

## SPIS TREŚCI

NUMERU 8(104)

Struktury dyssypacyjne — nowe spojrzenie na rzeczywistość <i>Prof. dr Bogdan Baranowski</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 4
Struktura Wszechświata	str. 5
Wokół słynnego problemu Borsuka o podziale <i>Dr Marek Lassak</i>	str. 6
Czy cechy neutrin wpływają na własności Wszechświata <i>Dr Michał Jaroszyński</i>	str. 11
Zadania	str. 13
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 13
O dwóch klasycznych paradoksach fizyki statystycznej <i>Dr Bogdan Cichocki</i>	str. 14
Klub 44	str. 17

**W następnym numerze:**  
**Lemat Kuratowskiego-Zorna**

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
 dr Bogdan Cichocki  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Tomasz Hofmokl  
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bogdan Paczyński  
 dr Zbigniew Plochocki  
 doc. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 doc. dr Jerzy Sawicki  
 prof. dr Zbigniew Semański  
 doc. dr Grzegorz Sitarski  
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Stefan Turnau  
 doc. dr Aniela Wolska  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.  
 mgr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nacz.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacz.  
 dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nacz.

Adres Redakcji  
 ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w drukarni  
 im. Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 2608/82 Z-86

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
 Prenumeratę na kraj przyjmują oddziały kolportażowe RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz  
 urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
 — do 25 listopada na rok następny, I kwartał, I półrocze,  
 — do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty, na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Instytucje, jednostki gospodarki uspołecznionej, zakłady pracy i organizacje społeczno-polityczne  
 zamawiają prenumeratę w oddziałach kolportażowych RSW, uzgadniając sposób odbioru zamówionej  
 prasy.  
 Czytelnicy indywidualni zamieszkali w miastach mogą zamawiać prenumeratę w macierzystym zakładzie  
 pracy albo w oddziale kolportażowym RSW. Na wsi prenumeratę od instytucji, zakładów pracy  
 i czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe i listonosze.  
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla  
 zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla instytucji i zakładów pracy, przyjmuje RSW  
 „Prasa—Książka—Ruch” Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa ul. Towarowa 28,  
 konto XV O/M Warszawa nr 1153-201045-139-11.

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
 „DELTA”:  
 — w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
 — w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
 — w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
 — w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie  
 Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik  
 Deutschland,  
 — Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
 — Licosa Commisionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550



# Struktury dyssypacyjne — nowe spojrzenie na rzeczywistość

Prof. dr Bogdan BARANOWSKI

członek korespondent PAN

## Uwagi historyczno-filozoficzne

Rozkład w przestrzeni elementów składowych układu fizycznego i związane z nim konsekwencje — czyli struktura układu — stanowią podstawowy czynnik poznawczy i to zarówno z mikroskopowego, jak i makroskopowego punktu widzenia. Jaki jest rozkład elektronów w atomach, jak położone są względem siebie atomy w cząsteczce, jakie jest ułożenie elementów sieci krystalograficznej — oto przykłady pytań dotyczących struktury. Odpowiedzi na te pytania determinują wiele własności układów makroskopowych. Wymienione przykłady dotyczą stanów, w których czas nie odgrywa zasadniczej roli; są to układy statyczne.

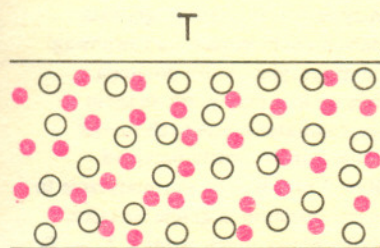
Czym charakteryzują się natomiast stany dynamiczne, w których własności układu ulegają zmianie w czasie? II zasada termodynamiki orzeka, że stany takie zmierzają samorzutnie do stanów statycznych, tj. niezależnych od czasu, zwanych stanami równowagi termodynamicznej. Statystyczna interpretacja II zasady termodynamiki zaproponowana przez Boltzmanna widzi w dążeniu do równowagi termodynamicznej przejście od stanów mniej do bardziej prawdopodobnych. W makroskopowym ujęciu oznacza to przechodzenie od stanów bardziej uporządkowanych do mniej uporządkowanych. Ta tendencja do maksymalizacji chaosu leży u podstaw koncepcji Boltzmanna o tzw. śmierci cieplnej Wszechświata. Ta myśl wyraża katastroficzną wizję przyszłości, w której zanikną wszelkie stany dynamiczne.

W ujęciu Boltzmanna każdy proces nieodwracalny stanowi część realizacji tego ogólnego programu dążenia do wzrostu nieporządku, do destrukuryzacji otaczającej nas rzeczywistości. Ta prosta i logiczna koncepcja kłóci się pozornie z obrazem, jaki obserwujemy w przyrodzie żywej. Tutaj w toku ewolucji z prostych układów powstawały struktury coraz bardziej złożone.

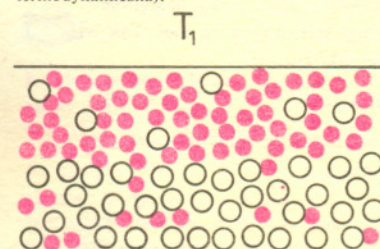
Ten strukturotwórczy charakter układów biologicznych nie jest sprzeczny z II zasadą termodynamiki. Takie układy są z reguły otwarte względem otoczenia, podczas gdy zasada dążenia do maksimum nieporządku dotyczy układów zamkniętych. Prawdą jest natomiast również, że II zasada w interpretacji Boltzmanna nie jest w stanie nam wytłumaczyć, dlaczego ustroje żywe istnieją i dlaczego ich rozwój stanowi nieprzerwane dążenie do coraz wyższych struktur. Tak więc pomiędzy tradycyjnym podejściem Boltzmanna do równowagi termodynamicznej układów zamkniętych a strukturami powstającymi w przyrodzie ożywionej wydaje się istnieć wyraźna luka wymagająca nowego podejścia. Jednym z aspektów tego zagadnienia jest pytanie — jak wytłumaczyć z fizyko-chemicznego punktu widzenia powstawanie ustrojów żywych?

## Proces nieodwracalny to niekoniecznie tylko wzrost nieporządku

Dążeniu do równowagi termodynamicznej towarzyszy wyrównywanie różnic parametrów intensywnych układu, np. różnic temperatury w procesie przewodnictwa ciepła, różnic stężeń (dokładniej potencjału chemicznego) w procesie dyfuzji, różnic szybkości makroskopowej w procesie przepływu lepkościowego, różnicy powinowactwa chemicznego w reakcji chemicznej. Każdy z wymienionych procesów ma charakter nieodwracalny, tzn. zachodzi jednokierunkowo z tendencją do niwelowania wymienionych wyżej różnic. Jeżeli dany proces transportu przeprowadzimy w układzie zamkniętym, to niwelacja taka jest równoznaczna ze wzrostem nieporządku. Ten wzrost nieporządku w procesie nieodwracalnym może jednak nie wyczerpywać całości zagadnienia, jeśli układ jest otwarty. Rozpatrzmy tutaj jako prosty przykład stacjonarne przewodzenie ciepła w układzie złożonym z dwóch składników (np. dwa różne związki chemiczne lub dwa izotopy tego samego pierwiastka). Rys. 1a przedstawia schematycznie sytuację przed przyłożeniem różnicy temperatury do równoległych płytek metalowych, między którymi znajduje się wspomniana dwuskładnikowa mieszanina. W tym stanie mieszanina jest jednorodna, tzn. względny rozkład obu składników jest całkowicie losowy. Jeżeli temperatura górnej płytki ( $T_1$ ) będzie wyższa niż temperatura płytki dolnej ( $T_2$ ), to po pewnym czasie we wzajemnym rozkładzie składników zajdzie zmiana przedstawiona schematycznie na rys. 1b. Składnik cięższy będzie wzbogacony w okolicy płytki o niższej



Rys. 1a. Schemat rozkładu cząstek układu dwuskładnikowego w warunkach izotermicznych (równowaga termodynamiczna).



$$T_1 > T_2$$

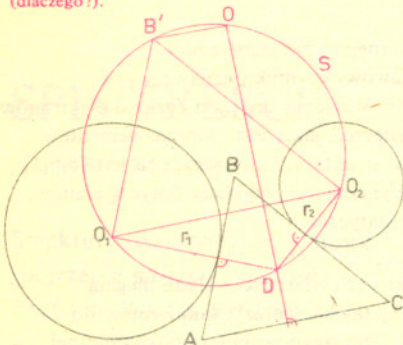
Rys. 1b. Schemat rozkładu cząstek układu dwuskładnikowego w stacjonarnych warunkach politermicznych.





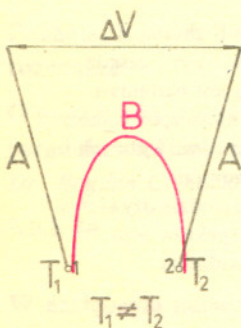
### Rozwiązanie zadania M 305.

Niech środkami podanych w zadaniu okręgów będą  $O_1$  i  $O_2$  i niech  $B'$  będzie takim punktem, że  $O_1B' \parallel AB$ ,  $O_2B' \parallel CB$ .  
 Ponieważ  $\sphericalangle O_1B'O_2 = \sphericalangle ABC$ , więc  $B'$  porusza się po pewnym łuku okręgu  $s$ .  
 Równocześnie odległość  $B'$  od prostej  $AB$  jest stała i równa  $r_1$ , podobnie odległość  $B'$  od prostej  $BC$  jest stała równa  $r_2$ . Wynika stąd, że i odległość  $B'$  od prostej  $AC$  jest stała (dlaczego?).



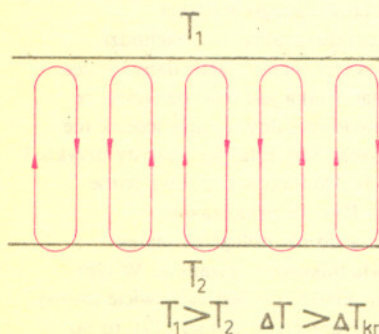
Niech  $D$  będzie punktem przecięcia prostych  $O_1D \perp AB$  i  $O_2D \perp BC$ . Ponieważ kąty  $B'O_1D$  i  $B'O_2D$  są proste,  $D$  leży na okręgu  $s$ . Niech teraz  $O$  będzie punktem okręgu  $s$  takim, że  $OD \perp AC$ . Mamy  $\sphericalangle O_1DO = \sphericalangle BAC = \text{const}$  i wobec tego łuk  $O_1O$  okręgu  $s$  jest stały, a więc punkt  $O$  pozostaje nieruchomy przy ruchu  $\Delta ABC$ .

Równocześnie  $\sphericalangle B'OD = \sphericalangle B'O_2D = \frac{\pi}{2}$  i  $B'O \parallel AC$ , a więc odległość  $O$  od boku  $AC$  pozostaje stała, czyli  $AC$  ślizga się po pewnym okręgu o środku  $O$ .



Rys. 2. Schemat termopary dla ilustracji efektu Seebecka (powstawanie różnicy potencjału elektrycznego w warunkach politermicznych).

O niestabilności Benarda pisaliśmy w Delcie 4/1981.



Rys. 3. Schemat komórek konwekcyjnych w niestabilności Benarda.

temperaturze, a składnik lżejszy będzie gromadził się przy płytce o temperaturze wyższej. Procesowi przewodnictwa cieplnego między płytkami o różnej temperaturze towarzyszy więc proces częściowego rozdziału składników wypełniających przestrzeń między płytkami. Proces ten zwany jest termodyfuzją. Oznacza on, że całkowicie nieuporządkowany w warunkach stałej temperatury układ przechodzi w warunkach istnienia różnicy temperatury w układ częściowo uporządkowany. A zatem nieodwracalny proces przewodnictwa ciepła jest nie tylko związany z dyssypacją (rozpraszaniem) energii — która musi być ciągle dostarczana z zewnątrz w celu utrzymania stałej różnicy temperatur między płytkami — ale równocześnie prowadzi do zmniejszenia istniejącego nieporządku. Jest to przykład zjawiska, w którym część energii swobodnej traconej w procesie nieodwracalnym jest zużywana na porządkowanie układu — to zaś jest równoznaczne z częściowym magazynowaniem energii.

W obrębie tzw. liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych znamy wiele przykładów podobnych efektów, zwanych efektami krzyżowymi. Wspomnijmy tu jeszcze o jednym, który może być bardziej przekonujący, jeżeli chodzi o użyteczną zamianę energii towarzyszącą procesowi nieodwracalnemu. Chodzi tutaj o tzw. efekt Seebecka, przedstawiony schematycznie na rys. 2. Metale  $A$  i  $B$  są ze sobą połączone w punktach 1 i 2, które utrzymujemy w różnych temperaturach. Nieodwracalnemu procesowi przepływu ciepła między spoinami towarzyszy powstanie różnicy potencjału elektrostatycznego na końcach obu drutów metalu  $A$ . Ta różnica potencjałów może być źródłem energii elektrycznej. Tak więc i tutaj mamy do czynienia z częściową użyteczną zamianą energii w procesie nieodwracalnym. Ponownie zatem w wyniku procesu transportu powstaje nie tylko nieporządek, ale równocześnie obserwujemy powstanie elementów struktury.

Struktury, które powstają w wyniku dyssypacji energii swobodnej, nazywamy strukturami dyssypacyjnymi. W odróżnieniu od omawianych na wstępie struktur statycznych jest to strukturyzacja dynamiczna, opłacana przez zachodzący równocześnie proces nieodwracalny — i najczęściej utrzymywana tak długo, jak długo zachodzi ten proces. Struktury takie są drogie. Efektywność procesu rozdzielczego w termodyfuzji lub procesu zamiany energii wewnętrznej w elektryczną w efekcie Seebecka jest bardzo mała. Istotne jest tutaj przede wszystkim to, że struktury takie powstają spontanicznie w równie spontanicznych procesach dyssypacji energii swobodnej. Jest to pozornie sprzeczne z klasyczną interpretacją II zasady, podaną przez Boltzmanna. Należy jednak z całym naciskiem stwierdzić, że omawiane wyżej stacjonarne struktury dyssypacyjne wymagają układów otwartych, w których przebiegają stacjonarne procesy nieodwracalne podtrzymujące istnienie tych struktur.

