

## SPIS TREŚCI

NUMERU 9(105)

Lemat Kuratowskiego-Zorna <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str. 1
Burza <i>prof. dr John S. A. Green</i>	str. 4
O lemacie Kuratowskiego-Zorna — od innej strony <i>dr Andrzej Pelc</i>	str. 6
Co to są dyslokacje? <i>dr Andrzej Pawelek</i>	str. 7
Patrz w niebo	str. 12
Klub 44	str. 12
O wartości informacji <i>prof. dr inż. Juliusz L. Kulikowski</i>	str. 14
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 16
Zadania	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Czas**

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Tomasz Hofmokl  
 doc. dr Bolesław Iwazkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bogdan Paczyński  
 dr Zbigniew Płochocki  
 doc. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 doc. dr Jerzy Sawicki  
 prof. dr Zbigniew Semadeni  
 doc. dr Grzegorz Sitarski  
 doc. dr Kazimierz Stepień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Stefan Turnau  
 doc. dr Aniela Wolska  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Zakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.  
 mgr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nac.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
 dr inż. Jacek Mazur — ilustracje  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00 564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 2655/82 Z-109

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
 Prenumeratę na kraj przyjmują oddziały kolportażowe RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz  
 urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
 — do 25 listopada na rok następny, I kwartał, I półrocze,  
 — do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty, na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Instytucje, jednostki gospodarki uspołecznionej, zakłady pracy i organizacje społeczno-polityczne  
 zamawiają prenumeratę w oddziałach kolportażowych RSW, uzgadniając sposób odbioru zamówionej  
 prasy.  
 Czytelnicy indywidualni zamieszkali w miastach mogą zamawiać prenumeratę w macierzystym zakładzie  
 pracy albo w oddziale kolportażowym RSW. Na wsi prenumeratę od instytucji, zakładów pracy  
 i czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe i listonosze.  
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla  
 zleceńodawców indywidualnych i o 100% dla instytucji i zakładów pracy, przyjmuje RSW  
 „Prasa—Książka—Ruch” Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa ul. Towarowa 28,  
 konto XV O/M Warszawa nr 1153-201045-139-11.

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
 „DELTE”:  
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie  
 Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik  
 Deutschland,  
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
 — Licosa Comissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550



# Lemat Kuratowskiego-Zorna

Dr Zbigniew SAWOŃ

W Analizie Matematycznej, a także w innych działach matematyki często zachodzi konieczność wykazania istnienia elementu maksymalnego z punktu widzenia pewnej własności. Zwykle sytuacja jest następująca: mamy jakiś zbiór elementów częściowo uporządkowany przez pewną relację i poszukujemy w nim elementu lub elementów maksymalnych względem tej relacji, tj. obiektów, od których nie ma już większych. Twierdzenie zwane *lematem Kuratowskiego-Zorna* zapewnia istnienie takich elementów, jeżeli spełnione są pewne dodatkowe założenia. Celem tego artykułu jest zapoznanie Czytelnika z tym lematem i zastosowanie lematu do pewnej konkretnej konstrukcji, której wynikiem będzie dowód istnienia nieciągłych funkcji takich, że

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbf{R}.$$

1. Zacniemy od podstawowych definicji. Niech  $X$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację  $<$ .

- 1) Podzbiór  $A \subset X$  jest liniowo uporządkowany, gdy dla każdego  $a, b \in A$  albo  $a < b$  albo  $b < a$ .
- 2) Podzbiór  $A \subset X$  jest ograniczony z góry, gdy istnieje takie  $x_0$ , że dla każdego  $a \in A$  mamy  $a < x_0$ .
- 3) Element  $x_0 \in X$  jest maksymalny w  $X$ , gdy z tego, że  $x_0 < y$ , wynika, że  $x_0 = y$ .

Otóż lemat Kuratowskiego-Zorna brzmi jak następuje:

Niech  $X$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację  $<$ . Jeżeli każdy liniowo uporządkowany podzbiór  $A \subset X$  jest ograniczony z góry, to w  $X$  istnieją elementy maksymalne ze względu na tę relację.

2. Pokażemy na prostym standardowym przykładzie, jak posługujemy się tym twierdzeniem. Symbol  $\mathbf{Q}$  będzie oznaczał zbiór wszystkich liczb wymiernych,  $\mathbf{R}$  — rzeczywistych. Niech  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  będzie pewnym układem liczb rzeczywistych. Mówimy, że  $A$  jest *układem liniowo-wymiernie niezależnym*, jeżeli

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i = 0, \quad w_i \in \mathbf{Q}, \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0.$$

Takie układy istnieją, np.  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{1, \sqrt{2}\}$ ,  $A_3 = \{1, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots, \pi^n\}$ . To, że  $A_2$  jest układem liniowo-wymiernie niezależnym znaczy po prostu tyle, że  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną, a to, że  $A_3$  ma tę własność, wynika z faktu, że nie istnieje wielomian o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkiem byłaby liczba  $\pi$ , inaczej mówiąc:  $\pi$  nie jest liczbą algebraiczną.

Mówimy dalej, że zbiór  $A \subset \mathbf{R}$  jest liniowo-wymiernie niezależny, jeżeli każdy skończony układ elementów tego zbioru ma tę własność. Na przykład zbiór wszystkich naturalnych potęg liczby  $\pi$  jest taki.

Rozpatrzmy teraz rodzinę  $\Omega$  podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych złożoną ze zbiorów liniowo-wymiernie niezależnych.

Jest ona częściowo uporządkowana przez relację zawierania, tzn.  $A < B \Leftrightarrow A \subset B$ . Sprawdźmy, że dla tej rodziny spełnione jest założenie lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech  $\{A_t\}_{t \in T}$  będzie rodziną liniowo uporządkowaną w  $\Omega$ . Rozpatrzmy zbiór  $A_0 = \bigcup_{t \in T} A_t$ ,

złożony ze wszystkich elementów wszystkich zbiorów  $A_t$ . Jeżeli  $x_1, \dots, x_n \in A_0$ , to dla pewnych  $t_1, \dots, t_n$  mamy  $x_1 \in A_{t_1}, x_2 \in A_{t_2}, \dots, x_n \in A_{t_n}$ . Ale rodzina  $\{A_t\}_{t \in T}$  jest liniowo uporządkowana, tzn. w układzie zbiorów  $A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}$  jest taki, który zawiera pozostałe. Niech będzie nim np.  $A_{t_n}$ ; wówczas  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A_{t_n}$ . Układ  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  jest liniowo-wymiernie niezależny w  $A_{t_n}$ , a więc także w  $A_0$ . Wykazaliśmy tym samym, że  $A_0 \subset \Omega$  i  $A_t \subset A_0$  dla każdego  $t \in T$ . A więc rodzina  $\{A_t\}_{t \in T}$  jest ograniczona z góry. Można więc do  $\Omega$  i relacji  $\subset$  stosować lemat Kuratowskiego-Zorna i stwierdzić, że

Istnieją zbiory  $\Delta \subset \mathbf{R}$  liniowo-wymiernie niezależne i maksymalne.

Mówimy, że zbiór  $X$  jest częściowo uporządkowany przez pewną relację  $<$  zachodzącą między jego elementami, jeśli relacja ta jest

- a) *zwrotna*, tj. dla każdego  $x \in X$  mamy  $x < x$ ,
- b) *przechodnia*, tj. jeśli  $x < y$  i  $y < z$ , to  $x < z$ ,
- c) „*nawpółprzeciwnosymetryczna*”, tj. jeśli  $x < y$  i  $y < x$ , to  $x = y$ .

Typowym przykładem takiej relacji jest relacja *inkluzji* (zawierania) zbiorów:

$$A < B \Leftrightarrow A \subset B.$$





**Rozwiązanie zadania M 308.**

Z równości  $(n+1)^3 + (n-1)^3 + 2(-n)^3 = 6n$  widzimy, że każda liczba podzielna przez 6 jest sumą czterech sześcianów liczb całkowitych. Równocześnie:  $6n+1 = 6n+1^3$ ,  $6n+2 = 6(n-1)+2^3$ ,  $6n+3 = 6(n-4)+3^3$ ,  $6n+4 = 6(n+2)+(-2)^3$ ,  $6n+5 = 6(n+1)+(-1)^3$  i  $6n = 6n+0^3$ , co kończy dowód.

Zastanowimy się teraz, co to znaczy, że taki zbiór  $\Delta$  jest maksymalny. Napiszmy  $\Delta = \{a_t\}_{t \in T}$ , gdzie  $T$  jest pewnym zbiorem wskaźników. Niech  $x \in \mathbf{R}$ , ale  $x \notin \Delta$ ; oczywiście zbiór  $\Delta \cup \{x\}$  zawiera  $\Delta$ . Nie może to być zbiór liniowo-wymiernie niezależny, bo jest większy od maksymalnego zbioru  $\Delta$  o tej własności. A zatem znajdują się elementy  $a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_k}$  i liczby wymierne  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k$ , nie wszystkie równe zero takie, że

$$w_0 x + w_1 a_{t_1} + \dots + w_k a_{t_k} = 0.$$

Gdyby  $w_0 = 0$ , to byłoby  $w_1 a_{t_1} + \dots + w_k a_{t_k} = 0$ , oraz  $\sum_{i=1}^k |w_i| \neq 0$ , a to nie jest możliwe, bo  $\Delta$  jest zbiorem liniowo-wymiernie niezależnym. Czyli  $w_0 \neq 0$ . Teraz możemy napisać:

$$x = -\left(\frac{w_1}{w_0} a_{t_1} + \frac{w_2}{w_0} a_{t_2} + \dots + \frac{w_k}{w_0} a_{t_k}\right),$$

wykazaliśmy zatem, że jeżeli  $x \in \mathbf{R}$  i  $x \notin \Delta$ , to istnieją liczby wymierne  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  i liczby rzeczywiste  $a_{t_1}, \dots, a_{t_k} \in \Delta$ , takie, że

$$(*) \quad x = \alpha_1 a_{t_1} + \alpha_2 a_{t_2} + \dots + \alpha_k a_{t_k};$$

możemy przyjąć, że liczby  $\alpha_i$  nie są zerami. Przypuśćmy teraz, że istnieją liczby wymierne  $\beta_1, \dots, \beta_n$  i liczby rzeczywiste  $a_{s_1}, \dots, a_{s_n} \in \Delta$  takie, że

$$(**) \quad x = \beta_1 a_{s_1} + \dots + \beta_n a_{s_n} \quad (\text{i jak poprzednio } \beta_i \neq 0).$$

Niech  $A = \{t_1, \dots, t_k\}$ ,  $B = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Odejmując stronami wzory (\*) i (\*\*) otrzymamy

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 a_{t_1} + \dots + \alpha_k a_{t_k}) - (\beta_1 a_{s_1} + \dots + \beta_n a_{s_n}) = \\ &= \sum_{t_i \in A-B} \alpha_i a_{t_i} + \sum_{u_j \in A \cap B} (\alpha_{u_j} - \beta_{u_j}) a_{u_j} - \sum_{s_k \in B-A} \beta_k a_{s_k}. \end{aligned}$$

Stąd  $A-B = \emptyset$ ,  $B-A = \emptyset$ , tzn.  $A = B$  oraz  $\alpha_i = \beta_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . A to wszystko razem znaczy, że każdą liczbę  $x \in \mathbf{R} - \Delta$  można zapisać jako kombinację liniową

$$x = \alpha_1 a_{t_1} + \dots + \alpha_k a_{t_k} \quad \text{oraz} \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k$$

i przedstawienie to jest jednoznaczne. Oczywiście (dlaczego?) tę własność mają i liczby należące do  $\Delta$ .

Ustalmy  $t_i \in T$ . Możemy określić funkcję  $\alpha_{t_i}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$  w następujący sposób: jeżeli  $x = \alpha_1 a_{t_1} + \dots + \alpha_k a_{t_k}$ , to

$$\begin{aligned} \alpha_{t_i}(x) &= \alpha_i & \text{gdy } t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \\ \alpha_{t_i}(x) &= 0 & \text{gdy } t_i \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}. \end{aligned}$$

Z tego określenia mamy

$$x = \sum_{t \in T} \alpha_t(x) a_t,$$

przy czym dla każdego  $x \in \mathbf{R}$  tylko skończona liczba  $\alpha_t(x)$  jest różna od zera, tj. sumowanie ma sens. Zauważmy jeszcze że, jak już wykazaliśmy, takie przedstawienie jest jedyne.

Jeżeli  $y = \sum_{t \in T} \alpha_t(y) a_t$ , to

$$x + y = \sum_{t \in T} (\alpha_t(x) + \alpha_t(y)) a_t = \sum_{t \in T} \alpha_t(x+y) a_t,$$

a więc dla każdego  $t \in T$  i dla dowolnych  $x, y \in \mathbf{R}$  mamy

$$\alpha_t(x+y) = \alpha_t(x) + \alpha_t(y).$$

Skonstruowaliśmy więc układ funkcji  $\alpha_t$  o następujących własnościach

- 1)  $\alpha_t: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$ ,  $t \in T$ ,
- 2)  $\alpha_t(x+y) = \alpha_t(x) + \alpha_t(y)$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ ,
- 3)  $x = \sum_{t \in T} \alpha_t(x) a_t$
- 4)  $\alpha_t(a_s) = \begin{cases} 0, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$

Układ  $\Delta = \{a_t\}_{t \in T}$  nazywa się *bazą Hamela* przestrzeni liczb rzeczywistych nad ciałem liczb wymiernych. Wykazanie istnienia takiej bazy stanowiło treść tej części artykułu.

**Rozwiązanie zadania F 121.**

Obserwowana jasność powierzchni świecącego przedmiotu jest proporcjonalna do wartości natężenia oświetlenia w miejscu jego obrazu na siatkówce. Większe natężenie oświetlenia — większa ilość fotonów padających na receptory — większe ich podrażnienie.

Natężenie oświetlenia z kolei to strumień świetlny padający na jednostkową powierzchnię. Powierzchnia obrazu, a gdy pominiemy absorpcję, także strumień świetlny są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Wynika stąd, że w zwykłych warunkach, kiedy atmosfera niewiele absorbuje, natężenie oświetlenia na siatkówce, a co za tym idzie, obserwowana jasność powierzchni od odległości nie zależą. Podczas mgły, na skutek absorpcji, strumień świetlny maleje szybciej niż powierzchnia obrazu i bardziej odległe żarówki są przyćmione.

Czytelnikowi proponujemy zastanowienie się nad następującymi pytaniami:

1. Jak jasność zależy od powierzchni świecącego przedmiotu?
2. W jakim celu stosuje się mleczne klosze do lamp?





3. Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją taką, że

$$(***) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla każdego } x, y.$$

Wówczas dla naturalnego  $n$

$$f(n) = f(1+1+\dots+1) = n \cdot f(1),$$

$$f(1) = f(1/m+1/m+\dots+1/m) = m \cdot f(1/m),$$

a stąd łatwo otrzymujemy, że

$$f(p/q) = p \cdot f(1/q).$$

Załóżmy teraz, że  $f$  jest funkcją ciągłą. Wówczas dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  istnieje ciąg  $w_n$  liczb wymiernych zbieżny do  $x$ , a więc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n f(1),$$

tzn.  $f(x) = ax$ , gdzie  $a = f(1)$ . Wynika stąd w szczególności, że zbiorem wartości każdej z tych funkcji (z wyjątkiem funkcji zerowej) jest cały zbiór liczb rzeczywistych, a stąd z kolei — że funkcje skonstruowane w poprzedniej części artykułu nie są ciągłe.

Założenie ciągłości funkcji  $f$  spełniającej (\*\*\*) może być zastąpione przez ciągłość tylko w zerze. Istotnie, jeżeli

$$x_n \rightarrow x_0, \text{ to } x_n - x_0 \rightarrow 0, \text{ a więc } f(x_n - x_0) \rightarrow 0, \text{ ale } f(x_n - x_0) = f(x_n) - f(x_0), \text{ tzn. } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

A oto jeszcze jedna własność funkcji  $f$  z (\*\*\*). Wykażemy, że jeśli są one nieciągłe, to są nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera; wskazuje to jak bardzo dziwne są te funkcje. Dla dowodu założymy, że  $f$  jest ograniczona w pewnym otoczeniu 0. Znaczy to, że istnieją liczby  $M > 0$  i  $\delta > 0$  takie, że dla każdego  $|x| < \delta$  mamy  $|f(x)| < M$ . Niech ciąg  $x_n$  będzie zbieżny do zera. Można wówczas znaleźć ciąg liczb wymiernych  $w_n \rightarrow \infty$  taki, że  $w_n x_n \rightarrow 0$  (dlaczego? to zadanie dla Czytelnika; rozwiązanie w numerze). A więc dla pewnego  $n_0$  mamy  $n > n_0 \Rightarrow |w_n x_n| < \delta$ , a stąd  $|f(x_n)| \leq M/w_n$  dla  $n > n_0$ . Ponieważ ciąg po prawej stronie tej równości jest zbieżny do zera, więc  $f(x_n) \rightarrow 0$ , tzn. funkcja  $f$  jest ciągła w 0 (zatem, jak widzieliśmy, i na całej prostej).

Nieciągłe rozwiązania równania funkcyjnego (\*\*\*) mają jeszcze inne „dziwne” własności, ale opisanie ich wykraczałoby poza ramy tego artykułu.

4. Na zakończenie spróbujemy odpowiedzieć na następujące pytanie. Jakie własności musi mieć zbiór  $V \subset \mathbb{R}$ , aby można było podstawić go na miejsce  $\mathcal{Q}$  w rozumowaniu w drugiej części artykułu?

Analizując dokładnie tamto rozumowanie stwierdzimy z łatwością, że wykorzystane zostały tylko następujące własności zbioru  $\mathcal{Q}$ :

- 1) Jeżeli  $w_1$  i  $w_2 \in \mathcal{Q}$ , to  $w_1 + w_2, w_1 - w_2, w_1 w_2 \in \mathcal{Q}$ , a przy  $w_2 \neq 0$  również  $w_1/w_2 \in \mathcal{Q}$ .
- 2)  $0 \in \mathcal{Q}, \quad 1 \in \mathcal{Q}$ .

Jeżeli zatem założymy, że zbiór  $V$  ma też powyższe własności, to całe tamto rozumowanie będzie mogło być powtórzone. Takie podzbiory  $V \subset \mathbb{R}$  nazywają się ciałami liczbowymi. Jeżeli  $V$  jest takim ciałem, to  $\mathcal{Q} \subset V$  (dlaczego?, dowód w numerze). Są też ciała różne od  $\mathcal{Q}$ , np. oznaczany symbolem  $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$  zbiór

$$V = \{x \in \mathbb{R}: \quad x = w_1 + w_2 \sqrt{2}, \quad w_1, w_2 \in \mathcal{Q}\};$$

sprawdzenie, że warunki 1), 2) są spełnione, jest natychmiastowe.

Możemy więc na zakończenie artykułu stwierdzić, że istnieją funkcje nieciągłe  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q}(\sqrt{2})$  takie, że

- 1  $f(x+y) = f(x) + f(y),$
- 2  $f(R) = \mathcal{Q}(\sqrt{2})$  dla każdego  $f$ .

Są to więc funkcje zupełnie różne od tych, które skonstruowaliśmy uprzednio, tam bowiem było  $f(\mathbb{R}) = \mathcal{Q}$ . Gdybyśmy wzięli inne ciało liczbowe  $V \subset \mathbb{R}$ , otrzymalibyśmy jeszcze inny zbiór takich funkcji, o równie dziwnych własnościach.



**Rozwiązanie zadania F 122.**

W przypadku gwiazd mamy do czynienia z zupełnie inną sytuacją niż w poprzednim zadaniu. Są to obiekty tak odległe, że ich obrazy „geometryczne” powstające na siatkówce są znikomo małe w porównaniu z obrazami powstającymi w wyniku dyfrakcji na otworze źrenicy. Wielkość obrazu dyfrakcyjnego nie zależy od odległości od gwiazdy i jest zdeterminowana przez średnicę otworu.

Strumień świetlny wpadający do oka, podobnie jak poprzednio, jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości, a zatem, przy pominięciu absorpcji, tak samo maleje z odległością jasność widoma gwiazdy.





W numerze 3 *Delty* z 1981 roku prof. Haman przedstawił mechanizm powstawania deszczu. Aby powstał deszcz, konieczne są jądra kondensacji, na których mogą się formować średniej wielkości krople chmurowe. Krople te po zamrożeniu tworzą cząstki lodu o własnościach umożliwiających powstanie wielkich kropli chmurowych. Te z kolei, wymiatając napotkane na swej drodze krople chmurowe, rosą do rozmiarów kropli deszczowych, które docierają do powierzchni Ziemi. Cały proces powstawania deszczu trwa ok. 30 minut. Spróbujmy wyjaśnić, jaki rodzaj chmur może dawać taki deszcz.

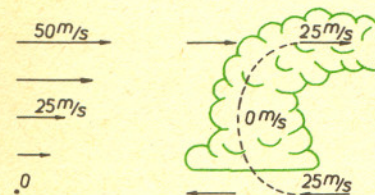
W ciepły, słoneczny dzień powietrze ogrzane w pobliżu powierzchni Ziemi zaczyna unosić się do góry, czemu towarzyszy powolne jego ochładzanie. Dzieje się tak dlatego, że w miarę wznoszenia ciśnienie otaczającego powietrza maleje i cieplejszy „bąbel” rozszerza się. Energia konieczna do tego rozszerzania może mieć swoje źródło jedynie w energii termicznej powietrza.

W konsekwencji powietrze osiąga stan nasycenia i rozpoczyna się proces kondensacji pary wodnej w krople chmurowe.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że w dużym cumulusie kropla przebywa wystarczająco długo, aby mogła urosnąć do rozmiarów kropli deszczowej. W rzeczywistości w zwykłych cumulusach rzadko powstaje deszcz. Jest to możliwe tylko dla chmur wyjątkowo wysokich. Chmury takie są jednak rozrywane przez wielkie różnice prędkości wiatru w dolnych i górnych warstwach atmosfery.

W niektóre dni można łatwo zaobserwować, że wiatr w pobliżu Ziemi wieje w przeciwnym kierunku niż wiatr unoszący niskie chmury, a te z kolei poruszają się w przeciwnym kierunku niż chmury wysokie. Warto też wspomnieć, że nawet szybkie samoloty często poruszają się w przeciwnym kierunku niż ten, w którym zmierzają, bo prędkość przeciwnego wiatru jest większa niż ich prędkość względem powietrza. Prędkość wiatru sięga czasami 50 m/s.

Rozważmy ten problem z punktu widzenia chmury. Zgodnie z tym, co napisał prof. Haman, musi być ona tak wysoka, by jej szczyt zawierał kryształki lodu, a podstawa sięgała prawie powierzchni Ziemi, gdzie znajduje się ogrzane Słońcem najbardziej wilgotne powietrze. Prędkość wiatru przy takiej różnicy wysokości może zmieniać się dość gwałtownie — powiedzmy o 50 m/s od podstawy do wierzchołka chmury. Załóżmy więc, że poruszamy się (tzn. chmura) z prędkością 25 m/s względem Ziemi. Powietrze u podstawy chmury będzie się wtedy poruszało w naszym kierunku z prędkością 25 m/s. Chcemy ponadto, by wznosiło się ono do górnych warstw chmury i włączało w poziomy ruch również z prędkością 25 m/s, ale w przeciwnym kierunku niż u podstawy. Powstaje wtedy przepływ przedstawiony na rys. 1. Zaczyna to przypominać *cumulonimbus*. Kropkowana linia to kontur chmury; rozpoczynający się od płaskiej podstawy, gdzie napływające od Ziemi ciepłe i wilgotne powietrze jest już wystarczająco oziębite, by stało się nasycone, a kończący rozległą warstwą wysokiej chmury lodowej po prawej stronie.



Rys. 1

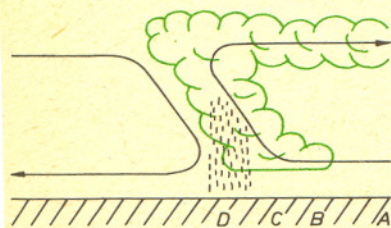
Jedną z niedoskonałości takiego modelu jest to, że wznoszące się powietrze musi odchylić górny wiatr. Inną natomiast to, że deszcz po powstaniu pada we wstępującym prądzie powietrza zmniejszając jego prędkość.

Przypuśćmy, że udoskonalimy nasz model wyginając przepływ powietrza tak, jak to pokazuje rys. 2. Krople deszczu mogą teraz wypadać z chmury poza prąd wstępujący, co dodatkowo ułatwia ruch powietrza ku górze. Ponadto spadające w chłodnym, nienasyconym powietrzu krople intensywnie parują i powietrze staje się jeszcze zimniejsze. Coraz szybsze spadanie zimnego powietrza zapobiega mieszanemu się z prądem wstępującym.

Tak wymodelowana symetryczna cyrkulacja ma jednak pewną wadę (zauważoną przez Franka Ludlama w 1960 roku) — nie może ona spełniać równań ruchu Newtona. Aby zrozumieć, dlaczego tak jest, musimy się odwołać do ważnego równania dynamiki płynów — równania Bernoulliego. Mówi ono, że energia kinetyczna cząstki płynu zmienia się na skutek działania ciśnienia lub z powodu zmiany jej energii potencjalnej tak, że

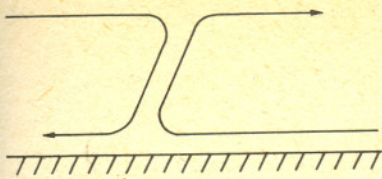
$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.}$$

Nie znamy ciśnienia wewnątrz naszej chmury, ale wiemy, że powietrze w prądzie wstępującym porusza się z przyspieszeniem do góry (rys. 2). Gdy dotrze ono do szczytu chmury, musi się niemal zatrzymać, gwałtownie zmienić kierunek i następnie ponownie nabrać prędkości w



Rys. 2





Rys. 3

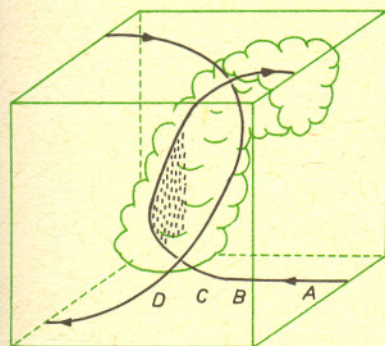
warstwie lodowej. Równanie Bernoulliego pokazuje, że byłoby to możliwe jedynie w przypadku dużego ciśnienia na szczycie chmury.

Z kolei powietrze nadchodzące z lewej strony musi zmienić swój kierunek, by włączyć się w prąd zstępujący. Nie zmienia ono przy tym wartości  $v^2$  ani  $g \cdot h$ , więc nie może przejść przez obszar wysokiego ciśnienia w pobliżu wierzchołka prądu wstępującego.

Można uniknąć tej trudności i uzyskać poprawny fizycznie model, jeśli przyjmiemy, że granica między prądem wstępującym i zstępującym jest nachylona w przeciwnym kierunku — tak jak na rysunku 3. Zmniejszy się jednak wtedy efektywność naszego modelu, bo deszcz nie będzie mógł już padać w chłodnym prądzie zstępującym.

Można temu zaradzić wprowadzając do naszego modelu jeszcze jedną poprawkę. W efekcie dostaniemy jeden z najładniejszych w przyrodzie mechanizmów.

Przesuńmy w tym celu prąd zstępujący w prawo tak, aby znalazł się poniżej wstępującego. Musimy teraz wprowadzić trzeci wymiar i zdeformować prądy w ten sposób, by górna linia prądu zstępującego leżała — powiedzmy — za kartką papieru, a dolna przed kartką i odwrotnie dla prądu wstępującego. Takí trójwymiarowy przepływ (rys. 4) spełnia wszystkie nasze wymagania i wygląda bardzo realistycznie.



Rys. 4

Warto zauważyć, że chmura, którą otrzymaliśmy, ma określoną orientację — lewo lub prawoskrętną; w zależności od tego czy górna linia prądu leży przed, czy za płaszczyzną kartki.

Obserwuje się, szczególnie w Stanach Zjednoczonych, że istotnie niektóre silne burze są prawoskrętne, a inne lewoskrętne. Orientacja burzy jest ważna nie tylko ze względu na kierunek jej ruchu, ale przede wszystkim dlatego, że pierwszy rodzaj łatwo inicjuje tornada, a drugi nie. Tornada mają dużą siłę niszczącą i wczesna wiadomość o ich powstaniu jest dla mieszkańców zagrożonego obszaru niezwykle istotna.

Spróbujmy teraz wyobrazić sobie burzę z rys. 4 obserwowaną na powierzchni Ziemi. Cała rzecz przesuwa się względem niej z lewa na prawo.

Najpierw obserwator znajdzie się w punkcie *A* i zauważy przed sobą delikatną chmurę lodową. Gdy osiągnie on punkt *B*, poczuje lekki wiatr wiejący w kierunku burzy, ponieważ prąd wstępujący pociąga za sobą powietrze z tego kierunku. Chmura lodowa stanie się przy tym grubsza i obserwator zauważy być może pasemka odrywających się od podstawy chmury cząstek.

