe przejścia energetycznego. Przebieg tego prawdopodobieństwa jako funkcji częstotliwości jest krzywą rezonansu atomowego. Jej szerokość w budowanych współcześnie wzorcach zawiera się w granicach od 30 do 1300 Hz.

W skład urządzenia wzorca wchodzi ponadto wysokostabilny generator kwarcowy oraz układ syntezy częstotliwości, w którym sygnał z generatora jest przetwarzany na sygnał mikrofalowy. Sygnał z wyjścia lampy cezowej służy do automatycznej korekcji częstotliwości generatora kwarcowego w ten sposób, aby częstotliwość pola mikrofalowego była równa częstotliwości środkowej linii rezonansu atomowego. W ten sposób częstotliwość generatora kwarcowego jest określona głównie przez parametry lampy cezowej i jest częstotliwością wzorcową.

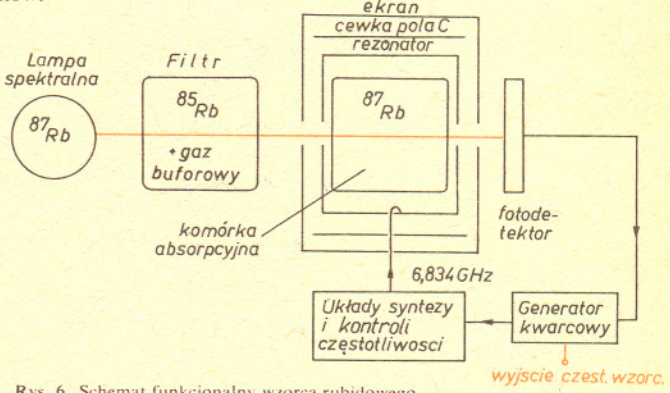
**Maser wodorowy**

W maserze wodorowym (rys. 5) zachodzą przejścia między poziomami  $F = 1, m_F = 0$  i  $F = 0, m_F = 0$ . Sześciobiegunowy magnes separuje atomy znajdujące się w tych dwóch stanach tak, że do rezonatora mikrofalowego wchodzi wiązka zawierająca atomy wodoru w stanie  $F = 1, m_F = 0$  (oraz atomy w stanie  $F = 1, m_F = 1$ ).

Kiedy rezonator mikrofalowy jest dostrojony do częstotliwości przejścia, oraz natężenie wiązki wchodzącej do rezonatora jest odpowiednio duże, to powstają w rezonatorze samopodtrzymujące się drgania. Wchodzące do rezonatora atomy zmieniają swój stan i emitują energię. Przy natężeniu wiązki  $> 10^{12}$  atomów/s moc wyjściowa jest rzędu  $10^{-13}$ — $10^{-12}$ W. Podobnie jak we wzorcu cezowym, rezonator mikrofalowy jest starannie ekranowany od zewnętrznych pól zakłócających. Przez zastosowanie kwarcowego naczynia wyłożonego wewnątrz cienką warstwą teflonu wydłużono czas oddziaływania atomów z polem mikrofalowym do 0,3 s. Dzięki temu można otrzymać wąską linię rezonansową o szerokości 1 Hz.

**Wzorec częstotliwości z optycznym pompowaniem w parach rubidu**

Schemat funkcjonalny wzorca pokazano na rys. 6. Promieniowanie optyczne z rubidowej lampy spektralnej z rubidem  $^{87}\text{Rb}$  przechodzi przez filtr zawierający pary rubidu  $^{85}\text{Rb}$ . Filtr pochłania jedną ze składowych nadsztylnych linii widmowych emitowanych przez lampę spektralną. Odfiltrowane światło jest użyte do optycznego pompowania rubidu  $^{87}\text{Rb}$  w komórce absorpcyjnej. W wyniku optycznego pompowania powstaje inwersja obsadzeń poziomów  $F = 2$  i  $F = 1$  struktury nadsztylnego stanu podstawowego atomów  $^{87}\text{Rb}$ . W tym stanie komórka absorpcyjna jest przezroczysta dla przechodzącego przez nią światła, ponieważ liczba atomów zdolnych do absorpcji światła jest bardzo mała. Oddziaływanie na komórkę pola mikrofalowego wymusza przejście  $F = 2, m_F = 0 \rightarrow F = 1, m_F = 0$ , co prowadzi do wyrównania populacji obsadzeń poziomów.



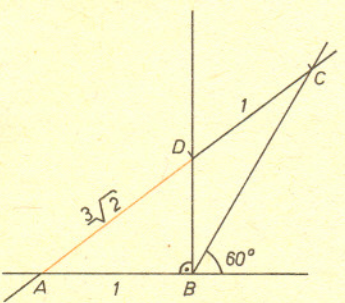
Rys. 6. Schemat funkcjonalny wzorca rubidowego.

Jednocześnie natężenie światła przenikającego przez komórkę maleje. Zmiany natężenia światła przechodzącego przez komórkę absorpcyjną są rejestrowane w detektorze. Wpływ pola mikrofalowego ma charakter rezonansowy i jest największy, gdy jego częstotliwość jest równa częstotliwości rezonansu atomowego (około 6,834 GHz). Typowa szerokość linii rezonansowej wynosi 150 Hz.

**O ZEGARACH ATOMOWYCH I INNYCH ZASTOSOWANIACH WZORCÓW ATOMOWYCH**

Zegar, w najogólniejszym tego słowa znaczeniu, stanowi urządzenie do odmierzenia biegu czasu. Każdy współczesny zegar oprócz źródła zasilania zawiera trzy podstawowe elementy: regulator, sumator oraz rejestrator. Regulator zegara jest układem realizującym zjawisko okresowe, o znanej z określoną dokładnością częstotliwości, czyli niczym innym jak wzorcem częstotliwości.

**Rozwiązanie zadania M 314**  
Mamy  $AC \cos \angle CAB = AB + BC \cos 60^\circ$ ,  
 $AD \cos \angle CAB = AB$ .  
Zatem jeżeli  $AB = 1$  i  $AD = x$ , to  
 $\frac{AC}{AD} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot BC$ , stąd  $BC = \frac{2}{x}$ .  
Z twierdzenia cosinusów dla  $\triangle ABC$  mamy  
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$ ,  
czyli  $(x+1)^2 = 1 + (2/x)^2 + 2/x$ , skąd  
 $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$  lub inaczej  $(x+2) \cdot x \cdot (x^3 - 2) = 0$ . Wobec tego  $AD = x = \sqrt[3]{2}$ .

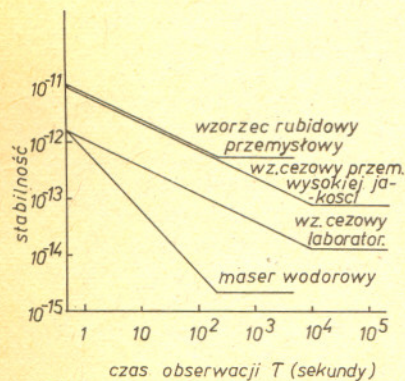


Nie jest to konstrukcja „za pomocą cyrkiela i linijki”, gdyż w tym sformułowaniu rozumiemy, że linijka jest bez podziałki i używamy jej tylko do poprowadzenia prostej przez dwa dane albo już skonstruowane punkty.

# Geometria dla prawników

Wyobraźmy sobie, poruczniku, że to co ludzkość nazywa sprawiedliwością przybiera w skali naszego globu kształt powiedzmy jakiejś idealnej kuli o niezmiennych parametrach. Otóż jeśli gdzieś w jakimś zakątku Ziemi zwycięża niesprawiedliwość, to oznacza wyłącznie to, że tylko w tym miejscu nie ma sprawiedliwości. Natomiast w tym samym czasie, gdzieś tej sprawiedliwości, jako absolutu dobra w stosunkach międzyludzkich, jest po prostu więcej.

(Henryk Kurta, *Mors ultima ratio*, KAW 1979)



Rys. 7. Stabilność częstotliwości różnych wzorców atomowych.



Sumator zlicza kolejne okresy drgań wzorcowego przebiegu okresowego i przedstawia je w konwencjonalnych jednostkach czasu np. sekundach, minutach i godzinach. Odbywa się to w ten sposób, że częstotliwość wzorcowa jest najpierw obniżana wiele razy tak, aby uzyskać przebieg o częstotliwości 1 Hz, czyli o okresie 1 sekundy. Następnie z tego przebiegu jest wytwarzany ciąg impulsów o takim samym czasie powtarzania i te z kolei są zliczane za pomocą elektronicznych liczników. Wskazania sumatora notuje rejestrator.

Zegar, w którym zastosowano wzorec atomowy, jest nazywany zegarem atomowym. Do ich budowy są stosowane zwykle wzorce najwyższej klasy. Są to wzorce laboratoryjne, tzw. wzorce pierwotne, konstruowane i eksploatowane przez instytuty i ośrodki zajmujące się pomiarami czasu i częstotliwości np. National Bureau of Standards (USA), National Physical Laboratory (W. Brytania), Physikalisch Technische Bundesanstalt (RFN) i inne. Wzorcom tym stawia się najwyższe wymagania co do stabilności (maksymalna względna zmiana częstotliwości w określonym czasie), odtwarzalności i niezawodności. Żąda się także, aby wykorzystywana częstotliwość leżała jak najbliżej częstotliwości rezonansowej odosobnionego atomu. Zagadnienie wymiarów, poboru mocy nie jest tu sprawą najważniejszą. Wzorce laboratoryjne wtórne są stosowane do celów technicznych w laboratoriach instytutów naukowo-badawczych, przemysłowych, ośrodkach radionawigacyjnych.

W rozwiązaniach konstrukcyjnych są one prostsze i mniejsze. Pierwszy polski wzorec laboratoryjny (z wiązką atomów cezu) został zbudowany w IPPT PAN w 1966 roku, a obecnie kolejny model tego wzorca zainstalowany w Instytucie Łączności służy do kontroli emisji Krajowej Służby Częstotliwości Wzorcowej.

Atomowe wzorce są budowane również w wersji przemysłowej i jako takie służą głównie do synchronizacji różnego rodzaju urządzeń i systemów nawigacyjnych, radiokomunikacyjnych, komunikacji satelitarnej. Są one produkowane seryjnie przez nielicznych producentów, np. firmę Hewlett-Packard (USA), Rhode-Schwarz (RFN), Thomson-CSF (Francja), Nippon-Electronics (Japonia). Dla tego typu wzorców istotne są małe rozmiary, ciężar, pobór mocy zasilania, duża niezawodność, odporność na trudne warunki pracy. Seryjnie produkowane wzorce cezowe posiadają wymienną lampę cezową podobną pod względem eksploatacji do lamp radiowych. Lampa ta zawiera źródło, detektor oraz układy separacji i pobudzania wiązki atomowej. W Polsce kilka wzorców seryjnej produkcji posiada Polski Komitet Normalizacji i Miar.

W chwili obecnej wzorce cezowe osiągnęły najwyższy poziom techniczny. Charakteryzują się one bardzo dobrą odtwarzalnością, niezawodnością oraz długoterminową stabilnością i pracują najczęściej w układzie zegara atomowego. Na rys. 7 przedstawiono wykresy stabilności dla wzorca z wiązką atomów cezu, masera wodorowego oraz wzorca z optycznym pompowaniem w parach rubidu. Dla czasów obserwacji  $\tau$  większych niż kilka sekund, najlepszą stabilność posiada maser wodorowy. Ze względu na skomplikowaną budowę, duże rozmiary i wysoki koszt, masery znajdują głównie zastosowanie w specjalnych przypadkach, gdzie jest wymagana doskonała stabilność średnioterminowa np. w radioastronomii (interferometri o dużej bazie), radiokomunikacji dalekiego zasięgu. Wzorce rubidowe posiadają podobną do wzorców cezowych stabilność krótko- i średnioterminową, jednak ich odtwarzalność jest mała. Natomiast bardzo ważną zaletą są małe gabaryty i ciężar, prosta budowa, gotowość do pracy w ciągu 10 minut po włączeniu do źródła zasilania.

## ATOMOWĄ SKALĄ CZASU

Wielka równomierność chodu zegarów atomowych upoważnia do utworzenia atomowej skali czasu. Międzynarodową atomową skalę czasu TAI wyprowadza Międzynarodowe Biuro Czasu (BIH-Bureau Internationale de l'Heure) w Paryżu na podstawie wyników pomiarów kilku przodujących laboratoriów.

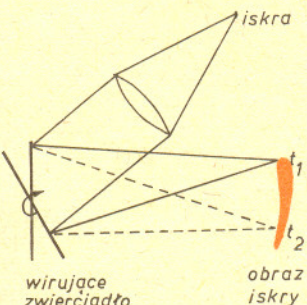
Skala ta wynika z sumowania okresów przebiegu o częstotliwości wzorcowej. Na Generalnej Konferencji Miar w 1967 roku przyjęto, że sekunda jest czasem trwania 9192 631770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami w strukturze nadsubtelnej stanu podstawowego atomu  $^{133}\text{Cs}$ .

Początek atomowej skali czasu został wyznaczony na moment 0 godz., 0 min., 0 s, dnia 1 stycznia 1958 roku czasu uniwersalnego (średniego czasu słonecznego Greenwich).

W życiu codziennym posługujemy się czasem koordynowanym, sygnały nadawane przez radiostację oznajmiają właśnie ten czas. Skalą czasu koordynowanego jest skala czasu atomowego. Czas uniwersalny upływa natomiast w (niejednostajnym) tempie ruchu obrotowego Ziemi. W związku z tym ustalono, że wskazania czasu uniwersalnego koordynowanego UTC mogą się różnić od jednoczesnych wskazań czasu atomowego TAI o równą liczbę sekund. Zmiany różnicy TAI-UTC są dokonywane zwykle 30 czerwca lub 31 grudnia, tak aby oddalenie czasu koordynowanego od czasu uniwersalnego było nie większe niż 1 sekunda. Ostatniej zmiany dokonano w nocy z 30 czerwca na 1 lipca 1982 roku. Minuta kończąca czerwiec liczyła wtedy na południku zerowym 61 sekund. W Polsce natomiast dodatkową sekundę dołączono do minuty przed godziną drugą czasu letniego w dniu 1 lipca. Od tego momentu różnica TAI-UTC wynosi +21 sekund.