W powyższych przykładach prostych struktur dyssypacyjnych odległość od stanu równowagi (w przypadku termodyfuzji i efektu Seebecka — wartość różnicy temperatur) nie odgrywała zasadniczej roli. Te efekty pojawiają się nawet przy bardzo małych odchyleniach od równowagi termodynamicznej. Daleko bardziej interesujące są struktury dyssypacyjne, które powstają w stanach dalekich od równowagi termodynamicznej. Pojawiają się one przy przekroczeniu pewnej krytycznej odległości od stanu równowagi — mają więc charakter nieciągłych przejść fazowych znanych z klasycznej termodynamiki. Rozpatrzmy tutaj bardzo prosty przykład z hydrodynamiki, znany pod nazwą niestabilności Benarda. Rys. 3 przedstawia schematycznie to zagadnienie. Między dwiema równoległymi płytkami, położonymi poziomo znajduje się ciecz. Płytkę dolną utrzymywana jest w temperaturze wyższej niż płytkę górną. Jeżeli różnica  $T_1 - T_2$  leży poniżej pewnej krytycznej wartości  $\Delta T_{kr}$ , to w cieczy następuje proces przewodnictwa ciepła bez ruchu cieczy. Natomiast przy różnicy temperatury większej od wartości krytycznej pojawia się prąd konwekcyjny, który jest schematycznie zaznaczony na rys. 3. Powstają bardzo symetryczne komórki konwekcyjne, które w porównaniu z cieczą będącą w bezruchu są niewątpliwie nowym elementem struktury. To częściowe uporządkowanie cieczy następuje dopiero po przekroczeniu pewnej odległości od stanu równowagi termodynamicznej. Tak więc przewodzenie ciepła między płytkami może się odbywać w dwojaki sposób:

w sposób bezkonwekcyjny — jeżeli jesteśmy blisko stanu równowagi, z udziałem konwekcji — jeżeli przekroczyliśmy pewną krytyczną wartość różnicy temperatury. Ta krytyczna wartość zależy od geometrii układu i własności cieczy.

### Reakcje chemiczne mogą mieć charakter periodyczny

Pojedyncza reakcja chemiczna przebiega w czasie w sposób monotoniczny, tj. gdy startujemy z pewnego odchylenia od położenia równowagi w wyniku reakcji zbliżamy się do niej jednokierunkowo. Inna może być sytuacja, jeżeli ma miejsce sprzężenie między kilkoma reakcjami chemicznymi i jeżeli odchylenie od stanu równowagi jest dostatecznie duże. Może się

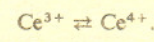




Rys. 4. Schemat przestrzennej struktury dyssypacyjnej w reakcji Bielousowa-Żabotyńskiego.

wtedy okazać, że stężenie niektórych składników reagujących zmienia się w czasie nie monotonicznie, a periodycznie. Periodyczność może dotyczyć nie tylko zależności od czasu, ale może następować również w przestrzeni. Takie czasowo-przestrzenne „fale chemiczne” można uważać za wyraz struktury powstającej w toku dyssypacji energii swobodnej, jaka ma miejsce w każdej spontanicznej reakcji chemicznej. Obserwowany wzrost uporządkowania jest tym razem „opłacany” przez degradację energii chemicznej.

Bardzo efektywnym przykładem chemicznej struktury dyssypacyjnej jest reakcja wykryta w r. 1959 w Związku Radzieckim przez Bielousowa, a później obszerniej badana przez Żabotyńskiego i odtąd wiązana z nazwiskami obu badaczy. Czasowo-przestrzenną periodyczność obserwuje się tutaj w procesie redukcji i utleniania jonów cerowych:



Reakcję prowadzi się w roztworze wodnym siarczanu ceru, bromku potasu, kwasu malonowego i kwasu siarkowego. Dodając do tego roztworu feroinę jako wskaźnik, obserwujemy nadmiar jonów czterowartościowego ceru jako zabarwienie niebieskie, natomiast nadmiar jonów trójwartościowego ceru daje zabarwienie czerwone roztworu. Sporządzając roztwór o odpowiednich stężeniach wspomnianych składników możemy zmianę barwy z czerwonej na niebieską obserwować w danym obszarze roztworu jako funkcję czasu (periodyczność w czasie) lub w danym momencie jako uporządkowaną strukturę przestrzenną (periodyczność w przestrzeni). W tym ostatnim przypadku pewne obszary roztworu będą zabarwione na czerwono, inne natomiast na niebiesko. Prowadząc omawianą reakcję w probówce możemy obserwować zachowanie przedstawione schematycznie na rys. 4. W równoległe położonych warstwach następują kolejne zmiany barw niebieskiej i czerwonej.

Reakcja Bielousowa-Żabotyńskiego jest tylko jednym z wielu przykładów periodycznego zachowania się procesów chemicznych. Wiele takich przykładów zna elektrochemia jak również kinetyka procesów katalitycznych. Podobny przebieg mogą mieć reakcje związane z wytwarzaniem nowych faz.

### A co z biologią?

Periodyczne przebiegi czasowo-przestrzenne są potocznym zjawiskiem w biologii. Rytmiczne zmiany różnych form aktywności organizmów żywych począwszy od bicia serca u ssaków do powtarzających się procesów podziału komórkowego w prymitywnych formach życia, dają wiele przykładów strukturyzacji czasowo-przestrzennej w ustrojach żywych. Ponieważ chemizm jest motorem tych przebiegów, dlatego w prostych modelach chemicznych struktur dyssypacyjnych szukać należy pierwowzorów tego bogactwa struktur, które prezentuje nam przyroda żywa. Każdy żywy ustrój istnieć może jedynie jako układ otwarty, wymieniający składniki chemiczne i energię z otoczeniem. Mamy tutaj zatem spełniony ten sam warunek, który był tak istotny przy omawianiu prostych struktur dyssypacyjnych. Reakcje chemiczne przez możliwe sprzężenia (powiązanie ze sobą różnych etapów elementarnych), przez szeroki wachlarz bardzo szybkich czy powolnych przebiegów, przez dużą czułość poszczególnych reakcji na obecność katalizatorów, stwarzają prawdziwą dżungłę możliwości dla powstawania struktur dyssypacyjnych w stanach dalekich od równowagi termodynamicznej. Jeżeli dodamy do tego bogactwo struktur, zwłaszcza przestrzennych, charakteryzujące związki organiczne, a w szczególności układy makromolekularne — zrozumiemy, że życie powstać mogło tylko na bazie chemii organicznej, zwłaszcza wielkocząsteczkowej. Lapidarnie rzecz ujmując można wszystkie układy biologiczne uważać za struktury dyssypacyjne, powstałe w układzie otwartym, jaki stanowi nasza Ziemia w odniesieniu do Słońca. Promieniowanie elektromagnetyczne zasila energetycznie w sposób ciągły naszą Ziemię. W strumieniu tego promieniowania, którego temperatura daleka jest od temperatury atmosfery ziemskiej, możliwe są reakcje chemiczne, zwłaszcza fotochemiczne, które prowadzą do nowych układów o wysokim stopniu strukturyzacji. Każdy etap rozwojowy życia stanowi w pewnym stopniu nową, wyższą strukturę dyssypacyjną. Zauważmy przy tym, że tylko niewielka część padającego na Ziemię promieniowania słonecznego przekształcana jest w biologiczne struktury dyssypacyjne. Spotykamy tutaj zatem tę samą cechę, którą zauważyliśmy już w prostych strukturach dyssypacyjnych — mianowicie wysoki koszt uporządkowania następującego w toku procesów nieodwracalnych. Z drugiej jednak strony należy zauważyć, że powstające w procesach nieodwracalnych struktury „magazynują” w pewnym stopniu przynajmniej część tej energii, która przekształciłaby się w mniej efektywne formy, gdyby struktury dyssypacyjne nie powstawały. Przypomnijmy tutaj proces termodyfuzji, gdzie małą wprawdzie, ale wymierną część energii degradującej się w procesie przewodnictwa cieplnego „ratujemy” przez częściowy rozdział składników, co stanowi pewien zasób energii swobodnej, możliwej do użytecznego przekształcenia. Taką samą rolę odgrywają ustroje żywe w stosunku do promieniowania



**Rozwiązanie zadania M 306.**  
 Mamy  $x \cdot \prod \dots 1 - y \cdot \prod \dots 1 =$   
 $= z^2(11 \dots 1)^2$  i ponieważ  $11 \dots 1 =$   
 $= \frac{10^k - 1}{10 - 1}$ , więc  
 $9x(10^{2n} - 1) - 9y(10^n - 1) = z^2(10^n - 1)^2$ ,  
 czyli  $9x(10^n + 1) - 9y = z^2(10^n - 1)$ , skąd  
 $(9x - z^2)10^n = 9y - 9x - z^2$  dla dwóch  
 różnych wartości  $n$ :  
 $(9x - z^2)10^{n+1} = 9y - 9x - z^2 = (9x - z^2)10^{n+2}$ .  
 Wynika stąd, że  $9x = z^2$  i  $9y - 9x - z^2 = 0$ ,  
 skąd  $x = \frac{y}{2} = \left(\frac{z}{3}\right)^2$ . Ponieważ równocześnie  
 $0 \leq x, y, z \leq 9$  mamy dwa rozwiązania 1, 2, 3  
 i 4, 8, 6 spełniające podane równanie dla  
 wszystkich naturalnych  $n$ .





Rozwiązanie zadania M 304.

Gdy  $n = 1$ , mamy po prostu  $\sin\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Załóżmy teraz, że wzór (\*) zachodzi dla dowolnego ciągu  $(e_1, \dots, e_n)$  o długości  $n$ . Rozpatrzmy ciąg  $(e_1, \dots, e_{n+1})$ . Mamy

$$2 \cdot \left( e_1 + \frac{e_2}{2} + \dots + \frac{e_{n+1}}{2^n} \right) \frac{\pi}{4} = e_1 \frac{\pi}{2} + e_1 \left( e'_1 + \dots + \frac{e'_n}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{4},$$

gdzie  $e'_i = \frac{e_{i+1}}{e_i}$ . Oznaczając  $x =$

$$= \left( e'_1 + \dots + \frac{e'_n}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{4} \text{ mamy}$$

$$\cos\left(e_1 \frac{\pi}{2} + e_1 x\right) = -\sin x =$$

$$= -\frac{1}{2} e'_1 \sqrt{2 + f'_1 \sqrt{2 + \dots + f'_n \sqrt{2}}}$$

Ale  $f'_i = f_{i+1}$ ,  $e'_1 = f_2$  i ze wzoru  $2 \sin \frac{t}{2} =$

$$= \pm \sqrt{2 - 2 \cos t} \text{ mamy}$$

$$2 \sin \left( \left( e_1 + \frac{e_2}{2} + \dots + \frac{e_{n+1}}{2^n} \right) \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= e_1 \sqrt{2 + e'_1 \sqrt{2 + \dots + f'_n \sqrt{2}}} =$$

$$= f_1 \sqrt{2 + f_2 \sqrt{2 + \dots + f_{n+1} \sqrt{2}}}$$

Wśród dotychczas odkrytych planetoid, tych które otrzymały nazwy własne, oprócz numeru, 12 ma polskie imiona. Są to:

nazwa	numer	średnica w km
Dembowska	349	290
Valeska	610	24
Wanda	1057	34
Polonia	1112	57
Sniadecka	1262	57
Varsavia	1263	88
Banachiewiczza	1286	50
Bronisława	1315	66
Copernicus	1322	15
Wawel	1352	38
Zamenhof	1462	21
Posnania	1572	55

Faeton — syn Heliosa, który pozwolił mu przez jeden dzień powozić rydwanem słonecznym. Niewprawy Faeton spowodował katastrofę — uderzył w Ziemię, co pociągnęło za sobą m.in. wyparowanie oceanów i zamianę bujnie kwitnącej północnej Afryki w puszynię.

słonecznego. Bez ich udziału degradacja energii promieniowania byłaby większa. Struktury dyssypacyjne „ratują” więc w pewnym sensie to, co daje się uratować w warunkach nieprzerwanej degradacji energii.

## Koncepcja integrująca różne dyscypliny

Pojęcie struktury dyssypacyjnej nie ogranicza się swoim zasięgiem do nauk przyrodniczych. Fakt powstawania nowych form strukturalnych — zwłaszcza w stanach dalekich od równowagi — może być ewidentny np. w różnych przejawach działalności ludzkiej. Nowe struktury organizacyjne w życiu społecznym, gospodarczym czy kulturalnym nie są pozbawione podobieństw z przedstawionymi wyżej prostymi modelami struktur dyssypacyjnych w fizyce i chemii. Wspólne jest działanie w warunkach otwartych układów, wymieniających informację i dobra materialne, wspólny jest przebieg w warunkach degradacji energii swobodnej, której tylko część przekształcamy w postać trwałych „struktur dyssypacyjnych” w postaci dzieł sztuki, różnych obiektów materialnych itp. Czy rozwój kulturalno-cywilizacyjny ludzkości nie zmierza również do coraz to wyższych struktur? Oczywiście zahaczamy tutaj wyraźnie o aspekt filozoficzny koncepcji struktur dyssypacyjnych.

Powyższe uwagi mają nam uprzytomnić fakt, że chodzi tutaj o koncepcję integrującą poszczególne dyscypliny naukowe. Koncepcja ta daleka jest od pełnego wykorzystania, dlatego zgodzić się należy ze zdaniem pewnego amerykańskiego uczonego, który kilka lat temu na konferencji poświęconej znaczeniu struktur dyssypacyjnych w medycynie stwierdził: „ludzkość potrzebowała około stu lat, aby właściwie wyekspluataować koncepcję mechaniki Newtona w astronomii, tyleż mniej więcej czasu potrzeba było biologii, aby zastosować w różnych aspektach koncepcję ewolucji gatunków Darwina. Zachodzi pytanie, ile czasu będziemy potrzebowali, aby w pełni wykorzystać koncepcję struktury dyssypacyjnej?”

## Patrz w niebo

Odkryta w 1766 roku przez niemieckiego astronoma *J. D. Titiusa* i spopularyzowana przez dyrektora obserwatorium berlińskiego *J. E. Bodego* empiryczna formuła przewidywała, że pomiędzy Marsem a Jowiszem powinna krążyć jeszcze jedna planeta w odległości ok. 2,8 jednostki astronomicznej (j. a.), której dotychczas nie odkryto. W 1800 roku sześciu obserwatorów niemieckich rozpoczęło systematyczne poszukiwania brakującej planety. Lecz los w takich przypadkach często bywa złośliwy. W Sylwestra 1800 roku nocny dyżur w Obserwatorium w Palermo (Sycylia) przypadł *Giuseppe Piazziemu*. Włoch, zły, że mu przypadł bal, nie wiedział jeszcze, że ta noc przyniesie mu światową sławę. Otóż obserwując niebo odkrył właśnie tej nocy nową nieznaną planetę. Nazwał ją Ceres na cześć bogini płodności i dobrych zbiorów — patronki Sycylii. Planeta ta obiega Słońce w czasie 4 lat 7 miesięcy i 6 dni, średnio odległa jest od Słońca o 2,77 j. a., zgodnie z formułą Titiusa — Bodego. Niedługo później, w 1802 roku Olbers odkrył drugie podobne ciało krążące po podobnej orbicie — Pallas. Potem posypały się dalsze odkrycia. Wszystkie nowo odkryte obiekty miały jedną cechę wspólną — bardzo słabo świeciły, co mogło świadczyć o ich małych rozmiarach. Zamiast więc jednej planety w podejrzanym miejscu odkryto wiele małych planetoid. Dotychczas odkryto i zarejestrowano ponad 2 tysiące tych ciał. Wiele z nich odbiega swymi właściwościami od cech „standardowych”. Niektóre zapędzają słońce bliżej Słońca niż Merkury (Ikar) lub dalej niż Saturn (1977UB). Inne są związane w punktach libracyjnych Jowisza i innych planet (patrz artykuł T. Kwasta w poprzednim numerze).