W punkcie *C* (por. rys. 2) podstawa chmury gwałtownie obniża się, jest ciemna i wygląda bardzo niespokojnie. Ornitolog zauważy, że ptaki unosząc się w prądzie wstępującym polują na małe owady wciągane w ten prąd.

W punkcie *D* spada gwałtowny deszcz i natychmiast potem zaczyna wiać silny wiatr w kierunku ruchu burzy. Na rys. 2 widać, że względem burzy wiatr jest raczej słaby, co oznacza, że jest bardzo silny względem Ziemi.

Następnie nagle się przejaśnia i, jeśli wszystko to dzieje się wieczorem, Słońce świecące z lewej strony naszego rysunku może dać tęczę.

Znajomość mechanizmu wszystkich tych zjawisk może dać dużo satysfakcji, gdy np. obserwujemy, jak dym z kominów zmienia kierunek w miarę zbliżania się burzy i rozumiemy dlaczego tak się dzieje. Poza tym ktoś słuchający w sobotnie popołudnie w Anglii audycji sportowych dowiadując się, że wszystkie mecze krykieta na drodze burzy zostały odwołane, może wyrobić sobie zdanie o wektorze prędkości burzy.

Można także porównać obserwacje tego zjawiska przeprowadzone w różnych miejscach przez odpowiednio poinstruowanych znajomych. Jest to w rzeczywistości ciekawsze niż się wydaje na pierwszy rzut oka, gdyż elektrownie, wzgórza i obszary zabudowane mogą wpływać na zachowanie się takich burz.

A ile radości mamy, gdy przewidując przebieg burzy na podstawie własnych obserwacji przesiedzimy największą ulewę w kawiarni, by po dziesięciu minutach wyjść na zalaną słońcem ulicę.

#### Odpowiedzi na zadania z artykułu „Lemat Kuratowskiego — Zorna”

1. Wystarczy wziąć  $w_n \geq 1/\sqrt{|x_n|}$ .
2. Niech  $V$  będzie dowolnym ciałem liczbowym. Liczby 0 i 1 należą do  $V$ . Łatwo przekonać się (indukcja), że w wymienionym w tekście warunku 1), który ma spełniać każde ciało, można brać sumy dowolnej skończonej liczby składników. Zatem każda liczba naturalna, będąca sumą jedynek, należy do  $V$ . Ponieważ  $-n = 0 - n$ , więc wszystkie liczby całkowite ujemne też należą do  $V$ ; wreszcie jeżeli  $w = p/q$  jest liczbą wymierną, to z ostatniej zależności w warunku 1) w artykule mamy  $w = p/q \in V$ . Każda liczba wymierna należy do  $V$ , czyli  $Q \subset V$ .



# O lemacie Kuratowskiego-Zorna od innej strony

Dr Andrzej PELC

W artykule „Lemat Kuratowskiego-Zorna” Czytelnik zapoznał się z pewnymi dziwnymi funkcjami. Obecnie zastanowimy się, na czym owa dziwność polega. Jak wiemy, rozważane funkcje miały różne „nieprzyjemne” własności: były nieciągłe i nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera. Nie o tym jednak chcemy teraz mówić. Szczególny charakter tych i podobnych obiektów matematycznych wynika ze sposobu ich określenia. Przyjrzyjmy się uważnie, jak zostały „powołane do życia” funkcje  $\alpha$ , z poprzedniego artykułu. Najpierw, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna udowodniono istnienie bazy Hamela  $\Delta$ , a potem, stosunkowo już prosto (standardowa metoda algebry liniowej) zdefiniowano funkcje  $\alpha$ . Tak więc trudność sprowadza się do sposobu „produkcji” bazy Hamela. Została ona wprowadzona jako element maksymalny w pewnym zbiorze częściowo uporządkowanym. Lemat Kuratowskiego-Zorna orzeka, że przy pewnych – spełnionych w rozważanej sytuacji – założeniach taki element maksymalny istnieje. Reasumując: *wykazaliśmy istnienie bazy Hamela, ale ... nie skonstruowaliśmy jej.*

Bardzo trudno jest określić precyzyjnie, co się rozumie w matematyce (może poza geometrią elementarną) przez słowo „skonstruować”. Sami matematycy nie są co do tego zgodni. Chodzi jednak ogólnie o to, by mając do wyboru wiele możliwości, nie ograniczać się do stwierdzenia, że wybieramy jedną z nich, lecz wskazać, którą.

O bazach Hamela wiemy, że istnieją, lecz nie potrafimy żadnej z nich zbudować w tym sensie, by po zakończeniu konstrukcji umieć odpowiedzieć na każde pytanie typu: czy  $\sqrt{2}$  należy do tej bazy? Czy  $\pi$  należy do tej bazy? itd. Można udowodnić istnienie bazy Hamela, dla której odpowiedź na skończoną liczbę *z góry zadanych* pytań takich jak powyżej będzie znana. Inne pytania pozostaną jednak nierozstrzygnięte.

W tym więc rozumieniu niekonstruktywny dowód istnienia jakiegoś obiektu przypomina sytuację człowieka, który zgubił się w labiryncie wiedząc, że jest z niego wyjście (no, bo jakoś tam wszedł). Nic mu to jednak nie pomoże, gdy stanie przed kolejnym dylematem, który z trzech korytarzy na kolejnym skrzyżowaniu ma wybrać. *Konstruktywnym* dowodem istnienia wyjścia z labiryntu byłoby dla błądzącego wskazanie drogi (nić, którą rozwijała Ariadna świadczy o jej upodobaniu do metod konstruktywnych, prawda?).

Dowody wykorzystujące lemat Kuratowskiego-Zorna czy równoważny mu *pewnik wyboru* (zob. np. Delta 4/1981) noszą znanie „niekonstruktywizmu”. Jak niebezpieczne może być beztrudnie zadowalanie się istnieniem obiektów, o których naturze niewiele wiemy, świadczy następujący paradoks Banacha-Tarskiego: trójwymiarową kulę można rozłożyć na skończoną liczbę kawałków, które po odpowiednich ruchach dadzą dwie kule o tym samym promieniu co kula wyjściowa. Coś nie tak, a jednak to prawda. Po prostu kawałki te nie są określone „konstruktywnie” — dowodzi się jedynie ich istnienia.

Pomimo tego typu paradoksalnych konsekwencji metody niekonstruktywne, a wśród nich rozumowania oparte na lemacie Kuratowskiego-Zorna, są obecnie w powszechnym użyciu w różnych dziedzinach matematyki. Stanowią one po prostu potężne środki dowodowe, z których szkoda rezygnować. Warto jednak zdawać sobie sprawę z tego, że obiekty „powołane do życia” niekonstruktywnie mogą mieć — i często mają — nieoczekiwane, paradoksalne własności.

Najczęściej podawanym przykładem rozumowania niekonstruktywnego jest następujące rozwiązanie zadania: czy istnieją liczby niewymierne  $a$  i  $b$  takie, że  $a^b$  jest liczbą wymierną?

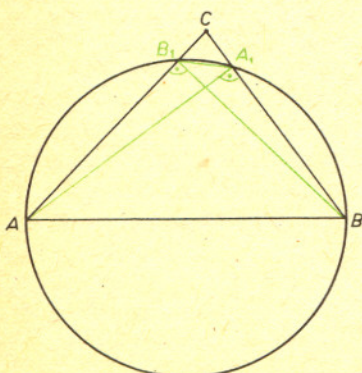
Rozważmy liczbę  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Jeżeli jest ona wymierna, to poszukiwanymi liczbami są  $a = b = \sqrt{2}$ . Jeżeli zaś jest to liczba niewymierna, to możemy przyjąć  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$ , bowiem

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Dość wyrafinowanymi metodami da się rozstrzygnąć, która z tych ewentualności ma miejsce (mianowicie druga), co umożliwia przerobienie łatwego niekonstruktywnego rozumowania na konstruktywne i trudniejsze. Warto jednak wiedzieć, że zadanie da się rozwiązać i prosto, i konstruktywnie. Oto bowiem

$$\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3,$$

a  $\log_2 9$  nie jest liczbą wymierną (dlaczego?).



## Rozwiązanie zadania M 309.

Niech najdłuższym bokiem  $\triangle ABC$  będzie  $AB$ . Jeżeli  $\angle C \geq 90^\circ$ , to do pokrycia  $\triangle ABC$  wystarczy jedno koło o średnicy  $AB$ . Gdy teraz trójkąt jest ostrokątny, koło o średnicy  $AB$  pokrywa czworokąt  $AB_1A_1B$ , gdzie  $A_1, B_1$  są spodkami wysokości poprowadzonych z  $A$  i  $B$ . Z trójkątów  $AA_1C$  i  $BB_1C$  mamy  $A_1C = b \cos C$  i  $B_1C = a \cos C$  i wobec tego trójkąt  $A_1B_1C$  jest podobny do  $\triangle ABC$  w stosunku  $\cos C$ . Średnicą koła opisanego na  $\triangle A_1B_1C$  jest więc  $2R = \frac{A_1B_1}{\sin C} = \frac{c \cos C}{\sin C} = \operatorname{ctg} C$  i ponieważ  $C$  jest największym kątem trójkąta  $A_1B_1C$ , więc  $\angle C \geq 60^\circ$  i  $\operatorname{ctg} C \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ . Trójkąt  $A_1B_1C$  możemy więc pokryć kołem o średnicy 1, a cały trójkąt  $ABC$  — dwoma kołami.



# Co to są dyslokacje? Modele strukturalne

Dr Andrzej PAWEŁEK

We współczesnej fizyce kryształów coraz szersze zainteresowanie budzi natura niedoskonałości występujących w rzeczywistej strukturze kryształu. Fizyka kryształów — w tym również fizyka metali — stanowiąca najistotniejszą część fizyki ciała stałego najchętniej zajmuje się kryształem doskonałym. I bardzo dobrze, gdyż daje to wspaniałe rezultaty w postaci coraz lepszego tłumaczenia natury zjawisk przewodnictwa elektrycznego i cieplnego metali, nie mówiąc już o, również bardzo precyzyjnym, wyjaśnieniu istoty półprzewodnictwa i zjawisk magnetycznych.

Ale czy własności elektryczne, ciepłe i magnetyczne to już wszystkie najistotniejsze własności fizyczne metali? Przecież o jakości garnka z blachy, żyłki ze stali czy też wielu, wielu innych konstrukcji z metalu (np. karoserii samochodu, obudowy samolotu czy nawet rakiety kosmicznej) decydują przede wszystkim własności mechaniczne metalu. Nie wnikając w szczegółowe definicje wymienimy kilka najważniejszych takich własności: wytrzymałość na rozciąganie, granica plastyczności, plastyczność, odporność na pękanie oraz twardość. Wytrzymałość na rozciąganie wiąże się z tym, że próbki z różnych metali ulegają zerwaniu przy różnych wartościach sił rozciągających. Granica plastyczności mówi o wartości siły rozciągającej, przy której próbka metalu ze stanu sprężystego (odwracalnego) przechodzi w stan odkształcenia plastycznego (nieodwracalnego). Plastyczność jest związana z wydłużeniem próbek aż do jej zerwania. Im metal jest plastyczniejszy, tym łatwiej i w większym stopniu można go wydłużać. Jeśli chodzi o odporność na pękanie i twardość, to wystarczy nam intuicyjne rozumienie tych pojęć.

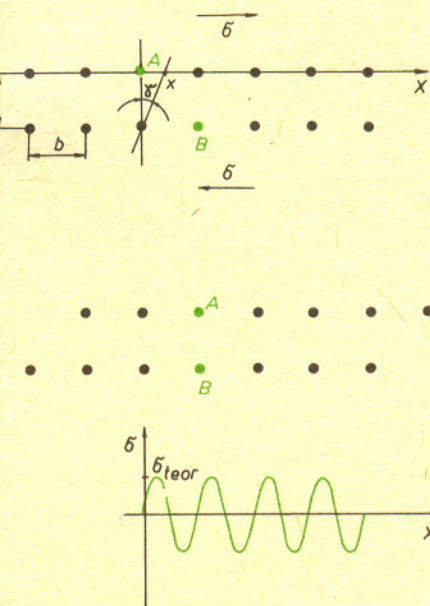
Wracając do garnka i żyłki, nie zawahajmy się powiedzieć, że są to kryształy; może nie w dosłownym znaczeniu i na pewno nie takie idealne, jakimi najczęściej zajmuje się fizyka ciała stałego. W rzeczywistości oba te przedmioty mają budowę polikrystaliczną, tzn. stanowią zlepek mikroskopijnych kryształków o różnie zorientowanych względem siebie (najczęściej pod kątem od kilku do kilkunastu stopni) płaszczyznach krystalograficznych tego samego typu. Te maleńkie obszary mają objętość rzędu od  $10^{-15}$  cm<sup>3</sup> do  $10^{-18}$  cm<sup>3</sup> i noszą nazwę kryształitów lub ziarn. Oddzielone są od siebie powierzchniami rozdziału zwanymi granicami ziarn.

W odróżnieniu od metali o budowie polikrystalicznej możemy w warunkach laboratoryjnych uzyskiwać metale o budowie monokrystalicznej. W zasadzie cechują się one tym, że w całej otrzymanej próbce płaszczyzn krystalograficzne zachowują swą orientację. Ale tylko w zasadzie, gdyż i w monokrystalach można wyodrębnić tzw. bloki — obszary o znacznie większej już objętości rzędu  $10^{-12}$  cm<sup>3</sup> — w których różnice orientacji płaszczyzn krystalograficznych są jednak nie większe niż jeden lub (rzadziej) dwa stopnie.

Struktura kryształu rzeczywistego (ziarna, bloku) daleko odbiega od idealnej. Jego sieć krystalograficzna nie jest doskonała, lecz ma defekty. Podstawowym defektem struktury kryształu rzeczywistego jest właśnie dyslokacja — temat naszych dalszych rozważań. Zanim dokładniej określimy jej naturę i własności, prześledzmy, jak doszło do wprowadzenia pojęcia dyslokacji do nauki o kryształach.

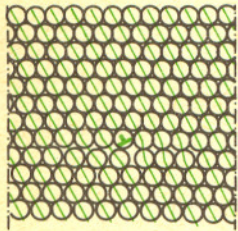
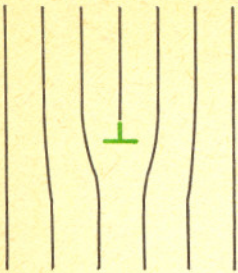
Otóż, jak pamiętamy, podstawową własnością mechaniczną metalu jest jego granica plastyczności, czyli taka wartość siły, a ściślej naprężenia (siły działającej na powierzchnię przekroju rozciąganej próbki), przy którym metal ze stanu sprężystego przechodzi w stan plastyczny. I tu następuje rzecz niewiarygodna. Fizyka idealnego kryształu nie jest w stanie przewidzieć wartości tego naprężenia! Obliczenia teoretyczne zastosowane do idealnego kryształu dają bowiem wartość w najlepszym przypadku rzędu od  $10^3 \div 10^5$  razy większą niż wartość zmierzona doświadczalnie. Tak duża rozbieżność inspirowała zwykle powstawanie nowych teorii. I tak też się stało. W latach trzydziestych naszego stulecia kilku uczonych (G. J. Taylor, E. Orowan i M. Polanyi w 1934 roku) wysunęło postulat istnienia defektu wewnątrz sieci krystalicznej. Defekt ten później nazwano dyslokacją, a burzliwie rozwijającą się od tego czasu gałąź wiedzy — teorią dyslokacji.

Jak więc doszło do wspomnianej rozbieżności? Aby odpowiedzieć na to pytanie, prześledzimy uproszczone rozważania teoretyczne ilustrujące proces zapoczątkowujący odkształcenie plastyczne kryształu idealnego.

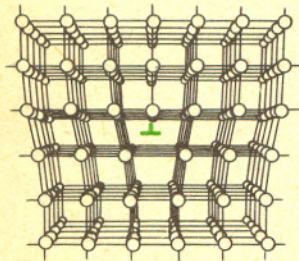
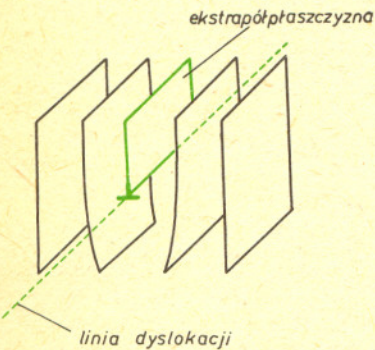


Rys. 1

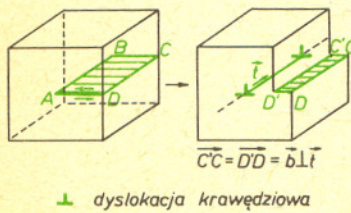




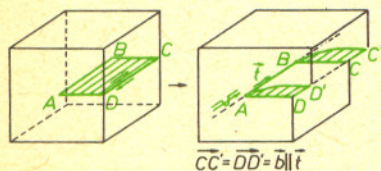
Rys. 2



Rys. 3



⊥ dyslokacja krawędziowa



↗ dyslokacja śrubowa

Rys. 4

Najprościej będzie rozważyć jego dwie dowolne, ale sąsiadujące ze sobą płaszczyzny krystalograficzne. Na rysunku 1 widzimy ślad przecięcia takich płaszczyzn atomowych z płaszczyzną rysunku. Odształcić plastycznie kryształ doskonały znaczy przesunąć względem siebie obie płaszczyzny tak, aby np. atom *A* zajął pozycję nad atomem *B*. Początkowo atomy w obu płaszczyznach znajdują się w położeniach równowagi. Aby dokonać przesunięcia o wektor *b*, należy użyć siły działającej stycznie w tych płaszczyznach; oznaczmy ją przez  $F_{teor}$ . Naprężenie styczne, czyli siłę  $F_{teor}$  działającą na powierzchnię jednostkową płaszczyzny oznaczmy przez  $\sigma_{teor}$ . Jasne jest, że po każdym takim przesunięciu o wektor *b*, atomy obu płaszczyzn znowu będą się znajdowały w położeniach równowagi. Stąd wniosek, że wzdłuż każdej płaszczyzny przy względnym ich przesunięciu o *x* (atomy przemieszczają się tutaj jak sztywno połączone kuleczki) naprężenie zmienia się w sposób periodyczny. Najprościej przyjąć, że jest to funkcja sinusoidalna o postaci

$$\sigma = \sigma_{teor} \sin(2\pi x/b)$$

gdzie, jak widzimy,  $\sigma_{teor}$  jest maksymalnym naprężeniem, koniecznym do sztywnego, trwałego przesunięcia płaszczyzn względem siebie o wektor *b*. Aby wyznaczyć  $\sigma_{teor}$ , zauważmy z drugiej strony, że do rozważanego przez nas kryształu możemy zastosować prawo Hooke'a:

$$\sigma = \mu\gamma,$$

gdzie  $\mu$  jest stałą charakteryzującą własności sprężyste danego metalu, zwaną modułem ścinania. Wielkość  $\gamma$  jest natomiast odkształceniem sprężystym, jakiego doznaje kryształ w wyniku ścicia – przesunięcia względnego płaszczyzn na odległość *x* – które jest spowodowane działaniem naprężenia  $\sigma$ . Jego miarą jest po prostu kąt  $\gamma$ . Dla małych odkształceń, czyli dla małych  $\gamma$ , ponieważ  $\gamma \simeq \text{tg } \gamma$  zachodzi  $\gamma = x/d$ , a więc:

$$\sigma = \mu x/d.$$

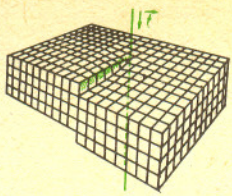
Ponieważ dla małych *x* również  $\sin(2\pi x/b) \simeq 2\pi x/b$ , więc z porównania obu wzorów na  $\sigma$  oraz przy oczywistym przyjęciu, że  $b \simeq d$  otrzymujemy ostatecznie

$$\sigma_{teor} = \mu/2\pi.$$

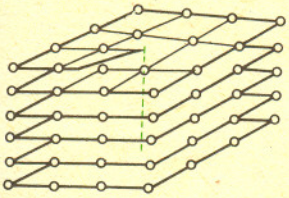
Zmierzone doświadczalnie wartości naprężeń  $\sigma_{dośw}$ , przy których kryształy zaczynają się odkształcać plastycznie, są natomiast co najwyżej rzędu od  $10^{-5} \mu$  do  $10^{-3} \mu$ . Na przykład dla bardzo czystego kryształu miedzi  $\mu = 4600 \text{ kG/mm}^2$ ,  $\sigma_{teor} = 760 \text{ kG/mm}^2$ , a  $\sigma_{dośw} = 20 \text{ G/mm}^2$ ! Tak więc  $\sigma_{teor}/\sigma_{dośw} \simeq 4 \cdot 10^4$ . Wprowadzone przez teoretyków lat trzydziestych pojęcie dyslokacji całkowicie usuwa tę kolosalną rozbieżność.

Aby przekonać się na czym polega — w porównaniu z kryształem doskonałym — łatwość odkształcenia plastycznego kryształu zawierającego dyslokację, przejdźmy do opisu modelu dyslokacji. Klasycznym już niemal przykładem jest dwuwymiarowy model dyslokacji w warstwie (sieci) baniek mydlanych, pokazany na rysunku 2. Można by powiedzieć, że dyslokacja (oznaczona schematycznie symbolem  $\perp$ ) powstaje przez „włożenie” dodatkowego szeregu atomów pomiędzy równoległe sąsiadujące ze sobą linie atomów sieci doskonałej. Tak włożone atomy leżą na linii urwijącej się w punkcie oznaczonym symbolem  $\perp$ . Teraz już łatwo sobie wyobrazić, że dla utworzenia dyslokacji w sieci trójwymiarowej kryształu należy „włożyć” dodatkową półpłaszczyznę atomów, zwaną ekstrapółpłaszczyzną, pomiędzy dwie równoległe, sąsiadujące ze sobą płaszczyzny atomowe w sieci idealnego kryształu. Model takiej dyslokacji pokazany jest na rysunku 3. Krawędź ekstrapółpłaszczyzny nazywamy linią dyslokacji. Taki model strukturalny przedstawia więc dyslokację prostoliniową, nieskończoną. Dyslokację można utworzyć również w inny sposób, jak się później okaże, przydatniejszy niż poprzedni. Mianowicie, weźmy kryształ w kształcie np. kostki sześcienniej i dokonajmy myślowego cięcia wzdłuż płaszczyzny *ABCD*, tak, aby krawędź *AB* przechodziła przy tym przez środki ścian. Pokazuje to rysunek 4, na którym dla uproszczenia pominięto węzły sieci i atomy. Fizycznie takie cięcie odpowiada chwilowemu wyłączeniu wiązań między atomami sąsiadujących płaszczyzn atomowych po obu stronach cięcia. Możemy teraz dokonać przesunięcia w kierunku prostopadłym do *AB* o pewien wektor *b*, warstw (płaszczyzn atomowych) po stronie górnej względem warstw po stronie dolnej cięcia. Po sklejeniu cięcia (ponownym włączeniu wiązań między atomami) otrzymamy właśnie dyslokację, której linia pokrywa się z krawędzią *AB* cięcia. Sposób rozumowania nie ulegnie zmianie, jeśli kryształ będzie nieskończony; wówczas krawędź *AB* przejdzie w linię prostą. Wektor przesunięcia *b* nazywa się wektorem Burgersa dyslokacji. Jeżeli wektor jednostkowy wzdłuż linii dyslokacji oznaczmy przez *t*, wówczas iloczyn skalarny  $b \cdot t = 0$ . Dyslokacja, dla której wektor Burgersa *b* jest prostopadły do jej linii, nazywa się dyslokacją krawędziową. Oczywiście możemy również utworzyć dyslokację, dla której iloczyn wektorowy  $b \times t = 0$ , czyli dyslokację o wektorze Burgersa *b* równoległym do jej linii. W tym celu przesunięcia o wektor *b* należy dokonać w kierunku krawędzi *AB*.



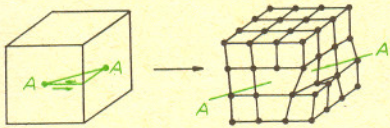


Wracając do modelu z węzłami i atomami sieci możemy dyslokację śrubową, bo tak się ona nazywa, wyobrazić sobie tak, jak pokazuje to rysunek 5. Nasuwa się tu oryginalna analogia układu płaszczyzn atomowych skręconych wokół dyslokacji śrubowej do płaszczyzny podłogi w nowoczesnym, wielopiętrowym garażu. Jedną pochylnią w takim garażu można dojechać na dach, który znajduje się często o wiele pięter powyżej poziomu ulicy. Całkiem podobnie, zataczając linię śrubową wokół linii dyslokacji można przejść z jednej strony kryształu na drugą bez opuszczania płaszczyzny atomowej. W kryształach doskonałych jest to niemożliwe. Modele z rysunku 5 przedstawiają dyslokację śrubową również jako prostoliniową, nieskończoną.



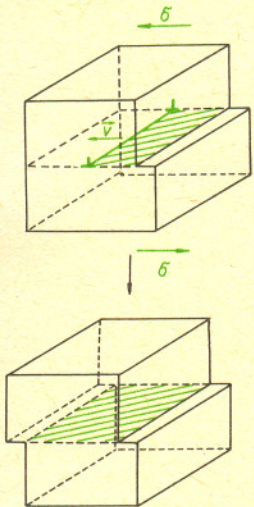
Rozważmy jeszcze sytuację, gdy  $b \cdot t \neq 0$  i  $b \times t \neq 0$ . Wtedy wektor przesunięcia  $b$  tworzy z wektorem  $t$  równoległym do krawędzi cięcia kąt różny od  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  lub  $180^\circ$ . Dyslokacja taka nosi nazwę dyslokacji mieszanej. Jej model przedstawia rysunek 6. Łatwo zauważyć, że krawędź cięcia  $AA$ , pokrywająca się z linią dyslokacji, tworzy kąt  $45^\circ$  z kierunkiem przesunięcia warstw.

Rys. 5



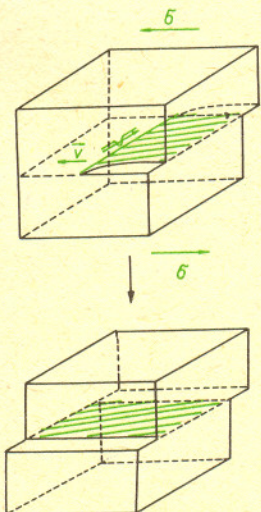
Prześledźmy teraz jak teoria, wzbogacona o pojęcie dyslokacji, prowadzi do usunięcia rozbieżności, o której poprzednio była mowa. W tym celu rozważmy kryształ rzeczywisty. Niech dla uproszczenia będzie to sześcian zawierający jedną dyslokację np. krawędziową. Niech na ten kryształ działa naprężenie zewnętrzne, styczne do płaszczyzny cięcia. Okazuje się, że dyslokacja pod wpływem odpowiedniego naprężenia zewnętrznego może się poruszać! Tak jest, może się poruszać, tzn. zmieniać się może położenie linii dyslokacji. W rezultacie tego ruchu cała półpłaszczyzna może „wyjść” na powierzchnię kryształu tworząc na niej uskok. A więc kryształ zostaje trwale, plastycznie zdeformowany. Rysunek 7 ilustruje efekty wyjścia dyslokacji krawędziowej i śrubowej na powierzchnię kryształu. Staje się oczywiste, że wartość naprężenia potrzebnego do uruchomienia dyslokacji odpowiadać będzie granicy plastyczności rozważanego przez nas kryształu.

Rys. 6



Zauważmy, że dyslokacja krawędziowa porusza się w tej samej płaszczyźnie, w której dokonaliśmy cięcia. Taka płaszczyzna nazywa się płaszczyzną poślizgu dyslokacji. Rzeczywiście nazwa jest trafna, gdyż w przeciwieństwie do sztywnego przemieszczenia płaszczyzn atomowych w kryształach doskonałych, tutaj — wskutek istnienia dyslokacji — płaszczyzny atomowe jak gdyby „ślizgają się” jedna po drugiej. Taki ruch poślizgowy płaszczyzn atomowych może się odbywać już przy naprężeniach — jak to dalej pokażemy — kilka rzędów wielkości mniejszych od naprężeń potrzebnych do sztywnego przesunięcia tych płaszczyzn.

Jak każdy model, rozważane tutaj modele defektów liniowych są nieco wyidealizowane. Czyż nie nasuwa się paradoksalnie brzmiące stwierdzenie, że są to modele doskonałych niedoskonałości!? Idealizacja polega na tym, że rozważane dotychczas dyslokacje są prostoliniowe, nieskończone. W oparciu o model wyidealizowanej dyslokacji trudno jest jeszcze przewidzieć granicę plastyczności kryształu.

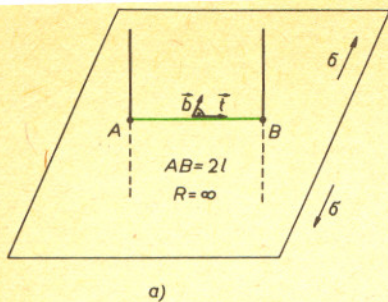


W rzeczywistości nawet bardzo długie linie dyslokacji nie są prostoliniowe, lecz wykazują tendencję do zwiwania się w linie spiralne, tworząc nieregularne tzw. sploty, lub gdy linie są znacznie krótsze, mogą zachować w zasadzie charakter prostoliniowy tworząc mniej lub bardziej regularne trójwymiarowe siatki. Jest to spowodowane między innymi tym, że linie dyslokacji w kryształach nie mogą się nagle urywać wewnątrz kryształu. Mogą tworzyć linie zamknięte, lub wychodzić na powierzchnię rozdziału (jak w przypadku kryształitów) bądź na powierzchnię swobodną kryształu. Uzasadnienie tego faktu pozostawiamy wnikliwości Czytelnika.

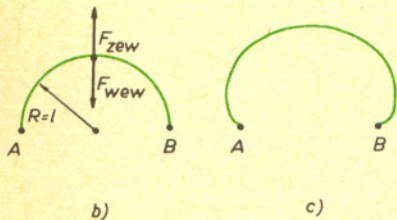
Czy dyslokacje rzeczywiście istnieją w kryształach? A w ogóle jak stwierdzić doświadczalnie, że istnieją te twory wymyślone przez teoretyków? Ponad ćwierć wieku temu, bo dopiero w połowie lat pięćdziesiątych przewidywania teoretyczne zostały bezspornie potwierdzone w praktyce. Cud techniki lat pięćdziesiątych — mikroskop elektronowy — stworzył możliwości powszechnych niemal obserwacji dyslokacji. Oczywiście obserwacje takie nie są proste. Po pierwsze, wielkiej precyzji wymaga technika przygotowania preparatu do obserwacji, a po drugie, przy interpretacji uzyskanych obrazów musimy korzystać z wyników teorii dyfrakcji fal elektronowych na defektach sieci krystalicznej (fale elektronowe odgrywają w mikroskopie elektronowym identyczną rolę jak promienie świetlne w mikroskopie optycznym).

Rys. 7

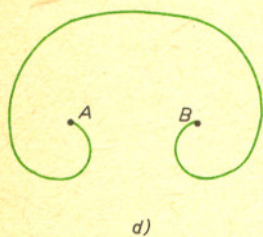




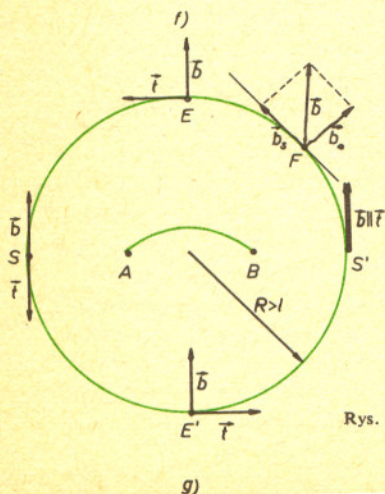
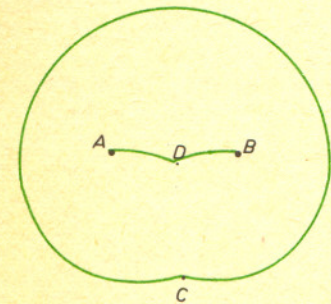
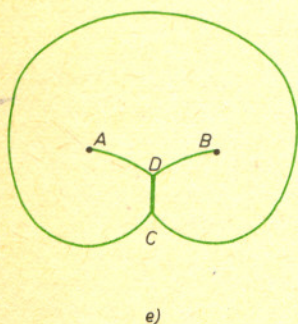
Skąd się biorą dyslokacje w kryształach? Po prostu są one w kryształach od momentu jego „narodzin”, czyli od wyhodowania w sposób sztuczny w warunkach laboratoryjnych lub od naturalnego powstania w procesie krzepnięcia skorupy ziemskiej. Sztucznie wyhodowane kryształy metali, nawet przy zastosowaniu najdoskonalszych metod współczesnej techniki, mają gęstość dyslokacji — czyli całkowitą długość linii dyslokacji w jednostce objętości — co najmniej rzędu  $10^2 \text{ cm/cm}^3$ . Ho, ho takie kryształy to już prawie doskonałe. Przeciętny metal o budowie polikrystalicznej po niewielkim odkształceniu plastycznym ma gęstość dyslokacji rzędu  $10^{10} \div 10^{12} \text{ cm/cm}^3$  (kilkadziesiąt tysięcy kilometrów linii dyslokacji w  $1 \text{ cm}^3$  próbki!).



W warunkach ziemskich nie jesteśmy w stanie wyhodować kryształu niemal bezdyslokacyjnego, gdyż pole grawitacyjne sprzyja powstawaniu prądów konwekcyjnych w krystalizującej cieczy, wskutek czego powstają zaburzenia prowadzące do wytworzenia się dyslokacji, z wyjątkiem może tylko bardzo cieniutkich i długich kryształów nitkowych zwanych inaczej wiskersami lub wąsami. Otrzymanie kryształu nitkowego wymaga jednak bardzo wysokiej precyzji. Prowadzone są też próby hodowania kryształów w stanie nieważkości.



Wróćmy jednak do powstawania dyslokacji w kryształach. Oprócz tych od „urodzenia” w czasie trwania procesu odkształcenia plastycznego powstają ciągle nowe. Na przykład monokryształ miedzi o początkowo niskiej gęstości dyslokacji (około  $10^3 \text{ cm/cm}^3$ ) przy przejściu w stan plastyczny ma gęstość ponad  $10^6 \text{ cm/cm}^3$ . Trzy rzędy wielkości różnicy. Wniosek stąd, że muszą znajdować się w kryształach bardzo obfite źródła dyslokacji. I rzeczywiście tak jest. Klasycznym przykładem takiego źródła jest tzw. źródło Franka-Reada. Jak pamiętamy, linie dyslokacji (tych „urodzonych”) mogą tworzyć przestrzenne siatki. Każde ogniwo siatki może, jak się okazuje, być takim źródłem. Przy odpowiednim naprężeniu zewnętrznym może ono zadziałać produkując określoną liczbę kołowych linii dyslokacji zwanych pętlami. Wyobraźmy sobie, jak to ilustruje rysunek 8a, że taki segment linii dyslokacyjnej krawędziowej o długości  $AB = 2l$  leży w płaszczyźnie rysunku, która równocześnie jest płaszczyzną poślizgu. Punkty A i B są węzłami przestrzennej siatki dyslokacji. Niech teraz w płaszczyźnie poślizgu działa naprężenie  $\sigma$ . Co się będzie działo z naszym segmentem? Będzie się on coraz bardziej wyginał. Poszczególne rysunki (od 8b do 8g) ilustrują kolejne fazy działania źródła. Wzrost pętli odbywa się na takiej samej zasadzie, jak powiększanie się nadmuchiwanej banieczki mydlanej. Tam błonka podlega działaniu sił napięcia powierzchniowego, tutaj mówimy, że wyginanie linii dyslokacji zachodzi kosztem pokonywania sił napięcia liniowego dyslokacji. W końcowej fazie wzrostu pętli jej fragmenty stykają się na odcinku CD i jako „kawałki” dyslokacji o przeciwnych znakach ulegają anihilacji, czyli po prostu znikają. Pętla się zamyka, pozostawiając „resztkę” pomiędzy punktami zakotwiczenia A i B. Jeżeli naprężenie zewnętrzne działa dalej, wówczas „resztkę” — czyli nowy segment siatki — może znowu dać pętlę itd. itd. Źródło działa wysyłając kolejne pętle dyslokacji.

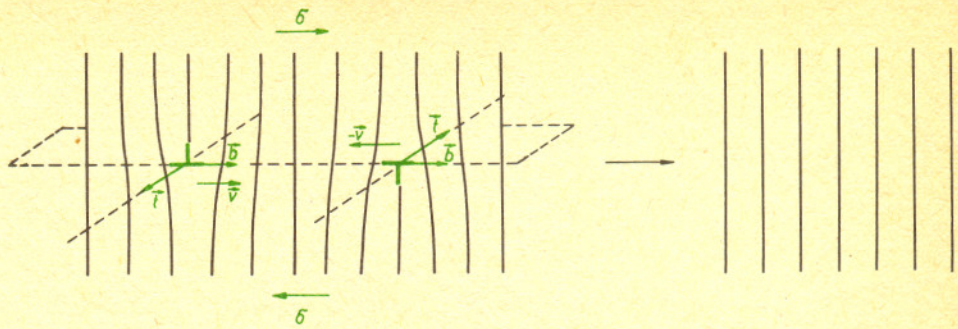


Wspomnieliśmy o znaku dyslokacji. Tak, są dyslokacje dodatnie i ujemne. Dodatnia będzie się poruszać zgodnie z kierunkiem naprężenia  $\sigma$ , ujemna w kierunku przeciwnym. Jak elektron i dziura w polu elektrycznym! Przyjrzyjmy się dokładniej rysunkowi 8g. Możemy zauważyć na czym polega różnica między dyslokacjami o znakach przeciwnych. Górna część pętli rozszerza się w kierunku zgodnym z  $\sigma$ , jest to więc dyslokacja dodatnia. Możemy jej przypisać znak sinusa kąta między wektorami  $b$  i  $t$ . Umawiamy się przy tym, że zwrot wektora jednostkowego  $t$ , stycznego do linii dyslokacji, wybieramy na przykład zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Natomiast dolna część pętli porusza się w kierunku przeciwnym do  $\sigma$ , jest to więc dyslokacja ujemna i znak  $\sin(b, t)$  jest również ujemny. Dla dyslokacji śrubowej iloczyn wektorowy  $b \times t$  jest zawsze równy zero. Jej znak określamy jako znak iloczynu skalarnego  $b \cdot t$ . Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że tylko punkty E i E' pętli mają charakter dyslokacji czysto krawędziowej, zaś punkty S i S' czysto śrubowej. W każdym innym punkcie pętla ma charakter dyslokacji mieszanej, gdyż wektor Burgersa  $b$ , np. w punkcie F, można zawsze rozłożyć na dwie różne od zera składowe: krawędziową  $b_e$  i śrubową  $b_s$ .

Stwierdzenie, że na odcinku CD ma miejsce anihilacja dyslokacji, może budzić wątpliwości. Aby przekonać Czytelnika, że anihilacja rzeczywiście zachodzi, wystarczy spojrzeć na rysunek 9. Dwie przeciwne dyslokacje (dla uproszczenia krawędziowe) poruszają się ku sobie. Co się stanie w momencie ich spotkania? Ekstrapłaszczyzna górna połączy się z ekstrapłaszczyzną dolną. Struktura kryształu będzie znowu idealna. Obie dyslokacje znikną, ulegną anihilacji.

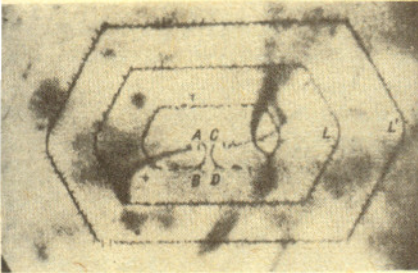
Rys. 8





Rys. 9

Kształt wysyłanych pętli w kryształach rzeczywistych najczęściej odbiega od kołowego. Niekiedy jest on zbliżony do elipsy, niekiedy do wieloboku. Dzieje się tak dlatego, że kryształ jest osrodkami anizotropowym, jego własności fizyczne (np. prędkość ruchu dyslokacji) zależą od kierunku, w którym je badamy, w przeciwieństwie do osrodków izotropowych, których własności nie zależą od kierunku. Dla przykładu na rysunku 10 przedstawiona jest fotografia obrazu obserwowanego pod mikroskopem elektronowym, na której utrwalono produkowane przez źródło Franka-Reada w kryształach krzemu „sześciokątne” pętli dyslokacji. Tylko w kryształach o małym stopniu anizotropii pętla są zbliżone do kołowych.



Rys. 10

Jakie jest to odpowiednie, krytyczne naprężenie, przy którym źródło zaczyna działać produkując coraz więcej dyslokacji? Powinno ono już odpowiadać granicy plastyczności kryształu rzeczywistego. Oznaczmy je przez  $\sigma_c$  i spróbujmy oszacować jego wartość. Zauważmy, że musi ono odpowiadać sytuacji z rysunku 8b, czyli gdy pętla osiąga dokładnie kształt półokręgu o promieniu 1. Wówczas bowiem promień krzywizny  $R$  pętli osiąga wartość ekstremalną  $R = 1$  i siła zewnętrzna  $F_{zew}$  działająca na dyslokację zostaje zrównoważona siłą wewnętrzną  $F_{wew}$ , pochodzącą od jej napięcia liniowego  $T$ .

Nie wnikając w szczegółowe rozważania, podamy proste związki tych wielkości z charakterystycznym dla dyslokacji wektorem Burgersa  $b$ . Jeśli dyslokacja znajduje się pod działaniem naprężenia  $\sigma$ , to na każdą jednostkę jej długości działa siła  $F_{zew} = \sigma b$ . Siła wewnętrzna, pochodząca od napięcia liniowego  $T$ , jest zawsze skierowana do wewnątrz pętli wzdłuż promienia krzywizny linii dyslokacji i stara się „ściągnąć” dyslokację do jej położenia wyjściowego z rysunku 8a. Dana jest ona wzorem  $F_{wew} = T/R$ . Napęcie liniowe jednostki długości linii dyslokacji wyrażane jest w jednostkach energii i równa się  $T \approx \mu b^2$ . Z warunku równowagi  $F_{zew} = F_{wew}$  otrzymujemy ostateczny wzór na wartość krytycznego naprężenia  $\sigma_c$  w postaci:

$$\sigma_c = \mu b/l.$$

Porównajmy teraz wartość  $\sigma_c$  z wartością  $\sigma_{teor} = \mu/2\pi$ , która wynika z teorii kryształu doskonałego. Zakładając przeciętne wartości dla  $b = 2 \cdot 10^{-8}$  cm oraz  $l = 10^{-3}$  cm otrzymujemy  $\sigma_{teor}/\sigma_c = l/2\pi b \approx 10^4$ . A więc nowa teoria uwzględniająca pojęcie dyslokacji daje wartość granicy plastyczności już zgodną z doświadczeniem.

Dyslokacje odgrywają istotną rolę nie tylko w zjawiskach deformacji metali — od poznania których w tak dużym stopniu zależy nasza współczesna technologia — lecz, nie przesadzając, odgrywają one decydującą rolę w najpotężniejszych ze wszystkich deformacji spotykanych na Ziemi — wstrząsach, które spowodowały powstanie łańcuchów górskich oraz kontynentów. Być może dalszy rozwój teorii dyslokacji pomoże nam zrozumieć mechanizm trzęsień ziemi i przewidywać je dokładnie.

Istnienie dyslokacji wewnątrz ziaren — kryształów lodu pozwala zsuwać się wysokim górcom i masom lodowym zalegającym obszary kuli ziemskiej pod dużymi szerokościami geograficznymi. Dzieje się tak wskutek plastycznego płynięcia lodowców i płyt lodowych powstałych z nagromadzonych niegdyś w tych obszarach warstw śnieżnych.

Wszystkie przedstawione tutaj modele dyslokacji wywodzą się z badań nad rzeczywistą strukturą kryształu — osrodka z natury dyskretnego. Nazwaliśmy je modelami strukturalnymi. W odróżnieniu od nich istnieją modele, które wywodzą się z klasycznej mechaniki osrodków ciągłych, a ściślej z teorii sprężystości, która ciało stałe traktuje jako tzw. kontinuum, czyli osrodek ciągły o własnościach sprężystych, bądź izotropowy (jak ciała niekryształiczne lub polikryształy), bądź anizotropowy (jak kryształy). Są to modele zwane kontynualnymi.



#### Rozwiązanie zadania M 307.

Dla liczb postaci  $a + b\sqrt{2}$  ( $a, b$  — całkowite) wprowadźmy operację *sprężenia*, określając  $a + b\sqrt{2} = a - b\sqrt{2}$ . Sprawdzamy łatwo — jak przy liczbach zespolonych — że sprężenie sumy (iloczynu) jest sumą (iloczynem) sprężen. Zatem jeżeli  $(1 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ , to  $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$ . Stąd mamy  $(-1)^n = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = A^2 - 2B^2$ , czyli  $A = \sqrt{2B^2 + (-1)^n}$ . Ostatecznie  $(1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{2B^2 + (-1)^n} - \sqrt{2B^2}$ , więc za  $m$  z zadania przyjmijmy  $2B^2$  dla  $n$  parzystych lub  $2B^2 - 1$  dla  $n$  nieparzystych.



Znowu nad nami pojawiają się jesienne gwiazdozbiory, między innymi Cefeusz (*Cepheus*). Wśród jego najjaśniejszych kilku gwiazd znajdujemy dwie gwiazdy zmienne:  $\beta$  Cep i  $\delta$  Cep. Dzięki swej jasności i wczesnemu odkryciu stały się one prototypami dwóch klas gwiazd zmiennych. Charakter ich zmienności przez długie lata był nieznan, a i do dzisiaj istnieją spory co do szczegółów modelu fizycznego gwiazd typu  $\beta$  Cep.

Wydaje się jednak pewne, że gwiazdy obu klas wykonują okresowe pulsacje. Mechanizm napędzania pulsacji jest podobny i można go porównać do pracy każdego silnika cieplnego. Otóż na pewnej głębokości pod powierzchnią istnieje w każdej gwiazdzie warstwa częściowej jonizacji helu (część helu jest niejonizowana, a część jedno lub dwukrotnie). Jeśli warunki są sprzyjające (np. określona głębokość danej warstwy) i gwiazda zostanie wyprowadzona ze stanu równowagi, to drgania nie będą zanikały. Powoduje to właśnie hel, który w wyniku np. ekspansji i zmiany temperatury zmienia również swój stan jonizacji, a co za tym idzie, również przezroczystość.

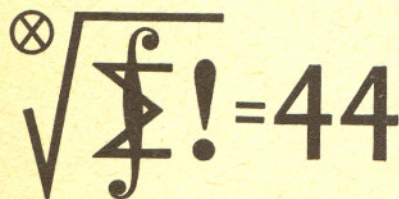
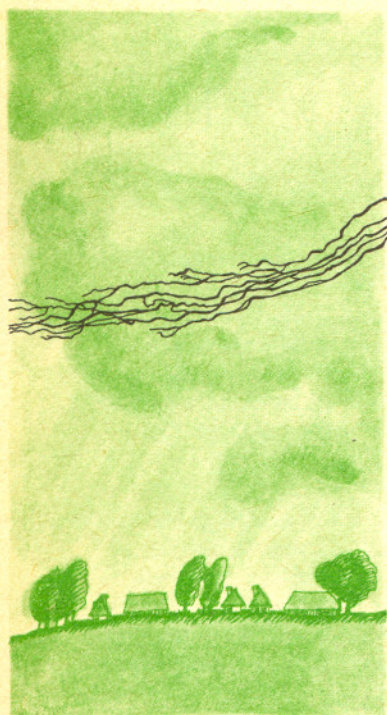
Różnica między wspomnianymi wyżej typami gwiazd polega na tym, że podczas gdy zmienne typu  $\delta$  Cep (cefeidy) pulsują radialnie (zachowanie poszczególnych elementów gwiazdy zależy tylko od odległości od jej środka), a więc okresowo pęcznią i kurczą się, to gwiazdy typu  $\beta$  Cep oscylują nieradialnie, czyli zmieniają również swój kształt (raz bardziej przypominają np. dysk, raz — cygaro, ale również przyjmują bardziej egzotyczne kształty). Oczywiście amplitudy tych zmian są bardzo małe, jednak dają mierzalne efekty przy obserwacjach zmian jasności.

Wśród gwiazd typu  $\beta$  Cep obserwuje się często równoczesne oscylacje w kilku częstościach. Daje to w sumie dość skomplikowany obraz zmienności, na pierwszy rzut oka nie przypominający zmian okresowych. Dopiero po dokonaniu tzw. analizy fourierowskiej, polegającej w uproszczeniu na dopasowaniu obserwowanych zmian do szeregu sinusoid o dowolnej amplitudzie, częstości i przesunięciu fazowym, uzyskujemy pełny obraz zmienności. Okazuje się, że u wielu gwiazd tego typu obserwujemy drgania o częstościach niewiele różniących się od siebie, odległych wzajemnie o pewne stałe przesunięcie (w częstościach  $\omega - \Delta\omega$ ,  $\omega$ ,  $\omega + \Delta\omega$ ). Według obecnie przyjmowanych teorii jest to wpływ rotacji gwiazdy, która rozszczepia jedną częstość na kilka blisko położonych. Odległość  $\Delta\omega$  jest proporcjonalna do prędkości obrotu gwiazdy. Zjawisko to jest jakościowo bardzo podobne do rozszczepienia linii widmowych atomów pod wpływem pola magnetycznego (tzw. zjawisko Zeemana). Co więcej, oba tak różne obiekty (nieradialnie oscylująca obracająca się gwiazda i emitujący atom w polu magnetycznym) bada się bardzo podobnymi metodami.

Nieradialne oscylacje odkryto również wśród niektórych białych karłów (tzw. gwiazd typu ZZ Ceti) oraz u gwiazd leżących nieco na prawo od ciągu głównego na diagramie Hertzsprunga-Russella (patrz okładka *Dety* 4/1982), u tzw. gwiazd typu  $\delta$  Scuti.

Pulsacje gwiazd są bardzo istotnym narzędziem przy badaniu wnętrza tych obiektów — przy budowie modelu takich gwiazd trzeba bardzo dokładnie odtworzyć ich wnętrze, aby uzyskać wyniki zgodne z obserwacjami.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"  
po uwzględnieniu rozwiązań zadań  
z numeru 1/82

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	- 23,63pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	- 23,20pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	- 17,84pkt
Jacek Uryga	- Bytom	- 15,81pkt
Andrzej Lenarcik	- Kielce	- 15,38pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	- 13,40pkt
Jerzy Grzywocz	- Ruda Śl.	- 13,29pkt

Współczynniki trudności zadań 13, 14, 15:  
3,61    1,51    3,58

## Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr.  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

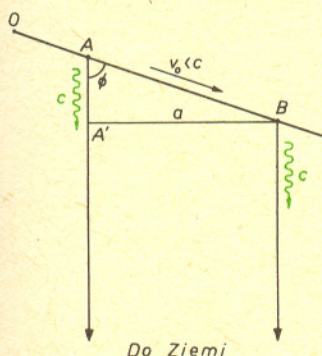


## Zaobserwowano w przyrodzie prędkość obiektu większą od prędkości światła

Kwazar 3C273 ma niezwykle właściwości. Ma on ogon emitujący fale elektromagnetyczne zarówno w zakresie światła widzialnego, jak i fal radiowych. Ogon jest śladem wiązki elektronów wyrzucanej z dużą prędkością z jądra kwazara. Już na pierwszych wykonanych zdjęciach okazało się, że kwazar 3C273 ma dwa radioźródła. Jedno jasne, które można utożsamić z jądrem kwazara i drugie słabsze, odległe od pierwszego o 62 lata świetlne. To drugie radioźródło związane jest z większym niż średnie zagęszczeniem elektronów w świecącym ogonie.

Trzyletnia obserwacja kwazara wykazała, że oba radioźródła oddalają się od siebie. W czerwcu 1980 r. były już oddalone o 87 lat świetlnych. Wynik jest wprost niesamowity. Przez 3 lata źródła oddaliły się od siebie o 25 lat świetlnych. Czyżby poruszały się z prędkością przekraczającą wielokrotnie prędkość światła? Co na to teoria względności?

Wyjaśnienie jest stosunkowo proste i nie wymaga odwoływania się do teorii względności. Popatrzmy na rysunek. W punkcie  $O$  znajduje się jądro kwazara. Przed trzema laty słabsze radioźródło znajdowało się w punkcie  $A$  i poruszało się z prędkością  $v_0 < c$  w kierunku  $B$ . Fale wysłane z punktu  $A$  poruszają się z prędkością  $c$  w kierunku Ziemi. Fale wysłane z punktu  $B$  dotrą do Ziemi w  $\Delta t$  po sygnale z punktu  $A$ . Obserwator na Ziemi obliczy prędkość radioźródła



$$v = \frac{a}{\Delta t}.$$

Obliczmy tę prędkość

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{AB}{v_0} - \frac{AA'}{c} = \frac{1}{c} \left( AB \frac{c}{v_0} - AA' \right) \\ AA' &= AB \cos \Phi, \quad a = AB \sin \Phi \\ \Delta t &= \frac{1}{c} AB \left( \frac{c}{v_0} - \cos \Phi \right) \\ v &= \frac{a}{\Delta t} = c \frac{\sin \Phi}{\frac{c}{v_0} - \cos \Phi} = \frac{v_0 \sin \Phi}{1 - \frac{v_0}{c} \cos \Phi} \end{aligned}$$

W pewnych warunkach może się zdarzyć, że obliczone w ten sposób  $v$  przekroczy co do wartości prędkość światła. Niech na przykład elektrony poruszają się pod kątem  $\Phi = 1^\circ$  do kierunku kwazar-Ziemia z niewielką jak na elektrony prędkością  $v_0 = 0,998 c$ . Obserwowana na Ziemi prędkość przekroczy znacznie prędkość światła

$$v = \frac{0,998 c \sin 1^\circ}{1 - 0,998 \cos 1^\circ} = 8,09 c.$$

Rzeczywista prędkość ruchu pozostaje jak widzimy mniejsza od prędkości światła.

T. H.

(na podstawie *New Scientist*, 25 czerwca 1981, str. 848)

Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

i Redakcji „Deltę”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 31, 32, 33

Termin nadsyłania rozwiązań:

15 XII 1982

```

* * * *
* * 7 *
-----
* * * * *
* * * *
* * * * *
* * * *
* * * * *
* * * * *

```

31. Ciąg liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots$  jest okresowy o okresie  $k$  (tzn.  $a_{i+k} = a_i$  dla wszystkich  $i$ ), przy czym  $a_1 + \dots + a_k \geq 0$ . Wykazać, że istnieje numer  $m$  taki, że  $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \geq 0$  dla wszystkich  $n \geq m$ .

32. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oznaczmy przez  $d(n)$  ostatnią niezerową cyfrę liczby  $n!$ . Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb  $n$  zachodzi równość  $d(n-1) = d(n) = d(n+1)$ .

33. W napisanym mnożeniu cyfra 7 już się nie pojawia. Czy można zrekonstruować działanie?



Prof. dr inż. Juliusz Lech KULIKOWSKI

Komu kiedyś zdarzyło się spędzić godzinę lub więcej w kolejce po gazetę, ten miał okazję zastanowić się, co decyduje o wartości informacji. Czy nominalna cena informacji (w tym przypadku — 5 zł) jest równoważna jej wartości? Wśród podstawowych atrybutów informacji, do jakich zalicza się m.in. jej miarę ilościową, treść, jakość itp., wartość informacji jest atrybutem stosunkowo mało poznanym. Owszem, podejmowano w przeszłości próby wyjaśnienia istoty wartości informacji (M. M. Bongard, A. A. Charkiewicz, N. Stanułow i in.), lecz nie wyszły one poza poziom ogólnych koncepcji. Koncepcja, którą niżej przedstawiam Czytelnikom, po raz pierwszy była zreferowana na IV kongresie IFAC w Warszawie w 1969 r. oraz w bardziej rozwiniętej postaci — na drugim Międzynarodowym Sympozjum Teorii Informacji w Cachkadzor (Armeńska SRR w 1970 r.). Nie zamierzam ukrywać, że spotkała się ona z przyjęciem życzliwym, ale także ograniczonym do wąskiego grona zainteresowanych osób. Mimo to problem, jak zobiektywizować pojęcie wartości informacji, uważam za wciąż aktualny, dlatego ośmielam się zaprzętnąć nim także uwagę Czytelników.

Ekonomia polityczna określa wartość towaru jako równoważnik ilości pracy społecznie niezbędnej do tego, by towar wyprodukować. Czy odnosi się to także do wartości informacji? Jeśli nawet informacja jest przedmiotem wymiany handlowej, to mimo wszystko jest to towar szczególnie. Konsumpcja informacji nie niszczy jej, tak jak na przykład konsumpcja artykułów spożywczych, lecz raczej — powiela informację i przedłuża jej istnienie. Ponadto, wartość informacji nie jest związana żadną prostą zależnością funkcyjną z jej miarą ilościową. Proste buchalteryjne metody wyliczania wartości informacji nie na wiele zatem się przydadzą. Ocenę wartości informacji powinniśmy wiązać raczej z jej wartością użytkową, ocenianą przez odbiorcę informacji. Należy jednak zastrzec się, że nie idzie tu o wartość rozumianą bardzo wąsko, w kategoriach korzyści czysto materialnych. Na przykład, jeśli kiedykolwiek nastąpi potwierdzenie hipotezy o istnieniu cywilizacji pozaziemskich, to z punktu widzenia statystycznej teorii komunikacji przyniesie nam ono zaledwie 1 bit informacji (przyjmując, że obecnie hipotezy istnienia i braku takich cywilizacji trzeba uznać za jednakowo prawdopodobne). Utylitarne znaczenie takiej informacji przypuszczalnie będzie również niewielkie (wykluczam tu możliwość wylądowania Kosmitów na Ziemi), natomiast wartość użytkowa informacji o cywilizacji pozaziemskiej rozumiana szeroko, z uwzględnieniem jej aspektów przyrodniczych i światopoglądowych byłaby ogromna. Każda sensowna teoria wartości informacji musi liczyć się z jej względnością i subiektywnością ocen. Mimo to pewne czynniki mają niewątpliwy i bezpośredni związek z wartością informacji dla każdego, kto tę wartość ocenia. Można do nich przykładowo zaliczyć:

- treść informacji,
- aktualność informacji,
- jej wiarygodność,
- jej zrozumiałość,

itp.. Dochodzimy zatem do ważnego spostrzeżenia, że wartość informacji „nie jedno ma imię”, lecz wyraża szereg różnych jej cech jakościowych, które można wprawdzie poddawać kwantyfikacji, lecz trudno sprowadzić je do jednego parametru liczbowego (skalara).

Z drugiej strony natomiast, jeśli mówimy o „wartości” czegośkolwiek, to na ogół milcząco zakładamy, że:

- wartości można dodawać,
- wielokrotne dodawanie wartości można zastąpić przez mnożenie ich przez liczby naturalne, a ogólniej — rzeczywiste,
- wartości można porównywać.

Spostrzeżenia te naprowadzają nas na pewien teoretyczny model wartości informacji, który niżej opiszemy. Wartość informacji w tym modelu jest wektorem, którego poszczególne składowe odpowiadają czynnikom decydującym w opinii użytkownika o wartości informacji. Dodawanie wektorów i mnożenie ich przez liczby rzeczywiste możliwe jest, jeżeli uważamy wektory za elementy przestrzeni liniowej. Aksjomaty takiej przestrzeni zakładają bowiem, że jeśli  $x, y$  są dwoma jej dowolnymi elementami (wektorami),  $a, b$  zaś są dwiema dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to określone jest zarówno dodawanie elementów oznaczane jako  $x \oplus y$ , jak i mnożenie ich przez liczbę rzeczywistą (oznaczane jako  $a \cdot x$ ), przy czym zachodzą następujące tożsamości:

1.  $a \cdot (x \oplus y) = a \cdot x \oplus a \cdot y = a \cdot y \oplus a \cdot x$ ,
2.  $(a+b) \cdot x = a \cdot x \oplus b \cdot x$ ,
3.  $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x, \quad 1 \cdot x = x$ .

W przestrzeni liniowej wyróżniony jest ponadto pewien element  $0$ , zwany elementem zerowym, taki, że dla dowolnego  $x$

4.  $0 \cdot x = 0$

Reguły te są spełnione przez przestrzenie wektorów o ustalonej liczbie składowych rzeczywistych; wektory takie można by zatem uznać za reprezentantów wartości informacji, gdybyśmy nadali właściwą interpretację ich składowym oraz gdybyśmy wyjaśnili, na czym polega możliwość porównywania wektorów. Należy jednocześnie zauważyć, że podobnie jak sumowanie probabilistycznych miar ilości informacji może być stosowane tylko w odniesieniu do komunikatów parami statystycznie niezależnych, tak też dodawanie wektorowych bądź skalarnych miar wartości informacji może być stosowane tylko w odniesieniu do komunikatów niezależnych treściowo lub statystycznie. Powtórzenie tego samego komunikatu i skierowanie go do tego samego odbiorcy w jego odczuciu nie zwiększa zatem wartości użytkowej zawartej w informacji, chyba że przyczynia się do podniesienia wiarygodności informacji, lecz i w tym przypadku wzrost wartości informacji nie będzie proporcjonalny do liczby powtórzeń. Dalsze rozważania ograniczymy zatem do komunikatów treściowo i statystycznie niezależnych, nie precyzując zresztą tych pojęć, gdyż dla naszych celów wystarczy pojmować je w sposób zgodny z intuicją. Przytoczymy przykład, który ułatwi nam dalsze rozważania. Przypuśćmy, że interesuje nas pewien fakt historyczny, o którym chcemy zasięgnąć bliższej informacji. Możemy ten cel osiągnąć dwojako: 1° pytając kolegów lub domowników o interesujące nas szczegóły, 2° wypożyczając w czytelni książkę historyczną na odpowiedni temat. Pierwsze rozwiązanie gwarantuje nam szybki dostęp do informacji, niestety, mało wiarygodnej. Drugie rozwiązanie, odwrotnie, dostarczy nam wiarygodnej informacji, lecz ze znacznym opóźnieniem. Które rozwiązanie powinniśmy wybrać? Zapytajmy inaczej: w którym przypadku wartość użytkowa informacji będzie większa?

Zacniemy od sparametryzowania interesujących nas cech informacji: jej wiarygodności i aktualności. Możemy na przykład założyć, że jeśli  $p$  oznacza prawdopodobieństwo tego, iż odpowiedź na określoną kategorię zapytań otrzymana z pewnego źródła będzie nieprawidłowa, to *współczynnik wiarygodności*  $k_w$  informacji uzyskiwanych z tego źródła na dany temat będzie wyliczany z wzoru

$$k_w = -\log p.$$

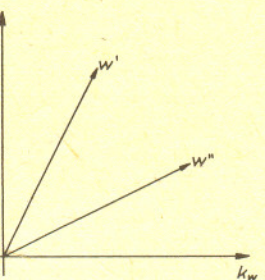


określony współczynnik wiarygodności przyjmuje wartość równą 0, jeśli informacje z danego źródła i na dany temat są ogólnie nieprawdziwe, natomiast dąży do nieskończoności, jeśli prawdopodobieństwo uzyskania nieprawdziwej odpowiedzi dąży do zera. Można też powiedzieć, że tak określony współczynnik wiarygodności wyraża ilość informacji zawartej w danym twierdzeniu, że odpowiedź otrzymana z danego źródła na dany temat jest nieprawdziwa.

Współczynnik aktualności informacji  $k_a$  możemy natomiast wyrazić przy pomocy wzoru

$$k_a = \frac{t_0}{t},$$

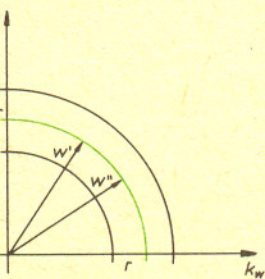
gdzie  $t_0$  oznacza pewien normatywny czas opóźnienia danej informacji (tj. upływ czasu między zadaniem pytania i otrzymaniem odpowiedzi), zaś  $t$  jest faktycznym czasem opóźnienia tejże informacji. Współczynnik aktualności jest równy 1, jeśli opóźnienie informacji równe jest nieskończoności, 0, jeśli opóźnienie to jest równe normatywnemu opóźnieniu, które z założenia powinno być większe od 1, a 0 jest równy nieskończoności, jeśli opóźnienie jest równe 0.



Rys. 1

Rys. 1 przedstawiono parę wektorów, których składowe wartości są wartościami współczynników  $k_w, k_a$ ; wektor  $w'$  odpowiada informacji mało wiarygodnej, lecz natychmiastowej, natomiast wektor  $w''$  odpowiada informacji wysoce wiarygodnej, lecz otrzymanej ze znacznym opóźnieniem. Ponawiamy nasze pytanie: w którym przypadku wartość informacji jest większa, czyli który z dwóch wektorów jest „większy”?

W miarę „wielkości” wektora można, oczywiście, przyjąć jego długość. Oznacza to, iż wszystkie wektory wychodzące z początku układu współrzędnych, których końce znajdują się na okręgu o ustalonym promieniu  $r$  zakreślonym z początku układu współrzędnych (rys. 2) są równoważne. W konsekwencji, musimy uznać za równoważnościowe informacje przedstawiane przez wszystkie takie wektory. Taki sposób porównania wartości informacji jest jednak zbyt sztywny, nie pozwala na swobodne preferowanie bądź informacyjnie wiarygodnych, bądź aktualnych, zależnie od woli i potrzeby użytkownika. Istnieje także możliwość operowania „ważonym” współczynnikiem wartości informacji. Jeśli mianowicie wprowadzimy do rozważań pewien współczynnik liczbowy  $c$



Rys. 2

taki, że  $0 \leq c \leq 1$  i określimy „ważony” współczynnik wartości informacji:

$$k = c \cdot k_w + (1 - c) \cdot k_a,$$

to współczynnik  $k$  może posłużyć do „uporządkowania” wektorów  $(k_w, k_a)$ . Wektorami wzajemnie równoważnymi stają się w tym przypadku takie wektory, którym odpowiada ta sama wartość współczynnika  $k$ , a więc wektory, których końce znajdują się na prostych o równaniach:

$$k_a = \frac{c}{c-1} k_w + \frac{k}{1-c}.$$

Współczynnik liczbowy  $c$  wyraża w tym przypadku pewien arbitralnie przyjęty stopień preferencji przyznawanej wiarygodności informacji w stosunku do jej aktualności. Jak łatwo zauważyć, jeżeli przyjmiemy  $c = 1$ , to aktualność informacji w ogóle nie będzie brana pod uwagę jako czynnik decydujący o jej wartości użytkowej. Odwrotnie, przyjęcie, że  $c = 0$  oznacza, że nie przypisuje się znaczenia wiarygodności informacji, byle była ona dostarczana szybko.

Również i ten sposób porównywania wartości informacji, traktowanych wektorowo nie jest wystarczająco elastyczny, choć dodatkowy parametr  $c$  zwiększa jego elastyczność w stosunku do poprzedniego sposobu.

Jako kolejny wariant modelu formalnego wartości informacji rozważymy zatem tzw. liniową przestrzeń półporządkowaną. Idea takiej przestrzeni została wysunięta jeszcze w latach trzydziestych przez L. B. Kantorowicza, a następnie została rozwinięta przez szkołę matematyków leningradzkich.

Liniowa przestrzeń półporządkowana, którą będziemy krótko nazywali przestrzenią typu  $K$ , jest dowolną przestrzenią liniową, w której została określona relacja „dodatniości” jej elementów, oznaczana jak następuje:

$$x \succ 0$$

(czyt. „ $x$  jest większe od 0”), przy czym  $0$  jest elementem zerowym przestrzeni liniowej, na przykład wektorem o zerowych składowych. Relacja „dodatniości” powinna przy tym spełniać następujące założenia:

- 1° jeśli  $x \succ 0$ , to nie zachodzi  $x = 0$ ,
- 2° jeśli  $x \succ 0$  i  $y \succ 0$ , to  $x \oplus y \succ 0$ ,
- 3° dla każdego elementu  $x$  w przestrzeni typu  $K$  istnieje taki element  $x' \succ 0$ , że  $x' \oplus (-1) \cdot x \succ 0$ , czyli krócej taki, że  $x' \succ x$  (czyt. „ $x'$  jest większe od  $x$ ”),
- 4° jeśli  $x \succ 0$  i  $a > 0$ , to  $a \cdot x \succ 0$ .

Dla wyżej podanych założeń dochodzi jeszcze jedno, dotyczące podzbiorów ograniczonych w przestrzeni typu  $K$ . Zbiór  $S$  elementów tej przestrzeni nazywamy zbiorem ograniczonym z góry, jeśli istnieje taki element  $\xi$  w tejże przestrzeni, że  $\xi$  jest większy od każdego elementu zbioru  $S$ ; element  $\xi$  nazywamy wówczas ograniczeniem górnym zbioru  $S$ . Jeśli ponadto  $\xi$  ma tę własność, że nie jest on większy od żadnego innego elementu przestrzeni będącego także ograniczeniem górnym zbioru  $S$ , to nazywamy go kresem górnym zbioru  $S$  i oznaczamy przez  $\sup S$ .

- W przestrzeni typu  $K$  obowiązuje założenie, że
- 5° każdy podzbiór  $S$  przestrzeni typu  $K$  ograniczony z góry, ma w niej kres górny  $\sup S$ .

Założenie to odgrywa istotną rolę szczególnie przy rozważaniu zagadnień zbieżności ciągów elementów w przestrzeni typu  $K$ .

Powróćmy do przykładu przestrzeni wektorów dwuwymiarowych wyrażających wartość informacji poprzez wskaźniki jej wiarygodności i aktualności. Za wektory dodatnie w sensie aksjomatyki przestrzeni typu  $K$  możemy przyjąć wszystkie takie

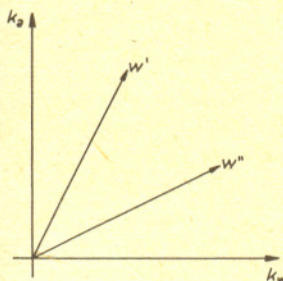


Tak określony współczynnik wiarygodności przyjmuje wartość równą 0, jeśli informacje z danego źródła i na dany temat są z reguły nieprawdziwe, natomiast dąży do nieskończoności, kiedy prawdopodobieństwo uzyskania nieprawdziwej odpowiedzi dąży do zera. Można też powiedzieć, że tak określony współczynnik wiarygodności wyraża ilość informacji zawartej w stwierdzeniu, że odpowiedź otrzymana z danego źródła na dany temat jest nieprawdziwa.

Współczynnik aktualności informacji  $k_a$  możemy natomiast określić przy pomocy wzoru

$$k_a = \frac{t_0}{t},$$

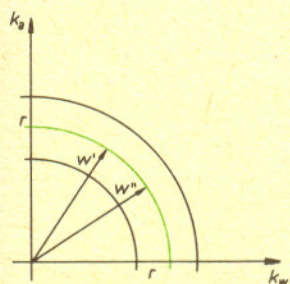
w którym  $t_0$  oznacza pewien normatywny czas opóźnienia danej informacji (tj. upływ czasu między zadaniem pytania i uzyskaniem odpowiedzi), zaś  $t$  jest faktycznym czasem opóźnienia tejże informacji. Współczynnik aktualności jest równy zeru, jeśli opóźnienie informacji równe jest nieskończoności, jest równy jedności, jeśli opóźnienie to jest równe normatywnemu czasowi opóźnienia, które z założenia powinno być większe od zera i jest równy nieskończoności, jeśli opóźnienie jest równe zero.



Rys. 1

Na rys. 1 przedstawiono parę wektorów, których składowe równe są wartościom współczynników  $k_w, k_a$ ; wektor  $w'$  odpowiada informacji mało wiarygodnej, lecz natychmiastowej, wektor  $w''$  natomiast odpowiada informacji wysoce wiarygodnej, lecz otrzymanej ze znacznym opóźnieniem. Ponawiamy nasze pytanie: w którym przypadku wartość informacji jest większa, czyli który z dwóch wektorów jest „większy”?

Za miarę „wielkości” wektora można, oczywiście, przyjąć jego długość. Oznacza to, iż wszystkie wektory wychodzące z początku układu współrzędnych, których końce znajdują się na okręgu o ustalonym promieniu  $r$  zakreślonym z początku układu współrzędnych (rys. 2) są równoważne. W konsekwencji, musielibyśmy uznać za równoważnościowe informacje reprezentowane przez wszystkie takie wektory. Taki sposób oceny wartości informacji jest jednak zbyt sztywny, nie pozwala on na swobodne preferowanie bądź informacji wiarygodnych, bądź informacji aktualnych, zależnie od woli i potrzeby użytkownika. Istnieje także możliwość operowania „ważonym” współczynnikiem wartości informacji. Jeśli mianowicie wprowadzimy do rozważań pewien współczynnik liczbowy  $c$



Rys. 2

taki, że  $0 \leq c \leq 1$  i określimy „ważony” współczynnik wartości informacji:

$$k = c \cdot k_w + (1 - c) \cdot k_a,$$

to współczynnik  $k$  może posłużyć do „uporządkowania” wektorów ( $k_w, k_a$ ). Wektorami wzajemnie równoważnymi stają się w tym przypadku takie wektory, którym odpowiada ta sama wartość współczynnika  $k$ , a więc wektory, których końce znajdują się na prostych o równaniach:

$$k_a = \frac{c}{c-1} k_w + \frac{k}{1-c}.$$

Współczynnik liczbowy  $c$  wyraża w tym przypadku pewien arbitralnie przyjęty stopień preferencji przyznawanej wiarygodności informacji w stosunku do jej aktualności. Jak łatwo zauważyć, jeżeli przyjmiemy  $c = 1$ , to aktualność informacji w ogóle nie będzie brana pod uwagę jako czynnik decydujący o jej wartości użytkowej. Odwrotnie, przyjęcie, że  $c = 0$  oznacza, że nie przypisuje się znaczenia wiarygodności informacji, byle była ona dostarczana szybko.

Również i ten sposób porównywania wartości informacji, traktowanych wektorowo nie jest wystarczająco elastyczny, choć dodatkowy parametr  $c$  zwiększa jego elastyczność w stosunku do poprzedniego sposobu.

Jako kolejny wariant modelu formalnego wartości informacji rozważmy zatem tzw. liniową przestrzeń półporządkowaną. Idea takiej przestrzeni została wysunięta jeszcze w latach trzydziestych przez L. B. Kantorowicza, a następnie została rozwinięta przez szkołę matematyków leningradzkich.

Liniowa przestrzeń półporządkowana, którą będziemy krótko nazywali przestrzenią typu  $K$ , jest dowolną przestrzenią liniową, w której została określona relacja „dodatniości” jej elementów, oznaczana jak następuje:

$$x > 0$$

(czyt. „ $x$  jest większe od  $0$ ”), przy czym  $0$  jest elementem zerowym przestrzeni liniowej, na przykład wektorem o zerowych składowych. Relacja „dodatniości” powinna przy tym spełniać następujące założenia:

- 1° jeśli  $x > 0$ , to nie zachodzi  $x = 0$ ,
- 2° jeśli  $x > 0$  i  $y > 0$ , to  $x \oplus y > 0$ ,
- 3° dla każdego elementu  $x$  w przestrzeni typu  $K$  istnieje taki element  $x' > 0$ , że  $x' \oplus (-1) \cdot x > 0$ , czyli krócej taki, że  $x' > x$  (czyt. „ $x'$  jest większe od  $x$ ”),
- 4° jeśli  $x > 0$  i  $a > 0$ , to  $a \cdot x > 0$ .

Dla wyżej podanych założeń dochodzi jeszcze jedno, dotyczące podzbiorów ograniczonych w przestrzeni typu  $K$ . Zbiór  $S$  elementów tej przestrzeni nazywamy zbiorem ograniczonym z góry, jeśli istnieje taki element  $\xi$  w tejże przestrzeni, że  $\xi$  jest większy od każdego elementu zbioru  $S$ ; element  $\xi$  nazywamy wówczas ograniczeniem górnym zbioru  $S$ . Jeśli ponadto  $\xi$  ma tę własność, że nie jest on większy od żadnego innego elementu przestrzeni będącego także ograniczeniem górnym zbioru  $S$ , to nazywamy go kresem górnym zbioru  $S$  i oznaczamy przez  $\sup S$ . W przestrzeni typu  $K$  obowiązuje założenie, że

- 5° każdy podzbiór  $S$  przestrzeni typu  $K$  ograniczony z góry, ma w niej kres górny  $\sup S$ .

Założenie to odgrywa istotną rolę szczególnie przy rozważaniu zagadnień zbieżności ciągów elementów w przestrzeni typu  $K$ .

Powróćmy do przykładu przestrzeni wektorów dwuwymiarowych wyrażających wartość informacji poprzez wskaźniki jej wiarygodności i aktualności. Za wektory dodatnie w sensie aksjomatyki przestrzeni typu  $K$  możemy przyjąć wszystkie takie



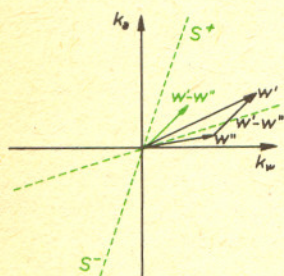
wektory, które sprowadzone do początku układu współrzędnych mieszczą się wewnątrz pewnego arbitralnie wybranego sektora kąтового  $S^+$  (zob. rys. 3). O dwóch wektorach  $w'$ ,  $w''$  można wówczas orzec, że na przykład  $w' > w''$  wtedy i tylko wtedy, gdy różnica wektorowa  $w' - w''$  jest wektorem dodatnim, należącym do sektora  $S^+$  (rys. 4). Jeśli różnica ta jest natomiast wektorem należącym do sektora  $S^-$  wektorów „ujemnych” będących symetrycznym względem początku układu  $O$  odbiciem wektorów dodatnich tworzących sektor  $S^+$ , to wektor  $w''$  uznajemy za większy od wektora  $w'$ . Mamy tu zatem względnie prostą zasadę porównywania wzajemnego wektorów wyrażających wartość informacji. Pozostaje jednak wątpliwość, jak należy traktować takie pary wektorów, których różnica nie należy ani do sektora  $S^+$ , ani do sektora  $S^-$ , jak to ilustruje rys. 5. O takich parach wektorów trzeba orzec, że są wzajemnie „nieporównywalne”.

Konsekwencją tego jest to, że niektóre pary komunikatów trzeba uznać za nieporównywalne z punktu widzenia wartości użytkowej zawartych w nich informacji. Na pierwszy rzut oka może wydać się, że istnienie par wektorów wzajemnie nieporównywalnych jest istotnym niedostatkiem naszego modelu wartości informacji. Tak jednak nie jest, gdyż także w życiu walory użytkowe niektórych informacji trzeba uznać za nieporównywalne. Model formalny nie musi rościć sobie pretensji, by poprawiać

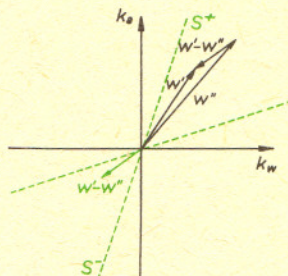
rzeczywistość, wystarczy, że ją wiernie opisuje i pozwala na tej podstawie wyciągać wnioski.

Dobierając stosownie do potrzeby rozwarłość sektora  $S^+$  możemy w znacznych granicach regulować stopień nieporównywalności wektorów w przestrzeni typu  $K$ , w czym przejawia się elastyczność modelu, tak istotna w jego praktycznych zastosowaniach.

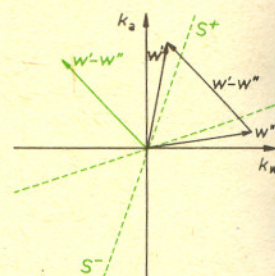
Przestrzeń typu  $K$  może być przestrzenią o dowolnie dużej, skończonej liczbie wymiarów (może to być także przestrzeń nieskończenie wielowymiarowa, lecz ten przypadek nie ma dla nas praktycznego znaczenia). Sektor  $S^+$  wektorów dodatnich przybiera w ogólności postać wielowymiarowego „stożka” wychodzącego z punktu  $O$  (jednakże nie zawierającego tego punktu, zgodnie z założeniem 1°). Pozostałe zasady porównywania wektorów w takiej wielowymiarowej przestrzeni nie ulegają zmianie. Porównywanie takich wieloaspektowych wartości informacji może być nieco bardziej kłopotliwe, jednakże daje się ono względnie łatwo zaprogramować na komputery. Dzięki temu wieloaspektowa wartość informacji może być w sposób automatyczny uwzględniana w komputerowych bazach danych, stając się dodatkowym narzędziem selekcji informacji pod kątem indywidualnych potrzeb użytkowników.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Najpierw te, które umiemy:

1. Jak można posadzić 9 drzew w 8 rzędach po trzy w każdym?

Odpowiedź widoczna jest na rysunku.

2. A 9 drzew w 9 rzędach po trzy w każdym? Też łatwo (rysunek).

3. No to może ogólnie: ustawiamy  $m$  drzew w  $r$  rzędach po  $s$  drzew w każdym. Jaka jest największa wartość stosunku  $rs/m$ ?

Tego zadania nie umiemy rozwiązać ani my, ani Czytelnicy *Journal of Recreational Mathematics* 14 (1), 1981—2. Można ustawić  $n^2$  drzew w sposób podobny do tego z rysunku do zadania 1. Największą wartość wyrażenia  $rs/n^2$  dostajemy wówczas dla  $n = 3$ , mianowicie  $8/3$ . Ale ustawienie „w twierdzenia Pappusa” (rysunek) jest lepsze (dla  $n = 3$  daje stosunek  $rs/n^2 = 10/3$ ) i przypuszczalnie to jest szukane maksimum.

Dlaczego nazwaliśmy to ustawieniem „w twierdzenia Pappusa”? To jasne, jeżeli tylko przypomnimy to twierdzenie:

Jeżeli punkty  $A, B, C$  są współliniowe i punkty  $D, E, F$  też, to punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta  $AFBDCE$  także są współliniowe.



Każdy, kto przeczytał artykuł Andrzeja Pelca „O lemacie Kuratowskiego-Zorna od innej strony” musi zadać sobie pytanie w rodzaju „dobra, dobra, a jak to jest naprawdę z lematem K.-Z., pewnikiem wyboru itd.?” „*Czy naprawdę to te elementy maksymalne z lematu istnieją, czy ich istnienie jest tylko powszechnie uznawane (subtelna, ale zasadnicza różnica)?*”

Autor (Andrzej Pelc) pisał o tym np. w *Delcie 4/1981* i z pewnością nie chciał się powtarzać. Przypomnijmy tu jego porównanie, że rozważania matematyczne „jak to jest naprawdę” przypominają próby dowiedzenia się, ile włosów na głowie miał Kmicic (łatwo tylko zgadnąć, że nie zero, bo pewnie takiego Oleńka by nie chciała; zresztą w tekście jest kilka razy mowa o jego „bujnej czuprynie”). Podobne pytanie w stosunku do jakiegokolwiek postaci historycznej np. Bogusława Radziwiłła też jest nierozstrzygalne, ale w troszkę innym sensie, prawda?

Właśnie o tym kilka słów. Mam w swojej bibliotece wydanie „Pana Tadeusza” w opracowaniu Stanisława Pigonia (Ossolineum, 1980). W tym pięknym wydaniu przypisy zajmują więcej miejsca niż tekst, a poświęcone są właśnie jego starannej analizie. Oto kilka rozważanych problemów:



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 307.** Wykazać, że dla dowolnego naturalnego  $n$  jest  $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ , gdzie  $m$  jest pewną liczbą naturalną.

Rozwiązanie na str. 11

**M 308.** Wykazać, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę pięciu sześcianów liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 2

**M 309.** Wykazać, że trójkąt, w którym najdłuższy bok ma długość 1 można pokryć dwoma kołami o średnicy 1.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 121.** Świątecznymi dekoracjami ulic bywają girlandy kolorowych żarówek o mlecznych osłonach. Obserwując świecenie girlandy zestawionej z identycznych żarówek nie dostrzega się różnicy w ich jasnościach pomimo zdecydowanie różnych odległości poszczególnych źródeł światła od oka. Dopiero obecność gęstej mgły ujawnia słabnięcie jasności dalej położonych żarówek. Jak pogodzić te fakty z prawami fotometrii?

Rozwiązanie na str. 2

**F 122.** Obserwowana jasność gwiazd o identycznej budowie i wymiarach maleje wraz ze wzrostem odległości od Ziemi. Jak się okazuje decydującym czynnikiem nie jest absorpcja światła przez materię międzygwiazdową (oczywiście poza przypadkiem kiedy gwiazda przesłonięta jest przez gęstą mgławicę). Czy nie stoi to w sprzeczności z wynikami poprzedniego zadania?

Rozwiązanie na str. 3

1) *Kto przywiózł Tadeusza do domu? „Właśnie dwukonną bryką wjechał młody panek ...”*. Z dalszego tekstu niby łatwo wynika, że przyjechał sam, ale skąd by miał bryczkę?

2) *Kiedy to było, dokładna data?* Długa analiza prowadzi do wniosku, że w sierpniu 1811 roku, ale inne fakty wskazują na czerwiec lub lipiec i w rezultacie nie wiadomo; za to wyraźnie da się ustalić dzień tygodnia — piątek.

3) *W którym roku urodził się Hrabia?* Zadanie jest trudne, ale rozwiązanie osiągalne: 1785.

4) *Jak spokrewniona z Soplicami i Horeszkami jest Telimena i czy przedtem miała męża?* Finezyjne rozumowanie prowadzi do wniosku, że zapewne miała, a był nim czynownik petersburski średniego szczebla.

5) *Czy Tadeusz zginął w wyprawie Napoleona na Moskwę?* Z pięciu wierszy (ks. IX, w. 529—534) wynika, że w trakcie pisania poematu (lata 1832—4) gospodarstwo w Soplicowie prowadził ponad 70-letni Sędzia; dlaczego nie Tadeusz? Czy nie żył? Czy był emigrantem?

Pytań takich jest wiele i bardzo staranna analiza poematu prowadzi do wniosku, że Wieszczy nie dopracował szczegółów. Prawdopodobnie nie przyszło mu to nawet do głowy. Gdyby bowiem przewidywał, jak będą analizowane jego teksty, na pewno zagmatwałby je dostatecznie dobrze tak, aby historycy literatury mieli jeszcze większe pole do popisu. (M. Sz.)