# Zdjęcie światła w locie

Mgr Tomasz KOTOWSKI



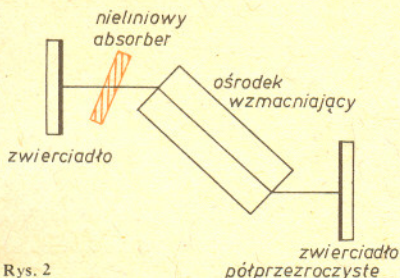
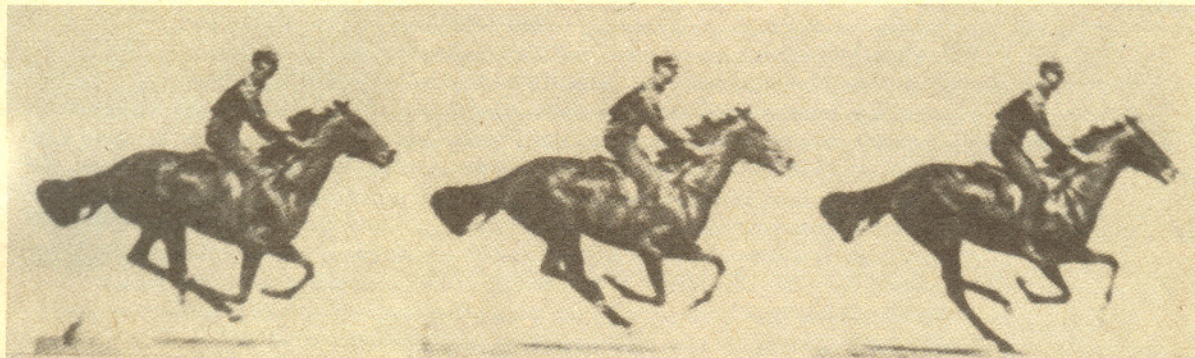
Rys. 1

- 1 mikrosekunda ( $\mu s$ ) =  $10^{-6}s$
- 1 nanosekunda (ns) =  $10^{-9}s$
- 1 pikosekunda (ps) =  $10^{-12}s$
- 1 femtosekunda (fs) =  $10^{-15}s$

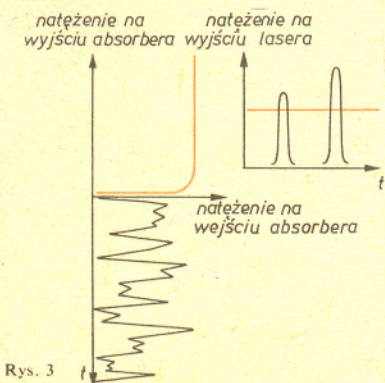
Najczęściej jedyną możliwość pełnego zrozumienia zjawiska fizycznego daje obserwacja jego przebiegu w czasie. Jednak nie zawsze możemy to zrobić. Badając np. silne oddziaływanie cząstek elementarnych ograniczamy się zwykle do przygotowania cząstek w czasie znacznie poprzedzającym zderzenie i ich rejestracji po długim czasie po zderzeniu. Samo oddziaływanie, ze względu na krótki czas trwania ( $10^{-23}$  s), nie jest dostępne dla naszych przyrządów pomiarowych. Podobne trudności napotykamy badając fotosyntezę wewnątrz komórki roślinnej - wieloetapowy proces, na który składa się kilkadziesiąt reakcji chemicznych. Niektóre z tych etapów zachodzą niezwykle szybko, w czasie rzędu kilku pikosekund. Z ich poznanem związane są nadzieje na uzyskanie bezpośredniej, efektywnej zamiany energii światła słonecznego na energię chemiczną czy elektryczną. Ostatnio, dzięki możliwości generacji subpikosekundowych impulsów światła, stało się możliwe badanie nawet tak szybkich procesów.

Już w 1834 roku Wheatstone potrafił mierzyć przedziały czasu rzędu mikrosekund. Badał on czasy trwania wyładowań elektrycznych. Wytwarzany przez soczewkę obraz iskry, po odbiciu od zwierciadła, padał na ekran (rys. 1). Przy szybkim obracaniu się zwierciadła światło iskry, emitowane w kolejnych chwilach czasu, tworzyło na ekranie przesunięte względem siebie obrazy, dając w efekcie — dzięki dość dużej bezwładności oka — smugę światła. Jej długość, przy znanej prędkości obrotowej zwierciadła, określała czas trwania wyładowania. Przy pomocy tej, tak zwanej kamery smugowej można badać błyski wyładowań iskrowych trwające kilka mikrosekund.

Jak jednak mierzyć prędkość obrotową szybko wirującego zwierciadła? Można na przykład wykonać szereg otworów na obwodzie tarczy obracającej się wraz ze zwierciadłem i skierować na nie wąski strumień powietrza. Częstotliwość dźwięku takiej syreny zależy od ilości otworów w tarczy i prędkości obrotowej. W ten sposób pomiar czasu można zastąpić pomiarem częstotliwości.



Rys. 2



Rys. 3

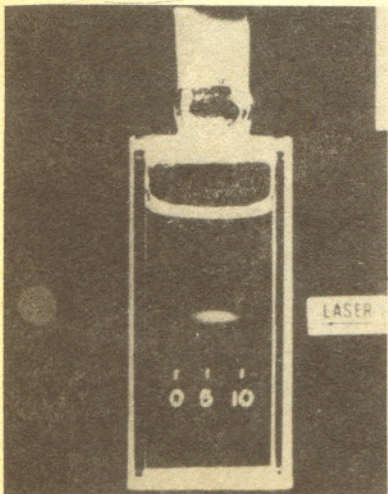
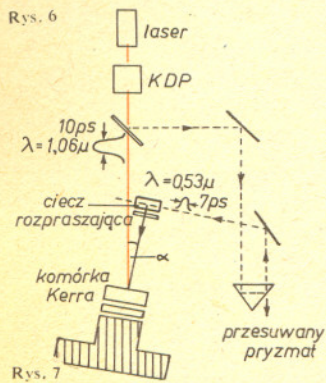
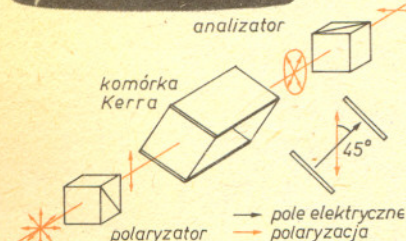
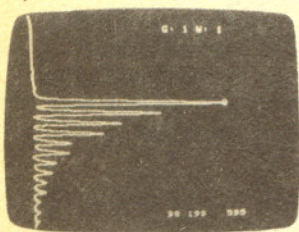
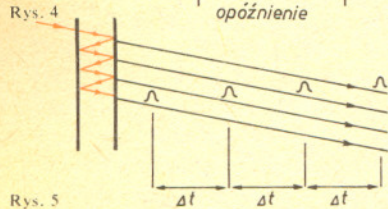
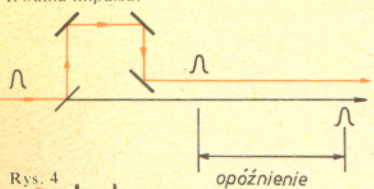
Najkrótszy możliwy do uzyskania impuls o częstości  $\omega$  trwa  $\Delta t_{min} \approx 1/\omega$ .  
Dla lasera neodymowego ( $\omega \approx 3 \cdot 10^{14} s^{-1}$ )  
 $\Delta t_{min} \approx 3 fs$ .

Znaczny postęp w dziedzinie obserwacji szybkich procesów przyniósł rozwój fotografii. Sto lat temu wielkie poruszenie wywołała seria zdjęć galopującego konia, wykonana przez E. Muybridge'a przy czasach otwarcia migawki około 1/500 s. Zdjęcia te udowodniły, że galopujący koń chwilami nie dotyka ziemi. Pokazały one również, że koń nigdy nie przybiera tak chętnie przedstawianej przez ówczesnych artystów pozycji z przednimi nogami wyprostowanymi do przodu i tylnymi jednocześnie wyciągniętymi do tyłu.

Dalszy postęp w badaniu ultraszybkich procesów przyniósł rozwój techniki laserowej, a w szczególności możliwość formowania impulsów światła trwających ułamki pikosekund. Jedną z metod generacji ciągu takich impulsów polega na umieszczeniu w rezonatorze lasera, oprócz ośrodka generującego i wzmacniającego światło, nieliniowego absorbera (może być nim np. roztwór barwnika; rys. 2). Absorber taki jest nieprzezroczysty dla światła o małym natężeniu, natomiast powyżej pewnego progu natężenia jego absorpcja gwałtownie maleje (rys. 3) — nazywamy to wybieleniem się absorbera. A więc z powstającego początkowo w ośrodku wzmacniającym światła o przypadkowych zmianach natężenia, tylko najsilniejszymi fluktuacjom nieliniowy absorber nie „zasłania” zwierciadeł tworzących rezonator lasera. Te ultrakrótkie fluktuacje są wzmacniane przy kolejnych przejściach przez ośrodek wzmacniający i opuszczają rezonator przez jedno ze zwierciadeł, które jest częściowo przezroczyste. Czas trwania najkrótszych generowanych obecnie impulsów nie przekracza 200 femtosekund.

Jak mierzyć czas trwania tak krótkich impulsów? Żadna mechaniczna migawka czy wirujące zwierciadło nie będą tu dostatecznie szybkie (prędkość wirowania musiałaby być tak duża, że siły odśrodkowe rozewałyby zwierciadło na kawałki). Do badania impulsów pikosekundowych stosuje się współczesną wersję kamery smugowej Wheatstone'a lub też aparat fotograficzny z superszybką migawką.

Prosta metoda oceny czasu trwania impulsów pikosekundowych (opisana w Delcie 11/1978) polega na nałożeniu dwóch takich impulsów poruszających się w przeciwnych kierunkach w barwniku o fluorescencji pobudzonej dwufotonowo. Rozmiary fluoryzującego obszaru pozwalają na wyznaczenie czasu trwania impulsu.



Współczesna kamera smugowa to przetwornik elektrooptyczny, w którym fotoelektrony wybite z katody formowane są w wiązkę. Wiązka ta jest następnie odchylana w polu elektrycznym, tak że szybko przemiata ekran luminescencyjny. Chwilom, w których natężenie światła badanego impulsu jest większe, odpowiadają jaśniejsze punkty na ekranie. Odchylaną lusterkiem wiązkę światła zastąpiła w tej kamerze smugowej odchylana polem elektrycznym wiązka elektronów.

Aby urządzenie takie mogło służyć do pomiarów czasu trwania impulsów, należy je wyskalować. Jak tego dokonać? Nie mamy przecież do dyspozycji „wzorcowych” impulsów o znanym czasie trwania. Możemy jednak zrobić inaczej; przepuścimy ultrakrótki impuls światła przez zwierciadło półprzezroczyste. Część światła skierujemy bezpośrednio w kierunku kamery, a część poddamy pewnemu opóźnieniu (rys. 4). Czas opóźnienia możemy łatwo obliczyć znając prędkość światła i dodatkową drogę, jaką przebył drugi impuls. Odległość dwu płamek na ekranie kamery smugowej będzie odpowiadać temu właśnie opóźnieniu. Dla lepszego wyskalowania kamery przydałoby się więcej takich kolejno po sobie następujących impulsów. Można wyobrazić sobie sposób polegający na użyciu szeregu szpilek wbitych w stół w znanych odległościach względem siebie. Niech przelatujący impuls światła kolejno oświetla szpilki. Błyski odbitego światła mogą być naszymi znacznikami czasu. Inna metoda polega na użyciu dwu wzajemnie równoległych zwierciadeł częściowo przepuszczających światło (rys. 5). Skierowany na te zwierciadła, prostopadłe do ich powierzchni, impuls świetlny zostanie częściowo przepuszczony przez pierwsze zwierciadło, po czym padnie na drugie z nich. Tu część światła przejdzie dalej, część zawróci, aby po pewnym osłabieniu przy odbiciu od pierwszego zwierciadła ponownie paść na drugie. W ten sposób za zwierciadłami otrzymamy szereg coraz słabszych impulsów, opóźnionych względem siebie o podwójny czas przelotu między zwierciadłami.

Ultrakrótkie impulsy świetlne mogą również otwierać szybką migawkę aparatu fotograficznego.

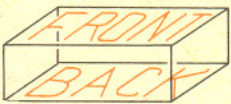
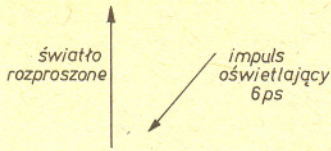
Ustawmy na drodze niespolaryzowanej wiązki światła dwa skrzyżowane polaryzatory (rys. 6). Za pierwszym polaryzatorem światło będzie spolaryzowane liniowo i nie przepuści go drugi polaryzator. Na razie mamy więc „migawkę”, która jest stale zamknięta. Gdyby jednak zmienić polaryzację światła na odcinku między polaryzatorami, „migawka” mogłaby (przynajmniej częściowo) otworzyć się. Między polaryzatory możemy na przykład wstawić tzw. komórkę Kerr'a. Światło przechodzi tu równoległe do płytek kondensatora wypełnionego np. nitrobenzenem. Jest to izotropowa ciecz, która nie zmienia stanu polaryzacji przechodzącego przez nią światła. Jednak po przyłożeniu napięcia do płytek kondensatora nitrobenzen staje się dwójłomny. Oznacza to, że jego współczynnik załamania zależy od wzajemnej orientacji pola elektrycznego i płaszczyzny polaryzacji światła. W wyniku tego światło za komórką spolaryzowane jest eliptycznie i jego część może przejść przez drugi polaryzator. Mamy więc migawkę sterowaną elektrycznie. Czas jej otwarcia może wynosić około 10 nanosekund ( $10^{-8}$ s).

Odpowiednio silny laserowy impuls pikosekundowy może zastąpić impuls elektryczny otwierający migawkę z komórką Kerr'a — podobnie jak pole elektryczne może on wywołać dwójłomność. Układ i zasada działania są tu podobne jak na rys. 6 — brak tylko elektrod w komórce. Pole elektryczne fali świetlnej zastępuje tu pole elektryczne w kondensatorze.