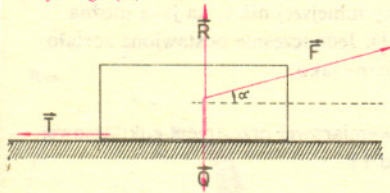
Jak wskazują obserwacje zmian jasności planetoid mają one często nieregularne kształty. Największe mają kształt kulisty, mniejsze jednak często są wydłużone lub płaskie, niektóre nawet mają kształt hantli. W 1979 roku zaobserwowano nawet układ podwójny planetoid obiegających się nawzajem w czasie ok. 15 minut. Średnice planetoid wyznacza się przeważnie z czasu trwania zaćmienia jakiejś gwiazdy przez daną planetoidę. Największe mają ponad 500 km (Ceres — 1080, Vesta — 540), najmniejsze odkryte dotychczas ok. 1 km. Prawdopodobnie istnieje więc ciągle przejście między planetoidami a meteorami. Zakładając, że gęstość materii planetoid nie różni się wiele od gęstości planet, można łatwo wyliczyć ich masy (co pozostawiamy Czytelnikowi). Łączna suma tych mas wynosi mniej więcej 0,008 masy Ziemi, a razem z masą większych i mniejszych meteorów mogących krążyć pomiędzy orbitami Marsa i Jowisza na pewno nie więcej niż 0,1 masy Ziemi. Jest to masa nieco mniejsza niż masa Marsa. Może więc wszystkie te ciała powstały z rozpadu jakiejś domniemanej planety krążącej kiedyś na orbicie za Marsem? Nikt na razie nie potrafi dać odpowiedzi na to pytanie, zaproponowano już jednak nazwę dla tej hipotetycznej praplanety — Faeton.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



## Rozwiązanie zadania F 119.

Przyjmijmy, że na klocek działa oprócz siły ciężkości  $Q$  oraz reakcji podłoża  $R$  siła  $F$  tworząca z poziomem kąt  $\alpha$  (rysunek). Jeżeli siła ta nie jest skierowana pionowo, pojawia się dodatkowo siła tarcia. Klocek rozpocznie ruch po płaszczyźnie, gdy wartość składowej poziomej siły  $F$  będzie większa od maksymalnej siły tarcia statycznego ( $T$ ).



Z warunku równowagi siły ciężkości, siły reakcji i składowej pionowej siły  $F$  otrzymujemy

$$R = Mg - F \cdot \sin \alpha.$$

Ponadto  $T = fR$ , gdzie  $f$  — współczynnik tarcia statycznego. Klocek rozpocznie ruch, gdy

$$F \cdot \cos \alpha \geq f(Mg - F \cdot \sin \alpha).$$

Niezbędna do przesunięcia klocka siła jest więc funkcją kąta  $\alpha$  :

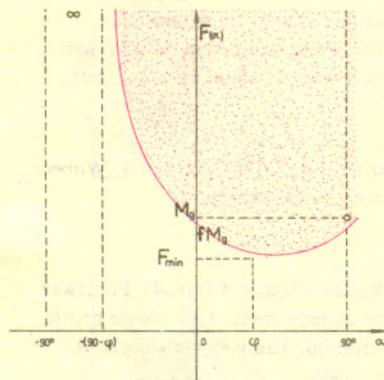
$$F(\alpha) = \frac{fMg}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha}.$$

Aby znaleźć jej przebieg i poszukiwane w zadaniu minimum dokonajmy podstawienia  $f = \tan \varphi$  ( $\varphi$  nazywane bywa kątem tarcia; jaki jest sens fizyczny tego kąta?). Po przekształceniach

$$F(\alpha) = \frac{Mg \sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

oraz

$$F_{\min} = Mg \sin \varphi = \frac{fMg}{\sqrt{1+f^2}}.$$



Szkic wykresu  $F(\alpha)$  dla typowego przypadku  $f < 1$  zamieszczono powyżej. Klocek możemy również przesunąć popychając go (z jednoczesnym naciskiem). Jednakże przekroczenie kąta  $\varphi$  (licząc od normalnej) uniemożliwia poślizg, niezależnie od wartości przyłożonej siły. Efekt powyższy wykorzystywany bywa w wielu urządzeniach technicznych.

Jedną z fundamentalnych zasad termodynamiki — tzw. II zasada — określa zmiany entropii w izolowanych układach statystycznych, tzn. takich układach wielu cząstek, dla których zachowuje się całkowita energia, a więc nie ma wymiany informacji z otoczeniem układu. Wskutek rzeczywistych (nieodwracalnych) procesów zachodzących w takim układzie entropia układu powinna rosnąć. Entropię można interpretować (pomysł Boltzmann) jako stopień chaosu układu, jego nieuporządkowania. Dla każdego układu można wyobrazić sobie stan chaosu kompletnego. Taki stan nie zawiera w sobie żadnej informacji i do niego powinny, według II zasady doprowadzić zachodzące w układzie procesy. Chaos to nie tylko równomierne rozprowadzenie energii po całym układzie, ale też brak jakichkolwiek struktur w rozkładzie przestrzennym cząstek.

I tu stajemy przed zagadką, na którą pierwszy zwrócił uwagę Clausius. Przyjrzyjmy się bliżej największemu z dostępnych nam układów. Wszechświat żyje i ewoluuje już 10 mld lat. Jakoś nie widać, aby w przeszłości i obecnie przejmował się obowiązkiem wprowadzania bałaganu na swoim terenie. Obserwacje wskazują raczej na coś przeciwnego. Zarówno w dużych, jak i małych skalach rodziły się i rodzą nowe obiekty: supergromady galaktyk, gromady galaktyk, galaktyki i wreszcie gwiazdy. Niewielkie zaburzenia w początkowym jednorodnym rozkładzie gęstości materii dzięki ekspansji Wszechświata narastają. Z czasem kontrast gęstości staje się znaczny i obszary zagęszczone zaczynają zapadać się grawitacyjnie. Tak powstają supergromady i gromady galaktyk. Natomiast dalsze, lokalne zagęszczanie się materii w tych obiektach prowadzi do formacji galaktyk i gwiazd.

Czy jest zatem szansa, że zgodnie z ideą II zasady termodynamiki obecne struktury zaginą i Wszechświat osiągnie stan śmierci cieplnej? W różny sposób próbowano ten problem wyjaśnić. Według Boltzmann Wszechświat już jest w takim stanie, a obszar dostępny naszym obserwacjom stanowi gigantyczną fluktuację statystyczną. W tym obszarze została złamana II zasada (pamiętajmy o jej statystycznym charakterze). Jednakże prawdopodobieństwo powstania fluktuacji statystycznej o kosmologicznym znaczeniu jest znikome.

Większość fizyków powątpiewała natomiast w zasadność traktowania Wszechświata jako układu izolowanego.

Tymczasem istota tego paradoksu leży gdzie indziej. Entropia jest rzeczywiście miarą nieuporządkowania, ale pod warunkiem, że opisuje układ cząstek oddziałujących tylko siłami krótkozasięgowymi. A przecież Wszechświat wypełniony jest cząstkami oddziałującymi ze sobą grawitacyjnie. Całkowita energia układu to teraz nie tylko suma energii kinetycznych wszystkich cząstek. Pojawia się dodatkowo energia ich oddziaływań grawitacyjnych. Pojawiają się też nietrywialne, związane z tym konsekwencje. Dla takiej sytuacji stwierdzenie, że układ osiągnął stan maksymalnej entropii

nie jest równoważne stwierdzeniu, że

cząstki są równomiernie rozłożone w całej dostępnej im przestrzeni, a w każdym punkcie przestrzeni rozkład ich prędkości (energii) jest identyczny.

Obserwowana przez nas tendencja do koncentrowania się materii w niezależne obiekty nie stanowi pogwałcenia II zasady termodynamiki. Procesom tym towarzyszy stały wzrost entropii. Jest to możliwe, ponieważ prawdopodobieństwo zaistnienia określonego stanu układu to iloczyn prawdopodobieństwa przestrzennego rozkładu cząstek i prawdopodobieństwa tego, że cząstki mają dane prędkości. Koncentracja materii prowadzi do zmniejszenia się tego pierwszego, ale prawdopodobieństwo prędkości rośnie tak, że rośnie cały iloczyn, a co za tym idzie i entropia.

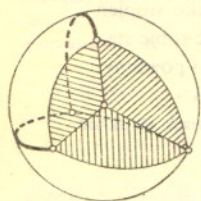
Zatem struktury o pochodzeniu grawitacyjnym w naszym Wszechświecie nie przeczą zasadzie wzrostu entropii całego Wszechświata, a z zasady wzrostu entropii nie wynika jego „śmierć cieplna”.



Numery w kwadratowych nawiasach stanowią odnośniki do cytowanej poniżej literatury. Ponad 60 dalszych prac o problemie Borsuka cytuje B. Grünbaum w przeglądowym artykule [5].

# Wokół słynnego problemu Borsuka o podziale

Dr Marek LASSAK



Rys. 1

W 1933 r. czasopismo *Fundamenta Mathematicae* opublikowało pracę Karola Borsuka pt. „Trzy twierdzenia o  $n$ -wymiarowej sferze euklidesowej” [1]. Jedno z tych twierdzeń można sformułować następująco: najmniejsza liczba części o średnicy mniejszej niż 1, na jaką można podzielić  $n$ -wymiarową kulę o średnicy 1, wynosi  $n+1$  (rys. 1). Jednocześnie postawione zostało pytanie o zamianę kuli na dowolny zbiór, szeroko obecnie znane jako

**Problem Borsuka.** Czy każdy zbiór o średnicy 1 leżący w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$  da się podzielić na  $n+1$  części o średnicach mniejszych od 1?

Na pytanie to próbowało odpowiedzieć wielu matematyków. Dla  $n = 2$  odpowiedź jest dość prosta, lecz dla  $n = 3$  pozytywne rozwiązanie opublikowano dopiero w 1955 r. Dla  $n = 4$  odpowiedź nie jest znana do dzisiaj. Podobnie jak i dla innych słynnych problemów zmiennych jest tu głęboka przepaść między prostotą pytania a olbrzymimi trudnościami (rachunkowymi, teoretycznymi) w udzieleniu odpowiedzi.

Wiadomo, że średnica zbioru nie zwiększa się, gdy tworzymy jego domknięcie. Wobec tego problem Borsuka wystarczy rozwiązać dla zbiorów domkniętych. W artykule ograniczymy się więc do rozważania jedynie zbiorów domkniętych i, co jest oczywiste, ograniczonych. Jest to o tyle korzystne, że średnica realizuje się wtedy dla pewnej pary punktów, tzn. że średnica takiego zbioru równa się maksymalnej odległości jego punktów.

**Zadanie.** Wykazać, że gdy trójkąt opisany na ograniczonej domkniętej figurze  $A$  będziemy „obracać” tak, aby jego kąty były stałe, a boki zawsze podpierały  $A$ , to długości tych boków będą się zmieniać w sposób ciągły.

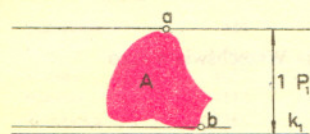
## Rozwiązanie dla $n = 2$

Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem o średnicy 1. Jak mówiliśmy wcześniej, bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że  $A$  jest domknięte. Niech  $k_1, k_2, k_3$  będą trzema kierunkami tworzącymi kąt  $60^\circ$ .

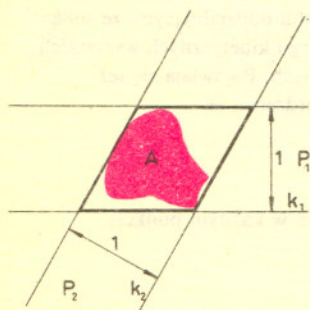
1. Utwórzmy najmniejszy pas o kierunku  $k_1$  zawierający  $A$  (rys. 2). Taki pas oczywiście istnieje — jako przekrój wszelkich półpłaszczyzn ograniczonych prostymi równoległymi do  $k_1$  i zawierającymi  $A$ . Ponieważ zbiór  $A$  jest domknięty i ograniczony, znajdują się w nim takie punkty  $a$  oraz  $b$ , które leżą na prostych ograniczających ten pas. Ponieważ odległość  $a$  i  $b$  nie przekracza 1, więc szerokość pasa nie przekracza 1. Z pewnością więc  $A$  mieści się w pasie  $P_1$  o szerokości 1 równoległym do  $k_1$ .

2. Analogicznie tworzymy pewien pas  $P_2$  o szerokości 1 i kierunku  $k_2$ , który zawiera  $A$ . Wobec tego  $A$  mieści się w części wspólnej pasów  $P_1$  i  $P_2$ , czyli rombie o kącie ostrym  $60^\circ$  i odległości przeciwległych boków równej 1 (rys. 3).

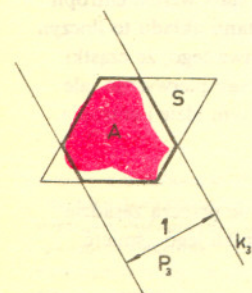
3. Tworzymy teraz pewien pas  $P_3$  o szerokości 1 i kierunku  $k_3$  zawierający  $A$  (rys. 4). Ponieważ  $A$  leży w rombie, można przyjąć, że proste ograniczające  $P_3$  przecinają romb. Oczywiście proste te nie muszą przechodzić w równych odległościach od środka rombu. Tak więc na zbiorze  $A$  został opisany sześciokąt  $S$ , którego przeciwległe boki są równoległe.



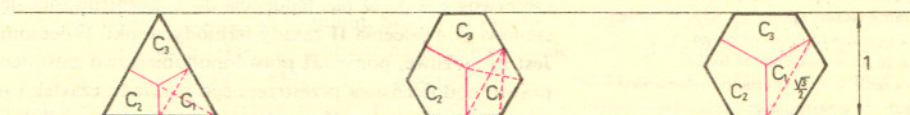
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

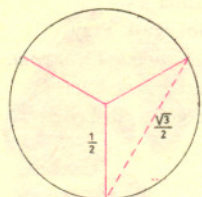
W skrajnym przypadku  $S$  może być trójkątem. Łatwo uzasadnić (np. stosując twierdzenie Talesa), że trzy boki (co drugi) sześciokąta  $S$  są równej długości. Sześciokąt  $S$  dzielimy na trzy części  $C_1, C_2, C_3$  odcinkami łączącymi jego środek ze środkami dłuższych boków (rys. 5). Gdy  $S$  jest sześciokątem foremnym, to jego środek łączymy z co drugim bokiem. W tym ostatnim przypadku średnica każdej części wynosi dokładnie  $\sqrt{3}/2$ . Gdy zaś nie jest foremny, średnice te są nawet mniejsze od  $\sqrt{3}/2$ ; to zadanie dla Czytelnika.