W ciągu 1 ps światło przebywa drogę zaledwie 0,3 mm. Migawka, otwierana na czas rzędu kilku pikosekund umożliwia więc sfotografowanie światła „w locie”. Układ eksperymentalny przedstawiony jest na rysunku 7. Zawiera on aparat fotograficzny z ultraszybką migawką. Do jej otwierania służy 10-pikosekundowy impuls światła podczerwonego, emitowanego przez laser neodymowy. Jednocześnie impuls ten przechodzi przez płytkę z kryształu KDP ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ), w którym ok. 10% energii impulsu przekształca się w tzw. drugą harmoniczną, to znaczy impuls o podwójonej częstotliwości.

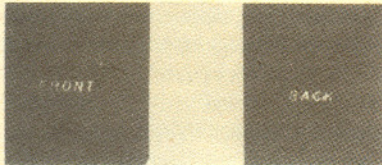
W ten sposób otrzymujemy impuls światła zielonego dokładnie zsynchronizowany w czasie z silnym impulsem podczerwonym. Dzięki temu łatwo jest mierzyć i kontrolować ich względne opóźnienie przy przechodzeniu przez układ pomiarowy. Impuls podczerwony o gęstości mocy ok.  $0,1 \text{ GW/cm}^2$  padając na komórkę Kerr'a umieszczoną między skrzyżowanymi polaryzatorami wywołuje krótkotrwałą dwójłomność, a tym samym otwiera migawkę. Po otwarciu przepuszcza ona około 1—2% padającego światła, w stanie zamkniętym natomiast jedynie 0,005%. Obiektem fotografowanym jest impuls światła zielonego w przelocie przez kuwetkę z cieczą rozpraszającą światło (woda z małym dodatkiem mleka). Przy dłuższych czasach otwarcia migawki na zdjęciu widoczna byłaby smuga światła przez całą szerokość kuwetki. Plama po lewej stronie zdjęcia powstała na skutek absorpcji impulsu podczerwonego przez filtr umieszczony na drugim z polaryzatorów.

aparat fotograficzny z ultrazszybką migawką



Rys. 8

Światło będące złożeniem dwóch fal o tych samych kierunkach i częstościach nazywa się spolaryzowanym eliptycznie.



Przy fotografowaniu aparatem z ultrazszybką migawką bardzo ważna jest synchronizacja momentu jej otwarcia z fotografowanym zjawiskiem. Szczególnie dobrze widać to w następującym doświadczeniu. Na przezroczystej płytce szklanej o grubości 1 cm wygrawerowano po obu jej stronach napisy „FRONT” i „BACK” (rys. 8). Jeśli sfotografujemy płytkę „zwykłym” aparatem, to na zdjęciu będą widoczne oba napisy nałożone na siebie.

Zastosujemy tu jednak naszą szybką migawkę, a jako lampy błyskowej oświetlającej napisy użyjemy impulsu światła o czasie trwania kilku pikosekund. Taki impuls oświetli najpierw jedną powierzchnię płytki, a dopiero po chwili drugą (jak długa jest ta chwila, można oszacować znając współczynnik załamania użytego szkła oraz grubość płytki z napisami). Do aparatu fotograficznego dotrze więc najpierw światło rozproszone na literach pierwszego napisu, a później światło rozproszone na drugim z nich. Jeśli otwarcie migawki zsynchronizujemy odpowiednio z błyskiem ultrazszybkiej „lampy błyskowej”, to możemy otrzymać zdjęcie wybranej powierzchni fotografowanej płytki. (Zdjęcie tylnej powierzchni będzie nieco gorszej jakości, rozproszone światło impulsu oświetlającego, niosące informację o tej powierzchni ulega bowiem niewielkiemu rozproszeniu na drugiej powierzchni).

Najczęściej stosowanym sposobem badania zmienności w czasie szybko przebiegających procesów jest metoda próbkowania. Impuls pikosekundowy dzieli się przy pomocy częściowo odbijającego zwierciadła na dwa impulsy: silny i słaby. Pierwszy wywołuje zjawiska, które następnie są badane drugim. Opóźnienie między impulsami może być dowolnie regulowane przez wydłużenie drogi jednego z nich. W ten sposób bada się kolejno etapy rozwoju w czasie interesującego nas procesu. Pierwszy impuls może na przykład wzbudzić cząsteczki w badanej próbce. W wyniku tego zdolność absorpcyjna próbki zmaleje, bo wzbudzone cząsteczki nie mogą zaabsorbować następnego kwantu światła. Po pewnym czasie przechodzą one ponownie do stanu podstawowego. Słabe impulsy próbkujące coraz bardziej opóźniane względem silnego wzbudzającego będą więc coraz silniej absorbowane. Mierząc ich osłabienie możemy wyznaczyć czas życia stanu wzbudzonego.

Metody spektroskopii z subpikosekundową czasową zdolnością rozdzielczą pozwolą być może na rozwiązanie zagadki fotosyntezy i poznanie przebiegu w czasie procesów, przy badaniu których musieliśmy dotąd ograniczać się do rejestracji stanu początkowego i końcowego.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 313. Znaleźć całkowite pierwiastki równania

$$x^3 - 13x^2 - 6x - 360 = 0.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 314. Zadanie „podwojenia sześcianu” prowadzi do — niewykonalnej za pomocą cyrkla i linijki — konstrukcji odcinka o długości  $\sqrt[3]{2}$ . Uzasadnić następujący sposób konstrukcji takiego odcinka: Na linijce zaznaczamy dwa punkty w odległości  $AB = 1$  i rysujemy figurę jak obok tak, by  $AB = DC = 1$ . Wtedy  $AD = \sqrt[3]{2}$ .

(52)

Rozwiązanie na str. 3

M 315. Niech  $f_i$  oznacza  $i$ -tą liczbę Fibonacciego

$$(tj. \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \quad \text{dla} \quad i \geq 2).$$

Łatwo wykazać indukcyjnie, że  $f_{p+q} = f_{p-1}f_q + f_p f_{q+1}$ .

Załóżmy, że dodanie albo odjęcie dwóch liczb kosztuje \$1, a ich pomnożenie \$5. Wyznaczyć możliwie najmniejszy koszt obliczenia  $f_{100}$ , gdy znamy tylko  $f_0 = 0$  i  $f_1 = 1$ .

Czy można zejść poniżej \$50?

Rozwiązanie na str. 11

(Jan Domański)

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 124. W bryle metalu znajdującego się w polu grawitacyjnym pojawia się pole elektryczne. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 14

F 125. Podczas przepływu prądu przez metale elektrony przewodnictwa zderzają się z jonami sieci krystalicznej przekazując im energię oraz pęd. Mimo to na przewodnik nie działa siła zgodnie z kierunkiem uporządkowanego ruchu nośników. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 11



# Malowanie atomami

Dr Andrzej RADLIŃSKI

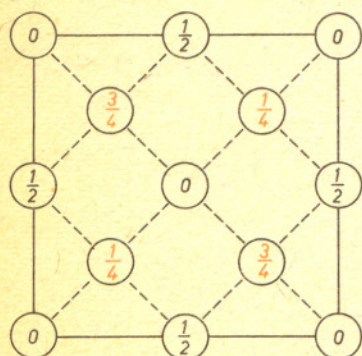
## WSTĘP

Czy można prześcignąć przyrodę? To zależy od tego, co chcemy osiągnąć: czy to, co jest sprzeczne z jej podstawowymi prawami, czy też to, czego zrobić jeszcze nie potrafimy na skutek ograniczeń technicznych. Fizycy wierzą (i wciąż to sprawdzają), że prawa przyrody są to reguły obowiązujące powszechnie i że obejść ich się nie da — można je co najwyżej lepiej poznać i zrozumieć. Natomiast ograniczenia techniczne zmieniają się wraz z upływem czasu; to, co było niemożliwe wczoraj, może być powszechnie używanym składnikiem dnia dzisiejszego. Takie przejścia od rzeczy technicznie niemożliwych do już istniejących oczywiście odbywają się teraz. Od trzydziestu lat bardzo wielu tego typu przykładów dostarcza rozwój fizyki i technologii ciał stałych, a zwłaszcza półprzewodników. Aż nie wypada wyjaśniać, co to jest tranzystor czy obwód scalony — pojęcia całkowicie niezbrane trzydzieści lat temu. Ale żeby osiągnąć aktualny poziom precyzji przy konstrukcji tych urządzeń, włożono ogromnie dużo pracy w opanowanie kontrolowanej hodowli kryształów, które są tutaj podstawowym budulcem. Co więcej, trzeba się było nauczyć oceniać jakość tego budulca, a zatem obiektywnie mierzyć jego własności. W ten sposób rozwinęła się współczesna technologia, a wraz z nią i fizyka półprzewodników. W artykule tym opowiemy jak wyhodować kryształy o strukturze i własnościach nie spotykanych w przyrodzie, ale za to bardzo interesujące z punktu widzenia ich zastosowań.

## DOSKONAŁOŚĆ KRYZTAŁÓW

Podstawową cechą kryształów wyróżniającą je spośród innych ciał stałych jest periodyczność struktury. Własność periodyczności oznacza, że można wyróżnić pewien najmniejszy element kryształu, który po wielokrotnym powieleniu w serii przesunięć równoległych utworzy cały kryształ. W przypadku najważniejszych z punktu widzenia zastosowań kryształów półprzewodnikowych (takich jak Ge, Si, GaAs czy GaP) ten najmniejszy element zawiera osiem atomów. Na strukturę krystaliczną tych półprzewodników można spojrzeć tak, jakby powstała w wyniku nakładania na siebie kolejnych warstw kul (rysunek 1), które symbolizują atomy składowe sieci.

W niskich temperaturach (które to pojęcie często obejmuje także i temperaturę pokojową) kryształy półprzewodnikowe



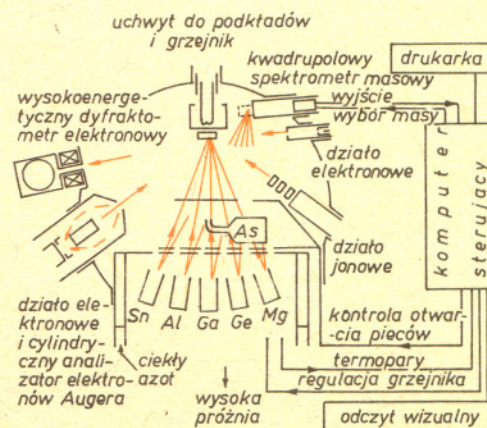
Rys. 1. Sposób ułożenia atomów w sieci krystalicznej niektórych półprzewodników. W przypadku Ge i Si kule symbolizują atomy germanu lub krzemu. W przypadku GaAs i GaP kule czarne symbolizują atomy galu, zaś kule czerwone odpowiednio atomy arsenu lub atomy fosforu. Liczby oznaczają odległości kul od płaszczyzny rysunku w jednostkach umownych.

o takiej idealnej strukturze nie przewodzą prądu elektrycznego (czyli są izolatorami), gdyż nie ma w nich elektronów swobodnych. Jeżeli jednak wyrwać elektron z wiązań chemicznych przez dostarczenie mu z zewnątrz pewnej energii powyżej wartości charakterystycznej dla danego kryształu (np. przez oświetlenie lub ogrzewanie kryształu), to może on się poruszać swobodnie, dopóki nie napotka „dziury” w wiązańach. Jednakże taki sposób regulowania przewodnictwa elektrycznego byłby w praktyce dość niewygodny. Znacznie korzystniej jest wprowadzić do kryształu obce atomy, które po wbudowaniu w kryształ mają bądź jeden słabo związany elektron nadmiarowy, (donory), bądź też brak im jednego elektronu do wiązań (akceptory). Donory są łatwo dostępnym źródłem swobodnych elektronów, zaś akceptory stosunkowo łatwo odbierają elektrony z innych wiązań chemicznych, pozostawiając tam dziury. Ponieważ akceptory mogą również wiązać elektrony pochodzące z donorów, więc przez zmianę proporcji ilości donorów do akceptorów można w bardzo szerokim przedziale wartości zmieniać własności (np. elektryczne) półprzewodnika. Wymaga to oczywiście umiejętności kontrolowanego wprowadzenia domieszek obu rodzajów, a także otrzymywania bardzo czystych kryształów wyjściowych.

Można bez wahania powiedzieć, że półprzewodniki swoją dotychczasową karierę zawdzięczają opanowaniu technologii domieszkania. Najczystsze materiały uzyskiwane obecnie przez człowieka zawierają 1 niekontrolowany atom na 10 milionów atomów macierzystych. Jednakże przestała już wystarczać wiedza, ile obcych atomów znajduje się w kryształach. Dalszy postęp technologii układów scalonych czy też struktur elektroluminescencyjnych wymaga umiejętności umieszczania atomów dokładnie w z góry zaprogramowanym miejscu sieci krystalicznej. Do tego właśnie celu służy technologia polegająca na budowaniu kryształu atom po atomie, czyli:

## EPITAKSJA WIĄZKĄ MOLEKULARNĄ

Ta metoda hodowli kryształów polega na precyzyjnym nakładaniu na krystaliczne podłoże jednoatomowych warstw składników nowego kryształu — jak przy malowaniu farbą w aerozolu. Przypomina to układanie kulek przedstawionych na rysunku 1, gdzie średnica każdej kulki, będącej w rzeczywistości atomem sieci, wynosi kilka angstromów. Ażeby osiągnąć grubości rozsądne z punktu widzenia badań czy ewentualnych zastosowań, trzeba ułożyć w ten sposób co najmniej kilka tysięcy takich „warstw”. Przyjrzyjmy się z bliska, jak w praktyce wygląda odpowiednie urządzenie.



Rys. 2. Schemat układu do epitaksji wiązką molekularną wraz z aparaturą analityczną.

Aparatura składa się z trzech zasadniczych bloków: aparatury próżniowej, aparatury do osadzania (hodowli) kryształów oraz urządzeń do analizy ich składu chemicznego i struktury krystalicznej. Godnym uwagi jest fakt, że analiza ta odbywa się bez wyjmowania kryształu na zewnątrz komory próżniowej. Wysoka próżnia (rzędu  $10^{-8}$  Pa) jest konieczna ze względu na warunek pozbycia się zanieczyszczeń w postaci gazowych składników powietrza, a także ze względu na konieczność zapewnienia dużej drogi swobodnej cząsteczek w wiązce molekularnej, które tworzą kryształ po osadzeniu ich na podłożu. Z technicznego punktu widzenia uzyskanie i utrzymanie takiej próżni jest stosunkowo kłopotliwe i energochłonne.

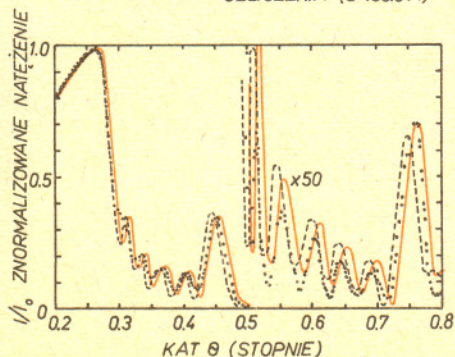
*Efuzja to powolny wypływ gazu przez mały otwór.*

Blok służący do hodowli kryształów składa się z pieców specjalnej konstrukcji (po jednym dla każdego rodzaju atomów), zwanych piecami efuzyjnymi, oraz z przesuwanego uchwyty z podłożami, z możliwością regulacji ich temperatury. Każdy piec efuzyjny emituje ukierunkowaną w stronę podłoża wiązkę molekularną (lub atomową) odpowiedniego rodzaju pierwiastka i może być niezależnie od innych pieców zamykany i otwierany w bardzo krótkim czasie. Ciśnienie panujące w wiązce molekularnej jest zwykle rzędu  $10^{-2}$  Pa, co pozwala przy osiągalnych technicznie czasach otwierania i zamykania pieca (rzędu  $10^{-1}$  s) bardzo dokładnie regulować stopień zapelnienia nawet jednoatomowej powłoki. Zwykle proces osadzania jest sterowany przez komputer. Bardzo istotny jest tutaj fakt, że przy hodowli kryształów typu AB (np. GaAs) ze względu na własności chemiczne ich elementów składowych istnieje silna tendencja do całkowitego zapelnienia pojedynczych warstw np. typu A, dzięki czemu nie tworzą się „kominy” o wieloatomowej grubości.

I tu dochodzimy do zagadnienia kontroli i analizy struktury hodowanych kryształów. Przy pomocy opisanej aparatury można kontrolować periodyczność struktury oraz skład chemiczny na poziomie warstw jednoatomowych. Badania struktury powierzchni dokonuje się wykorzystując dyfrakcję elektronów — przez analizę zależności ich obrazu dyfrakcyjnego od kąta padania wiązki elektronów w stosunku do powierzchni kryształu (patrz artykuł doc. Mroza, Delta 2/1982). Skład chemiczny atmosfery wewnątrz komory próżniowej jest na bieżąco rejestrowany za pomocą spektrometru masowego.

Objętościowego badania periodyczności struktury dokonuje się wykorzystując dyfrakcję promieni rentgenowskich, analizując zależność obrazu dyfrakcyjnego od kąta padania wiązki rentgenowskiej na powierzchnię kryształu. Badania te prowadzone

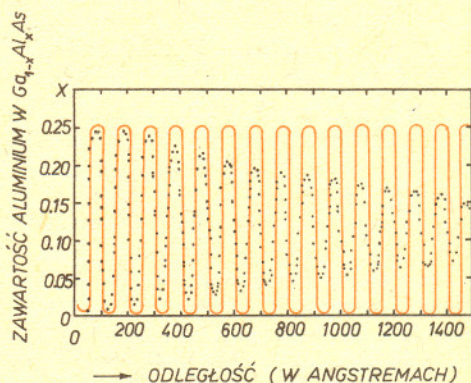
· · · DOŚWIADCZENIE  
 ○ OBLICZENIA ( $d=127,2 \text{ \AA}$ )  
 --- OBLICZENIA ( $d=130,0 \text{ \AA}$ )



Rys. 3. Obraz interferencyjny promieni X dla struktury periodycznej GaAs-AlAs o sześciu okresach o grubości 127,2 Å. Dla porównania z punktami doświadczalnymi pokazano wyniki obliczeń komputerowych.

się po wyjęciu wyhodowanych kryształów z komory próżniowej. Na rysunku 3 przedstawiony jest dyfraktogram rentgenowski dla kryształu mieszanego GaAs-AlAs o sześciu okresach o grubości warstwy 127,2 Å zaprogramowanej w doświadczeniu oraz wyniki obliczeń teoretycznych dla dwu różnych wartości tego okresu. Czyż nie budzi podziwu precyzja tej mikrotechnologii?

Możliwe jest również badanie składu chemicznego kryształu w głąb z rozdzielczością porównywalną z rozmiarami atomów. W tym celu bombarduje się powierzchnię już utworzonej warstwy krystalicznej jonami argonu (gazowy argon o ciśnieniu rzędu  $10^{-2}$  Pa jest jonizowany, a następnie przyspieszany w polu elektrycznym o napięciu rzędu kilowoltów), co powoduje powolne (rzędu 3—10 Å/min) zdejmowanie z niej kolejnych warstw atomowych. Jednocześnie atomy znajdujące się w warstwie powierzchniowej na skutek takiego bombardowania emitują elektrony (zjawisko Augera) o charakterystycznej dla danego rodzaju atomu energii. Mierząc tę energię można powiedzieć, jaki rodzaj atomów właśnie znajduje się na powierzchni, a więc można bardzo dokładnie wyznaczyć skład chemiczny warstwy krystalicznej w jej przekroju poprzecznym. Rysunek 4 przedstawia wynik tego typu analizy przeprowadzonej na kryształach mieszanym  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ .



Rys. 4. Profil składu struktury periodycznej zmierzony przy pomocy połączonych technik trawienia działem jonowym i spektroskopii elektronów Augera.

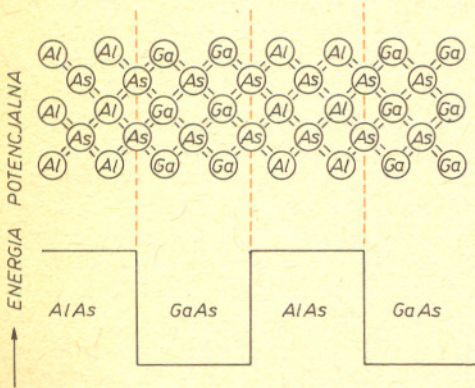
Widzimy zatem, że dostępne techniki doświadczalne pozwalają stwierdzić, iż warstwy krystaliczne hodowane w myśl opisanej powyżej metody charakteryzują się doskonałą strukturą krystaliczną (w zasadzie pozbawioną jakichkolwiek defektów) oraz bardzo dobrze kontrolowanym składem chemicznym. Jest to niewątpliwie zasadniczy postęp w dotychczasowych technikach hodowli kryształów i co za tym idzie, otwiera nowe możliwości ich zastosowań praktycznych. Do tej sprawy powrócimy jeszcze pod koniec tego artykułu.

### SUPERSIECI

Mając do dyspozycji aparaturę opisaną w poprzednim rozdziale można na przykład zbudować strukturę złożoną z kolejno leżących warstw półprzewodnika jednego rodzaju o grubości  $d_1$  i półprzewodnika innego rodzaju o grubości  $d_2$ . Jeżeli obie te grubości są rzędu co najmniej kilkudziesięciu odległości międzyatomowych w kryształach, to nie jest już istotne, czy użyte przez nas półprzewodniki mają charakter pierwiastkowy (jak Ge czy Si), czy też są związkami chemicznymi (jak GaAs). Istotne jest co innego: oprócz „normalnej” periodyczności w każdej z warstw składowych pojawiła się dodatkowa, niezależna periodyczność o okresie  $d_1 + d_2$ , związana z periodyczną sekwencją warstw obu rodzajów. Mówimy w takim wypadku, że mamy do czynienia z supersiecią. Jest to nowa jakość, nie spotykana w kryształach występujących w przyrodzie.

Zajmijmy się najpierw prostą strukturą typu 1—2—1, gdzie 1 oznacza warstwę AlAs, zaś 2 — warstwę GaAs. Wybór tych dwu rodzajów kryształów nie jest przypadkowy. Z powodów, których omówienie przekracza ramy tego artykułu, łączy się z tymi półprzewodnikami wielkie nadzieje w najnowszej technologii układów scalonych. Energia elektronów swobodnych w warstwie typu 2 jest niższa niż w warstwie typu 1 (co przedstawiono na rysunku 5). Zatem wszystkie elektrony swobodne zgromadzą się w obszarze 2, w naszym przypadku o grubości rzędu kilkudziesięciu angströmów. Elektrony te mogą wydostać się z obszaru 2 tylko wtedy, gdy zostanie im dostarczona z zewnątrz energia wystarczająca do przekroczenia bariery pomiędzy obszarem 2 i obszarem 1, na przykład przez podgrzanie kryształu lub dostarczanie energii elektrostatycznej przez przyłożenie zewnętrznego napięcia w kierunku prostopadłym do granicy obszarów 1 i 2.

### PRZEMIENNA EPITAKSJA



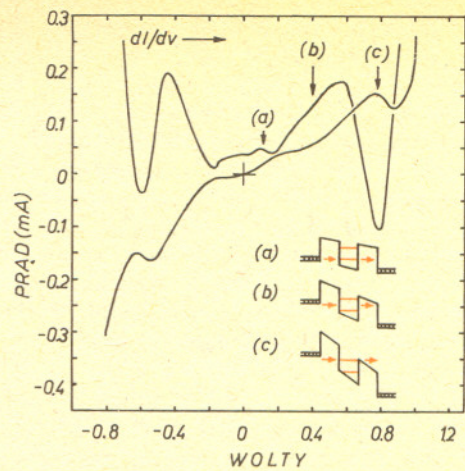
Rys. 5. Schemat budowy struktury typu 1—2—1 oraz kształt energii potencjalnej elektronu w takiej strukturze.

Zasadnicze znaczenie ma odpowiedź na pytanie, jakie poziomy energetyczne mogą być zajmowane przez elektrony znajdujące się w obszarze 2. Nie są to po prostu poziomy charakterystyczne dla półprzewodników typu 2 (czyli określone przez jego strukturę pasmową), gdyż występowanie obu barier drastycznie modyfikuje potencjał, w jakim porusza się elektron. Przywołajmy na chwilę bardziej znane zagadnienie atomu wodoru: swobodny elektron, mogący poruszać się w próżni z energią o wartościach od zera do nieskończoności w polu coulombowskim protonu o potencjale typu  $1/r$  może znajdować się dodatkowo w stanach związanych o ujemnych energiach zmieniających się skokowo, co prowadzi do występowania znanych serii widmowych. W naszym zagadnieniu potencjał nie jest typu  $1/r$ , tylko ma kształt prostokątnej studni.

Mimo to wynik rachunków jest podobny: w zależności od rozmiarów studni potencjału pojawia się 0, 1, 2, ... stanów związanych o ściśle dających się obliczyć energiach. Ogólna zasada jest taka, że im mniejsza jest objętość studni, tym mniej stanów związanych studnia zawiera; poniżej pewnej objętości stany związane w ogóle nie występują.

Wysokość bariery potencjału pomiędzy obszarem 1 i obszarem 2 może być regulowana przez stopniowe dodawanie glinu do kryształu GaAs, w wyniku czego powstaje kryształ mieszany GaAlAs. Jest to drugi (obok zmiany szerokości obszaru 2) sposób zmiany objętości studni potencjału, a więc i ilości zawartych w niej stanów dyskretnych.

W naszym przykładzie, przedstawionym na rysunku 6 i omówionym szczegółowo w podpisie tego rysunku, występują dwa stany dyskretnie. Jest to na razie wynik rachunku przeprowadzonego zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej.



Rys. 6. Zależność prądu  $I$  oraz przewodnictwa elektrycznego  $dI/dV$  od napięcia  $V$  dla struktury typu 1—2—1. Zaznaczono warunek rezonansowego (a, c) i nierzonansowego (b) przewodnictwa struktury. Struktura składa się z dwu zewnętrznych warstw  $Ga_{0,3}Al_{0,7}As$  o grubości 80 Å każda oraz środkowej warstwy GaAs o grubości 50 Å. Zewnętrznymi elektrodami są warstwy GaAs domieszkowane na poziomie  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

Spróbujmy zmierzyć energię tych stanów posługując się zewnętrznym polem elektrycznym. Jest to metoda bardzo prosta, gdyż w półprzewodnikach wysokość bariery zwykle nie przekracza kilku elektronowoltów. Po przyłożeniu zewnętrznego napięcia otrzymujemy sytuację jak na rysunku 6. Widać, że przy pewnej wartości napięcia może nastąpić uwolnienie elektronu ze studni na skutek rezonansowego tunelowania elektronu z lewego obszaru 1 poprzez stany dyskretnie studni do prawego obszaru 1. Oznacza to, że przy tej wartości napięcia maleje opór elektryczny, czyli rośnie prąd płynący przez warstwę krystaliczną. Dzieje się tak za każdym razem, kiedy związany poziom z obszaru 2 zrównuje się z poziomem przewodnictwa (poziomem Fermiego) elektronów elektrody doprowadzającej w lewym obszarze 1. Zatem, mierząc charakterystykę prądowo-napięciową naszego kryształu możemy wyznaczyć położenia poziomów związanych i porównać z wartościami obliczonymi teoretycznie. Jest to oczywiście niezależny test na precyzję metody hodowli kryształu, gdyż położenie poziomów związanych jest czule na grubość warstwy typu 2. Wyniki doświadczalne przedstawione na rysunku 6 wskazują na dobrą zgodność teorii z doświadczeniem.

**Tunelowanie jest efektem kwantowym.** Zgodnie z wynikami mechaniki kwantowej elektron może przeniknąć z lewego obszaru 1 do prawego obszaru 1, pomimo że oddziela je, na ogół niedostępny dla elektronów, obszar 2. Przez supersieć może zatem płynąć prąd elektryczny. Tunelowanie rezonansowe następuje za pośrednictwem stanu związanego w obszarze 2 i dlatego jest znacznie bardziej efektywne.