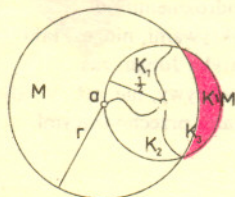
Rys. 6

4. Ponieważ  $A \subset S$ , więc zbiory  $A_1 = A \cap C_1$ ,  $A_2 = A \cap C_2$  i  $A_3 = A \cap C_3$  mają średnice nie większe niż  $\sqrt{3}/2$  (zob. rys. 6). Oczywiście  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . Tym samym istnieje rozbięcie dowolnego zbioru  $A \subset E^2$  o średnicy 1 na trzy zbiory o średnicach nie większych od  $\sqrt{3}/2$ .



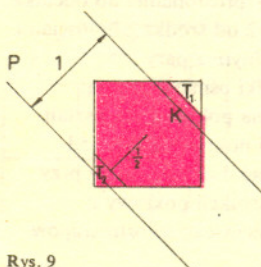
Rys. 7

Zauważmy, że otrzymana liczba  $\sqrt{3}/2$  nie da się już zmniejszyć. Pokazuje to przykład koła  $K$  o średnicy 1 (rys. 7). Przypuśćmy, że  $K$  da się podzielić na trzy części  $K_1, K_2, K_3$  o średnicach mniejszych od  $\sqrt{3}/2$  (rys. 8). Ponieważ przy domknięciu zbioru nie zwiększa się średnica,  $K$  da się pokryć sumą domkniętych zbiorów  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$  o średnicach mniejszych od  $\sqrt{3}/2$ . Oczywiście cały okrąg nie może leżeć całkowicie w jednym z tych zbiorów. Znajdzie się więc taki punkt  $a$  okręgu, który należy do dwóch z tych zbiorów, powiedzmy do  $\bar{K}_1$  i  $\bar{K}_2$ . Ponieważ średnice zbiorów  $\bar{K}_1$  i  $\bar{K}_2$  są mniejsze od  $\sqrt{3}/2$ , więc  $\bar{K}_1$  i  $\bar{K}_2$  leżą w kole  $M$  o środku  $a$  i pewnym promieniu  $r < \sqrt{3}/2$ . Dlatego  $K_3 \supset K \setminus M$ . Średnica zbioru  $K \setminus M$  powinna być więc mniejsza od  $\sqrt{3}/2$ . Tymczasem jak można wywnioskować z rys. 8 przekracza ona  $\sqrt{3}/2$ . **Sprzeczność.**



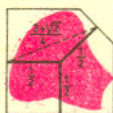
Rys. 8

## Uniwersalne pokrywy



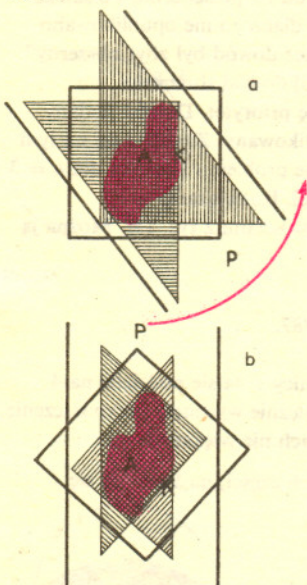
Rys. 9

Zbiór  $U$ , którym można pokryć dowolny zbiór o średnicy 1 nazwiemy uniwersalną pokrywą. Oczywiście cała płaszczyzna czy też pas o szerokości 1 są uniwersalnymi pokrywami w  $E^2$ . Pokrywy te są jednak zbyt duże. Interesują nas uniwersalne pokrywy „małe i zgrabne” w tym sensie, że dadzą się podzielić na 3 (a w przestrzeni  $E^n$  na  $n+1$ ) części o średnicach mniejszych od 1. Sześciokąt  $s$  uzyskany w dowodzie twierdzenia 1 daje się odpowiednio podzielić, ale nie jest uniwersalną pokrywą — może bowiem przyjmować różne kształty w zależności od zbioru nakrywanego. Romb (rys. 3) występujący w dowodzie poprzedniego twierdzenia, jak zresztą dowolny romb o odległości przeciwległych boków równej 1, jest uniwersalną pokrywą. W szczególności jest nią kwadrat o boku 1. Żaden z takich rombów nie da się jednak podzielić na trzy części o średnicach mniejszych niż 1 (dlaczego?).



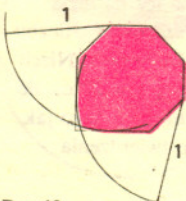
Rys. 10

Czy istnieją więc pokrywy uniwersalne w  $E^2$  dające się podzielić na trzy części o średnicach mniejszych od 1? Okazuje się, że tak. Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem o szerokości 1. Nakryjmy go kwadratem o boku 1 oraz pasem o szerokości 1 równoległym do jednej z przekątnych (rys. 9). Zauważmy, że poza zbiorem  $K \cap P$  pozostaje przynajmniej jeden z trójkątów  $T_1, T_2$  wyciętych z kwadratu  $K$  prostymi równoległymi do pasa i przechodzącymi w odległości 1/2 od środka kwadratu. Powstały pięciokąt (rys. 10) jest uniwersalną pokrywą. Rysunek wskazuje rozbięcie tego pięciokąta na trzy części o średnicach mniejszych od 1. Podana konstrukcja wydaje się być najprostszym uzasadnieniem pozytywnej odpowiedzi na problem Borsuka dla  $n = 2$ . Jest ona jednak gorsza od konstrukcji z punktu 3 w tym sensie, że maksymalna ze średnic podzbiorów zwiększyła się.



Rys. 11

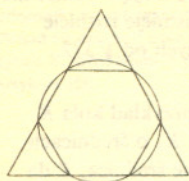
Podobne rozumowanie można powtórzyć dla drugiej przekątnej otrzymując mniejszą uniwersalną pokrywę przez analogiczne obcięcie jednego z sąsiednich rogów. Okazuje się, że kwadrat o boku 1 z obcięciami trzema rogami prostymi równoległymi do przekątnych w odległości 1/2 od środka też jest uniwersalną pokrywą. Aby to wykazać, trzeba się nieco namęczyć. Podamy jedynie wskazówkę — należy kwadrat  $K$  wraz z pasem  $P$  (z rys. 9) tak przemieszczać, aby oba trójkąty  $T_1, T_2$  znalazły się poza pasem  $P$ . Nie unikniemy tu kłopotliwego wykazania ciągłości pewnej funkcji.



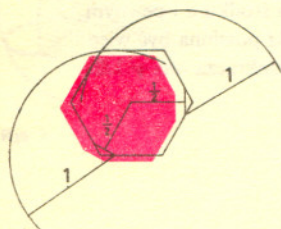
Rys. 12

Kwadrat  $K$  oraz pas  $P$  umieszczamy mianowicie tak, aby pary przeciwległych prostych leżały w równych odległościach od  $A$ . Budujemy (rys. 11a) dwa trójkąty prostokątne opisane na  $A$  o przeciwprostokątnych równoległych do pasa  $P$  i przyprostokątnych równoległych do boków kwadratu  $K$ . Przy tych ograniczeniach „obracamy wokół  $A$ ” kwadrat, pas i trójkąty aż, jak na rys. 11b, te ostatnie staną się przystające (korzystamy tu z wyniku zadania na marginesie). Dzięki symetrii obie proste ograniczające  $P$  znajdują się w odległości 1/2 od środka kwadratu. Obcinamy więc dwa przeciwne rogi kwadratu, a następnie, w wiadomy sposób, jeszcze jeden z dwu pozostałych rogów. Co więcej, i ta pokrywa da się zmniejszyć przez obcięcie ostatniego rogu kwadratu dwoma łukami (rys. 12), co Czytelnik bez trudu uzasadni. Nie wiadomo jednak, czy teraz uzyskana pokrywa da się jeszcze zmniejszyć, tzn. czy jest ona minimalna. Zacytujmy w tym miejscu otwarty problem amerykańskiego matematyka Klee: *podać przykład minimalnej uniwersalnej pokrywy dla  $n = 2$ .*





Rys. 13



Rys. 14

Na uwagę zasługuje pokrywa w kształcie sześciokąta foremnego o odległości przeciwnych boków równej 1 (rys. 5c). Znalazł ją węgierski matematyk Pál. Dowód polega na przemieszczaniu rombu wraz z pasem (rys. 4) aż do położenia, gdy pas odetnie dwa równe trójkąty. Z rezultatu Pála wynika, że uniwersalnymi pokrywami są też trójkąt równoboczny o boku  $\sqrt{3}$  oraz koło o promieniu  $\sqrt{3}/3$  (zob. rys. 13). Z tej sześciokątnej pokrywy nietrudno uzyskać mniejsze pokrywy przez obcięcie niektórych rogów. Na rys. 14 pokazana jest najmniejsza pod względem pola powierzchni dotychczas znana uniwersalna pokrywa. Przy okazji podajmy klasyczny problem Lebesgue'a: znaleźć uniwersalną pokrywę o najmniejszym polu. Mówiąc obrazowo, chodzi o znalezienie najekonomiczniejszej łatki, którą można zaszyć każdą dziurę o średnicy 1. Oczywiście jeżeli znajdzie się rozwiązanie problemu Lebesgue'a, to będzie ono także rozwiązaniem problemu Klee.

A oto kilka przykładów uniwersalnych pokryw w  $E^3$ : sześcian o krawędzi 1, kula o promieniu  $\sqrt{3}/8$ , ośmiościan o odległości 1 między parami przeciwnych ścian. W odróżnieniu od przypadku sześcianu, dowód, że dwa ostatnie zbiory są uniwersalnymi pokrywami, nie jest taki łatwy. Pokrywa w formie kuli została podana przez niemieckiego matematyka Junga, zaś ośmiościanna przez geometrę amerykańskiego Gale'a. Gdy mamy już te pokrywy, nie jest trudno konstruować następne (rys. 15) odcinając pewne części płaszczyznami przechodzącymi w odległości 1/2 od środków tych pokryw.

Taką samą metodą jak obcinaliśmy jeden róg kwadratu (rys. 9), obcinamy mały ostrosłup przy jednym z wierzchołków pokrywy ośmiościennej za pomocą płaszczyzny prostopadłej do odcinka łączącego dwa przeciwległe wierzchołki i przechodzącej w odległości 1/2 od środka ośmiościanu. Analogicznie obcinamy jeszcze dwa małe ostrosłupy — zawsze przy jednym z par przeciwnych wierzchołków. Zauważmy, że trzy tak obcięte wierzchołki ośmiościanu są wierzchołkami jednej z trójkątnych ścian. Dlatego uzyskana uniwersalna pokrywa ma kształt jedenastościanu pokazanego na rys. 15f. Dodajmy, że przy konstrukcji pokrywy z rys. 15d trzeba odpowiednio „obracać” sześcianem, aby dały się najpierw wyciąć dwa ostrosłupy przy przeciwległej parze wierzchołków. Podobnie należy postąpić przy konstrukcji pokrywy z rys. 15e. Nie mamy jednak podstaw, aby analogicznie wyciąć parę przeciwnych ostrosłupów z pokrywy ośmiościennej! Czy Czytelnik domyśla się dlaczego?

### Rozwiązanie dla $n = 3$

zaanonsował polski matematyk Perkal w krótkiej notatce [10] w pierwszym numerze *Colloquium Mathematicum*. Z notatki tej wynika, że przedstawił on swój dowód na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego we Wrocławiu w 1947 r. Ciekawe dlaczego nie opublikowano tego dowodu; czy autor lub redakcja nie docenili jego wagi, czy też dowód był zbyt obszerny? Dopiero w 1955 r. angielski matematyk Eggleston opublikował [3] dowód słuszności przypuszczenia Borsuka dla  $n = 3$ . Jemu też zwykle przypisuje się priorytet. Dowód podany przez Egglestona liczył kilkanaście stron druku i był dość skomplikowany. Zasadzał się na tym samym pomysł, co pomysł Perkala. W 1957 r. proste rozwiązanie problemu Borsuka dla  $n = 3$  podali niezależnie Amerykanin Grünbaum [4] i Węgier Heppes [6]. Rozwiązanie to wykorzystuje przestrzenną uniwersalną pokrywę w formie jedenastościanu z rys. 15f. Można ją rozbić na cztery części (rys. 16) o średnicach

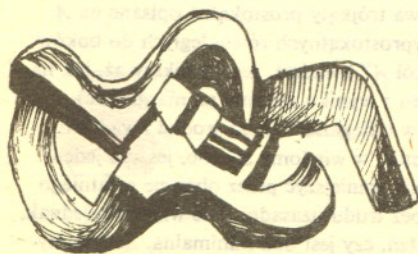
$$\frac{\sqrt{6\,129\,030 - 937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} \approx 0,9887.$$

Nikt nie wykazał dotychczas, że każdy przestrzenny zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 4 części o średnicach mniejszych od tej liczby. Kilku autorów niezależnie wysunęło przypuszczenie, że każdy zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 4 części o średnicach nie większych niż

$$\sqrt{(3+\sqrt{3})/6} \approx 0,888. \text{ Liczba ta — to minimalna średnica czterech części, na które da się podzielić kula o średnicy 1 (rys. 1).}$$

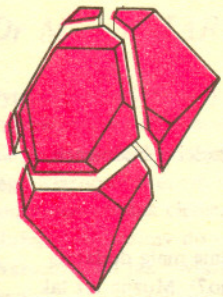
### Co wiemy o podziale w $E^n$ ?