Następnym krokiem jest badanie bardziej rozbudowanych struktur typu 1—2—1—2... o kilkudziesięciu elementach składowych. Są to właśnie supersieci. Mówiąc jakościowo, stany dyskretnie zlokalizowane w każdej z kolejnych studni mogą teraz ze sobą oddziaływać. Innymi słowy, w wyniku zjawiska tunelowania elektrony mogą poruszać się po całej supersieci. Jednocześnie na skutek tego właśnie oddziaływania stanów mamy do czynienia z ich rozszczepianiem, a więc z powstawaniem pasm energetycznych. Jest to dokładna kopia powstawania pasm energetycznych w półprzewodnikach tak, jak wyobrażamy je sobie w modelu ciasnego wiązania. Dzięki technice supersieci można takie powstawanie pasm modelować. Ponieważ analiza charakterystyk prądowo-napięciowych supersieci jest dość skomplikowana na skutek występowania domen przewodnictwa, to ograniczymy się w tym miejscu jedynie do stwierdzenia, że można te dane dobrze zrozumieć ilościowo w oparciu o model przedstawiony powyżej.

Rozwój techniki epitaksji wiązką molekularną był możliwy dzięki wielkim dotacjom firm elektronicznych. Od początku wskazywano na dwa główne obszary, w których można wykorzystać (i częściowo już się wykorzystuje) uzyskane rezultaty. Chodzi tu o wydajne i trwałe struktury elektroluminescencyjne oraz o objętościowe obwody scalone wielkiej skali integracji.

Struktury elektroluminescencyjne mają taki sam stopień komplikacji jak supersieci. Urządzenia te składają się z kilku warstw krystalicznych, których odpowiedni dobór pozwala na wstrzykiwanie i rozpędzanie elektronów, a następnie na ich zderzenia z centrami świecącymi (najczęściej są to jony manganu lub lantanowców) i wreszcie wyprowadzenie światła na zewnątrz. Zasadniczy problem inżynierii tych struktur polega na tym, że w obszarze przyspieszenia elektronów występują silne pola elektryczne o natężeniu rzędu  $10^6 \text{ V/cm}$ , co po pewnym czasie prowadzi do przebicia tego obszaru i w konsekwencji do zniszczenia urządzenia. Opanowanie tego niekorzystnego zjawiska stało się możliwe dzięki zastosowaniu epitaksji wiązką molekularną przy produkcji warstw elektroluminescencyjnych. Stanowi to istotny przełom technologiczny, gdyż otwiera możliwości używania płaskich i zasilanych niskim napięciem ekranów elektroluminescencyjnych w miejsce niewygodnych lamp oscyloskopowych, a zatem przybliżył moment zbudowania płaskiego telewizora kolorowego.

Z punktu widzenia stopnia komplikacji objętościowy obwód scalony jest bardziej wymyślny, gdyż zawiera różne składniki (atomy różnego rodzaju) w obrębie jednej warstwy. Nie to jest jednak zasadniczą przeszkodą dla stosowania omawianej w tym artykule technologii.

Główną przeszkodą stojącą na drodze szerokiego wprowadzenia opisanej metody na skalę przemysłową jest jej stosunkowo wysoki koszt (w porównaniu z innymi metodami hodowli kryształów), spowodowany głównie energochłonnością procesu wytworzenia i utrzymywania wysokiej próżni. Problem ten nie występuje jednakże w przestrzeni kosmicznej, gdzie próżni jest

aż w nadmiarze. Nic więc dziwnego, że epitaksja wiązką molekularną znalazła się na liście badań naukowych, jakie mają być prowadzone w ramach wykorzystania amerykańskiego promu kosmicznego Columbia. Już dzisiaj istnieją podstawy, aby twierdzić, że przy wielkiej skali produkcji korzystniej będzie wystrzelić „fabrykę” w Kosmos niż wytwarzać wysoką próżnię w warunkach ziemskich.

A co wniosła epitaksja wiązką molekularną do fizyki? Oprócz opisanych przedtem wniosków dotyczących modelu ciasnego wiązania oraz sprawdzenia pewnych innych przewidywań kwantowej teorii ciała stałego uzyskano także szereg danych rzucających zupełnie nowe światło na zagadnienie wzrostu kryształów. Ponadto okazało się, że w kryształach uzyskiwanych tą metodą dyfuzja domieszek przebiega znacznie wolniej, niż to ma miejsce w kryształach hodowanych innymi metodami. Brzmi to może mało efektywnie, ale ma zasadnicze znaczenie przy projektowaniu i budowie wszelkich urządzeń elektronicznych (za przykład może tu posłużyć wspomniany wyżej problem trwałości struktur elektroluminescencyjnych). Tego rodzaju wynik eksperymentalny narzuca także konieczność przebudowy podstaw teorii dyfuzji w ciałach stałych. Wreszcie umiejętność hodowli kryształów bardzo czystych i całkowicie pozbawionych defektów otwiera zupełnie nowe możliwości w tych dziedzinach, gdzie elementarne zjawiska fizyczne nie mogły być obserwowane na skutek konkurencji procesów związanych z niedoskonałościami sieci krystalicznej.

### ZAKOŃCZENIE

Historia opowiedziana w tym artykule nie ma jeszcze zakończenia. Dopisz ją, i to już wkrótce, fizycy i inżynierowie, a i my wszyscy będziemy w nim w jakimś stopniu uczestniczyć jako odbiorcy powstałych w wyniku tej pracy urządzeń.

A morał? Chyba taki, że nie można wyobrazić sobie rozwoju współczesnej fizyki bez jej dostępu do nowoczesnej techniki — i że tylko taki kontakt prowadzi do narodzin nowoczesnych technologii. Życie dostarcza wielu dowodów, że jest to myśl banalna tylko z pozoru.



#### Rozwiązanie zadania M 315

Pokażemy jak osiągnąć koszt \$ 45.  
 Obliczamy  $f_2, f_3, f_4, \dots, f_{26}$  wprost ze wzoru rekurencyjnego (§ 25). Następnie płacimy  
 \$ 6 za  $f_{48} = f_{24}(f_{23} + f_{25})$ ,  
 \$ 6 za  $f_{50} = f_{24}(f_{24} + f_{26})$ ,  
 \$ 1 za  $f_{49} = f_{30} - f_{48}$ ,  
 \$ 1 za  $f_{51} = f_{49} - f_{50}$ ,  
 \$ 6 za  $f_{100} = f_{50}(f_{49} + f_{51})$ .



#### Rozwiązanie zadania F 125.

Istniejące w przewodniku stacjonarne pole elektryczne działa zarówno na elektrony jak i na jony sieci krystalicznej. Sumaryczny pęd uzyskiwany przez elektrony jest równy liczbowo i przeciwnie skierowany niż pęd uzyskiwany przez sieć. Innymi słowy: średnia siła z jaką elektrony oddziałują na jony sieci jest równa sile wywieranej na nią przez pole. Siły te różnią się zwrotami, zatem przewodnik jako całość nie doznaje działania żadnej siły makroskopowej.

## Dwa zastosowania wzoru Eulera

Każdemu, kto w szkole uczył się geometrii, znany jest wzór na sumę  $S$  kątów wewnętrznych wypukłego wielokąta o  $n$  bokach. Ta prosta zależność wyraża się równością

$$S = (n - 2) \cdot \pi.$$

Mało znany jest natomiast analogiczny wzór dla wielościanów, choć wiedział o nim już Kartezjusz. Mianowicie suma wszystkich kątów płaskich dowolnego wielościanu wypukłego o  $w$  wierzchołkach jest równa

$$S' = (w - 2) \cdot 2\pi.$$

Na przykład dla sześcianu mamy  $w = 8$ ,  $S' = 6 \cdot 2\pi = 12\pi$ , a powiedzmy, dla dwunastościanu foremego  $S' = 36\pi$ . Dla dowodu powyższej zależności przyjmijmy, że nasz wielościan ma  $w$  wierzchołków,  $s_3$  ścian trójkątnych,  $s_4$  ścian czworokątnych,  $s_5$  pięciokątnych itd. Ma on zatem  $s_3 + s_4 + s_5 + \dots$

ścian i  $\frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots)$  krawędzi. Zatem (wzór Eulera)

$$w + (s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots) + 2,$$

skąd po łatwych rachunkach

$$w - 2 = \frac{1}{2}(s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots),$$

a więc  $2(w - 2)\pi = (s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots) \cdot \pi$ , a prawa strona powyższej równości wyraża właśnie sumę wszystkich kątów płaskich wielościanu. To kończy dowód.

Wielościany możemy sklejać z siatek. Jeżeli rozsypiemy  $s$  ścian wielościanu, to otrzymamy  $s$  wielokątów płaskich mających łącznie  $2k$  boków ( $k$  — liczba krawędzi wyjściowego wielościanu). Aby z tych oddzielnych wielokątów otrzymać siatkę wielościanu, musimy wykonać  $s - 1$  sklejeń. Za każdym sklejeniem ubywają 2 boki. Liczba boków siatki wynosi zatem

$$k' = 2k - 2(s - 1),$$

co w zestawieniu ze wzorem Eulera daje

$$k' = 2(w - 1),$$

a ponieważ liczba boków siatki jest równa liczbie wierzchołków (bo jest tak dla każdego wielokąta), więc

$$w' = 2(w - 1).$$

Otrzymaliśmy zależność między liczbą  $w$  wierzchołków wielościanu a liczbą  $w'$  wierzchołków jego siatki.

Krzysztof JERZYK (opr. red.)

# Nim zaświeci gwiazda

Dr Michał RÓŻYCZKA

Chcemy dzisiaj opowiedzieć, jak rodzą się gwiazdy, jednak powiedzmy sobie od razu: nim zaświeci gwiazda — dzieją się rzeczy niepojęte. No, może niezupełnie niepojęte, lecz w każdym razie do dziś skutecznie opierające się próbom ich spójnego opisania.

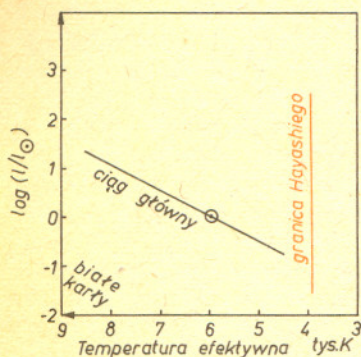


Diagram Hertzsprung-Russella

Umówmy się, że nazwę „gwiazdy” rozciągniemy tylko na te obiekty, w których tempo produkcji energii w odbywających się we wnętrzu reakcjach jądrowych jest praktycznie równe tempu jej wyświecania z powierzchni. Zgodnie z tą umową gwiazda zaczyna świecić w chwili, gdy po raz pierwszy dochodzi w niej do zbilansowania energii wyświecanej i energii uzyskiwanej z reakcji jądrowych. Nieco już wtajemniczeni wiedzą, że na diagramie H—R miejscem tak zdefiniowanych narodzin gwiazdy jest określony przez jej masę punkt należący do tzw. ciągu głównego wieku zerowego. Jaką drogę przebywa rodząca się gwiazda, nim trafi na ciąg główny? Dobrze ugruntowana teoria ewolucji gwiazd informuje nas, że obiekty na lewo od ciągu głównego są ewolucyjnie zaawansowane, tj. takie, które kiedyś już były na ciągu głównym. Pomieważ żaden z tych obiektów nie ma szans powtórnego tam trafienia, rodzących się gwiazd (będziemy je dalej nazywać protogwiazdami) musimy szukać na prawo od ciągu głównego, w obszarze małych gęstości i niskich temperatur. Głównym źródłem energii (protogwiazdy również świecą — inaczej w ogóle by nie trafiły na diagram H—R), jak się domyślamy, jest kurczenie się pod wpływem własnych sił grawitacyjnych, przy czym energia potencjalna ściskanego gazu zamienia się w energię wewnętrzną, czyli w ciepło. Takiemu kurczeniu (inaczej — kontrakcji) musi towarzyszyć wzrost gęstości i temperatury obiektu, z upływem czasu powinien on zbliżać się do ciągu głównego. Jednak próbując zacząć nasze rozważania jeszcze bardziej na prawo napotykamy nieprzekraczalną na pierwszy rzut oka barierę zwaną *granica Hayashiego*. Na prawo od tej niemal pionowej linii na diagramie H—R nie ma już żadnych obiektów, które przypominałyby gwiazdy. Chcąc ją pokonać musimy się odwołać do teorii wnętrza gwiazdowych (równie dobrze, lub nawet lepiej ugruntowanej niż teoria ewolucji gwiazd). Stwierdza ona, iż na prawo od granicy Hayashiego równania budowy wewnętrznej gwiazdy, oparte na założeniu braku szybkich ruchów systematycznych tracą swą ważność — stają się wewnętrznymi sprzecznymi. Kontrakcja, z którą zetknęliśmy się na lewo od granicy Hayashiego jest oczywiście ruchem systematycznym, jednak na tyle powolnym (jej szybkość mierzy się w ułamkach milimetra na sekundę), że przy opisie budowy wewnętrznej znajdujących się tam obiektów można ją z powodzeniem zaniedbać. Mówimy wtedy, że panuje tam

równowaga hydrostatyczna (przeważnie ruchy systematyczne można zaniedbać wtedy, gdy ich prędkości są bardzo małe w porównaniu z lokalną prędkością dźwięku). Gaz, tworzący obiekty na prawo od granicy Hayashiego nie może utrzymać równowagi hydrostatycznej, musi podlegać w całej swej objętości lub znacznej części szybkim ruchom systematycznym — np. szybkiej fazie kontrakcji (kolaps).

A więc możemy rozpocząć nasze śledzenie ewoluującej protogwiazdy od miejsca, gdzie niesłychanie rzadki, rozległy obłok gazu dopiero „poczuł swoją tożsamość” i zaczął się kurczyć. Jak już wspomnieliśmy na wstępie, nie istnieje żadna kompletna teoria ewolucji protogwiazd, mimo obfitego materiału obserwacyjnego. Wciąż jeszcze nie umiemy odpowiedzieć na pytania najbardziej podstawowe: co powstanie z danego obłoku, kiedy, i przede wszystkim — dlaczego, wszędzie powstaje taka sama mieszanina gwiazd, w której skład, oprócz obiektów podobnych do Słońca wchodzi w ustalonych proporcjach gwiazdy dużo jaśniejsze i słabsze, jak powstają układy podwójne i planetarne itd.

Materia międzygwiazdowa to niezwykle eteryczny, nieco zapyłony gaz, którego średnią gęstość mierzy się w ułamkach atomu/cm<sup>3</sup>. Początkowo więc obserwowano jedynie jej zagęszczenia zwane w zależności od wyglądu i cech widmowych *mglavicami emisyjnymi, refleksyjnymi* bądź też *ciemnymi (absorpcyjnymi)*. Rychło jednak przekonano się dzięki zliczeniom gwiazd, iż pochłaniająca ich światło ciemna materia międzygwiazdowa wypełnia całą objętość dysku galaktycznego. Obserwacje radiowe *wodoru neutralnego (oznaczonego H I)* pokazały, że tworzy on szereg obłoków o gęstościach dochodzących do 100 atomów/cm<sup>3</sup>, układających się we wzór, który od biedy przypomina zarys ramion spiralnych. Grubość dysku wodoru neutralnego wynosi 400—600 pc. Początkowo obserwowano zaskakującą zależność zmian gęstości wodoru wzdłuż promienia: gęstość powierzchniowa, czyli masa zawarta w prostokątnym do płaszczyzny Galaktyki słupie o jednostkowym przekroju osiągała maksimum poza orbitą Słońca (odległego od centrum Galaktyki o ok. 9 kpc). Podobnie dziwny przebieg (spodziewalibyśmy się maksimum w pobliżu centrum Drogi Mlecznej) zaobserwowano w wielu innych galaktykach spiralnych. Dopiero jednak w ostatnim dziesięcioleciu okazało się, że zgodnie z naszą intuicją wodoru przybywa w miarę zbliżania się do centrum tyle, że występuje on tu w postaci cząsteczkowej (H<sub>2</sub>), bardzo trudnej do obserwacji. Maksimum gęstości powierzchniowej H<sub>2</sub> przypada w odległości 4—8 kpc od centrum, tworzy on również obłoki, zwane *molekularnymi*, w których oprócz H<sub>2</sub> odkryto kilkadziesiąt innych cząsteczek, w tym najłatwiejszy do zaobserwowania tlenek węgla (CO), dzięki któremu pośrednio zbadano rozkład i parametry obłoków molekularnych. Okazało się, że pierścień H<sub>2</sub> jest trzykrotnie cieńszy niż dysk H I. Obłoki H<sub>2</sub> mają niskie temperatury (rzędu 10—20 K) i olbrzymie, jak na materię międzygwiazdową gęstości (do 10<sup>6</sup>/cm<sup>3</sup>). Największe z nich osiągają rozmiary rzędu 100 pc (aktualny „rekordzista” — 170 pc). Ich masy przekraczają 10<sup>5</sup> M<sub>☉</sub>. Szacuje się, że takich olbrzymów jest w Galaktyce kilka tysięcy. Oceny mas są obarczone dużymi błędami spowodowanymi głównie słabo znanym stosunkiem obfitości obserwowanego CO do H<sub>2</sub>, który decyduje o masie.

W tym miejscu dotykamy zasadniczego problemu, jakim jest status dynamiczny obłoków molekularnych. Jeśli są one rzeczywiście aż tak masywne, to panujących w nich temperaturach powinny się niemal bez oporu (niska temperatura znaczy niskie ciśnienie) poddawać siłom samograwitacji; kurczyć, zapadać, kolapsować, słowem natychmiast zamieniać się w gwiazdy. Szerokie linie emisyjne w widmie CO świadczą o szybkich ruchach

(zjawisko Dopplera) gazu we wnętrzach obłoków. Trudno na razie stwierdzić, czy jest to uporządkowane kurczenie czy chaotyczne kłębieństwo (turbulencja). Proste rozważania teoretyczne wskazują, że nie pobudzana ciagle z zewnątrz turbulencja niemal natychmiast zaniknie. Z drugiej strony raz rozpoczętego kolapsu nie można zatrzymać, każdy zapadający się obłok powinien nieuchronnie zamienić się w gwiazdę lub gromadę gwiazd. Jeśli wszystkie obłoki kolapsują, tempo powstawania gwiazd byłoby ponad 1000-krotnie większe od obserwowanego. Krótko mówiąc — dynamiki obłoków molekularnych po prostu nie rozumiemy. Kolaps trwa co najwyżej parę milionów lat i jeśli chcemy utrzymać stałą liczbę obłoków (wprawdzie nie wiemy, czy rzeczywiście powinna ona być stała, ale nie widzimy powodów, dla których akurat teraz miałyby być w Galaktyce wyjątkowo dużo obłoków), musimy podać jakiś niezwykle wydajny sposób ich wytwarzania. Takiego sposobu nie znamy. Pewne nadzieje wiążemy z jeszcze dyskusyjnymi spiralnymi falami gęstościowymi, a raczej — z wywołanymi przez nie frontami uderzeniowymi omiatającymi ośrodek międzygwiazdowy. Obłok H I znalazłszy się w obrębie takiego frontu może zostać tak silnie zgnieciony, że jego gęstość wzrośnie tysiąckrotnie — zbliżając się do gęstości obłoków  $H_2$ . Niestety obliczenia prowadzą do wniosku, że jedynie skromna jego reszka pozostanie w fazie molekularnej po wyjściu z frontu i związanym z tym rozprężeniem. Co prawda, takich resztek pochodzących z wielu obłoków może być dużo. Jeśli jest ich dostatecznie wiele i jeśli mają na to dostatecznie dużo czasu, mogą między sobą oddziaływać (zlepiając się lub rozpraszając) na tyle efektywnie, że pod wpływem tych oddziaływań wytworzy się pewien stan równowagi, przy którym w każdym zakresie mas tyle samo obłoków będzie się tworzyło, co rozpraszało. Nie wiadomo niestety, czy można w ten sposób otrzymać obserwowany rozkład mas obłoków, w którym znaczna większość ogólnej masy galaktycznego wodoru molekularnego zdaje się przypadać na obłoki największe. Nie jest również jasne, czy niestanne oddziaływania między obłokami wspomagałyby netto ich naturalną tendencję do kolapsowania, czy też ją netto niwelowały. O ile bowiem spokojne zlanie się dwóch obłoków jest niewątpliwą zachętą do kolapsu (towarzyszy mu wzrost masy, a więc i samograwitacji), o tyle gwałtowne zderzenie powinno prowadzić do ich rozproszenia lub przynajmniej do pobudzenia wewnętrznej turbulencji. W każdym razie przeprowadzone na kilka niezależnych sposobów oceny średniego wieku obłoków dają wartości co najmniej dziesięciokrotnie większe od czasu potrzebnego do ukończenia kolapsu. Jeśli im ufamy — musimy przyznać, że nie wiemy, co właściwie kolapsowi przeciwdziała. W każdym razie nie może to być czynnik stuprocentowo efektywny; przynajmniej część dużych obłoków i przynajmniej niektóre małe obłoki kolapsować muszą. Jak się bowiem za chwilę przekonamy, kolaps w obłokach molekularnych jest jedyną drogą prowadzącą do powstawania gwiazd.

Obserwacje ze wszystkich dziedzin widma składają się mianowicie na nasze, bez żadnej przesady niezachwiane, przekonanie o ścisłym związku genetycznym łączącym obłoki molekularne i gwiazdy. Po pierwsze — w pierścieniu molekularnym 4—8 kpc od centrum Galaktyki znajduje się wyjątkowo dużo gwiazd młodych. Po drugie — wśród zaobserwowanych dotychczas wielkich obłoków molekularnych nie ma ani jednego, w którego bezpośrednim sąsiedztwie nie znalazłby się gwiazdy bardzo młode. Wniosek, że tam, gdzie dziś znajdują się młode gwiazdy, jeszcze milion lat temu były tylko obłoki molekularne, narzuca się sam. Są i dalsze argumenty. Można teoretycznie przewidzieć, jak będzie wyglądało widmo zwykłej gwiazdy ciągu głównego otoczonej obłokiem. W szczególności nie warto się wdawać; istotne jest to, iż dotrze do nas od niej wyłącznie promieniowanie podczerwone niosące informację nie tylko o gwieździe, lecz i o jej otoczeniu. We wszystkich zbadanych dotychczas wielkich

obłokach znaleziono takie właśnie gwiazdowe źródła podczerwieni, czyli — zobaczono gwiazdy, które się z obłoków jeszcze nie wydostały. Przewidziano też teoretycznie i zaobserwowano poszczególnie fazy wurniania się nowo powstałych gwiazd z macierzystych obłoków. W przypadku gwiazd masywnych główną rolę odgrywają tu szybko rozrastające się obszary wodoru zjonizowanego ( $H II$ ), w przypadku gwiazd mało masywnych — wiatry gwiazdowe. I wreszcie — wśród znalezionych we wnętrzach obłoków źródeł podczerwieni znaleziono obiekty nietypowe, które najprawdopodobniej (margines niepewności jest rzeczywiście znikomym) są protogwiazdami w fazie akrecji.

Ubočnym niejako i przez nasze wstępne rozważania zupełnie nieprzewidzianym efektem działalności procesów gwiazdotwórczych są masywne międzygwiazdowe, często występujące w sąsiedztwie źródeł podczerwieni oraz obszarów  $H II$  i promieniujące olbrzymie ilości energii we wzbronionych liniach takich cząsteczek, jak tlenek krzemu, woda czy grupa hydroksylowa OH.

Jak jednak widzieliśmy, obłoki molekularne zdają się albo w ogóle nie kolapsować, albo kolapsować w tempie niewytłumaczalnie wolnym — zupełnie, jakby nie miały pojęcia o czymś takim, jak samograwitacja. Otóż z teoretycznego punktu widzenia do kolapsu pewnego obszaru (niekoniecznie całego obłoku) dochodzi wtedy, gdy zostanie w nim spełnione tzw. kryterium Jeansa, sprowadzające się z grubsza do żądania, by całkowita energia znajdującej się w tym obszarze materii była ujemna. W bilansie energetycznym ujemną jest energia grawitacyjna; dodatnimi natomiast — termiczna, ruchu obrotowego, ruchów turbulentnych i ewentualnych pól magnetycznych. Te ostatnie prawdopodobnie nie odgrywają w obłokach molekularnych większej roli; z całą pewnością nie można ich jednak pomijać przy badaniu przemian, którym podlegają obłoki H I. Mimo tak znacznego uproszczenia ciągle jeszcze nie potrafimy w ogólności przewidzieć losu turbulentnego, obracającego się obłoku. Badanie ewolucji protogwiazd bez uwzględnienia rotacji i turbulencji jest stosunkowo proste, lecz zbyt głębokiego wglądu w rzeczywistość dać nie może: w Galaktyce kłębi i obraca się dosłownie wszystko.

Astronom angielski James Jeans pokazał w 1926 r., że obłok o danej temperaturze i gęstości może kolapsować, jeśli jego masa przekracza pewną wartość krytyczną:

$$M = 30 \cdot \sqrt{\frac{T}{n}} M_{\odot}$$

gdzie  $T$  jest temperaturą obłoku, a  $n$  jego gęstością (w jednostkach ilości atomów na  $cm^3$ ). Kryterium to ma jeszcze inną interpretację fizyczną, niż ta podana w tekście: otóż obłok zapadnie się sam, jeśli czas swobodnego spadku na jego środek jest krótszy od czasu, w jakim dźwięk przebiegnie cały obłok. W tabelce podajemy przykładowe masy Jeansa

	gęstość $n$ [ $cm^{-3}$ ]	temperatura $T$ [K]	masa Jeansa $M$ [ $M_{\odot}$ ]
ośrodek międzyobłokami	0,2	8000	$5 \cdot 10^7$
obłoki H I	100	100	3000
obłoki $H_2$	1000	10	30

O dziwo, jednak tak dalece uproszczona teoria dość dobrze tłumaczy obserwacje wspomnianych już nietypowych źródeł podczerwonych, a jako taka zasługuje na pobieżne choćby omówienie. Nie wiadomo niestety, w jakich okolicznościach może dojść do spełnienia kryterium Jeansa, czyli — do „zorientowania” się protogwiazdy we własnej tożsamości. Załóżmy więc po prostu, iż w interesującym nas obszarze zostało ono w pewnej chwili spełnione i że utworzyła się tym samym protogwiazda. Gęstość jej, a zwłaszcza gęstość centralna, zaczyna niestannie wzrastać. Energia wewnętrzna sprężanego gazu utrzymuje się jednak na