Jak już wspomnieliśmy, dla  $n \geq 4$  problem Borsuka pozostaje otwarty. Nie ma też na razie widoków na jego rozstrzygnięcie. Realnym natomiast wydaje się coraz lepsze szacowanie liczby części o średnicach mniejszych od 1, na które można podzielić każdy zbiór o średnicy 1. Niech  $k(n)$  będzie najmniejszą liczbą  $k$  o tej własności, że każdy zbiór o średnicy 1 leżący w  $E^n$  da się podzielić na  $k$  części o średnicach mniejszych od 1. A więc problem Borsuka to nic innego jak pytanie, czy  $k(n) = n+1$ ? Oczywiście  $k(n) \geq n+1$ . Wynika to np. z podanego twierdzenia

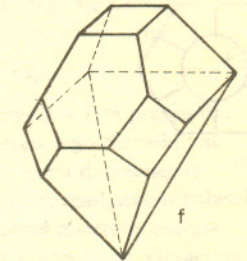
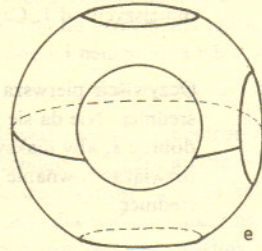
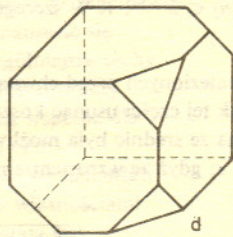
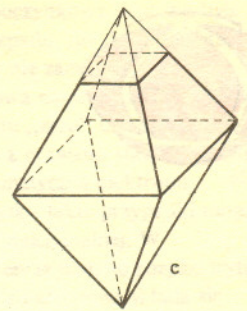
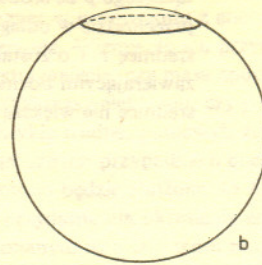
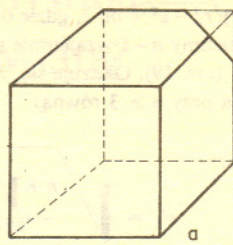


J. Lipchita - spoczywająca kobieta z gitarą, granit, 1928.



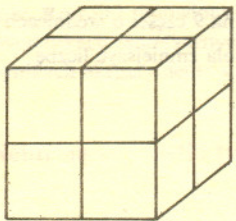


Rys. 16



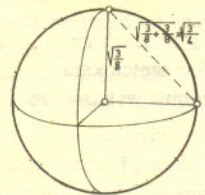
Rys. 15

Borsuka o kuli. Innego, zupełnie elementarnego uzasadnienia dostarcza przykład  $n$ -wymiarowego sympleksu o krawędzi 1. Jeżeli podzielimy ten sympleks na mniej niż  $n+1$  części, to co najmniej jedna z nich (zawierając co najmniej dwa spośród  $n+1$  wierzchołków sympleksu) będzie miała średnicę 1.



Rys. 17

Niemiecki matematyk Lenz zauważył [8], że  $k(n) \leq q_n^n$ , gdzie  $q_n$  oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą od  $\sqrt[n]{n}$ . Oszacowanie to wynika z podziału  $n$ -wymiarowej uniwersalnej pokrywy w postaci  $n$ -kostki o krawędzi 1 na  $n$ -kostki o średnicach mniejszych od 1. Zwykły trójwymiarowy sześcian, tj. 3-kostkę o krawędzi 1, da się podzielić na 8 sześciątów o średnicach  $\sqrt{3}/2 < 1$ , (rys. 17). Analogiczne rozbięcie 4-kostki o krawędzi 1 na sześćdziesiąt 4-kostek o krawędziach  $1/2$  nie jest dobre — mają one średnice  $\sqrt{4 \cdot 1/4} = 1$ . Niezbędne jest rozbięcie na  $3^4 = 81$  mniejszych 4-kostek o krawędziach  $1/3$ , a więc średnicach  $\sqrt{4 \cdot 1/9} = 2/3$ . Liczba 81 części dość mocno odbiega od liczby 5 części oczekiwanej przez Borsuka dla przestrzeni  $E^4$ . Sytuacja jeszcze bardziej pogarsza się ze wzrostem wymiaru  $n$ . Przyczyną tego jest rosnąca średnica  $n$ -kostki o krawędzi 1 (wiadomo, że w kostce o krawędzi 1 cm można zmieścić słońca ... o ile tylko weźmiemy dostatecznie duży wymiar).

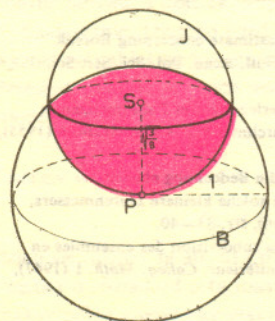


Rys. 18

W 1978 r. Borsuk pokazał [2], że  $k(n) \leq m_1 \dots m_n$ , o ile tylko  $\sum_{i=1}^n m_i^{-2} < 1$ . Oszacowanie to

można wyrazić w formie jawnie zależnej od  $n$ . Mianowicie  $k(n) \leq q_n^{n-s_n} (q_n-1)^{s_n}$ , gdzie  $s_n$  oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą niż  $(q_n^n - n)(q_n - 1)^2 (2q_n - 1)^{-1}$ . Teraz wyraźnie widać, że jest to ulepszenie oszacowania Lenza. W szczególności  $k(4) \leq 24$ . Zamiast podziału na  $n$ -kostki o krawędziach  $1/q_n$  mamy tu podział na  $n$ -prostokąty o krawędziach  $1/q_n$  oraz  $1/(q_n-1)$ . Np. dla  $n=4$  mamy  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$  czterowymiarowe prostokąty o odległościach przeciwnych ścian  $1/2, 1/2, 1/2, 1/3$ , a więc o średnicach  $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/3)^2} = \sqrt{31/36} < 1$ .

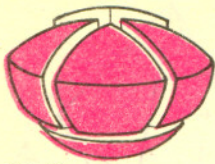
Autorowi udało się znaleźć dwa proste ulepszenia tych oszacowań [7]. Opierają się one na znanym twierdzeniu Junga, że każdy zbiór przestrzeni  $E^n$  mający średnicę 1 mieści się w kuli  $J$  tej przestrzeni o promieniu  $r_n = \sqrt{n/(2n+2)}$ . Kulę dzielimy  $n$  wzajemnie prostokątnymi hiperpłaszczyznami przechodzącymi przez jej środek (rys. 18 przedstawia przypadek  $n=3$ ). Łatwo sprawdzić, że średnica każdej części wynosi  $\sqrt{r_n^2 + r_n^2} = \sqrt{n/(n+1)}$ . Ponieważ  $J$  jest uniwersalną pokrywą, więc zachodzi oszacowanie  $k(n) \leq 2^n$ . W szczególności  $k(4) \leq 16$ .



Rys. 19

Lepsze oszacowanie otrzymujemy zmniejszając nieco uniwersalną pokrywą  $J$ . Zauważmy, że zbiór domknięty o średnicy 1 mieszczący się w  $J$  można tak przesunąć, aby pozostał w kuli  $J$  i miał jednocześnie punkt wspólny  $p$  z jej brzegiem (sferą). Oczywiście zbiór ten mając średnicę 1 mieści się w kuli  $B$  o środku  $p$  i promieniu 1. W konsekwencji  $J \cap B$  jest uniwersalną pokrywą (rys. 19). Podzielimy tę pokrywą na części o średnicach mniejszych od 1. Najpierw odcinamy pewną część wokół punktu  $p$ . Możemy tu użyć hiperpłaszczyzny prostopadłej do odcinka





Rys. 20

łączącego  $p$  ze środkiem  $s$  kuli  $J$ . Łatwo sprawdzić, że jeżeli hiperpłaszczyzna będzie przechodzić w odległości  $\sqrt{r_n^2 - \epsilon^2}/4$  od  $s$ , gdzie  $0 < \epsilon < 1$ , to odcięta część będzie miała średnicę  $\epsilon$ . Co zostało, dzielimy  $n-1$  wzajemnie prostopadłymi hiperpłaszczyznami zawierającymi odcinek  $\overline{sp}$  (rys. 19). Okazuje się, że każda z otrzymanych  $2^{n-1}$  części ma średnicę nie większą niż (a przy  $n \geq 3$  równą)

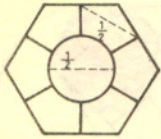
$$d_\epsilon = \sqrt{\frac{n + \sqrt{1 - \frac{n+1}{2n} \epsilon^2}}{n+1}} < 1.$$

Tak więc dokonaliśmy podziału uniwersalnej pokrywy  $J \cap B$  na  $2^{n-1} + 1$  części o średnicach mniejszych od 1. Czyli  $k(n) \leq 2^{n-1} + 1$ . W szczególności  $k(4) \leq 9$ .

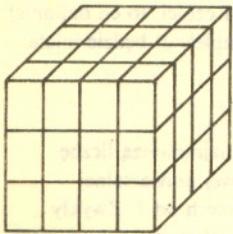
Oczywiście pierwsza ze znalezionych przed chwilą części może mieć dowolnie małą dodatnią średnicę. Nie da się jednak tej części usunąć kosztem pozostałych (dlaczego?). Można też tak dobrać  $\epsilon$ , aby maksymalna ze średnic była możliwie najmniejsza. W tym celu wystarczy rozwiązać równanie  $d_\epsilon = \epsilon$ , gdyż ze wzrostem  $\epsilon$  maleje  $d_\epsilon$ . Każda z  $2^{n-1} + 1$  części ma wtedy średnicę

$$\sqrt{\frac{4n^2 + \sqrt{8n^2 + 1} - 1}{4n^2 + 4n}}.$$

Widzimy, że każdy zbiór czterowymiarowy o średnicy 1 da się podzielić na 9 części o średnicach nie większych niż  $\sqrt{63 + \sqrt{129}/80} \approx 0,964$ . Może ktoś z Czytelników zdoła zmniejszyć liczbę lub średnicę tych części?



Rys. 21



Rys. 22

Jedenastokąt foremny o średnicy 1 nie da się rozbić na 6 części o średnicach co najwyżej  $1/2$ .

Irena Śladek wykazała w swej pracy magisterskiej obronionej w czerwcu 1981, że każdy zbiór  $A \subset E^3$  o średnicy  $< 1$  daje się rozbić na 36 zbiorów o średnicy  $< 1/2$ , (Red.).

### Rozbicie na części o średnicach co najwyżej $\lambda$

W trakcie badania przypuszczenia Borsuka matematycy postawili szereg nowych problemów. Oto jeden z nich. Niech  $0 < \lambda < 1$ . Podać najmniejszą liczbę części o średnicach co najwyżej  $\lambda$ , na którą da się podzielić każdy zbiór  $A \subset E^n$  o średnicy 1. Odpowiedź jest znana tylko dla niektórych  $\lambda$ . Nie wiadomo np. jaka jest najmniejsza liczba części o średnicach co najwyżej  $1/3$ , na którą da się rozbić każdy zbiór  $A \subset E^2$  o średnicy 1. Omówimy tu jedynie przypadek  $\lambda = 1/2$  zbadany przez Lenza [9] dla  $n = 2$  i oszacowany przez Borsuka [2] dla  $n = 3$ .

Każdy zbiór o średnicy 1 leżący na płaszczyźnie można rozbić na 7 części o średnicach co najwyżej  $1/2$ . Wynika to z pokazanego na rys. 21 rozbitcia pokrywy w kształcie sześciokąta foremnego o odległości przeciwnych boków równej 1. Może Czytelnik spróbuje wykazać, że liczby 7 części nie da się już zmniejszyć. Odpowiedź na marginesie.

Dla  $n = 3$  najmniejsza liczba części o średnicach co najwyżej  $1/2$  nie jest znana. Wiemy jedynie, że każdy zbiór o średnicy 1 da się podzielić na 48 części o średnicach  $\sqrt{34}/12 < 1/2$ . Pomysł polega na rozbitciu uniwersalnej pokrywy w formie sześcianu o krawędzi 1 na 48 prostopadłościaków (rys. 22). Wydaje się, że to oszacowanie da się jeszcze ulepszyć.

#### Bibliografia

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, 20(1933), str. 177—190.

[2] K. Borsuk, Some remarks on covering of bounded subsets of the Euclidean  $n$ -space with sets of smaller diameter, *Demonstratio Math.*, 11 (1978), str. 247—251.

[3] H. G. Eggleston, Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter, *J. London Math. Soc.* 30(1955), str. 11—24.

[4] B. Grünbaum, A simple proof of Borsuk conjecture in three dimensions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53 (1957), str. 776—778.

[5] B. Grünbaum, Borsuk problem and related questions, *Proc. of the Seventh Symp. in Pure Math. of the Amer. Math. Soc.*, 1963, str. 271—284.

[6] A. Heppes, Térbeli ponthalmazok feleostztása kisebb atmérögű részalmazok összegére, *Magyar tudományos akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 7 (1957), str. 413—416.

[7] M. Lassak, An estimate concerning Borsuk partition problem, *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math.* w druku

[8] H. Lenz, Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers, *Archiv Math.* 6 (1955), str. 413—416.

[9] H. Lenz, Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers, *Archiv Math.* 7 (1956), str. 33—40.

[10] J. Perkal, Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur, *Colloq. Math.* 1 (1947), str. 45.



Canova, Paulina Borgese, XIX w.



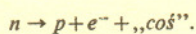
# Czy cechy neutrin wpływają na własności Wszechświata?

Dr Michał JAROSZYŃSKI

Pytanie postawione w tytule może się wydać dziwne. Przyzwyczajeni do własnej bezsilności wobec ogromu Kosmosu nie jesteśmy skłonni przypisać jakiegokolwiek roli w określeniu jego własności żadnym innym istotom, a cóż dopiero szczególnemu rodzajowi cząstek elementarnych. Jeśli jednak zastanowić się dłużej, dochodzimy do wniosku, że zarówno najogólniejsze cechy Wszechświata jak i własności cząstek elementarnych powinny wynikać z podstawowych praw fizyki. Te prawa są wspólne dla wszystkich badanych przez fizykę obiektów — od tych najmniejszych (cząstek) aż po największy obiekt — Wszechświat. Przy takim postawieniu problemu związku między własnościami na pozór zupełnie nieporównywalnych obiektów stają się naturalne. Nasza znajomość fizyki jest ciągle jeszcze niepełna i daleko nam do zrozumienia wszystkich związków opisywanego typu. Również omówiony dalej przykład opiera się na przesłankach teoretycznych i nie potwierdzonych ostatecznie wynikach eksperymentów.

## Neutrino — cząstki trudne do badania

Istnienie neutrin jest konieczne do zrozumienia rozpadu neutronu. W rozpadzie tym powstaje proton, elektron i, jak się przekonamy, coś jeszcze:



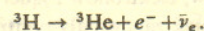
Dwa produkty reakcji, proton i elektron, są bardzo łatwe do rejestracji i możemy wyznaczyć ich energię kinetyczną z dużą dokładnością. Sumując te energie i dodając do nich energie spoczynkowe protonu i elektronu stwierdzimy, że suma jest ciągle mniejsza od energii neutronu (tzn. od  $m_n c^2$ ). Wnioskujemy stąd, że reszta energii unosi ze sobą jakaś trzecia cząstka, owo „coś”. Konieczność istnienia tej cząstki wynika także z zasady zachowania momentu pędu. Spin neutronu (czyli „wewnętrzny” moment pędu) ma wartość 1/2 w pewnych jednostkach. Tę samą wartość mają spiny protonu i elektronu. Reguły dodawania spinów określone przez mechanikę kwantową mówią, że moment pędu układu proton-elektron może mieć tylko wartość całkowitą. Dopiero przypisanie trzeciej cząstce spinu 1/2 rozwiązuje problem. Przyjęto cząstkę tę nazywać neutrinem. (Ściślej: „coś” w zapisanej powyżej reakcji jest, zgodnie z panującymi konwencjami, antyneutrinem elektronowym,  $\bar{\nu}_e$ ). Oddziaływanie, w którym mogą uczestniczyć neutrina nazwano słabym. Nazwa ta dobrze je charakteryzuje — trzeba bardzo korzystnego wzajemnego położenia dwóch cząstek, aby mogły wejść ze sobą w takie oddziaływanie. Dlatego bardzo trudno byłoby bezpośrednio wyznaczyć jakieś cechy neutrin. Pozostają drogi pośrednie. Prześledzimy jedną z nich mającą na celu wyznaczenie masy spoczynkowej neutrina.

Energia wyzwalająca się w rozpadzie neutronu:

$$E_0 = m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2$$

dzieli się między neutriną i pozostałe cząstki. Jeśli neutriną jest cząstką o różnej od zera masie spoczynkowej  $m_\nu$ , to maksymalna energia kinetyczna obserwowanych produktów rozpadu wynosi  $E_0 - m_\nu c^2$ . W przypadku, gdy  $m_\nu = 0$ , wartość

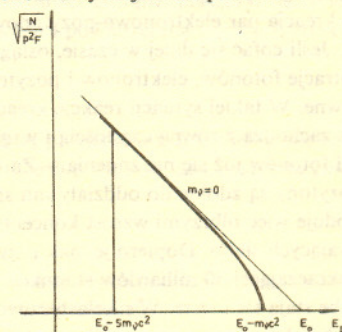
ta może sięgać  $E_0$ . Gdyby energia spoczynkowa neutrina była znacząca w porównaniu z energią rozpadu, już dawno byłaby zmierzona. Wiemy, że ten przypadek nie zachodzi. Rozstrzygnięcie, czy masa spoczynkowa neutrina wynosi tylko 1/10000 masy elektronu, czy po prostu „zero” okazuje się niezwykle trudne, ponieważ, zgodnie z prawami statystyki, tylko w nielicznych przypadkach energia kinetyczna elektronu i protonu będzie zbliżona do  $E_0$ , a tylko takie przypadki mogą być przydatne dla określenia energii maksymalnej. W dokonanych dwa lata temu eksperymentach badano rozpad trytu, który jest izotopem wodoru. Jego jądro atomowe składa się z protonu i dwóch neutronów. Rozpad jednego z neutronów prowadzi do utrzymania jądra składającego się z dwóch protonów i neutronu, a więc będącego izotopem helu:



Ponieważ rozpadowi neutronu towarzyszy w tym przypadku „przebudowa” jądra atomowego, energia tego rozpadu jest mniejsza i wynosi  $E_0 \approx 18$  keV. To stwarza dogodniejsze warunki dla pomiaru masy neutrina niż rozpad jakiegokolwiek innego izotopu, gdyż stosunkowo częściej mierzona energia kinetyczna znajdzie się w interesującym przedziale. Opracowanie danych w tak subtelnym eksperymentach jest bardzo trudne. Wstępne wyniki wskazują, że masa neutrina elektronowego jest różna od zera i prawdopodobnie zawarta w granicach

$$14 \text{ eV} < m_\nu c^2 < 46 \text{ eV}$$

Neutrino są więc około 20 tysięcy razy lżejsze od elektronów około 40 milionów razy lżejsze od protonów.



Wykres Curie dla rozpadu  $\beta$  przedstawia względną ilość emitowanych elektronów jako funkcję ich energii. Współrzędne są tak dobrane, że w przypadku  $m_\nu = 0$  wykres byłby prostą. Jeśli  $m_\nu \neq 0$ , wykres odkształca się w swej wysokoenergetycznej części.

## Ile neutrin jest we Wszechświecie?

Na to pytanie potrafimy odpowiedzieć nie wykonując żadnych pomiarów, o ile przyjmemy, że słuszny jest tak zwany standardowy model gorącego Wszechświata. W modelu tym przyjmuje się, że ewolucja rozpoczyna się od stanu osobliwego, w którym materia ma nieskończoną gęstość. Ciągła ekspansja przez kilkanaście miliardów lat doprowadza do obecnego stanu niezwykle niskiej gęstości. Z obserwacji wynika, że gdyby wszystkie atomy wchodzące w skład obiektów astronomicznych rozprościć równomiernie po całej przestrzeni, to na każdy z nich przypadłaby objętość większa od  $1 \text{ m}^3$ . Jednocześnie obserwujemy we Wszechświecie wielką ilość fotonów niskiej energii, tworzących tzw. promieniowanie tła. Ich widmo jest takie, jakby wysyłało je ciało o temperaturze 3 K. Są one rozłożone bardzo równomiernie w przestrzeni i docierają do nas z tą samą intensywnością ze wszystkich kierunków. W każdym metrze sześcinnym jest ich 540 milionów. Inne fotony obserwujemy tylko dlatego, że znajdujemy się bardzo blisko Słońca i dość blisko gwiazd, ale we Wszechświecie stanowią one rzadkość.



Niska średnia gęstość materii w przestrzeni powoduje, że każdy z fotonów ma bardzo małą szansę napotkania jakiegos atomu. Skrótowno mówimy, że Wszechświat jest obecnie przezroczysty. (Właśnie dzięki temu możemy obserwować odległe obiekty) Cofnijmy się jednak wstecz w czasie do stanu, gdy odległość między dwoma dowolnymi punktami we Wszechświecie była 1500 razy mniejsza niż obecnie. Oznacza to, że koncentracja wszystkich cząstek była  $(1500)^3$  razy większa niż obecnie. Widmo promieniowania tła odpowiadało temperaturze 4500 K. W tych warunkach możliwe były częste zderzenia między fotonami i atomami i możliwa była wymiana energii. Ze względu na wielką przewagę liczebną fotonów znikoma ich część wystarczyła do zjonizowania wszystkich atomów. Materia składała się więc z fotonów, elektronów i jąder atomowych. Częste zderzenia tych cząstek zapewniały podtrzymywanie równowagi termodynamicznej. Fakt istnienia równowagi termodynamicznej we wczesnym Wszechświecie ma dla nas dwie ważne konsekwencje. Po pierwsze wyjaśnia, dlaczego promieniowanie tła ma widmo promieniowania cieplnego — jest to właśnie pozostałość po równowadze termodynamicznej we wczesnym okresie. Po drugie pozwala określić skład i własności materii jako funkcję jej gęstości.

Dokonajmy teraz drugiej podróży w czasie, tym razem do stanu, gdy gęstość była (miliard)<sup>3</sup> razy wyższa, a temperatura wynosił ok. 3 miliardów stopni. Przy tej temperaturze energia termiczna cząstek jest rzędu energii spoczynkowej elektronu  $m_e c^2$ . Możliwa staje się kreacja par elektronowo-pozytonowych kosztem fotonów. Jeśli cofać się dalej w czasie, osiągniemy stan, w którym koncentracje fotonów, elektronów i pozytonów są w przybliżeniu równe. W takiej sytuacji reakcje kreacji i anihilacji par  $e^\pm$  zachodzą z równą częstością i względne koncentracje par i fotonów już się nie zmieniają. Zarówno elektrony jak i pozytony są zdolne do oddziaływań słabych. Kreacja par powoduje więc olbrzymi wzrost koncentracji cząstek oddziaływujących słabo. Dopiero jednak przy temperaturze przekraczającej 30 miliardów stopni oddziaływania słabe stają się częste. W nieelastycznych zderzeniach mogą być kreowane pary neutrin-antyneutrino. Zderzenia pomiędzy neutrinami i elektronami umożliwiają wymianę energii i pozwalają doprowadzić mieszaninę fotony-nukleony-elektrony-pozytony-neutrino do równowagi termodynamicznej. Jak się domyślamy, w stanie równowagi koncentracje neutrin, elektronów i fotonów stają się w przybliżeniu równe, co zapewnia zachodzenie kreacji i anihilacji z równą częstością zarówno dla par  $e^\pm$  jak i par  $\nu_e, \bar{\nu}_e$ . Jeśli więc temperatura Wszechświata przekraczała kiedyś 30 miliardów stopni, to zawierał on wtedy mniej więcej tyle samo fotonów co neutrin i antyneutrino. Przy spadku temperatury i przy ekspansji materii neutrina tracą możliwość zderzania się z innymi cząstkami. Niemożliwa staje się ich anihilacja. Również ich rozpad jest niemożliwy. Są zbyt mało masywne, aby rozpaść się na jakieś inne cząstki. Nieuchronnym wnioskiem z tych rozważań jest stwierdzenie, że we Wszechświecie istnieją reliktywne neutrina.

Powróćmy na chwilę do fotonów cofając się w czasie. Tym razem „zaobserwujemy” anihilację par  $e^\pm$  i powstanie w tym procesie fotonów. Ilość fotonów zwiększa się mniej więcej 3-krotnie; neutrina w ogóle nie wiedzą o zachodzących anihilacjach i ich koncentracja się nie zmienia. Powinno być obecnie ich w przybliżeniu 3-krotnie mniej niż fotonów. Dokładniejsze rozważania dają 150 milionów neutrin i antyneutrino elektronowych w metrze sześciennym.



*A. Maillol, akt kobiety.*

## Konsekwencje

Prosty rachunek pokazuje, że masa spoczynkowa neutrin zawartych w jakimś obszarze jest większa od masy zawartych w nim atomów, jeśli jedno i drugie rozprawdzone są równomiernie w całej przestrzeni. Okazuje się więc, że to neutrina są obecnie głównym źródłem pola grawitacyjnego określającego dynamikę Wszechświata jako całości, a średnia gęstość materii jest większa niż poprzednio sądzono. Taki „gęściejszy” Wszechświat szybciej spowalnia swą ekspansję na skutek większego przyciągania grawitacyjnego. Określany na podstawie pomiarów obecnego tempa ekspansji i równań dynamiki wiek Wszechświata ma mniejszą wartość. Przy założeniu dostatecznie dużej masy spoczynkowej neutrin potrafimy przewidzieć, że rozszerzanie się Wszechświata zostanie zastąpione kurczeniem.

Ciekawa jest próba wyjaśnienia za pomocą masywnych neutrin problemu tzw. „ukrytej masy”. Pomiaru prędkości gwiazd w galaktykach pozwalają ocenić wielkość sił grawitacji, które utrzymują te gwiazdy na ich orbitach. To pozwala z kolei wyznaczyć masę rozpatrywanej galaktyki. Analogicznie ocenić można masę gromady galaktyk. Tu natrafiamy na niespodziankę: masy gromad okazują się parokrotnie większe od sumy mas wchodzących w ich skład galaktyk. Wynika stąd, że gromady zawierają w jakiejś formie materię, która nie należy jednocześnie do poszczególnych galaktyk. Bezpośrednimi pomiarami nie udało się jak dotąd „ukrytej masy” wykryć. Możliwość wyjaśnienia problemu dają neutrina o energii spoczynkowej rzędu kilkunastu eV. Neutrino tej masy, jeśli są rozprawdzone równomiernie w przestrzeni, miałyby prędkości rzędu 3 km/s — jeszcze jedna pozostałość po wcześniejszej równowadze termodynamicznej i energii termicznej. Jeśli neutrina te spróbujemy „zamknąć” w gromadach galaktyk, co wymaga ich znacznego zagęszczenia czy, jak kto woli, „sprężenia”, ich typowa prędkość wzrośnie. Nie przekroczy jednak prędkości ucieczki z gromady galaktyk. Kolejna próba — „zamknięcia” neutrin w galaktykach — już się nie powiedzie. Dalsze „sprężenie” i wzrost prędkości chaotycznych ruchów powoduje, że potencjał grawitacyjny galaktyki jest za słaby dla utrzymania w niej neutrin. Ale o to nam właśnie chodziło — wprowadzając neutrina do gromad galaktyk znacznie zwiększamy masę gromad nie zmieniając jednocześnie masy galaktyk.

Trzeba tu zauważyć, że dla wyjaśnienia problemu „ukrytej masy” trzeba się posłużyć neutrinami o dość dobrze określonej masie — kilka, kilkanaście elektronowoltów. Neutrino dwukrotnie masywniejsze dałyby się związać również w galaktykach.





# Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 304.** Niech  $e_1, \dots, e_n$  będzie dowolnym ciągiem złożonym z liczb  $+1, -1$  i niech  $f_1 = e_1, f_i = \frac{e_i}{e_{i-1}}$  dla  $i = 2, \dots, n$ . Wykazać, że

$$(*) \quad \sin\left(\left(e_1 + \frac{e_2}{2} + \frac{e_3}{4} + \dots + \frac{e_n}{2^{n-1}}\right) \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} f_1 \sqrt{2 + f_2 \sqrt{2 + \dots + f_n \sqrt{2}}}$$

Rozwiązanie na str. 4

**M 305.** Trójkąt  $ABC$  porusza się po płaszczyźnie tak, że proste  $AB$  i  $BC$  są styczne do dwóch ustalonych okręgów. Wykazać, że prosta  $AC$  jest również styczna do pewnego stałego okręgu. Rozwiązanie na str. 2

**M 306.** Czy istnieją trójki cyfr  $x, y, z$  takie, że równość

$$\sqrt{\overbrace{xx \dots x}^{2n \text{ cyfr}} - \overbrace{yy \dots y}^{n \text{ cyfr}}} = \overbrace{zz \dots z}^{n \text{ cyfr}}$$

zachodzi dla co najmniej dwóch naturalnych wartości  $n$ ?

Symbol  $abc$  oznacza liczbę  $100a + 10b + c$  itp.

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 119.** Kłoczek o masie  $M$  spoczywa na chropowatej poziomej płaszczyźnie. Wiedząc, że współczynnik tarcia statycznego między klockiem i powierzchnią wynosi  $f$ , znaleźć najmniejszą siłę potrzebną do jego przesunięcia.

Rozwiązanie na str. 5

**F 120.** Ciało ślizga się po poziomej chropowatej powierzchni. Jak wielką siłę równoległą do płaszczyzny i prostopadłą do prędkości ciała należy przyłożyć, aby nastąpiła zmiana kierunku ruchu?

Rozwiązanie na str. 16



Venus z Willendorfu.

## Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Problem, który chcemy przedstawić, dotyczy układu równań

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 \\ \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y_1^n + y_2^n + \dots + y_k^n \end{cases}$$

Oczywiście układ ten ma rozwiązania; wystarczy nadać niewiadomym  $x_1, x_2, \dots, x_k$  dowolne wartości, ciąg zaś  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$  określić jako dowolną permutację ciągu  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Rozwiązanie tak otrzymane nazwiemy trywialnym. Rozwiązania nietrywialne mogą istnieć tylko w przypadku, gdy  $k \geq n+1$  (w dowodzie wykorzystuje się wzory Newtona z teorii funkcji symetrycznych).

Zauważmy, że jeśli ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k)$  jest rozwiązaniem układu (\*), to ciąg  $(m+a_1, m+a_2, \dots, m+a_k, m+b_1, m+b_2, \dots, m+b_k)$ , ( $m$  — dowolna liczba) również jest takim rozwiązaniem (w dowodzie wykorzystuje się wzór dwumianowy). Wynika stąd, że jeżeli układ (\*) ma rozwiązanie, to ma rozwiązanie, w którym  $x_1 = 0$ . Zachodzi następujące twierdzenie (w dowodzie korzysta się znów z wzoru dwumianowego):

Jeżeli  $(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k)$  jest rozwiązaniem układu (\*), to dla dowolnego  $d$  ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1+d, b_2+d, \dots, b_k+d; b_1, b_2, \dots, b_k, a_1+d, a_2+d, \dots, a_k+d)$  jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2k} \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{2k}^2 \\ \dots \\ x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_{2k}^{n+1} = y_1^{n+1} + y_2^{n+1} + \dots + y_{2k}^{n+1} \end{cases}$$

Interesować nas będzie istnienie rozwiązań nietrywialnych układu (\*) w liczbach całkowitych przy możliwie małym  $k$ , np.  $k = n+1$ . Dla  $n = 1, k = 2$  mamy np.  $1+4 = 2+3$ ; dla  $n = 2, k = 3$  rozwiązaniem jest np. ciąg  $(1, 5, 6; 2, 3, 7)$ . Wiadomo, że dla  $k = n+1$  rozwiązania istnieją dla  $n \leq 9$ .

**Problem.** Czy istnieją rozwiązania nietrywialne układu (\*) w liczbach całkowitych przy  $k = n+1 \geq 11$ ?

Pokażemy teraz możliwy sposób zaatakowania tego problemu przedstawiając sposób otrzymania rozwiązania dla  $n = 6$ .

Ciąg  $(0, 7, 11, 17, 18, 24, 28, 35; 1, 8, 12, 15, 20, 23, 27, 34)$  jest rozwiązaniem układu (\*) dla  $n = 1, k = 8$ . Stosując przytoczone powyżej twierdzenie kolejno dla  $d = 7, 11, 13, 17, 19$  i redukując równe wartości niewiadomych  $x_i, y_i$  dochodzimy do rozwiązania  $(0, 18, 27, 58, 64, 89, 101; 1, 13, 38, 44, 75, 84, 102)$ . Nasuwa się tu pytanie: z jakiego rozwiązania startować i jakie przyjmować wartości  $d$ ? Ale to już pytanie dla Czytelników.

Powyższe uwagi sugerują, że rozwiązanie nietrywialne dla  $k = n+1 = 11$  istnieje, ale naprawdę tego nie wiadomo. Byłoby interesujące znaleźć choćby rozwiązanie w liczbach całkowitych w przypadku  $n = 10, k \leq 13; n = 11, k \leq 13; n = 12, k \leq 19; n = 13, k \leq 29$ .

Powyższy problem łączy się z następującym:

Podać przykład takiego ciągu liczb naturalnych  $(c_p)$  szybko rosnącego, że

$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{c_p}$  jest liczbą wymierną i istnieje liczba całkowita  $k \neq 0$ , dla której

$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k+c_p}$  jest też liczbą wymierną.

Otóż jeżeli  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}; b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$  jest rozwiązaniem układu (\*) dla  $k = n+1$ , to można przyjąć  $c_p = (p+a_1)(p+a_2) \dots (p+a_{n+1})$  i wtedy różnica  $(p+b_1)(p+b_2) \dots (p+b_{n+1}) - c_p$  jest liczbą całkowitą  $k$  różną od zera,

niezależną od  $p$ . Ponadto  $\frac{1}{c_p}$  i  $\frac{1}{k+c_p}$  są liczbami wymiernymi, co można

udowodnić wykorzystując fakt, że  $\frac{1}{(p+a_1)(p+a_2) \dots (p+a_{n+1})} =$

$$= \frac{A_1}{p+a_1} + \frac{A_2}{p+a_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{p+a_{n+1}}, \text{ gdzie } A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \text{ są pewnymi}$$

liczbami wymiernymi.



# O dwóch klasycznych paradoksach fizyki statystycznej

Dr Bogdan CICHOCKI

Podstawowym zagadnieniem fizyki statystycznej jest wyprowadzenie praw opisujących zachowanie się ciał makroskopowych z praw mechaniki rządzących ruchem atomów i cząsteczek, z których, jak wiemy, ciała te się składają. Próbując rozwiązać to zagadnienie napotykamy sprzeczność związaną z problemem asymetrii czasu. Istota tej sprzeczności została zawarta w dwóch paradoksach: odwracalności (I. Loschmidt 1876 r.) i powracalności (E. Zermelo 1896 r.). Przedstawimy pokrótce oba paradoksy i ich rozwiązanie zaproponowane przez jednego z twórców fizyki statystycznej, Ludwika Boltzmana.

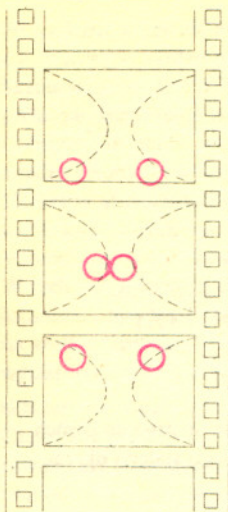
Paradoks odwracalności sprowadza się do następującej obserwacji. W równaniach Newtona, które opisują ruch układów mechanicznych, występują tylko pochodne względem czasu drugiego rzędu. Zamiana czasu  $t$  na  $-t$  nie prowadzi zatem do zmiany postaci tych równań. Mówimy w związku z tym, że prawa mechaniki są odwracalne w czasie. Jeśli sfilmujemy ruch dowolnego układu mechanicznego, a następnie puścimy film w przeciwnym kierunku, to oglądane zjawisko będzie podlegało tym samym prawom, co ruch pierwotnie sfilmowany. Żadne doświadczenie mechaniczne nie może rozstrzygnąć, w jakim kierunku płynie czas.

Sytuacja zmienia się drastycznie przy analizie praw termodynamiki. Zgodnie z tymi prawami, w szczególności z drugą zasadą termodynamiki, każdy izolowany układ makroskopowy osiąga po pewnym czasie, niezależnie od stanu początkowego, stan tzw. równowagi termodynamicznej, a następnie stale w nim trwa. Przykładowo, jeżeli zetkniemy dwa kawałki metalu o różnych temperaturach, to prędzej czy później temperatury się wyrównają i sytuacja ta nie będzie się zmieniać, o ile nie będziemy ingerować z zewnątrz. Sfilmujmy teraz ten proces. Puszczając film w przeciwnym kierunku zobaczymy zjawisko spontanicznego powstawania różnicy temperatur pomiędzy kawałkami metalu, które początkowo miały tę samą temperaturę. Zjawisko takie nie występuje w przyrodzie. Stwierdzamy, że prawa termodynamiki są nieodwracalne w czasie. Porównanie przedstawionych obserwacji prowadzi do wniosku, iż mechanika i termodynamika wydają się być sprzeczne ze sobą.

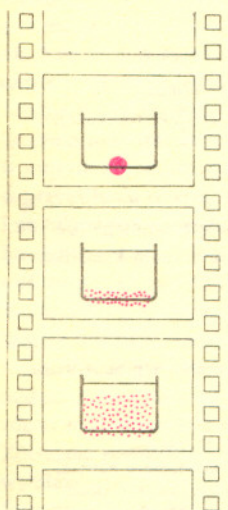
Podobny wniosek wynika z paradoksu powracalności Zermelo. Paradoks ten opiera się na pięknym twierdzeniu Poincarégo, które orzeka, że każdy izolowany układ mechaniczny niechybnie powraca dowolnie blisko swojego stanu początkowego. Innymi słowy, ruch układów fizycznych ma charakter quasi-periodyczny. Nie jest to do pogodzenia z prawami termodynamiki, zgodnie z którymi układ po osiągnięciu stanu równowagi stale w nim później przebywa i nie powraca do sytuacji wyjściowej.

Czy rzeczywiście nie do pogodzenia? Jeżeli by tak było, to straciłyby sens rozważania w ramach fizyki statystycznej. Okazuje się jednak, co starał się wykazać L. Boltzmann, że sprzeczność zawarta w obu paradoksach jest tylko pozorna. Rozumowanie Boltzmana było mniej więcej następujące.

Przede wszystkim zauważmy, że wymienione w paradoksach jako przeciwstawne opisy układów fizycznych odpowiadają różnym poziomom obserwacji. W ramach mechaniki opis jest bardzo szczegółowy; mówiąc o stanie mamy na myśli położenia i prędkości (ściślej — pędy) poszczególnych cząsteczek. Tak rozumiany stan nazywać będziemy skrótowo *mikrostanem*. Z drugiej strony na poziomie termodynamiki operujemy wielkościami makroskopowymi takimi jak gęstość, gęstość energii wewnętrznej, ciśnienie itp., a stan, zwany *makrostanem*, utożsamiamy z zespołem odpowiednio dobranych wielkości makroskopowych. Opis ten jest dużo mniej dokładny od poprzedniego, co uzasadnia użycie w stosunku do niego określenia „gruboziarnisty”. Rzeczywiście, każdemu mikrostanowi odpowiada pewien makrostan, ale nie odwrotnie. Określony makrostan jest realizowany zazwyczaj przez ogromną liczbę mikrostanów. Przy czym liczba ta, zwana w fizyce wagą statystyczną, jest bardzo różna dla różnych makrostanów. Fakt ten odgrywa istotną rolę w zrozumieniu paradoksów. Zilustrujemy to na prostym przykładzie.



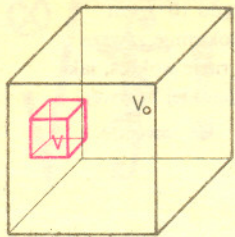
Zderzenie kul. Niezależnie od kierunku puszczenia filmu obraz będzie zgodny z prawami mechaniki.



Kropla atramentu w szklance wody. Tylko jeden kierunek filmu daje obraz zgodny z prawami termodynamiki. Nie obserwujemy w przyrodzie zjawiska skupiania się atramentu z jednorodnego roztworu w kroplę.

Stan układu  $N$  cząsteczek w pełni charakteryzuje  $6N$  liczb,  $3N$  składowych położeń i  $3N$  składowych pędów poszczególnych cząsteczek. Stanom takim możemy przyporządkować punkty w  $6N$ -wymiarowej przestrzeni zwanej przestrzenią fazową. Obrazem ewolucji w czasie stanu układu jest ruch punktu w tej przestrzeni. Niech układ znajduje się w chwili początkowej w stanie odpowiadającym pewnemu punktowi przestrzeni fazowej. Jeżeli wybierzemy dowolnie małe jego otoczenie, to zgodnie z twierdzeniem Poincarégo stan układu powróci po pewnym czasie (zwanym czasem Poincarégo) do tego otoczenia. Dowód twierdzenia znajduje Czytelnik w artykule Antoniego Kuszcza w *Delcie* 12/1981.





Rozpatrmy gaz składający się z  $N_0$  cząstekek wzajemnie nieoddziałujących (tzn. gaz doskonały) zamkniętych w naczyniu o objętości  $V_0$ . Dla układów makroskopowych  $N_0$  jest ogromne, rzędu liczby Avogadro, czyli rzędu  $10^{23}$ . Wyobraźmy sobie, że mierzymy gęstość tego gazu w pewnej części naczynia. Pomiar taki sprowadza się do wyznaczenia liczby  $N$  cząstekek znajdujących się w niewielkiej makroskopowo objętości  $V$ , gęstość jest stosunkiem  $N$  do  $V$ . W celu uproszczenia rozważań możemy przyjąć, że makroskopowy stan gazu określa podanie wartości gęstości w różnych częściach naczynia. W rzeczywistości w pełni charakteryzuje taki stan zespół kilku wielkości o podobnym charakterze jak gęstość. Uogólnienie przedstawionego rozumowania nie następuje w związku z tym większych trudności i prowadzi do identycznych wniosków końcowych. Stwierdzenie, że określonemu makrostanowi odpowiada wiele mikrostanów jest w opisanej sytuacji oczywiste. Mierząc gęstość interesujemy się tylko tym, ile jest cząstekek w objętości  $V$ , a nie które to są cząstekki i jakie mają prędkości.

Wyznamy teraz liczbę  $w(N)$  mikrostanów gazu, dla których w objętości  $V$  znajduje się  $N$  cząstekek. Zanim to zrobimy musimy uściślić pojęcie ilości mikrostanów. Otóż położenie cząstekki jest zmienną ciągłą i nie możemy możliwych położeń ponumerować liczbami całkowitymi. Wydaje się jednak naturalnym przyjęcie, że w równych objętościach przestrzeni znajdują się równe „ilości” położeń jednej cząstekki. To nam całkowicie wystarczy dla dalszych obliczeń. Przy takiej bowiem umowie wyznaczenie  $w(N)$  można sprowadzić do znanego z rachunku prawdopodobieństwa schematu Bernoulliego. Stosunek  $w(N)$  do ilości wszystkich mikrostanów gazu jest po prostu równy prawdopodobieństwu znalezienia  $N$  cząstekek w objętości  $V$  przy założeniu, że w całym naczyniu zawartych jest  $N_0$  cząstekek.

Prawdopodobieństwo, że dana cząsteczka gazu znajduje się w  $V$  (sukces) wynosi przy tych założeniach  $V/V_0$ , a że znajduje się poza  $V$  (porażka) wynosi  $1 - V/V_0$ . Prawdopodobieństwo znalezienia  $N$  cząstekek w  $V$  jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia  $N$  sukcesów w schemacie Bernoulliego o  $N_0$  próbach, czyli

$$(1) \quad \binom{N_0}{N} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$$

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy poprzednio,  $w(N)$  różni się od powyższego wyrażenia tylko o pewien stały czynnik. Jak w związku z tym wygląda wykres zależności  $w$  od  $N$ ? Wartość średnia  $\langle N \rangle$  i wariancja  $\langle (\Delta N)^2 \rangle$  dane są dla rozkładu (1) przez

$$(2) \quad \langle N \rangle = N_0 \frac{V}{V_0}, \quad \langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle \left(1 - \frac{V}{V_0}\right).$$

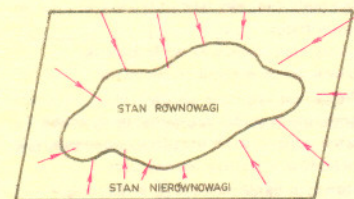
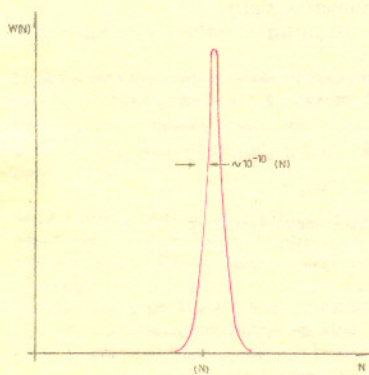
Wartość  $\langle N \rangle$  określa nam punkt, wokół którego skupione jest  $w(N)$ , zaś  $\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}$  — jak wielkie jest rozmycie  $w(N)$  wokół  $\langle N \rangle$ . Przypomnijmy teraz, że  $V$  jest małe, ale tylko z makroskopowego punktu widzenia. Możemy przyjąć przykładowo  $V \simeq 10^{-3} V_0$ . W związku z tym  $\langle N \rangle$  jest podobnie jak  $N_0$  liczbą rzędu  $10^{20}$  i

$$(3) \quad \frac{\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}}{\langle N \rangle} \simeq \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} \approx 10^{-10},$$

Oznacza to, że rozmycie  $w(N)$  wokół  $\langle N \rangle$  jest niezwykle małe. To mieliśmy na myśli mówiąc o bardzo nierównomiernym rozkładzie wag statystycznych pomiędzy różnymi makrostanami układu. Jaki wniosek możemy wyciągnąć z tego faktu? Otóż, rozpatrywany przykład przekonuje nas, iż większość mikrostanów realizuje praktycznie jeden makrostan. W przykładzie tym jest to sytuacja, w której ilość cząstekek w  $V$  jest równa (ze względnym błędem  $\sim 10^{-10}$ ) wartości  $\langle N \rangle = N_0 (V/V_0)$ , co odpowiada równomiernemu wypełnieniu naczynia przez gaz. Właśnie ten wyróżniony makrostan jest makroskopowym stanem równowagi. Po tej obserwacji jesteśmy już blisko rozwikłania paradoksów.

Rozpatrmy teraz, jak proponuje Boltzmann, układ fizyczny znajdujący się w chwili początkowej w stanie nierównowagi, czyli w stanie o małej wadze statystycznej. Jest on oczywiście w jakimś stanie mikroskopowym. Z biegiem czasu jego mikrostan, na skutek ruchu cząstekek i ich zderzeń, będzie się zmieniał. Układ będzie przechodził przez continuum mikrostanów. Podkreślmy jednak jeszcze raz, że ogromna większość mikrostanów (prawie wszystkie) realizuje na poziomie makroskopowym stan równowagi. Zatem prędzej czy później układ trafi do zbioru tych mikrostanów i będzie w nim przebywał prawie przez cały czas. Jeżeli wykreśliśmy zmiany w czasie pewnej wielkości makroskopowej, np.  $\langle N \rangle$  w rozpatrywanym przykładzie, to wykres będzie nieregularną, zygawkowatą krzywą zbiegającą w okolice wartości średniej tej wielkości i tam pozostającą. Będą oczywiście występowały odchylenia od wartości średniej nazywane w fizyce statystycznej fluktuacjami, ale będą one bardzo małe. Zgodnie z naszymi poprzednimi obliczeniami odchylenia  $N(t) - \langle N \rangle$  będą rzędu  $10^{-10} \langle N \rangle$ .

Przykład omawiany w tekście ilustruje, w jaki sposób rachunek prawdopodobieństwa pojawia się w rozważaniach fizyki statystycznej. Nie ma to nic wspólnego z czymś tak subiektywnym jak nasza niewiedza, ale jest związane po prostu z liczeniem mikrostanów. Prawdopodobieństwo jest przecież w sensie matematycznym miarą,



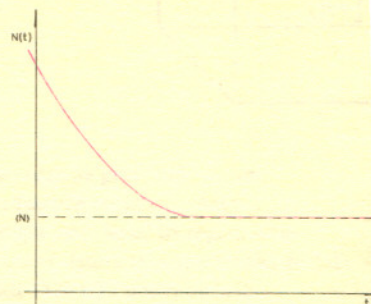
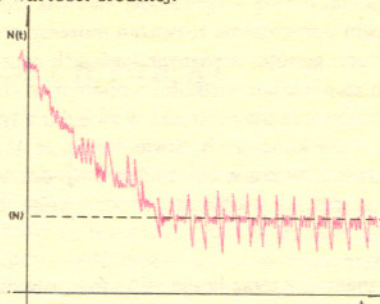
Podział przestrzeni fazowej sugerowany przez Ludwika Boltzmann.





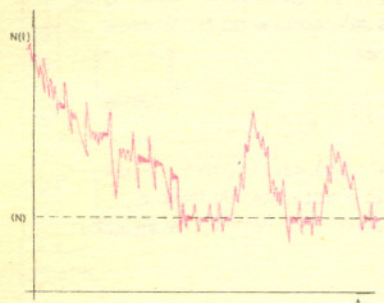
M. Falconet, nimfa, marmur, 1757.

Pomiar chwilowej wartości wielkości makroskopowej z dokładnością np. rzędu  $10^{-3}$  jest pomiarem dość dokładnym. Podkreślmy również, że przyrząd pomiarowy dokonuje zawsze uśrednienia po pewnym, krótkim, ale niezerowym odcinku czasu. W takim razie wykres, jaki otrzymamy mierząc zmiany wielkości makroskopowej, będzie miał postać gładkiej krzywej zbiegającej do wartości średniej.



Zaobserwujemy typowy, nieodwracalny proces dążenia układu do równowagi termodynamicznej. Wykreślając te rysunki przyjęliśmy milcząco, że stan układu fizycznego po dojściu w okolice stanu równowagi stale tam pozostaje. Tymczasem mikrostan, które realizują stan równowagi, stanowią wprawdzie przeważającą większość, ale są również inne. W związku z tym co jakiś czas układ będzie mógł przejść do jednego z nich, co zaobserwujemy jako ogromną, makroskopową fluktuację wyprowadzającą układ ze stanu równowagi.

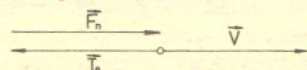
Kluczową sprawą staje się teraz odpowiedź na pytanie: jaki jest średni czas, oddzielający takie fluktuacje?. Otóż można wykazać, że czas ten jest rzędu  $10^{10^{20}}$  sekund, godzin, lat itp. Przy tak dużej liczbie nie jest istotne, którą z tych powszechnie używanych jednostek wybierzemy. Rzeczywiście jest to liczba ogromna, przekraczająca granice wyobraźni. Przypomnijmy tylko, że wiek Wszechświata oceniany jest na  $10^{10}$  lat. Zauważmy teraz, że wykres wielkości makroskopowej wykonany w tak dużej skali czasu jest symetryczny ze względu na odbicie  $t$  na  $-t$ , jak również dopuszcza powrót układu w okolice stanu początkowego, czyli jest zgodny z uwagami Loschmidta i Zermelo.



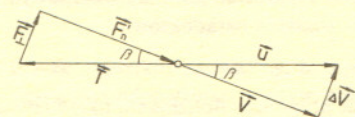
Jednak w rzeczywistości możemy śledzić zachowanie się układów fizycznych w odcinkach czasu rzędu godzin, lat, a wtedy na poziomie makroskopowym zjawiska jawią się nam jako nieodwracalne. Nie ma zatem żadnej sprzeczności. Wszystko zależy jedynie od sposobu i czasowej skali obserwacji. Paradoxy zostały rozwikłane. Nasuwa się pytanie: czy wyjaśnienia Boltzmana można zweryfikować doświadczalnie? Weryfikacja taka wymagałaby przeprowadzenia obserwacji układu w odcinkach czasu wielokrotnie dłuższych niż czas Poincarégo, a przecież dla układów makroskopowych jest on rzędu  $10^{10^{20}}$  lat. Jedyną zatem możliwość eksperymentalnego potwierdzenia słuszności przedstawionego obrazu daje obserwacja niewielkiego układu, dla którego czas Poincarégo jest rzędu minut czy godzin. O eksperymentach takich napiszemy w jednym z następnych numerów *Delty*.



**Rozwiązanie zadania F 120.**



Ciało ślizga się ze stałą prędkością  $v$ , gdy działające na nie siły („siła napędowa” i tarcie poślizgowe) równoważą się.



Załóżmy, że pod działaniem siły  $F_{\perp}$  prostopadłej do  $v$  następuje boczny poślizg ze stałą prędkością  $\Delta v$ . Prędkość ciała wynosi teraz  $u = v + \Delta v$ , a siła tarcia poślizgowego ma zwrot przeciwny niż  $u$

$$T = -fMg \frac{u}{v}$$

Wypadkowa sił działających na ciało wynosi nadal zero, musi zatem następować zmiana „siły napędowej”. Wartość siły tarcia nie ulega przy tym zmianie  $T = T_0$ , gdyż



Gianbologna, wenus, brąz, 1583, Florencja.

współczynnik tarcia poślizgowego nie zależy od prędkości. Z rysunku wynika, że

$$F = T \sin \beta$$

Gdy  $\Delta v \ll v$ , wtedy kąt  $\beta$  jest mały

$$\text{i } \sin \beta \approx \text{tg } \beta = \frac{\Delta v}{v}$$

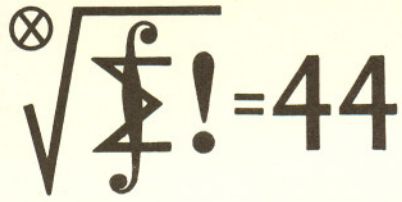
Ostatecznie otrzymujemy:

$$F = fMg \frac{\Delta v}{v}$$

Z zależności tej wynika, iż tarcie dla kierunku prostopadłego do ruchu ma charakter podobny do oporu ośrodka — jest przy niewielkich prędkościach proporcjonalne do prędkości. Poza tym przy dużych prędkościach poślizgu wystarczy bardzo mała siła, aby nastąpiła zmiana kierunku ruchu.

Powyższy efekt tłumaczy wiele zjawisk obserwowanych w życiu codziennym i technice, np. spadanie pasów transmisyjnych podczas gwałtownych zmian obciążenia napędzanych urządzeń, wpadanie samochodów w poślizg boczny przy gwałtownym hamowaniu oraz codzienna czynność — krojenie chleba. Wyszukanie i wyjaśnienie innych pozostawiamy Czytelnikowi.





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca n+2. Szkic rozwiązań zamieszczamy w nr n+4. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce,) można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

3-4 \* (suma ocen za rozwiązania danego zadania) / (liczba osób które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru)

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czkisie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana go ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Klub 44

Zadania nr 28, 29, 30

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.XI.1982

28. Dla dowolnej liczby naturalnej x > 1 oznaczmy przez f(x) sumę jej czynników pierwszych liczonych z krotnościami, powiększoną o jedynkę:

x = \prod p\_i^{\alpha\_i} \quad f(x) = 1 + \sum \alpha\_i p\_i

Wybierając dowolnie x\_0, określamy ciąg iteracji wzorem rekurencyjnym x\_{n+1} = f(x\_n). Jakie liczby mogą wystąpić w ciągu {x\_n} nieskończenie wiele razy?

29. Przedstawić kwadrat w postaci sumy skończonej liczby trójkątów ostrokątnych o rozłącznych wnętrzach. Rozwiązanie będzie uważane za tym lepsze, im mniejsza będzie liczba trójkątów.

30. Czy dla każdej liczby naturalnej n istnieją dwie funkcje wypukłe określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych R, których wykresy mają dokładnie n punktów wspólnych? Czy stnieją dwie funkcje wypukłe określone na R, nie identyczne w żadnym przedziale, których wykresy mają nieskończenie wiele punktów wspólnych?

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA Zadanie 30 przysłał nasz Czytelnik pan Andrzej Zieliński z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1982

22. Ciąg {2^n} rozbijamy na bloki złożone z liczb jedno-, dwu-, trzycyfrowych itd.: B\_1 = {2, 4, 8}, B\_2 = {16, 32, 64}, B\_3 = {128, 256, 512}, ... W każdym bloku B\_m (m > 1) początkowa liczba — i tylko ona — zaczyna się od jedynki. Zatem gdy 2^n \in B\_m czyli gdy 10^{m-1} < 2^n < 10^m, to j(n) = m-1 = [n log 2], skąd lim\_{j \to \infty} j(n)/n = log 2.

23. Z założenia zadania łatwo wynika, że przekątne pięciokąta są równoległe do odpowiednich boków. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BE. Czworokąt CDEM jest równoległobokiem; trójkąty ECD i CEM są podobieństwa przez s : s = AM/CM = BM/EM. Pole trójkąta ABM równa się s^2. Pole S pięciokąta ABCDE równa się sumie pól trójkątów ECD, CEM, ABC, ABE minus pole ABM : S = 4 - s^2. Z równości

1 = \frac{AM}{AC} \cdot \frac{AC}{AM} = \frac{\text{pole } \Delta ABM}{\text{pole } \Delta ABC} \cdot \frac{AM+CM}{AM} = s^2 \left(1 + \frac{1}{s}\right) = s^2 + s

obliczamy s = (\sqrt{5}-1)/2. Tak więc pole S jest wyznaczone jednoznacznie i równa się S = 4 - s^2 = (5 + \sqrt{5})/2.

Pięciokąt ABCDE nie musi być foremny; każdy pięciokąt otrzymany z foremnego przez przekształcenie afiniczne (nie zmieniające pól) spełnia warunek zadania.

24. Niech 100 = \sum x\_i, x\_i \in N, x\_1 < x\_2 < ... < x\_n, będzie szukanym rozkładem. Zauważmy najpierw, że x\_1 = 2 lub x\_1 = 3 (gdyby było x\_1 = 1 lub x\_1 \ge 4, to przyjmując — odpowiednio w pierwszym oraz drugim przypadku —

y\_1 = x\_2, y\_{n-2} = x\_{n-1}, y\_{n-1} = 1 + x\_n, z\_1 = 2, z\_2 = x\_1 - 2, z\_3 = x\_2 - 2, z\_4 = x\_3, z\_{n+1} = x\_n

otrzymujemy \sum y\_i = \sum x\_i = 100, \prod y\_i > \prod x\_i oraz \sum z\_i = \sum x\_i = 100, \prod z\_i > \prod x\_i, wbrew maksymalności \prod x\_i. Łatwo sprawdzić, że 100 nie jest sumą kolejnych liczb naturalnych o początkowym składniku równym 2 lub 3. Zatem w przedziale (x\_1, x\_n) istnieje liczba naturalna nie będąca wyrazem ciągu {x\_1, ..., x\_n}. Liczba taka jest tylko jedna: zakładając, że jest ich więcej i oznaczając najmniejszą i największą z nich przez a i b widzimy, że a-1 = x\_j, b+1 = x\_k (dla pewnych j, k); zastępując teraz x\_j, x\_k przez x'\_j = a, x'\_k = b zwiększamy wartość iloczynu \prod x\_i nie zmieniając sumy \sum x\_i. Tak więc składniki szukanego rozkładu tworzą ciąg postaci

{2, ..., p-1, p+1, ..., q} lub {3, ..., p-1, p+1, ..., q}.

Suma wyrazów takiego ciągu równa się odpowiednio

S = \frac{q(q+1)}{2} - p - 1 \quad \text{lub} \quad S = \frac{q(q+1)}{2} - p - 3,

a ponieważ 2 < p < q, dostajemy oszacowanie q^2 - q - 2 < 2S < q^2 + q - 2. Ale 2S = 200; stąd q = 14, tak, że q(q+1)/2 = 105 i S = 104 - p lub S = 102 - p (odpowiednio). Drugą możliwość odrzucamy, bo p > 2. Ostatecznie więc x\_1 = 2, p = 4 i rozwiązaniem zadania jest rozkład

100 = 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14; \quad \prod x\_i = 21794572800.