tym samym poziomie — cała jej wytworzona przez pracę sił samograwitacji nadwyżka jest na razie bez przeszkód wypromieniowywana w dalekiej podczerwieni. Po milionkrotnym wzroście gęstości centrum protogwiazdy staje się jednak dla tego promieniowania nieprzezroczyste i zaczyna się nagrzewać. Postępujący za wzrostem temperatury wzrost ciśnienia szybko doprowadza do wstrzymania kolapsu w niewielkim obszarze centralnym, którego masa nie sięga nawet 1%  $M_{\odot}$ . Jest to tzw. pierwsze jądro hydrostatyczne, które przestaje istnieć w chwili, gdy jego temperatura osiąga poziom umożliwiający dysocjacje cząsteczek  $H_2$ . Towarzyszący dysocjacji spadek ciśnienia rozpoczyna drugą fazę kolapsu. Wkrótce jednak tworzy się drugie jądro hydrostatyczne i protogwiazda wchodzi w fazę akrecji. Jej opadająca niemal swobodnie na jądro otoczka zmienia gwałtownie wszystkie swe parametry (prędkość opadania, temperaturę i gęstość) w bardzo cienkiej warstwie znajdującej się na powierzchni jądra i zwanej frontem akrecyjnym. Dzięki jego istnieniu masa jądra nieustannie wzrasta. Protogwiazda zaczyna świecić początkowo w podczerwieni, później, w miarę wzrostu jądra, w zakresie widzialnym i w nadfiolecie. Większa część tego promieniowania generowana jest na razie w froncie akrecyjnym dzięki zamianie energii kinetycznej opadającej otoczki w ciepło, udział samego jądra, w którym tymczasem dokonuje się kontrakcja, jest na razie niewielki. Całkowita jasność protogwiazdy w fazie akrecji może przewyższyć jasność Słońca nawet kilkaset tysięcy razy. Niemal w całości pochłaniająca to promieniowanie składowa pyłowa otoczka rozgrzewa się do tego stopnia, że w otoczeniu frontu akrecyjnego wszystkie pyły zostają zniszczone. We wnętrzu otoczki powstaje zatem strefa bezpyłowa, w której wysokoenergetyczne promieniowanie frontu akrecyjnego rozprzestrzenia się niemal bez przeszkód — by tuż ponad nią ulec całkowitemu pochłonięciu i przetworzeniu na bliską podczerwień. Do wtórnego pochłonięcia płynącej z frontu energii i częściowego jej przetworzenia na daleką podczerwień dochodzi następnie w zewnętrznych warstwach otoczki. Formujące się gwiazdy powinny się nam zatem przedstawiać jako bardzo silne źródła podczerwieni, w których widmach, w odróżnieniu od zwykłych gwiazd, widać nie jedno, lecz dwa maksima. Na chwałę naszej prostej teorii należy powiedzieć, iż widma przez nią przewidziane dobrze zgadzają się z widmami obserwowanymi u owej nietypowej klasy źródeł podczerwonych. Niestety, nawet ona nie doprowadza nas do samego ciągu głównego. W swej dotychczasowej formie nie mówi nam mianowicie, przez co zostaje ostatecznie wstrzymany napływ materii z otoczki do jądra. Problem ten praktycznie nie istnieje w przypadku protogwiazd zamieniających się w gwiazdy podobne do Słońca: w końcowych fazach ewolucji wolno kontrahujące jądro takiego obiektu zawiera ponad 99% jego masy całkowitej. Nie popelniając dużego błędu można więc stwierdzić, że proces zamiany mało masywnego obłoku w gwiazdę odbywa się bez żadnych strat. W odniesieniu do obłoków o dużych masach nie będzie to już prawdą; utrata masy może tu być bardzo znaczna. (Szacuje się, iż z obłoku o początkowej masie ok. 100  $M_{\odot}$

powstanie gwiazda o masie zaledwie 30  $M_{\odot}$ ). Czynnikiem prowadzącym do utraty masy jest prawdopodobnie ciśnienie promieniowania. Ponieważ jądro masywnej protogwiazdy rozpoczyna syntezę helu jeszcze w dynamicznej fazie ewolucji (patrz art. M. Kubiaka w Delcie 10/1982), w chwili, gdy ok. 70% produkowanej ogółem energii pochodzi z frontu akrecyjnego, znaczną rolę mogą też odgrywać dokładnie jeszcze nie zbadane, a pojawiające się w takich okolicznościach niestabilności. Klucz do większości z postawionych na początku pytań ukryty jest w nawet jeszcze nie raczkującej teorii ewolucji obrotujących się protogwiazd. Jest rzeczą pewną, iż los takiej protogwiazdy zależy nie tylko od ilości momentu pędu, ale i od stopnia, w jakim zostaje on podczas ewolucji zachowany. Gdyby miał on być zachowany całkowicie, tzn. gdyby gwiazda miała mieć taki sam moment pędu, co obłok, z którego powstanie — na pewnym etapie kolapsu doszłoby do nieuchronnego zrównoważenia sił odśrodkowych i grawitacyjnych. Dalszy kolaps zostałby tym samym wstrzymany. Coraz dokładniejsze, lecz ciągle jeszcze nie tak dokładne, jak byśmy sobie tego życzyli, rachunki wykazują, iż przynajmniej w pewnych wypadkach po wstrzymaniu kolapsu może dojść do podziału protogwiazdy — najczęściej na dwa fragmenty. Za jednym zamachem otrzymujemy w ten sposób układ podwójny i pozbywamy się nadmiaru momentu pędu, który zostaje zmagazynowany w ruchu obiegowym fragmentów. Moment pędu wcale nie musi jednak być zachowany, a w rzeczywistych obłokach — nawet nie może. Dla uniknięcia niejasności musimy podkreślić, że przez cały czas mówimy o tzw. lokalnym zachowaniu momentu pędu, tzn. o utrzymaniu przez każdy gram protogwiazdy tej wartości momentu pędu, która charakteryzowała go w momencie rozpoczęcia się kolapsu. W rzeczywistym gazie pojawia się tarcie, toteż szybko wirujący środek obłoku trąc o wolniej wirujące części zewnętrzne będzie mógł przekazać im część swego momentu pędu.

Prawdopodobnie w ten właśnie sposób z protogwiazd dostatecznie lepkich (tzn. takich, w których siły tarcia są wystarczająco duże) powstały gwiazdy otoczone układami planetarnymi: układy takie — to nic innego, jak zewnętrzne części protogwiazdy, do których trafiła nadwyżka momentu pędu (przypomnijmy, że w naszych dziesięciu planetach zawarte jest 98% momentu pędu Układu Słonecznego). Jak się łatwo domyśleć, ewoluująca w kierunku układu planetarnego protogwiazda przybiera kształt dysku. Front akrecyjny nadal otacza jądro, lecz nie jest już jedynym źródłem promieniowania; z porównywalną mocą świeci również rozgrzewany przez tarcie dysk. Widać to wszystko oczywiście tylko w podczerwieni, gdzie jakość technik obserwacyjnych mimo ogromnego postępu nie dorównuje jakości obserwacji optycznych, mimo to wydaje się, że zaobserwowano już co najmniej jeden układ protoplanetarny.

Na ostateczny wyrok w tej sprawie, jak zresztą i w większości spraw dziś przez nas poruszonych, trzeba będzie poczekać do wystrzelenia specjalnego satelity przeznaczonego na wyłączne potrzeby astronomii podczerwonej.



#### Rozwiązanie zadania F 124.

Pod działaniem sił grawitacji, lub co na jedno wychodzi, sił bezwładności, następuje przemieszczanie elektronów w obrębie metalu aż do chwili, gdy siła powstającego pola elektrycznego zrównoważy siłę grawitacji działającą na elektron

$$eE + mg = 0$$

$$E = - \frac{m}{e} g.$$

Prowadzi to do odpowiedniego rozkładu ładunków oraz potencjału. Efekt powinien być bardzo subtelny ze względu na dużą

wartość  $\frac{e}{m}$ . Oszacujmy różnicę potencjałów

między osią a obwodem tarczy o promieniu

$R = 10$  cm, wirującej z prędkością kątową

$\omega = 100 \frac{\text{obr.}}{\text{s}}$ . W układzie wirującym wraz

z tarczą siła odśrodkowa bezwładności

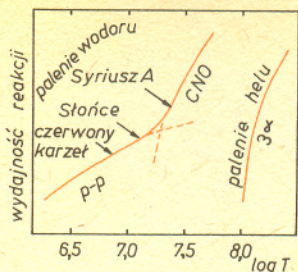
równoważona jest przez siłę elektryczną

$$Ee = m\omega^2 r$$

$$E = \frac{m\omega^2 r}{e}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} ER = \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 R^2}{e}$$

Po obliczeniach:  $U \approx 10^{-9}$  V.



Reakcje jądrowe we wnętrzach gwiazdowych

Cykl  $p-p$  ( $2 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^7$  K) najprostsza postać

- $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$
- $2 \cdot {}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$
- ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p + p$

Cykl CNO ( $T > 1,5 \cdot 10^7$  K)

- ${}^{12}\text{C} + p \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$
- ${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu$
- ${}^{13}\text{C} + p \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma$
- ${}^{14}\text{N} + p \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$
- ${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu$
- ${}^{15}\text{N} + p \rightarrow {}^{12}\text{C} + \alpha ({}^4\text{He})$

Cykl  $3\alpha$  ( $T \approx 10^8$  K)

- $3 \cdot {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma$
- ${}^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma$

Spalanie węgla ( $T \approx 5 \cdot 10^8$  K) przykłady

- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{23}\text{Na} + p$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \alpha$

Spalanie tlenu ( $T \approx 10^9$  K) przykłady

- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{32}\text{S} + \gamma$
- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{31}\text{P} + p$
- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{31}\text{S} + n$
- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{28}\text{Si} + \alpha$

Spalanie krzemu ( $T \approx 2 \cdot 10^{10}$  K)

- ${}^{28}\text{Si} + \gamma \rightarrow 7 \cdot {}^4\text{He}$
- ${}^{28}\text{Si} + 7 \cdot {}^4\text{He} \rightarrow {}^{56}\text{Ni}$

albo

- ${}^{28}\text{Si} + {}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{56}\text{Ni}$
- ${}^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}\text{Co} + e^+ + \nu$
- ${}^{56}\text{Co} \rightarrow {}^{56}\text{Fe} + e^+ + \nu$

## Patrz w niebo

Patrząc w niebo widzimy, że gwiazdy świecą. Prawie wszystkie z nich, widoczne gołym okiem są zwykłymi, nie wszystkich astronomów porywającymi, od dawna znanymi i zbadanymi gwiazdami leżącymi na „ciągu głównym”. Tak się złożyło, że idąc za ogólnymi trendami we współczesnej astrofizyce przedstawiłmy Wam obiekty, które dzisiaj budzą wiele kontrowersji wśród astronomów, zostawiając niejako na uboczu to, co od dawna znane jest nauce, ale ciągle budzi wiele wątpliwości wśród Czytelników, np. skąd wiemy, co się dzieje wewnątrz gwiazdy. W kilku najbliższych numerach *Delty* postaramy się wypełnić tę lukę.

Dzisiaj chcemy podać w wielkim skrócie w charakterze pomocy i ściągawki przy czytaniu przyszłych artykułów w *Delcie*, co współczesna astrofizyka sądzi na temat reakcji jądrowych zachodzących w centrach gwiazd. Nie będziemy się wdawać przy tym w szczegóły techniczne „budowy modeli” gwiazd, zostawiając to na przyszłość.

W jądrach gwiazd panują wysokie temperatury i ciśnienia. Przy kontrakcji temperatura osiąga wartość kilku milionów kelwinów, w tych warunkach zaczyna zachodzić najprostsza reakcja jądrowa tzw. *cykl proton-proton (p-p)*, czyli synteza helu z czterech protonów (patrz tabelka). Gdy temperatura osiągnie większą wartość (w wyniku kontrakcji lub podgrzewania przez cykl *p-p*), w centrum gwiazdy zaczyna dominować synteza helu o większej wydajności, przy użyciu węgla, azotu i tlenu jako swego rodzaju katalizatorów (tzw. *cykl CNO*, zwróćcie uwagę, że liczba cząstek C, N i O jest zachowana).

W wyniku ewolucji temperatura w gwieździe może dalej rosnać i może dojść do „zapalenia” się helu (tzw. *cykl 3 $\alpha$* ). Dalej, w zaawansowanych stadiach ewolucji może dojść do „spalania” węgla, tlenu, krzemu aż do uzyskania żelaza, które już przy spalaniu nie powoduje wydzielania się energii (byłaby to już reakcja endotermiczna).

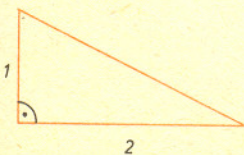
Przy oglądaniu tabelki pamiętajmy o następujących oznaczeniach:

- $\gamma$  — foton
- $e^+$  — pozyton
- $\nu$  — neutrino
- $\alpha$  — jądro helu ( ${}^4\text{He}$ )
- $n$  — neutron
- $p$  — proton

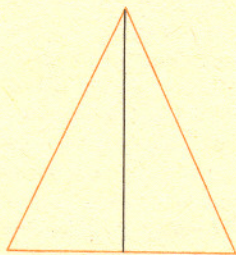
mgr Tomasz CHLEBOWSKI

## Zadania, których nie umiemy rozwiązać

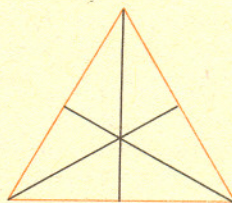
W roku 1970 Werner Mnich postawił pytanie (Wiadomości Matematyczne, tom 11, str. 309): Czy istnieje trójkąt, który można podzielić na siedem trójkątów przystających?



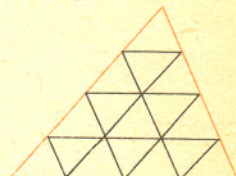
Jak podzielić ten trójkąt na 5 trójkątów przystających? Podzielić trójkąt prostokątny o przyprostokątnych  $a$  i  $b$  na  $n = a^2 + b^2$  przystających trójkątów.



Podział trójkąta równoramiennego na dwa trójkąty przystające.



Podział trójkąta równobocznego na trzy i sześć przystających trójkątów.

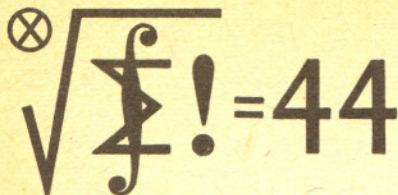


Podział trójkąta na  $n^2$  (na rysunku  $n = 4$ ) trójkątów przystających.

Dlaczego akurat siedem? Dlatego, że dla  $n \leq 6$  są trójkąty, które można podzielić na  $n$  trójkątów przystających. Dla niektórych innych  $n$  też (p. rysunki obok).

A jak jest dla  $n = 7$ ? Choć od chwili opublikowania zadania upłynęło 12 lat, odpowiedzi wciąż nie znamy.





## Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
z numeru 3/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	- 31,40pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	- 27,35pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	- 17,84pkt
Jaśek Uryga	- Bytom	- 15,81pkt
Andrzej Lenarolik	- Kielce	- 15,38pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	- 14,93pkt

Współczynniki trudności zadań 19, 20, 21:  
2,47      3,77      3,23

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

**Liga nasza trwa już rok z okładem.** Otrzymaliśmy przez ten czas sporo listów od Czytelników. Nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć na każdy list. Nie chcemy wszakże pozostawić tej miłej nam korespondencji bez echa. Więc przede wszystkim dziękujemy: za przesłane nam życzenia noworoczne, świąteczne, wakacyjne; za liczne wyrazy uznania pod adresem inicjatorów konkursu ligowego; za uwagi, pochlebne i krytyczne, i w ogóle za wszystkie listy. Korzystamy teraz z okazji, by się podzielić naszymi refleksjami na temat uwag i postulatów zawartych w listach, a także na temat samego konkursu.

Z żalem musimy odmówić prośbom o odsyłanie poprawionych i ocenionych prac, z wyszczególnieniem „popelnionych błędów i nieścisłości”. Szczegółowe recenzowanie poszczególnych rozwiązań znacznie przekracza nasze możliwości czasowe.

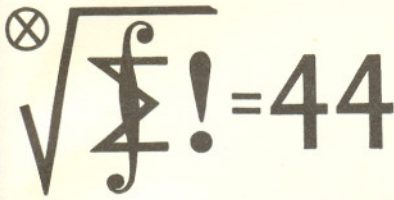
Padła propozycja, żeby ogłaszać pełną tabelę ligową (nie tylko czołówkę) — nazwiska wszystkich uczestników wraz z pełną punktacją — co miałoby stanowić zachętę dla tych, którzy w czołówce już się nie zdołali zmieścić. My jednak myślimy, że byłoby to raczej antydotyng. Jak poczuje się uczestnik, ujrzący swoje nazwisko, a przy nim ... rząderek zer lub innych ocen niskich niewspółmiernie do ambicji? A z taką możliwością zawsze trzeba się liczyć. Pozostawmy więc przy „czołówce”. Ponieważ punktacją jest cykliczna (do 44 i znów od zera), zatem każdy uczestnik, jeśli będzie dość wytrwały, prędzej czy później do czołówki trafi ...

Zakłócenie cyklu produkcyjnego naszego czasopisma, jakie miało miejsce na początku bieżącego roku, sprawiło, że podawane terminy nadsyłania rozwiązań były niemożliwe do dotrzymania. W tej sytuacji uznaliśmy za całkowicie usprawiedliwione opóźnienia nawet dwumiesięczne. Wszystkie przysłane rozwiązania zadań z numerów 1—4 zostały przeczytane i ocenione. Wdzięczni jesteśmy ich autorom za nieprzerwany udział w konkursie. Tych zaś, którzy, mając za sobą start w początkowych „kolejkach ligowych”, przegrali zabawę, zniechęceni awaryjną sytuacją — namawiamy gorąco do wznowienia udziału w lidze. Come back!

Nie wszystkie zadania konkursowe są oryginalne — to nieuniknione. Niektóre z nich można znaleźć w różnych zbiorach zadań; czasem dzieje się tak z pełną naszą świadomością, czasem bez. Kilku Czytelników wyraża obawę co do naszych ocen za rozwiązania typu „... patrz zbiór taki a taki (rozdział, strona)”. Pragniemy ich uspokoić: jeśli tylko w cytowanym źródle istotnie znajduje się rozwiązanie (pełny dowód czy obliczenie), ocena jest maksymalna. Również powoływanie się na fakty pomocnicze, ze wskazaniem książki, gdzie można znaleźć dowód, jest dopuszczalne i mile widziane. Umiejętność korzystania z literatury jest cenną cechą i zasługuje na punktowanie.

Zainteresowanie wzbudziła przyjęta przez nas zasada punktacji. Pisaliśmy przed rokiem, w komentarzu do regulaminu Ligi (nr 9/81), „... nie zawsze można przewidzieć, co okaże się trudne”, a co łatwe: dlatego decydujemy się na formułę uzależniającą współczynnik trudności (WT) od ocen; stosunek  $x = (\text{suma ocen}) / (\text{liczba uczestników})$  przyjmuje wartość 0, gdy nikt nie przysłał rozwiązania poprawnego choćby częściowo, zaś wartość 1, gdy wszyscy podadzą rozwiązanie bezbłędne; funkcja  $y = 4 - 3x$  odwzorowuje przedział  $\langle 0,1 \rangle$  na  $\langle 1,4 \rangle$ , więc największy WT równa się 4, a najmniejszy 1”. Po roku zabawy obserwujemy, że współczynnik chyba nieźle spełnia swoją rolę. Spośród zadań 1—21 najtrudniejsze okazało się zadanie 7 (WT = 3,82), a najłatwiejsze zadanie 18 (WT = 1,00). Ktoś dowcipnie zauważył, że aby zwiększyć swoje szanse, celowe jest przysłanie — oprócz własnego (poprawnego) rozwiązania — jeszcze kilku rozwiązań błędnych, pod zmyślonymi nazwiskami, co spowoduje zwiększenie WT. Zaiste; wszelako zwiększy to szanse nie tylko autora i wykonawcy tego pomysłu, ale także wszystkich jego rywali (z wyjątkiem, oczywiście, tych zmyślonych ...).

Jak to zostało zapowiedziane, ocena rozwiązania zależy nie tylko od poprawności, ale też od prostoty i elegancji. Nie dajemy więc całego punktu za rozwiązania nawet w pełni poprawne i bez luk, ale oparte, na przykład, na długich i uciążliwych rachunkach, jeśli istnieje rozwiązanie proste a sprytne; typową oceną w takich razach jest 0,8 (czasem 0,9, czasem nawet 0,7).



### Zadania nr 37, 38, 39

Termin nadsyłania rozwiązań: 31.01.83

37. Na zewnątrz danego czworokąta wypukłego narysowano cztery koła; każde z nich jest styczne do jednego boku czworokąta i do przedłużeń dwóch sąsiednich boków. Udowodnić, że środki tych kół leżą na okręgu.

38. Liczbę całkowitą nazywamy palindromiczną, gdy czytana od tyłu pozostaje ta sama np. 12344321, czy 121. Znaleźć wszystkie palindromiczne liczby pierwsze, mające parzystą liczbę cyfr.

39. Przedstawić liczbę 1 w postaci sumy odwrotności różnych liczb nieparzystych ( $\geq 3$ ). Rozwiązanie będzie uważane za tym lepsze, im mniejsza będzie liczba składników.

### Rozwiązanie zadań z numeru 7/82

25. Ciąg  $0, 1, a, a^a, a^{a^a}, \dots$  wyraża się wzorem rekurencyjnym  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f(x) = a^x = e^{-cx}$ ;  $c = |\ln a|$  (jako, że  $0 < a < 1$ ). W takim razie  $x_{n+2} = g(x_n)$ , gdzie  $g(x) = f(f(x))$ . Weźmy pod uwagę funkcję  $h(x) = g(x) - x$ . Miejsca zerowe funkcji  $h$  to punkty stałe funkcji  $g$ ; istnieją, bo  $h(0) > 0$ ,  $h(1) < 0$ . Oznaczmy przez  $u$  i  $v$  najmniejszy i największy z pierwiastków równania  $h(x) = 0$  w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ . Funkcja  $g$  jest ściśle rosnąca, więc w przedziałach  $\langle 0, u \rangle$  oraz  $\langle v, 1 \rangle$  spełnia (odpowiednio) warunki  $x < g(x) < g(u) = u$  oraz  $v < g(x) < g(x) < x$ . Wynika stąd, że ciągi  $\{x_{2k}\}$  oraz  $\{x_{2k+1}\}$  zawarte są (odpowiednio) w tych przedziałach i że są monotoniczne, więc zbieżne. Ich granice muszą być punktami stałymi funkcji  $g$ . Zatem  $\lim x_{2k} = u$ ,  $\lim x_{2k+1} = v$ .

Standardową metodą rachunku różniczkowego (badając znak drugiej pochodnej  $g''$ ) sprawdzamy, że maksymalna wartość pochodnej  $g'$  w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$  nie przekracza  $c/e$ . Jeśli więc  $c \leq e$ , to  $h'(x) \leq 0$  dla  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ; funkcja  $h$  nie jest stała na żadnym przedziale; jest więc ściśle malejąca i równanie  $h(x) = 0$  ma dokładnie jeden pierwiastek w  $\langle 0, 1 \rangle$ , czyli  $u = v = \lim x_n$ . Natomiast jeśli  $c > e$ , pierwiastków jest więcej; aby się o tym przekonać, wystarczy wskazać punkty  $\alpha$  i  $\beta$  także, że  $0 < \alpha < \beta < 1$  oraz  $h(\alpha) < 0$ ,  $h(\beta) > 0$ .

W odpowiedzi na apel o przysłanie propozycji zadań otrzymaliśmy ich przeszło dwadzieścia. Większość z nich wykorzystamy. Ale nie wszystkie. Nie skorzystamy z zadań o nadmiernie rozbudowanej treści, gdzie samo postawienie problemu jest czymś w rodzaju małej teorii; ani z zadań wyłącznie techniczno-rachunkowych. Niechętnie widzimy żądania zabraniające korzystać z pewnych metod (np. rachunku całkowego lub tp.), bowiem warunki takie rzadko da się precyzyjnie określić, a jeszcze trudniej precyzyjnie je wyegzekwować przy ocenianiu (a poza tym — metody matematyczne istnieją przecież właśnie po to, żeby z nich korzystać ...). Odrzucamy wreszcie zadania, które są — naszym zdaniem — zbyt łatwe (wręcz banalne) lub zbyt trudne (sami ich nie umiemy rozwiązać). Tu uwaga: selekcja zadań do konkursu będzie znacznie ułatwiona, jeśli do treści każdego proponowanego zadania będzie dołączony szkic rozwiązania (lub informacja, że autor nie zna rozwiązania).

Apel o zadania wciąż aktualny. Liczymy na to, że z czasem propozycje Czytelników staną się głównym źródłem zaopatrzenia „Ligi” w zadania.

I jeszcze jeden cytat z naszego komentarza sprzed roku: „Mamy nadzieję, że rozwiązania przysyłane przez uczestników będą często ładniejsze, bardziej pomysłowe lub ogólniejsze od rozwiązań nam znanych. Najciekawsze rozwiązania będziemy po adaptacji drukować”. Dotrzymujemy więc obietnicy:

**Zadanie 6.** Na szachownicy  $(n \times n)$  stoją dwa hetmany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się nie atakują? — Pan **Edward Orzechowski** z Warszawy oraz pan **Dariusz Sowizdrzał** ze Szczecina (student) podają prostą metodę wyznaczenia liczby  $L$  ustawień szachujących: Hetmany się atakują, jeśli stoją na jednej linii poziomej, pionowej lub ukośnej. Mamy  $2n+2$  linii długości  $n$  (tj.  $2n$  rzędów i 2 przekątne) oraz po 4 linie ukośne długości  $n-1, n-2, \dots, 3, 2$ . Na linii długości  $m$  można ustawić dwa hetmany na  $\binom{m}{2}$  sposobów. Zatem

Warunki te spełniają na przykład liczby  $\alpha = 1/c$ ,  $\beta = \ln c/c$  (co nietrudno przerachować). Zatem w tym przypadku  $u < v$  i granica  $\lim x_n$  nie istnieje. Tak więc koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności ciągu  $\{x_n\}$  jest nierówność  $c \leq e$ , czyli  $a \geq e^{-e}$ .

Uwzględniając wynik zadania 13, gdzie podobny problem był dyskutowany przy założeniu, że  $a > 1$ , dochodzimy do konkluzji: ciąg  $a, a^a, a^{a^a}, \dots$  ( $a > 0$ ) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ .

26. Niech  $a, b, c, d$ , będą długościami kolejnych boków rozważanego czworokąta;  $a+c = b+d$ , jako że czworokąt jest opisany na kole. Stosując twierdzenie Pitagorasa do czterech trójkątów prostokątnych, na które przekątne dzielą czworokąt, dostajemy równość  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ . Z uzyskanych równości łatwo wynika, że pary (nieuporządkowane)  $\{a, c\}$  i  $\{b, d\}$  są identyczne: albo  $a = b, c = d$  albo  $a = d, c = b$ . Czworokąt jest więc deltoidem.

27. Jeśli  $n \geq 4$ , to suma  $s_n = \sum_{k=1}^n k!$  kończy się cyfrą 3, nie jest więc pełnym kwadratem. Zatem jedynymi rozwiązaniami równania  $s_n = m^2$  w liczbach naturalnych są:  $m = n = 1$  i  $m = n = 3$ . Oczywiście równość  $s_m = n^2$  jest wtedy także spełniona.

$$L = (2n+2) \binom{n}{2} + 4 \sum_{m=2}^{n-1} \binom{m}{2} = \frac{1}{3} (n-1)n(5n-1).$$

Wszystkich możliwych ustawień pary hetmanów na szachownicy jest  $M = \binom{n^2}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$ . Szukane prawdopodobieństwo  $P = 1 - \frac{L}{M} = \frac{(3n-1)(n-2)}{3n(n+1)}$ .

**Zadanie 7.** Funkcja  $f$  ciągła na  $(0, +\infty)$  spełnia dla każdego  $x > 0$  warunek  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ . Czy stąd wynika, że  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ? — Krótki i efektowny dowód oparty na twierdzeniu Baire'a przysłał pan **Andrzej Lenarcik** z Kielc (student). Nadmieniamy, że jest to jedyne poprawne rozwiązanie tego zadania spośród wszystkich nadesłanych. Ustalmy  $\epsilon > 0$  i zdefiniujmy zbiory  $Z_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ );

$$Z_k = \{0\} \cup \bigcap_{n \geq k} \left\{ x > 0 : \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \epsilon \right\}.$$

Wobec ciągłości  $f$  są to zbiory domknięte, a z warunku zadania wynika, że  $\bigcup Z_k = \langle 0, +\infty \rangle$ . Twierdzenie Baire'a (patrz dowolny podręcznik analizy lub topologii) mówi, że jeśli przestrzeń metryczna zupełna jest sumą ciągu zbiorów domkniętych, to któryś z nich ma niepuste wnętrze. Zatem istnieją liczby  $a > 0, \delta > 0, k \in \mathbb{N}$  takie, że  $Z_k \supset (a-\delta, a+\delta)$ ; można założyć, że  $\delta \leq a/k$ .

Niech teraz  $0 < x \leq \delta$ . Oznaczamy przez  $n$  największą liczbę całkowitą  $\leq a/x$ . Mamy więc  $n \geq k$  oraz  $a-\delta \leq a-x < nx \leq a < a+\delta$ , skąd  $n x \in Z_k$ .

Z określenia zbioru  $Z_k$  dostajemy  $f(x) = \left| f\left(\frac{nx}{x}\right) \right| \leq \epsilon$ , co wobec dowolności  $\epsilon$  oznacza, że  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .