

## SPIS TREŚCI

NUMERU 7(103)

Dziwne atraktory <i>Dr Paweł Góra</i>	str. 1
Odpychający punkt stały	str. 5
Łatwe zadanie o paraboli	str. 6
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 7
Atraktor i koza	str. 8
Zadania	str. 9
O punktach libracji i podkowiastych orbitach <i>Dr Tomasz Kwast</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 13
Parabola, gwiazdki i bilard	str. 14
Klub 44	str. 16

**W następnym numerze:**  
**Struktury dyssypacyjne**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

**Komitet Redakcyjny:**

dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmól  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Paczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
doc. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
doc. dr Grzegorz Sitarski  
doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wolska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. tech. graf.  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracja  
dr Michał Szurek  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

**Adres Redakcji**  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 2607/82 Z-86

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
Prenumeratę na kraj przyjmują oddziały kolportażowe RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz  
urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na rok następny, I kwartał, I półrocze,  
— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty, na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Instytucje, jednostki gospodarki uspołecznionej, zakłady pracy i organizacje społeczno-polityczne  
zamawiają prenumeratę w oddziałach kolportażowych RSW, uzgadniając sposób odbioru zamówionej  
prasy.  
Czytelnicy indywidualni zamieszkali w miastach mogą zamawiać prenumeratę w macierzystym zakładzie  
pracy albo w oddziale kolportażowym RSW. Na wsi prenumeratę od instytucji, zakładów pracy  
i czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe i listonosze.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla  
zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla instytucji i zakładów pracy, przyjmuje RSW  
„Prasa—Książka—Ruch” Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa ul. Towarowa 28,  
konto XV O/M Warszawa nr 1153-201045-139-11.

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
„DELTE”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6,

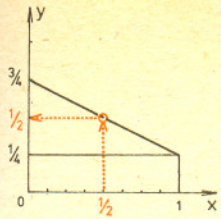
Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie  
Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik  
Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

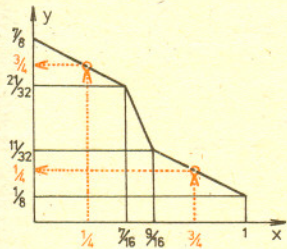
nr indeksu 35723/35550

# Dziwne atraktory

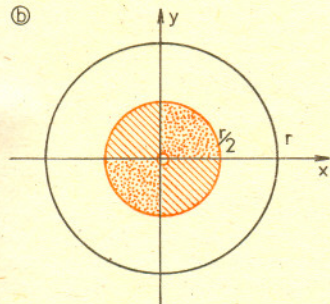
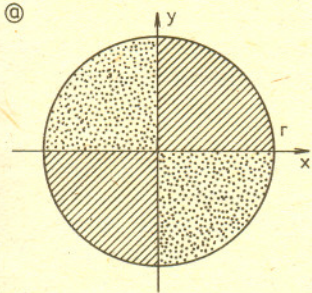
Dr Paweł GÓRA



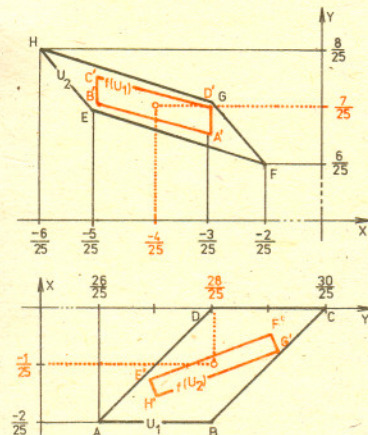
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Obraz koła  $x^2 + y^2 \leq r^2$  przy przekształceniu  $f(x, y) = \left(\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}\right)$  jest kołem  $x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}$ .



Rys. 4. Przekształcenie  $f(x, y) = \left(1 + y - |x|, \frac{x}{4}\right)$  przekształca równoległobok  $ABCD$  w  $A'B'C'D'$ , a  $EFGH$  w  $E'F'G'H'$ .

1. Będziemy rozważać „historię” punktu  $x$  poddawanego wielokrotnie przekształceniu  $f$ . Mówiąc dokładniej, dla przekształcenia np. płaszczyzny w siebie i wybranego punktu  $x_0$  rozważymy ciąg:  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$ , i tak dalej, ogólnie  $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$ .

Jak są położone kolejne punkty  $x_n$ ? Co dzieje się z początkowym punktem  $x_0$  po kolejnym stosowaniu  $f$ ? Łatwo zbierać dane eksperymentalne; za pomocą kalkulatora lub komputera — jeden z najłatwiejszych do napisania programów — praca posuwa się szybko nawet dla skomplikowanych wzorów. Utrudnia sprawę szybkie kumulowanie się błędów, np. dla przekształcenia Hënona, określonego wzorem  $f(x, y) = (1 + y - 1,4 x^2, 0,3 x)$  dwa różne komputery liczące z dokładnością 14 znaków dają — dla tej samej wartości początkowej — zupełnie różne wyniki po 50–60 iteracjach.

Przekształcenie  $f$  może mieć punkt stały  $x_0: f(x_0) = x_0$ , może mieć trajektorie okresowe:  $f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_n) = x_0$ . Czasem obserwujemy zupełnie inny przebieg zjawiska: punkty  $x_n$  dążą do skomplikowanego zbioru asymptotycznego  $A$ , skupiają się wokół niego i krążą w jego pobliżu. Taki zbiór to *dziwny atraktor*.

Zacznijmy od prostych przykładów. Poniżej większość obliczeń jest pominięta i usilnie namawiamy Czytelnika, aby sam je przeprowadził; znakiem (!) oznaczamy miejsca wymagające uzupełnienia.

Dla przekształcenia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$  (rys. 1) znajdujemy  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  (!). Jest to jedyny (!) punkt stały. Przy kolejnych iteracjach  $f$  odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  zmniejsza się kolejno do  $\left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right\rangle, \left\langle \frac{7}{16}, \frac{9}{16} \right\rangle$ , ogólnie  $f^n(\langle 0, 1 \rangle) = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \right\rangle$  (!). Tak więc  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\langle 0, 1 \rangle) = \frac{1}{2}$ , czyli każdy punkt odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$  znajdzie się w końcu dowolnie blisko  $\frac{1}{2}$ .

Mówimy, że  $\frac{1}{2}$  jest dla naszego  $f$  punktem stałym przyciągającym.

Rozważmy nieco bardziej skomplikowaną sytuację, badając przekształcenie o wykresie widocznym na rys. 2. Mamy:  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$ , tzn. punkty  $\frac{1}{4}$  i  $\frac{3}{4}$  tworzą trajektorie

okresową o długości 2. Niech  $U_1 = \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{16}, \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \right\rangle, U_2 = \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{16}, \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \right\rangle$ .

Wtedy  $f(U_1) = \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{32}, \frac{3}{4} + \frac{3}{32} \right\rangle \subset U_2, f(U_2) = \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{32}, \frac{1}{4} + \frac{3}{32} \right\rangle \subset U_1$  oraz ogólnie (!):

$$f^n(U_1) = \begin{cases} \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{3}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

$$f^n(U_2) = \begin{cases} \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{3}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Widać więc, że dla  $U = U_1 \cup U_2, f^{n+1}(U) \subset f^n(U)$  oraz  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$ . Trajektorja

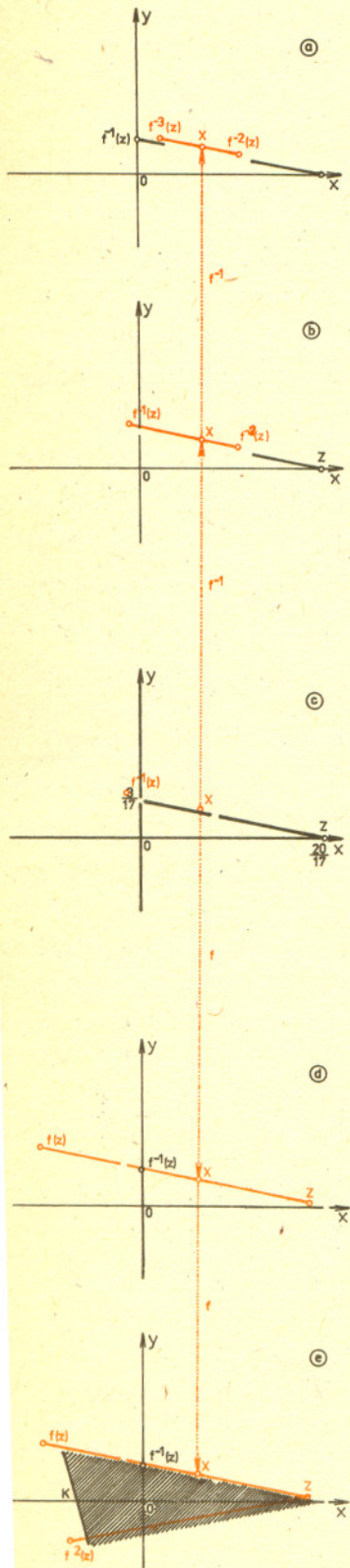
okresowa  $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$  jest dla tego  $f$  trajektorią przyciągającą.

Czytelnik z łatwością narysuje sobie wykres przekształcenia  $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  z trajektorią okresową przyciągającą dowolnego okresu (trzeba jednak zrezygnować z różnowartościowości  $f$ ). A oto dwa przykłady przekształceń płaszczyzny: pierwsze ma punkt stały przyciągający, drugie trajektorie okresowe przyciągające długości 2.

Przekształcenie  $f(x, y) = \left(\frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x\right)$  ma punkt stały  $(0, 0)$ , (!). Dla dowolnego koła

$K_r = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}: f(K_r) = K_{\frac{r}{2}}$ , (!) (rys. 3). Dla  $U = K_1$  zbiór  $f(U)$  zawiera się wewnątrz  $U$  oraz  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \{(0, 0)\}$ . Punkt  $(0, 0)$  jest przyciągający dla  $f$ .

Atraktor zachowuje się podobnie do wiru rzecznego — wirując przyciąga do siebie pewne swoje otoczenie i, „w granicy” wciąga je „w siebie”.



Rys. 7. Tak działają  $f^{-1}$ :  $f^{-1}(X) = X$   
 $f: f(X) = X$ .

Rozważmy przekształcenie  $f(x, y) = \left(1 + y - |x|, \frac{1}{4}x\right)$ . Jest to przekształcenie z rodziny rozpatrywanej w 3, przy  $a = 1, b = \frac{1}{4}$ ; jego działanie przedstawia rys. 6. Mamy  $f\left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right) = \left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right)$  oraz  $f\left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right) = \left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right)$  (!). Punkty te tworzą trajektorię okresową długości 2. Niech  $U_1$  będzie równoległobokiem o wierzchołkach  $A = \left(\frac{26}{25}, \frac{-2}{25}\right)$ ,

$B = \left(\frac{28}{25}, \frac{-2}{25}\right), C = \left(\frac{30}{25}, 0\right)$  i  $D = \left(\frac{28}{25}, 0\right)$ , a  $U_2$  równoległobokiem o wierzchołkach  $E = \left(\frac{-5}{25}, \frac{6,9}{25}\right), F = \left(\frac{-2}{25}, \frac{6}{25}\right), G = \left(\frac{-3}{25}, \frac{7,1}{25}\right)$  i  $H = \left(\frac{-6}{25}, \frac{8}{25}\right)$ . Tak jak pokazano na rys. 4,  $f(U_1)$  zawiera się we wnętrzu  $U_2$ , a  $f(U_2)$  we wnętrzu  $U_1$  (!), a więc dla  $U = U_1 \cup U_2$ ,  $f(U)$  zawiera się we wnętrzu  $U$ . Jest również prawdą, że  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \left\{\left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right), \left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right)\right\}$ .

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi (wskazówka: znaleźć  $f^2(U_1)$  i wykazać, że

$$\bigcap_{k \geq 0} f^{2k}(U_1) = \left\{\left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right)\right\}.$$

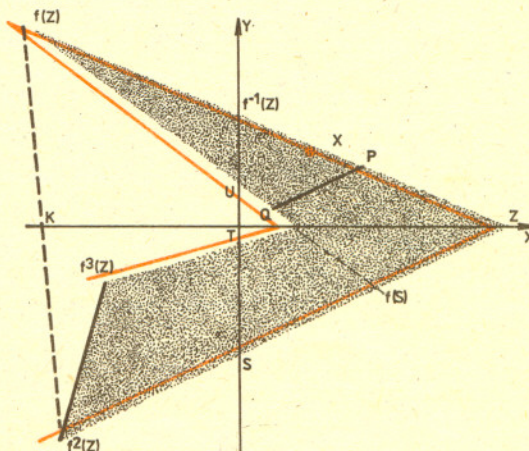
2. Punkt stały przyciągający i trajektoria okresowa przyciągająca są przykładami *atraktorów* tzn. zbiorów przyciągających (dokładna definicja na marginesie). Istnieją przekształcenia mające zbiory przyciągające nie będące punktami stałymi ani trajektoriami okresowymi. Zbiory takie to właśnie *dziwne atraktory*. W pobliżu dziwnego atraktora punkty poruszają się (przy działaniu przekształcenia) w sposób chaotyczny, pozornie przypadkowy.

Dlaczego matematycy zajmują się dziwnymi atraktorami? Źródłem tego zainteresowania trzeba szukać w fizyce. Najważniejszym dotąd nie wyjaśnionym teoretycznie zagadnieniem fizyki jest problem turbulencji. Ze zjawiskiem tym Czytelnik styka się codziennie gwałtownie odkręcając kran: woda wypływa dziwnie wirującym, niespokojnym strumieniem. Z powoli odkręcanego kranu woda często wypływa w sposób regularny, jakby była lepka; nazywa się to wypływem *laminarnym* (nie każdy kran nadaje się do takich obserwacji, np. z kranu z sitkiem zawsze wypływa strumień turbulentny).

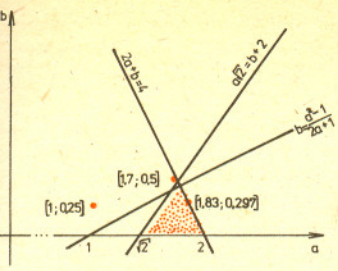
Turbulencja, będąc zjawiskiem powszechnym, ma ogromne znaczenie praktyczne. Jej eksperymentalnemu opisowi poświęcono wiele tomów. Istnieje wiele teorii wyjaśniających turbulencję w szczególnych przypadkach, ale ogólnej teorii nie ma.

Od kilkunastu lat niektórzy fizycy i matematycy próbują powiązać turbulencję z dziwnymi atraktorami. Pewnym opisem turbulencji są równania hydromechaniki (równania Naviera—Stokesa). W oparciu o te równania definiuje się pewne przekształcenia  $R^n$  w siebie mające opisać ruch cząsteczek wody w turbulentnym strumieniu. Gdyby tak uzyskane przekształcenie miało dziwny atraktor, chaotyczne zachowanie się wody w strumieniu byłoby w jakimś sensie wyjaśnione. Byłby to, być może, sposób teoretycznego opisu zjawiska turbulencji.

Jak dotąd próby te powiodły się tylko w bardzo prostych przypadkach. Intensywne prace w tym kierunku prowadzone są na całym świecie, chociaż wielu fizyków i matematyków w ogóle nie wierzy w słuszność takiego podejścia.



Rys. 8



Rys. 5. Twierdzenie Misiurewicz: dla wartości parametrów zakropkowanego zbioru przekształcenie  $f(x, y) = (1 + y - a|x|, bx)$  ma dziwny atraktor.

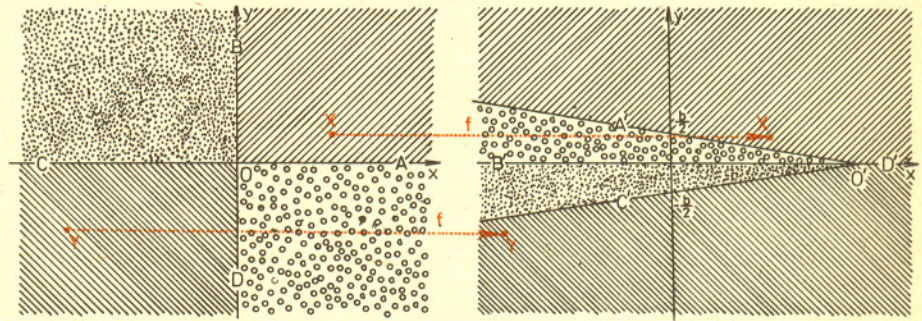
3. Poniżej podajemy przykład przekształcenia płaszczyzny mającego dziwny atraktor (jego związek z równaniami hydromechaniki jest bardzo, bardzo odległy). Jest to przekształcenie dane wzorem:

$$f(x, y) = (1 + y - a|x|, bx),$$

gdzie  $a, b$  są parametrami rzeczywistymi. Po raz pierwszy badał je R. Lozi. Na podstawie eksperymentów numerycznych wysnuł hipotezę, że przekształcenie to przy  $a = 1,7, b = 0,5$  ma dziwny atraktor. Istnienie atraktora dla zbioru parametrów zakropkowanego na rys. 5 udowodnił Michał Misiurewicz z Uniwersytetu Warszawskiego. Warto dodać, że jest to pierwszy teoretyczny dowód istnienia dziwnego atraktora, tzw. niehiperbolicznego; dotychczas o ich istnieniu wnioskowano z obliczeń numerycznych.

Poniżej opisany jest dziwny atraktor przekształcenia  $f$  dla  $a = 1,83$  i  $b = 0,297$ . Wartości parametrów zostały tak dobrane, aby ułatwić obliczenia.

$f$  jest przekształceniem różnowartościowym (!), przekształca liniowo (tzn. obrazem odcinka jest odcinek) lewą półpłaszczyznę na dolną, a prawą na górną (rys. 6) (!).



Rys. 6. Obrazy półpłaszczyzn przy przekształceniu  $f(x, y) = (1 + y - 1,7|x|, \frac{x}{2})$ .

Punkt stały przyciągający i trajektoria przyciągająca są przykładami atraktorów (nazwa pochodzi od słowa atrakcja), tzn. zbiorów przyciągających. Zbiór  $A \subset X$  nazywamy atraktorem dla przekształcenia  $f: X \rightarrow X$ , jeśli:

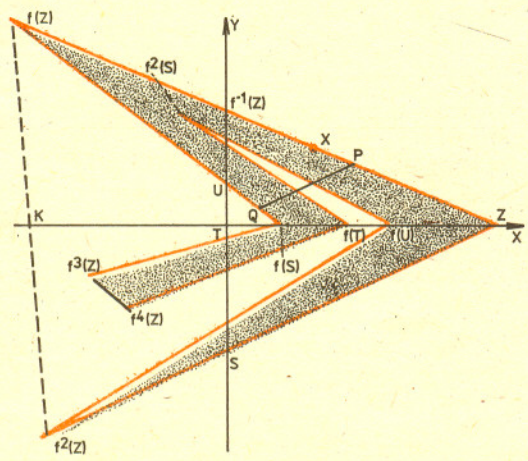
- 1° istnieje otoczenie  $U \supset A$  takie, że domknięcie zbioru  $f(U)$  zawarte jest we wnętrzu  $U$ ;
- 2°  $A$  jest częścią wspólną wszystkich  $f^n(U), n = 1, 2, \dots$ ;
- 3° jeśli  $V_1$  i  $V_2$  są otwartymi podzbiórmi  $A$ , to dla pewnego  $n$  zbiory  $f^n(V_1)$  i  $V_2$  mają punkt wspólny; warunek ten zapewnia nierozkładalność  $A$  na sumę dwóch rozłącznych niepustych zbiorów o własnościach 1° i 2°.

$f$  ma dokładnie dwa punkty stałe:  $X = \left(\frac{1000}{2533}, \frac{297}{2533}\right)$  w pierwszej ćwiartce oraz  $Y = \left(\frac{-1000}{1127}, \frac{-297}{1127}\right)$  w trzeciej ćwiartce (!). Niech  $Z = \left(\frac{20}{17}, 0\right)$ , wtedy  $f^{-1}(Z) = \left(0, \frac{3}{17}\right)$  (!).

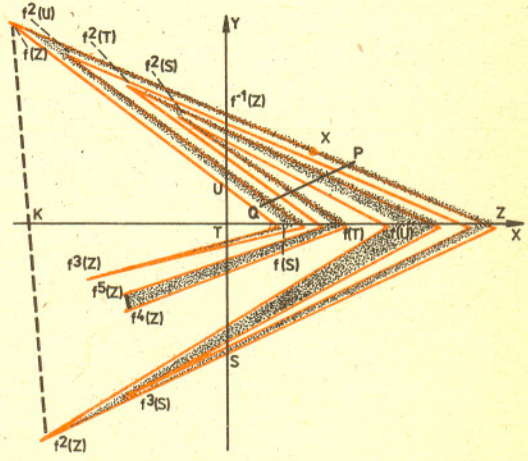
Odcinek  $\overline{Zf^{-1}(Z)}$  zawiera punkt  $X$  (!), a przy działaniu  $f^{-1}$  przechodzi w siebie skracając się w stosunku 1:1,98 tak, jak to pokazano na rys. 7b (!). Tak więc, dla każdego  $n, f^{n+1}(\overline{Zf^{-1}(Z)}) \supset \supset f^n(\overline{Zf^{-1}(Z)})$ . Kolejne obrazy  $\overline{Zf^{-1}(Z)}$  są przedstawione na rysunkach 7d – 10 (kolorowa łamana), (!). Rysunki 8-10 zostały zniekształcone, aby w ogóle było na nich coś widać. Cały obszar zakropkowany na każdym z nich mieści się we wnętrzu obszaru przedstawionego na rysunku poprzednim.

Oznaczmy przez  $A_0$  zbiór  $\bigcup_{n \geq 0} \overline{f^n(\overline{Zf^{-1}(Z)})}$ .  $A_0$  jest bardzo skomplikowanym zbiorem będącym przeliczalną sumą odcinków.

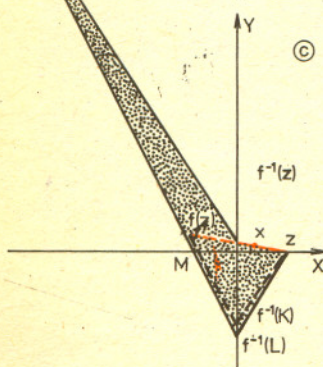
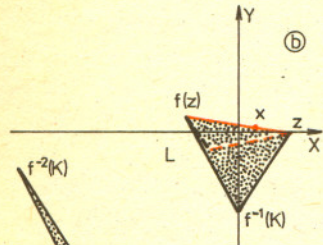
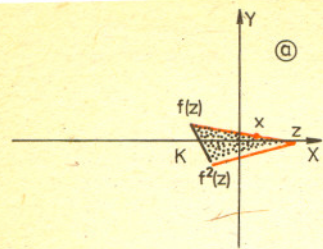
Niech  $F$  będzie trójkątem o wierzchołkach  $Z, f(Z)$  i  $f^2(Z)$ . Rysunki 7e i 8 pokazują, że  $f(F) \subset F$  (!). Za pomocą  $F$  skonstruujemy zbiór  $U$ , o którym mowa w definicji atraktora.



Rys. 9. Kolejne etapy budowy dziwnego atraktora.



Rys. 10.



Rys. 11

Na rysunkach 11a, b, c, 12 i 13 pokazane są odpowiednio  $F, f^{-1}(F), f^{-2}(F), f^{-3}(F)$  i  $f^{-4}(F)$ , (!). Na rys. 13a widać, że  $f(f^{-4}(F)) = f^{-3}(F)$  prawie całkowicie zawiera się we wnętrzu  $f^{-4}(F)$ , jedynie w pobliżu punktu  $X$  brzegi  $f^{-3}(F)$  i  $f^{-4}(F)$  pokrywają się.

Na rys. 13a przedstawiono trapez  $R$  (dłuższe boki są równoległe), który dodamy do  $f^{-4}(F)$ . Rys. 12a pokazuje, że  $U = f^{-4}(F) \cup R$  ma własność żądaną w punkcie 1° definicji atraktora (!).

Naturalnym kandydatem na dziwny atraktor jest  $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$ . Można wykazać, że

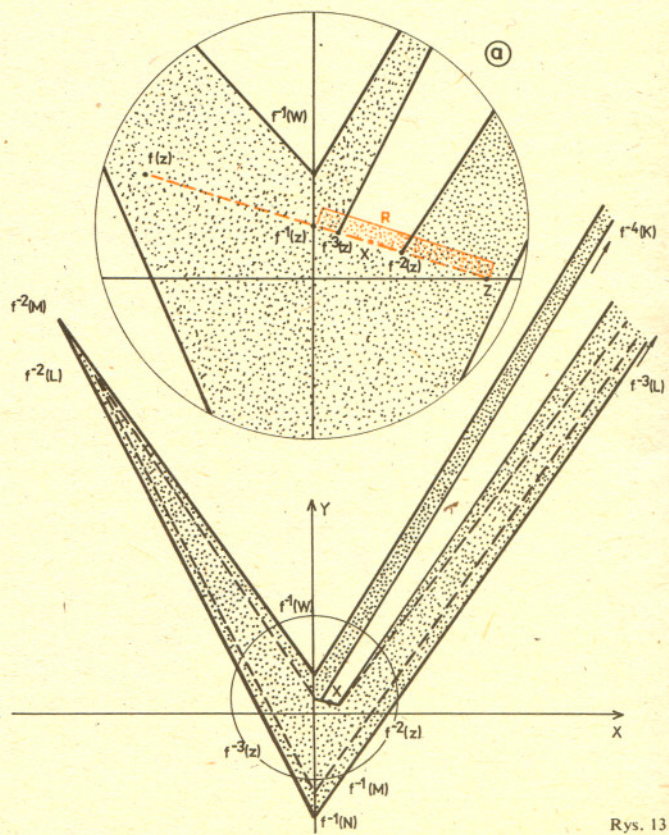
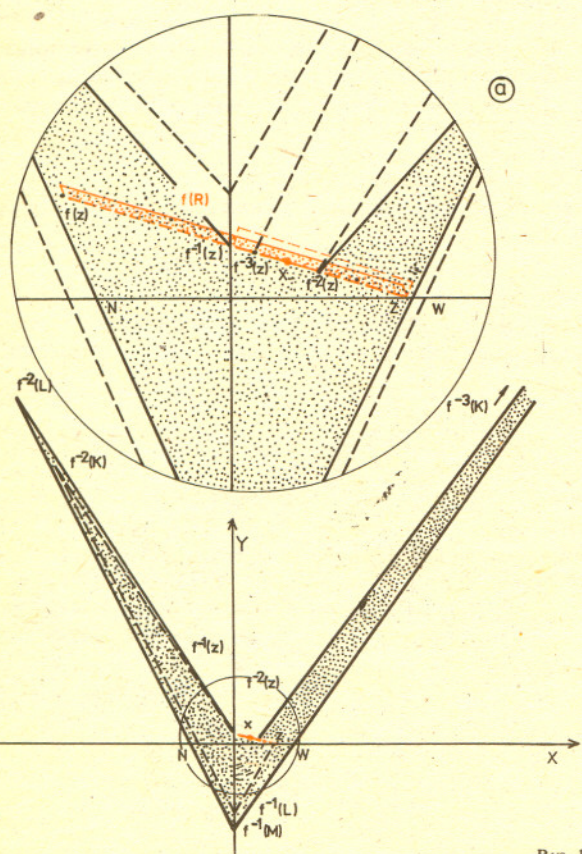
$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(F) \text{ (radzimy spróbować), a więc rys. 9 i 10 przedstawiają przybliżone}$$

wyobrażenie  $A$ . Ponieważ  $A_0$  jest zbiorem niezmienniczym ( $f(A_0) = A_0$ , (!)) zawartym w  $U$ , więc  $A$  zawiera  $A_0$ . Ponieważ  $A$  jest zbiorem domkniętym (jako przecięcie zbiorów domkniętych) zawiera domknięcie  $A_0$ . Można wykazać, że  $A$  jest równy domknięciu  $A_0$ , a więc  $A$  jest „bardzo podobny” do  $A_0$ . Można również wykazać, że  $A$  spełnia warunek 3° definicji atraktora. Ponieważ niewątpliwie nie jest punktem stałym ani trajektorią okresową, więc jest prawdziwym dziwnym atraktorem.

Na zakończenie pragnę zwrócić uwagę na trzy własności charakterystyczne dla dziwnych atraktorów w ogóle:

- a) Popelnimy niewielki błąd wyobrażając sobie  $A$  jako  $A_0$ .  $A_0$  jest łamaną bez samoprzecięć o nieskończonej długości (!), można więc ją uważać za „pozaginaną” prostą, położoną na płaszczyźnie w bardzo skomplikowany sposób. Przy przekształceniu  $f$  zbiór  $A_0$  wewnątrznie się rozszerza (każdy mały odcinek  $A_0$  przechodzi na odcinek o większej długości), natomiast pewne otoczenie  $A_0$  jest przyciągane do  $A_0$  (małe odcinki bliskie i równoległe do  $A_0$  zblizają się do  $A_0$ ).
- b) Skoncentrujmy na chwilę uwagę na odcinku  $\overline{PQ}$  zaznaczonym na rysunkach 8-10. Zbiory  $f(F) \cap \overline{PQ}$ ,  $f^2(F) \cap \overline{PQ}$  i  $f^3(F) \cap \overline{PQ}$  przypominają kolejne zbiory otrzymane przy konstrukcji zbioru Cantora (np. K. Kuratowski „Wstęp do teorii mnogości i topologii”), można więc przypuszczać, że  $A \cap \overline{PQ}$  jest pewnym zbiorem Cantora. Stąd wynikałoby, że  $A$  jest lokalnie zbiorem Cantora pomnożonym kartezjańsko przez odcinek. Przypuszcza się, że jest to typowe dla dziwnych atraktorów.

- c)  $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(F)$ .  $F$  ma pewne skończone pole. Przekształcenie  $f$  zmniejsza pole każdej figury dokładnie  $b = 0,297$  razy (spróbujcie to wykazać), a więc pola zbiorów  $f^n(F)$  zbiegają do zera. Stąd wynika, że pole  $A$  jest równe zeru.



Rys. 12

Rys. 13



lew - panthera leo.

## Odpychający punkt stały

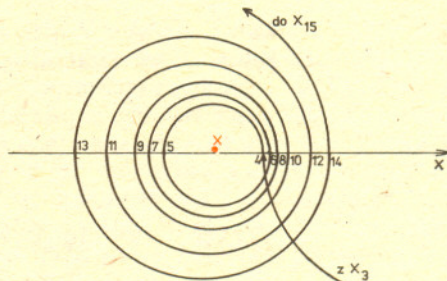
Przekształcenia  $y = \log x$  nie można iterować (powtarzać), bo dla dowolnego wyjściowego  $x$  wyrażenie

$$y = \log \log \dots \log x$$

szybko przestanie być dodatnie. Umówmy się jednak, że w takim przypadku zmienimy znak ... i określimy ciąg dalej: tak by zawsze wyraz następny był logarytmem poprzedniego (lub poprzedniego ze zmienionym znakiem).

Od razu pierwsza wątpliwość: czy nie trafimy w zero? Oczywiście, zdarzy się. Kiedy? To pierwsze nasze zadanie dla Czytelnika. „Na ogół” nie trafimy jednak w zero i ciąg nasz będzie określony dla wszystkich  $n$ :  $x_{n+1} = \log|x_n|$ ; wyraz początkowy  $x_1$  — (prawie) dowolny. Nieco inaczej można napisać

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \log x_n^2.$$



Zbadajmy historię punktu  $x_1 = 1982$  w kolejnych iteracjach. Logarytm 1982 wynosi 3,2971..., następnie  $x_3 = \log \log 1982 = 0,5181...$ ,  $x_4 = \log \log \log 1982 = -0,2856...$  i tak dalej (rysunek). Kolejne punkty jakby odbijały się od jakiegoś położonego między nimi, piętnasty trafi bardzo blisko zera:  $x_{15} = -0,0053...$  bliżej zera padnie dopiero  $x_{85} = 0,00016...$ , więc szesnasty odskoczy daleko w lewo  $x_{16} = -2,2751...$ , ale od osiemnastego znów zaczną jakby się odkręcać od... o właśnie, jakiego punktu?

Odpowiedź brzmi: wokół punktu równego w przybliżeniu  $x = -0,3990129...$ . Ale jak dojść do tego? To drugie zadanie.

Ten punkt jest odpychający: trzeba idealnie trafić w niego, żeby w nim zostać; nawet najdrobniejsze uchybienie spowoduje, że odlecimy daleko. A zresztą trafić w niego nie sposób (dlaczego). I tu wskazówka do drugiego zadania: Trzeba zamienić odpychający punkt stały na przyciągający. Dla jakiego przekształcenia?

A jak poradzić sobie z punktem przyciągającym? tak jak z kozą.



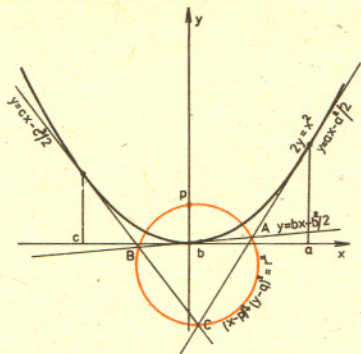
### Rozwiązanie zadania F 117

Gdyby młynek pracował pod nieobecność zewnętrznych momentów sił, wówczas, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, wirnik i korpus obracałyby się w przeciwnie strony z prędkościami kątowymi odwrotnie proporcjonalnymi do swoich momentów bezwładności. Zaobserwowanie takiego efektu w stanie ustalonym pracy urządzenia jest z reguły niemożliwe, ponieważ konstruktorzy celowo zwiększają tarcie pomiędzy obudową i podłożem. Niekiedy ustawienie młynka na kartce papieru pozwala do tego stopnia zmniejszyć tarcie, że w trakcie mielenia korpus zaczyna wirować z niewielką prędkością kątową. W tych nielicznych przypadkach określenie kierunku obrotów wirnika nie stanowi problemu.

W pozostałych rozstrzygnięcia dostarcza obserwacja urządzenia w stanie nieustalonym tuż po włączeniu bądź wyłączeniu zasilania. Dla silników elektrycznych moment sił działających na wirnik, a zatem i na korpus młynka, zależy od prędkości kątowej. Przy niewielkich prędkościach kątowych moment ten jest tak duży, iż zdolny jest pokonać nawet znaczne tarcie. Podczas włączania widoczny jest gwałtowny „odrzut” korpusu. Gdy młynek ma kształt zbliżony do walcowego, położenie młynka na powierzchni bocznej oczywiście potęguje ten efekt. Pewnych trudności praktycznych dostarczyć mogą młynki wymagające ciągłego utrzymywania w dłoniach i stałego wywierania nacisku na wyłącznik. Wierzymy, że i w takim przypadku Czytelnik potrafi rozwiązać postawione zadanie.

## Łatwe zadanie o paraboli

Niech proste  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  będą styczne do paraboli. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  przechodzi przez ognisko  $P$  tej paraboli (rys. 1).



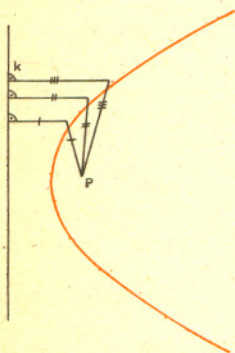
Rys. 1. Okrąg opisany na trójkącie utworzonym przez styczne do paraboli przechodzi zawsze przez ognisko tej paraboli. Oznaczenia algebraiczne wykorzystuje się w artykule „Parabola, gwiazdki i bilard”.

Łatwe czy trudne zadanie? Jeśli by ktoś chciał to wyliczyć, wystarczy napisać równanie tej paraboli w jakimś układzie współrzędnych, równania trzech dowolnych stycznych, obliczyć współrzędne ich punktów przecięcia i jakoś sprawdzić, czy te punkty są współokręgowe z ogniskiem paraboli... chyba jednak nie zachęcamy do tych rachunków.

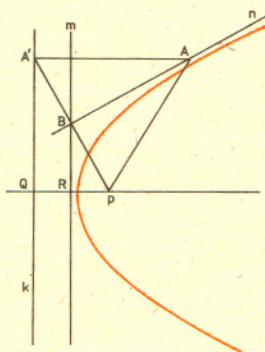
## Przyjrzyjmy się uważnie paraboli

Jest to zbiór punktów jednakowo oddalonych od ogniska (punkt  $P$ ) i kierownicy (prosta  $k$ , rys. 2).

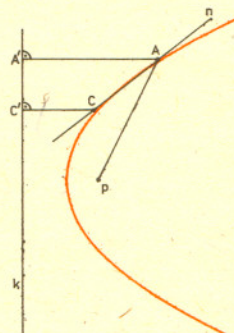
Prosta  $l$  przechodząca przez ognisko i prostopadła do kierownicy jest osią symetrii paraboli. Przecina ona parabolę w punkcie  $Q$ , nazywanym jej wierzchołkiem, a kierownicę w punkcie  $R$ . Wierzchołek  $Q$  jest oczywiście środkiem odcinka  $PR$ .



Rys. 2. Własność charakteryzująca parabolę. Zaznaczone odcinki są równej długości.



Rys. 3



Rys. 4

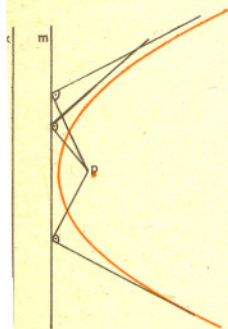
Styczna  $m$  do paraboli w wierzchołku jest równoległa do kierownicy (rys. 3). Obierzmy teraz na paraboli dowolny punkt  $A$ . Niech  $A'$  będzie rzutem prostokątnym  $A$  na kierownicę, a prosta  $n$  dwusieczną kąta  $\sphericalangle A'AP$  (rys. 3). Trójkąt  $A'AP$  jest równoramienny, więc dwusieczną kąta przy wierzchołku  $A$  przecina podstawę  $A'P$  w jej środku  $B$  i to pod kątem prostym. Z twierdzenia Talesa wynika, że punkt  $B$  należy do prostej  $m$ . Przypuśćmy teraz, że prosta  $n$  przecina parabolę w jeszcze jednym punkcie  $C$  (rys. 4). Niech rzutem prostokątnym  $C$  na kierownicę będzie punkt  $C'$ . Mielibyśmy wówczas  $CP = CC'$  (bo  $C$  należy do paraboli) i  $CP = CA'$  (bo  $C$  leży na wysokości trójkąta równoramiennego  $\triangle A'AP$ ). Byłoby więc  $CC' = CA'$ , co jest niemożliwe. Otrzymujemy stąd dwa wnioski

### Wniosek 1

Prosta  $n$  jest styczna do paraboli (spójrzmy, jak prostą i elegancką mamy konstrukcję stycznej do paraboli w danym punkcie).

### Wniosek 2

Wszystkie rzuty prostokątne ogniska paraboli na styczne do niej leżą na prostej  $m$  (rys. 5).



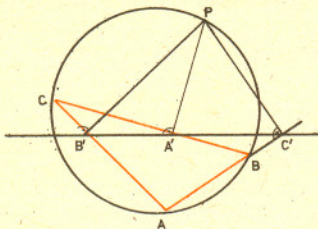
rys. 5. Styczne do paraboli.

## Kiedy na czworokącie można opisać okrąg?

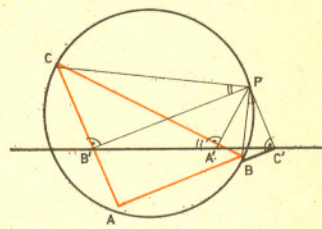
### Rozwiązanie zadania M 302

Stawiając na każdym z prostokątów pokrywających koło prostopadłościan  $a \times 1 \times 1$  pokrylibyśmy prostopadłościanami sferę o średnicy 1 stojącą na płaszczyźnie nad środkiem koła. Zauważmy jednak, że prostopadłościan o grubości  $a$  wycina ze sfery zbiór zawarty w pewnym pasie (lub wycinku) o wysokości  $a$ , a więc o powierzchni nie większej niż  $a\pi$ . Wynika stąd, że do pokrycia sfery potrzeba co najmniej  $\left\lceil \frac{\pi}{a\pi} \right\rceil + 1 = k$  prostopadłościanów, a więc do pokrycia koła potrzeba  $k$  prostokątów. Układając  $k$  prostokątów obok siebie tak, by pokryły prostokąt  $ka \times 1$  zauważymy, że  $k$  prostokątów wystarcza do pokrycia koła.

Wtedy i tylko wtedy, gdy suma przeciwległych kątów tego czworokąta jest kątem o rozwartości  $180^\circ$ .



Rys. 6. Punkty  $A', B', C'$  są współliniowe. Przechodząca przez nie prosta nazywa się linią Simsona o biegunie  $P$ .



Rys. 7

Znane. Łatwe. Nie będziemy dowodzić. Będziemy za to z tego korzystać. Niech punkt  $P$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ , a niech  $C, A$  i  $B$  będą rzutami prostokątnymi tego punktu na proste  $AB, BC, CA$  (rys. 6). Wykażemy, że punkty  $A, B, C$  są współliniowe: Tu niezbędnych będzie kilka niewielkich rachunków na kątach. Ponieważ na każdym z czworokątów  $ACPB$  i  $AB'PC'$  można opisać okrąg, więc  $\sphericalangle CPB \equiv \sphericalangle B'PC'$  (obydwa dopełniają kąt  $\sphericalangle CAB$  do półpełnego). Stąd  $\sphericalangle CPB' \equiv \sphericalangle BPC'$ . Jednocześnie  $\sphericalangle CPB' \equiv \sphericalangle CA'B'$ , bo na czworokącie  $CPA'B'$  można opisać okrąg, i  $\sphericalangle BPC' \equiv \sphericalangle BA'C'$ , bo na czworokącie  $BPA'C'$  można opisać okrąg (rys. 7). Z trzech ostatnich przystawień otrzymujemy:  $\sphericalangle CA'B' \equiv \sphericalangle BA'C'$ , a to daje nam:

### Wniosek 3

Punkty  $A', B', C'$  są współliniowe. Odwracając powyższe rozumowanie otrzymujemy natychmiast:

### Wniosek 4

Jeśli rzuty prostokątne punktu  $P$  na proste  $AB, BC, CA$  są współliniowe, to na czworokącie  $ABPC$  można opisać okrąg.

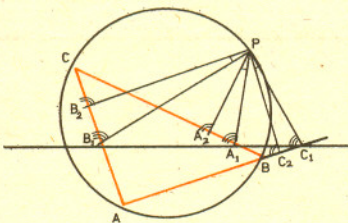
Jeśli teraz spojrzymy na **Wniosek 2** i **Wniosek 4**, to... zobaczymy, że nasze zadanie o paraboli rozwiązało się samo. Jeśli ktoś nie lubi, gdy mu się zadania same rozwiązują, proponujemy przeprowadzenie dowodu następującego faktu: Jeżeli punkt  $P$  należy do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , a trójkąty  $A_1PA_2, B_1PB_2, C_1PC_2$  są parami podobne (patrz rys. 8), to punkty  $A_1, B_1, C_1$  są współliniowe ( $A_2, B_2, C_2$  zresztą także). Dowód w numerze.

dr Jerzy BEDNARCZUK

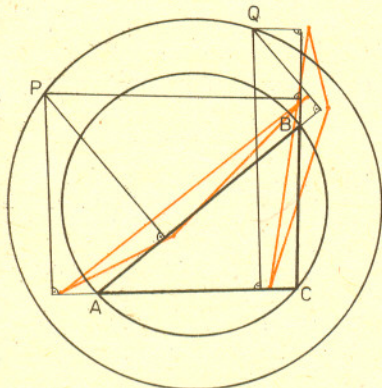
## Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Niech punkty  $A', B', C'$  będą rzutami prostokątnymi punktu  $P$  na proste wyznaczone przez boki trójkąta  $ABC$ . Trójkąt  $A'B'C'$  nazywać będziemy *trójkątem spodkowym punktu  $P$*  w trójkącie  $ABC$ . Jeśli punkt  $P$  należy do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , to jego trójkąt spodkowy jest trójką punktowym współliniowych (rys. 6 przy artykule „Łatwe zadanie o paraboli”). I odwrotnie — jeśli trójkąt spodkowy punktu  $P$  jest trójką punktowym współliniowych, to punkt  $P$  należy do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Twierdzenie to można również sformułować w następujący, równoważny sposób: Punkt  $P$  należy do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta spodkowego tego punktu równe jest zero. Dowód tego twierdzenia można znaleźć na przykład we wspomnianym artykule „Łatwe zadanie o paraboli” w tym numerze *Delta*. Jeśli ktoś spróbuje dowieść go samodzielnie, będzie to dobrą rozgrzewką przed przystąpieniem do rozwiązania zadania, z którym my nie umiemy sobie poradzić: Znaleźć zbiór punktów, dla których trójkąty spodkowe w danym trójkącie  $ABC$  mają dane (niekoniecznie zerowe) pole  $a$ .



Rys. 8



Szczególny przypadek zadania, o którym piszemy obok. Czy zaznaczone kolorem dwa trójkąty spodkowe mają takie same pole?

PROOF



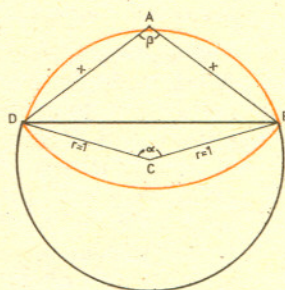


tygrys - panthera tigris.

## Atraktor i koza

W artykule pt. „Cyrklem, linijką czy minikalkulatorem” w *Delcie* 11/1981 Jerzy Bednarczuk zastanawia się nad starym zagadnieniem: czy „lepsza” jest geometria aksjomatyczno-intuicyjna, jakiej szczątków naucza się w szkołach, czy analityczna — a więc rachunkowa. Konkluzja autora jest jasna: czasem pierwsza, a czasem druga, przykłady zadań rozwiązalnych łatwo jedną a trudno drugą metodą można mnożyć.

Mało jest efektownych zastosowań minikalkulatora w geometrii. Interesujący przykład takiego zastosowania daje stare zadanie o kozie. U brzegu kołowego pastwiska przywiązana jest na długim sznurku koza. Jaka powinna być długość sznurka, aby w zasięgu kozy była dokładnie połowa pastwiska?



Rys. 1

Odcinka o szukanej długości sznurka nie da się skonstruować za pomocą cyrka i linijki. Długość ta nie wyraża się też prosto przez funkcje elementarne. Do rozwiązania przyda się kalkulator. A oto, jak.

Przyjmijmy, że pastwisko jest kołem o promieniu 1 i środku w punkcie C, a palik, do którego uwiązana jest koza, jest wbity w A (rys. 1). Wówczas

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{x}{2} = \sin \frac{\alpha}{4},$$

a stąd przez proste przekształcenia trygonometryczne dostajemy

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 4 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Dalej obliczamy (por. rys. 2), że pole „górnego” odcinka kołowego o podstawie BD z rys. 1 wynosi

$$S_1 = \frac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha) = 2 \arcsin \frac{x}{2} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

i podobnie pole „dolnego” odcinka kołowego o tej samej podstawie BD wynosi

$$S_2 = \frac{x^2}{2} (\beta - \sin \beta) = x^2 \arccos \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Sumą tych pól ma być pole połowy pastwiska, czyli  $\frac{\pi}{2}$  i po krótkich rachunkach mamy

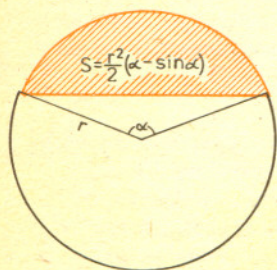
$$\arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2} \arccos \frac{x}{2},$$

skąd dopisując „sin” po obu stronach

$$x = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2} \arccos \frac{x}{2} \right).$$

Pisząc prawą stronę tej równości jako  $f(x)$  mamy następujące równanie długości koziego postronka

$$x = f(x).$$



Rys. 2. Pole wycinka kołowego o rozwartości  $\alpha$  jest równe  $\frac{\alpha r^2}{2}$  (kąt  $\alpha$  w radianach), a pole widocznego na rysunku trójkąta wynosi  $(r^2 \sin \alpha)/2$ . A więc pole zakreskowanego odcinka kołowego  $S = r^2(\alpha - \sin \alpha)/2$ .

Rozwiązanie zadania z artykułu o paraboli

Spodki  $P_1, P_2, P_3$  wysokości poprowadzonych z wierzchołka  $P$  w tych trójkątach są współliniowe (Wniosek 3).

Punkty  $A_1, B_1, C_1$  są obrazami tych spodków przy złożeniu obrotu wokół punktu  $P$  o kąt  $\alpha$ .  $P_1PA_1$  z jednokładnością o środku  $P$

i skali  $\alpha = \frac{A_1P}{P_1P}$ .

Niech  $x_1$  będzie równe np. 1, a  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Przechodząc do granicy po obu stronach tej ostatniej równości i oznaczając  $g = \lim x_n$  mamy  $g = f(g)$ , tzn.  $g$  jest szukaną długością sznurka.

Bierzemy kalkulator, najlepiej programowany i obliczamy:  $x_2 = f(x_1) = 1,28048\dots$ ,  $x_3 = f(x_2) = 1,06079\dots$ ,  $x_4 = f(x_3) = 1,23538\dots$ , ...,  $x_{10} = 1,17865\dots$ . Ciąg jest zbieżny bardzo powoli,  $x_{25}$  wynosi 1,15803...,  $x_{50} = 1,15873$ , około siedemdziesiątego piątego ustala się jednak ósma cyfra znacząca i wartość graniczna wynosi z tą dokładnością

$$g = 1,1587285\dots$$

Można powiedzieć, że  $g$  jest punktem stałym przyciągającym dla przekształcenia  $f$  (patrz artykuł Pawła Góry).

Przymknęliśmy tu oko na zagadnienie zbieżności ciągu  $x_n$  (dlaczego jest zbieżny?), zadowolając się fizycznym uzasadnieniem: przecież istnieje taki sznurek, że jak do niego uwiązać kożę, to zeżre połowę trawy z pastwiska.

Irena KOZŁOWSKA



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 301.** Drogi w krainie Id łączą ze sobą i z zamkiem króla 60 zamków rycerskich, przy czym z każdego zamku wychodzą 3 drogi. Król wybrał się w podróż po swym królestwie spędzając w każdym napotkanym zamku noc i opuszczając zamek co drugi dzień drogą wiodącą w prawo, a co drugi dzień — drogą w lewo od drogi, którą przybył. Czy wróci do swego zamku przed upływem roku?

Rozwiązanie na str. 11

**M 302.** Wykazać, że jeżeli  $\frac{1}{k} < a < \frac{1}{k-1}$ , to do pokrycia koła o średnicy 1 potrzeba

i wystarcza  $k$  prostokątów  $a \times 1$ .

Rozwiązanie na str. 7

**M 303.** Znaleźć takie uporządkowanie  $(a'_0, \dots, a'_n)$  ciągu liczb rzeczywistych  $a_0 \leq \dots \leq a_n$ , aby suma

$$S = (a'_0 - a'_1)^2 + (a'_1 - a'_2)^2 + \dots + (a'_{n-1} - a'_n)^2 + (a'_n - a'_0)^2$$

była najmniejsza.

Rozwiązanie na str. 14

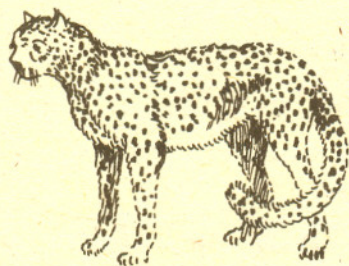
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 117.** Domowe młynki do kawy napędzane są silnikami elektrycznymi. Jak rozstrzygnąć eksperymentalnie, w którą stronę obraca się wirnik, jeżeli nie możemy obserwować go bezpośrednio?

Rozwiązanie na str. 5

**F 118.** Dlaczego kot nawet spadając grzbietem do dołu (z zerowym całkowitym momentem pędu) zawsze obraca się i spada na cztery łapy? Jak pogodzić to z zasadą zachowania momentu pędu?

Rozwiązanie na str. 17



gepard - acinonyx.



serval - neofelis serval.

# O punktach libracji i podkowiastych orbitach

Dr Tomasz KWAST

Jednym z największych działów mechaniki nieba, nauki zajmującej się ruchami ciał niebieskich, jest tzw. problem trzech ciał. Zainteresowanie nim było chyba logicznym następstwem uprzedniego rozwiązania zagadnienia dwóch ciał. Mianowicie, skoro Kepler w 1619 r. sformułował ostatnie ze swoich praw ruchu planet, a Newton w 1687 znalazł dla nich uzasadnienie w postaci prawa grawitacji, to naturalną rzeczą było zająć się z kolei zagadnieniem trzech ciał. Brzmi to dość banalnie, jednak, jak pokazano później, w ogólnej postaci zagadnienie to jest nierozwiązalne, tzn. nie można podać w analitycznej postaci rozwiązań równań ruchu trzech ciał działających każde na każde siłami grawitacji. Można było jedynie pokusić się o poszukiwanie rozwiązań w jakichś szczególnych przypadkach. Pierwsze takie rozwiązania szczególne tego problemu znalazł Lagrange w 1772 r. Pokazał on, że możliwy jest taki ruch trzech ciał, gdy albo leżą one stale na linii prostej, albo gdy leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Z upływem czasu konfiguracja tych trzech mas obraca się zmieniając jedynie rozmiary, a nie zmieniając proporcji, z czego wynika, że orbity wszystkich trzech ciał są krzywymi (stożkowymi) podobnymi, leżą we wspólnej płaszczyźnie i mają wspólne ognisko w środku masy.

Jak widzimy, nazwa „rozwiązanie szczególne” jest tu jak najbardziej trafna i w potocznym jej znaczeniu. Konfiguracje takie są jedynie ciekawostką matematyczną, zaś ich realizacja w przyrodzie praktycznie niemożliwa. Za to ogromne zastosowanie ma pewien szczególny przypadek zagadnienia trzech ciał, znany w literaturze jako tzw. problem ograniczony. To z kolei brzmi o tyle nieprzyjemnie, że sugeruje znowu jakąś abstrakcyjność zagadnienia. Tak źle jednak nie jest i problem ten przy całym swoim „ograniczeniu” jest dostatecznie obszerne, ciekawy i związany z przyrodą, aby liczni autorzy poświęcali mu całe monografie. Polega on na badaniu ruchu ciała o bardzo małej masie w polu grawitacyjnym dwóch innych mas umownie „ciężkich”, przy czym z góry zakłada się, że te dwie masy obiegają się po orbicie kołowej. Trzecie ciało ma z założenia masę tak małą, że nie wpływa na ruch dwóch ciężkich — nazywane bywa w związku z tym „znikomy”.

Rozwiązanie Lagrange’a nie zakłada żadnych warunków na masy trzech ciał, może zatem dotyczyć również problemu ograniczonego. Wynika z tego, że w płaszczyźnie orbity mas ciężkich  $M$  i  $m$  istnieje pięć punktów  $L_1, \dots, L_5$  (zwanych punktami libracji lub punktami Lagrange’a), w których dwa przyspieszenia grawitacyjne pochodzące od mas ciężkich i jedno odśrodkowe znoszą się (początek układu jest tu umieszczony w środku masy, a całość obraca się w kierunku zaznaczonym strzałką z prędkością kątową  $\omega = \sqrt{G(M+m)/R^3}$ , gdzie  $G$  jest stałą grawitacji, a  $R$  odległością mas ciężkich). Trzy z nich leżą na prostej przechodzącej przez masy ciężkie i jest intuicyjnie dość oczywiste, że w ogóle muszą istnieć, aczkolwiek nie jest łatwo podać formuły określające ich dokładne położenie. Mniej oczywiste jest, że zerowanie się wypadkowego przyspieszenia zachodzi też w punktach  $L_4$  i  $L_5$ , będących wierzchołkami trójkąta równobocznego rozpiętego na odcinku  $R$ . Za to bardzo łatwo można ten fakt sprawdzić. Otóż przyspieszenie ze strony  $M$  wynosi

$$a_1 = \left[ -\frac{GM}{R^2} \cos \frac{\pi}{3}, -\frac{GM}{R^2} \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{GM}{R^2} \left[ -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

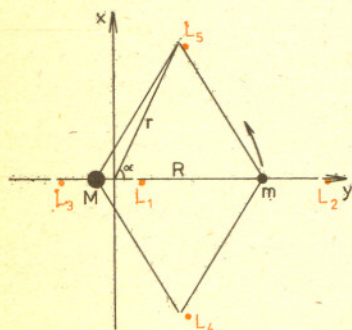
ze strony  $m$

$$a_2 = \left[ \frac{Gm}{R^2} \cos \frac{\pi}{3}, -\frac{Gm}{R^2} \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{Gm}{R^2} \left[ \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

a przyspieszenie odśrodkowe w odległości  $r$  od środka masy układu (czyli od osi obrotu) jest

$$a_{odśr} = [\omega^2 r \cos \alpha, \omega^2 r \sin \alpha] = \frac{G}{R^2} \left[ \frac{1}{2} (M-m), \frac{\sqrt{3}}{2} (M+m) \right].$$

Natychmiast widzimy, że suma tych trzech przyspieszeń jest równa zeru.



Usytuowanie punktów libracji  $L_1, \dots, L_5$  w układzie dwóch mas  $M$  i  $m$  obiegających się po kole. Początek układu współrzędnych jest w środku masy.



**Rozwiązanie zadania M 301**

Oznaczmy przez  $Z_i$  zamek, w którym król spędził  $i$ -tą noc i przypuśćmy, że nie powrócił do swej siedziby do 363 dnia. Znajdzie się wtedy zamek, w którym król spędził 4 nieparzyste noce, a więc co najmniej 2 razy przybył do niego tą samą drogą. Niech więc  $Z_{2k} = Z_{2l}$  i  $Z_{2k-1} = Z_{2l-1}$  ( $k < l$ ). Łatwo zauważyć, że wynika stąd, iż  $Z_{2k-2} = Z_{2l-2}, \dots, Z_0 = Z_{2l-2k}$ . Ale  $Z_0$  był zamkiem królewskim i wobec tego król odwiedził swój zamek w dniu  $2l-2k$  wbrew założeniu. Tak więc król wrócił do swojej siedziby, nim minął rok.

Oczywiście, niewielkie znaczenie przyrodnicze ma fakt, że jakiś drobny obiekt umieszczony w punkcie libracji będzie tam przebywał dowolnie długo, gdyż jest to sytuacja przyrodniczo nierealna. Praktyczne znaczenie może mieć znajomość ruchu drobnych ciał w pobliżu punktów libracji, a w tym celu trzeba, niestety, po prostu efektywnie rozwiązywać równania ruchu. Ma się rozumieć, nie będziemy tu tego robić, warto może tylko zdać sobie sprawę, że na oko nie są one strasznie skomplikowane. W układzie współrzędnych jak na rysunku, a więc wirującym ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , mają one postać

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2x - GM \frac{x-x_1}{r_1^3} - Gm \frac{x-x_2}{r_2^3},$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2y - GM \frac{y}{r_1^3} - Gm \frac{y}{r_2^3},$$

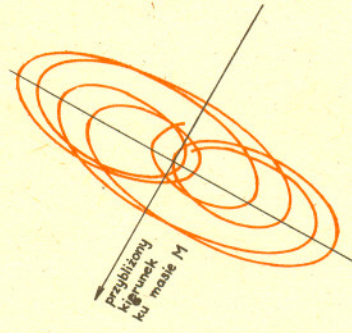
gdzie  $x_1 = -\frac{m}{M+m}R$  jest współrzędną masy  $M$ ,  $x_2 = \frac{M}{M+m}R$  — współrzędną masy  $m$ , a  $r_1$  i  $r_2$  oznaczają odległości ciała znikomego odpowiednio od  $M$  i  $m$ . Pominęliśmy tu jako nieinteresujące równanie w trzeciej współrzędnej prostopadłej do płaszczyzny orbity mas  $M$  i  $m$ .

Rozwiązywać te równania można na dwa sposoby: albo stosując dodatkowe upraszczające założenia próbować rozwiązywać je analitycznie, albo w postaci ścisłej rozwiązywać je numerycznie. Pierwsze podejście daje się zastosować, gdy prawe strony równań zlinearyzuje się, tzn. rozłoży w szereg potęgowy w pobliżu punktów libracji i zachowa tylko wyrazy z pierwszymi potęgami  $x$  i  $y$ . Taki układ równań różniczkowych liniowych jest rozwiązalny do końca. Wnioski w skrócie są następujące.

Bez względu na stosunek mas  $M$  i  $m$  ruch w bliskim otoczeniu punktów liniowych  $L_1, L_2$  i  $L_3$  jest złożeniem okresowego i systematycznego. Składnik okresowy reprezentuje sobą ruch po elipsie, a systematyczny dowodzi, że rozmiary elipsy nieustannie rosną. W wyniku tego ciało znikome puszczone w jakikolwiek sposób w ruch przy punkcie liniowym  $L_1, L_2$  czy  $L_3$  wcześniej czy później oddali się od niego dowolnie daleko.

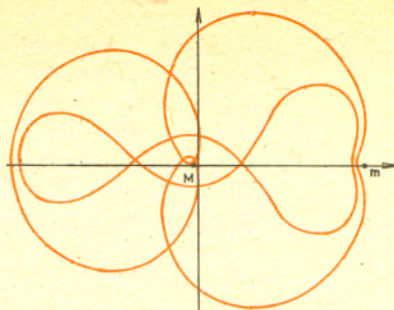
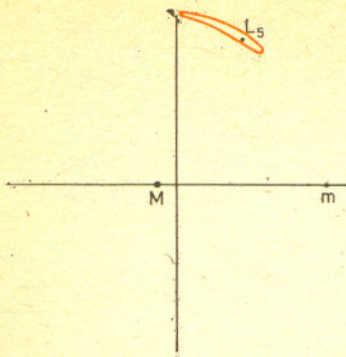
Inaczej ma się rzecz z punktami trójkątnymi  $L_4$  i  $L_5$ . Tu na ogół ruch ciała znikomego jest podobny jak przy punktach liniowych, ale jeżeli  $m/(M+m) < 0,0385$ , to ruch jest złożeniem dwóch ruchów okresowych z różnymi częstościami, ale też po elipsach i nie ma składnika systematycznego. Oznacza to, że ciało znikome puszczone przy  $L_4$  czy  $L_5$  w odpowiedni sposób, może wokół danego punktu libracji wykonywać drgania dowolnie długo, jakby przyłączone na sprężynie do punktu, w którym nic nie ma! Inaczej mówiąc punkty trójkątne są w liniowym przybliżeniu stabilne, o ile kontrast mas ciężkich jest dostatecznie duży.

Nie zapominajmy właśnie o zastrzeżeniu, że „w liniowym przybliżeniu”. Twierdzenie o absolutnej stabilności punktów trójkątnych byłoby zbyt pochopne, gdyż dalsze wyrazy szeregów, na jakie rozwija się prawe strony równań ruchu, mają prawo stabilność popsuć. Za to na pewno niestabilne są punkty liniowe, skoro są niestabilne już w przybliżeniu liniowym. Subtelniejsze badania tych zagadnień możliwe są właściwie już tylko poprzez numeryczne rozwiązywanie ścisłych równań ruchu, na co można sobie obecnie pozwolić dzięki maszynom cyfrowym. Okazuje się, że przy spełnieniu określonych warunków początkowych ciało znikome może poruszać się po najrozmaitszych, nieraz mocno osobliwych orbitach okresowych, a w szczególności po orbitach otaczających jeden lub nawet oba punkty trójkątne! Dopuszczalne są zatem orbity o kształcie podkowy — rzecz jasna — względem wirującego układu współrzędnych.

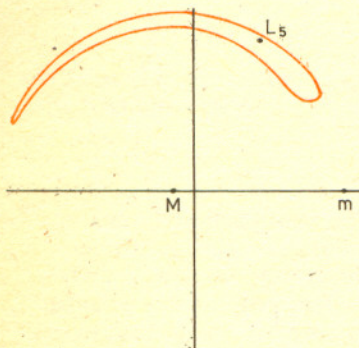


Przykładowa orbita ciała znikomego w małym otoczeniu trójkątnego punktu libracji  $L_5$  będąca rozwiązaniem zlinearyzowanego układu równań ruchu.

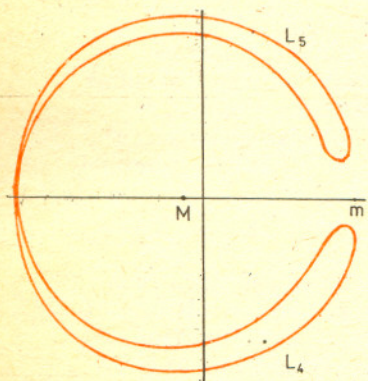
Wszystkie te rozważania byłyby jedynie ciekawymi ćwiczeniami umysłowymi, gdyby nie ich piękne zastosowanie w przyrodzie. Okazuje się bowiem, że Wszechświat zrealizował punkty libracji oraz stabilne ruchy wokół nich.



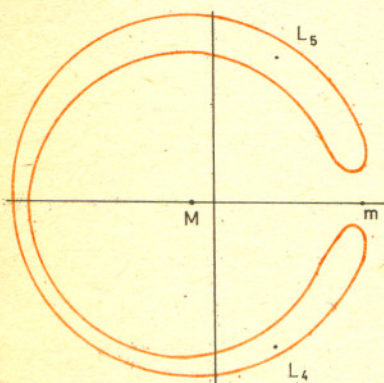
Dwa przykłady możliwych orbit okresowych ciała znikomego w układzie ciężkich mas  $M$  i  $m$  będące rozwiązaniami ścisłych równań ruchu.



Rozważmy mianowicie układ dwóch mas: Słońce ( $M = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg) i największą planetę Układu Słonecznego, Jowisza ( $m = 1,899 \cdot 10^{27}$  kg). Orbita Jowisza jest w dobrym przybliżeniu kołowa (jej mimośród  $e = 0,0478$ ), zatem układ tych dwóch mas spełnia założenia ograniczonego problemu trzech ciał, w dodatku ze stabilnymi orbitami przy punktach trójkątnych. Tym trzecim ciałem może być dowolna planetoida lub inny okruch materii, byle tylko dał się zaobserwować z Ziemi. Otóż w 1906 r. Max Wolf, astronom obserwatorium w Heidelbergu, odkrył w pobliżu punktu  $L_5$  układu Słońce-Jowisz planetoidę, którą nazwano Achillesem (numer katalogowy 588).



Z biegiem czasu okazało się, że planetoida ta przebywa stale w pobliżu punktu  $L_5$ , a ponadto odkryto szereg nowych ciał zarówno tu, jak i przy  $L_4$ . Wszystkie nazwano imionami bohaterów wojny trojańskiej. Nie został zrealizowany pierwotny pomysł nazywania jednej grupy imionami Trojan, a drugiej imionami Greków. Wprawdzie przy  $L_4$  (za Jowiszem) mamy większość Trojan, a przy  $L_5$  (przed Jowiszem) większość Greków, ale brak konsekwencji w nadawaniu nazw doprowadził do pomieszania obu walczących stron. I tak przy  $L_4$  są m.in. Patroklos (617), Anchizes (1173), Troilos (1208), Eneasza (1172), Priam (884), zaś przy  $L_5$  oprócz Achilleusa są Diomedes (1437), Hektor (624), Menelaos (1647), Odyszeusz (1143), Antilochos (1538), Nestor (659), Agamemnon (911), Ajaks (1404) i inni. Wszystkie te planetoidy najczęściej nazywane są trojańskimi.



Drugi przykład realizacji punktów libracji znany dopiero od bardzo niedawna. Mianowicie wszystko wskazuje na to, że niektóre z małych satelitów Saturna odkrytych przez sondy Voyager, przebywają w pobliżu trójkątnych punktów libracji układu składającego się z Saturna oraz innego, większego jego satelity. I tak przy obu trójkątnych punktach związanych z Tethys (satelita nr 3) znaleziono co najmniej po jednym satelicie, których prowizoryczne nazwy są 1980S13 i 1980S25. Na razie tylko jednego „trojańczyka”, 1980S6, znaleziono w punkcie trójkątnym związanym z Dione (satelita nr 4), ale opracowywanie obserwacji wykonanych przez Voyagery jeszcze trwa i lista znanych w ogóle satelitów Saturna może być uzupełniona.

Nie znamy obecnie żadnego konkretnego obiektu, który przewędrowałby z  $L_4$  do  $L_5$  lub odwrotnie, aczkolwiek ruch taki, jak powiedzieliśmy, jest możliwy. Nie wiemy w ogóle, jak konkretnie doszło do schwywania kilkudziesięciu ciał przez punkty  $L_4$  i  $L_5$ , tak jak cały problem powstania Układu Słonecznego jest daleki od rozwiązania. Wiadomo, że drobne ciało przylatując z nieskończoności może w pobliżu punktu libracji zwolnić lub nawet wielokrotnie go okrążyć, a następnie odlecieć znowu do nieskończoności. Schwywanie może nastąpić dopiero w wyniku działania innych mas (np. innych planet w przypadku planetoid trojańskich lub innych satelitów Saturna, jak w drugim przykładzie), ale mogą one również spowodować wytrącenie ciała znikomego z okresowej orbity. Przedstawiony tu model nie jest w stanie opisać tych wszystkich złożonych zjawisk, ale nie wymagajmy od niego zbyt wiele — on i tak doskonale tłumaczy podstawowe fakty obserwacyjne.

Przykłady okresowych orbit ciała znikomego obejmujących jeden lub oba trójkątne punkty libracji. Pierwszy z tych rysunków, gdzie  $M$  oznaczałoby Słońce, a  $m$  — Jowisza, można uważać za ilustrację rzeczywistego ruchu znanych obecnie planetoid trojańskich.

Wieczorem w sierpniu góruje m.in. gwiazdozbiór o nazwie Żrebęć (*Equuleus, Equ*). Jest to, podobnie jak Strzała, o której wspomnieliśmy rok temu (*Delta 7/1981*), jeden z najmniejszych gwiazdozbiórów na niebie, nie ma w nim właściwie żadnych ciekawych obiektów i rzadko który astronom od razu potrafiłby odpowiedzieć na pytanie, gdzie on się znajduje.

Gwiazda  $\delta$  *Equ* przyciągnęła jednak uwagę obserwatorów ze względu na to, że przez wiele lat była uważana za najciaśniejszy układ podwójny, który można było rozdzielić wizualnie. Średnia odległość składników wynosi  $0''$ , 26 (okres obiegu wynosi 5,7 lat), co odpowiada rozdzielaniu dwóch świecących punktów odległych od siebie o 10 cm, umieszczonych na czubku Pałacu Kultury i Nauki w Warszawie, obserwowanych z Radomia. Tylko najwprawniejsi obserwatorzy, przy użyciu największych teleskopów potrafili dostrzec dwa świecące składniki (patrz na rysunek zwróćcie uwagę, jak duży jest rozrzut poszczególnych obserwacji).

Przez wiele lat kłopoty sprawiał fakt, iż mimo że łatwo jest wykryć istnienie ciasnego układu podwójnego, bardzo trudno jest odkryć istnienie układów pośrednich.

**Podstawowe parametry typowych układów podwójnych, dla których  $M_1 + M_2 = M_{\odot}$**

jedn. astr.	Odległość składników km	Okres	$\alpha^*$ (")	Prędkość na orbicie (km/s)	Przykład
0,001	150 tys.	17 minut	$10^{-4}$	920	najciaśniejsze znane układy podwójne gwiazd
0,01	1,5 mln.	9 godzin	$10^{-3}$	290	typowy ciasny układ
0,1	15 mln.	12 dni	0,01	94	najluźniejsze z ciasnych układy podwójne
1	150 mln.	1 rok	0,1	30	Słońce—Ziemia
5	750 mln.	11,2 lat	0,5	13	Słońce — Jowisz, najciaśniejsze układy wizualne
10	1,5 mld.	32 lata	1	9	typowe układy podwójne rozdzielone wizualnie
100	15 mld.	1000 lat	10	3	
1000	150 mld.	32 tys. lat	100	1	

\* odległość kątowa dwóch składników przy ich najkorzystniejszym ustawieniu i obserwowaniu ich z odległości 10 pc (w sekundach łuku).

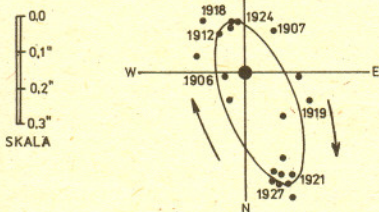
Podstawową metodą wykrywania dwu- i wieloskładnikowych układów gwiazd jest obserwowanie widm tych układów i wyznaczenie okresowych zmian położenia linii widmowych, zmian wywołanych zjawiskiem Dopplera. Gwiazdy w bardzo ciasnych układach obiegają się wzajemnie z dużą szybkością (patrz tabela), dzięki czemu położenia linii ulegają dużym przesunięciom, co ułatwia odkrycie podwójności. Im luźniejszy układ, tym mniejsze są prędkości orbitalne. Granica czułości istniejących spektrografów, jeśli chodzi o wyznaczenie prędkości radialnych gwiazd, wynosi ok. 10 km/s. Porównując ten wynik z liczbami zamieszczonymi w tabelce można wyciągnąć wniosek, że tylko w przypadku najbliższych gwiazd możemy rozdzielić je wizualnie i jednocześnie zmierzyć ich prędkości. Wraz ze wzrastającą odległością gwiazd rośnie luka między okresami najciaśniejszych układów podwójnych, które można rozdzielić na dwa składniki, a okresami najluźniejszych układów, w których można wyznaczyć okresy obiegu, korzystając z obserwacji spektroskopowych.

Kłopot, o którym przed chwilą wspomnieliśmy, polegał na tym, że nie mogąc obserwować tych pośrednich układów nie mogliśmy nic powiedzieć o ich istnieniu, o właściwościach itd. Nie wiedzieliśmy, czy ciasne układy, w których gwiazdy wywierają wzajemnie znaczący wpływ na swoją ewolucję, są tego samego pochodzenia, co bardzo luźne układy itd.

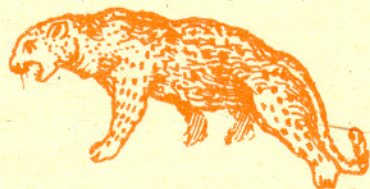
Te kłopoty zostały przełamane kilka lat temu, dzięki zastosowaniu elektronicznych metod transformacji i analizy obrazów uzyskanych przy użyciu największych teleskopów.

Dzięki nowym technikom możemy rozdzielić wizualnie składniki odległe o  $0''$ , 01 (!) co oznacza, że obserwując w Warszawie potrafimy rozdzielić dwa świecące punkty odległe od siebie o 10 cm umieszczone na satelicie lecącym nad Atlantykiem, przy założeniu, że wszędzie po drodze nie ma chmur, różnic temperatur itd., no i oczywiście jeśli posiadamy odpowiednio duży teleskop, tzn. rzędu największych istniejących instrumentów. Jeśli układ gwiazd o takiej odległości składników jest odległy od nas o 100pc, to jego prędkości radialne (jeśli orbita składników jest nachylona pod odpowiednim kątem do obserwatora) będą łatwe do wyznaczenia (ok. 30 km/s).

Możliwości rozdzielania ciasnych układów podwójnych gwiazd zostaną jeszcze trochę bardziej zwiększone po wystrzeleniu na orbitę okołozemską w najbliższych latach Dużego Teleskopu Kosmicznego, który najprawdopodobniej znowu popchnie naszą wiedzę o Wszechświecie znacznie do przodu.



Widoma orbita słabszego składnika układu  $\delta$  *Equ* względem składnika jaśniejszego (w centrum układu współrzędnych). Cyframi oznaczono daty niektórych obserwacji. Linia ciągła jest najlepiej dopasowaną elipsą.



lampart - panthera pardus.



kot domowy - felis domestica

## Parabola, gwiazdki i bilard

1. W artykule na stronach 6 i 7 autor „nie zachęca” do rachunkowego wykazania, że wszystkie okręgi opisane na trójkątach utworzonych przez trzy styczne do paraboli przechodzą przez jej ognisko. A oto te rachunki.

Wszystkie parabole są podobne, a nasze zadanie należy do geometrii podobieństw. Możemy więc rozpatrzyć pewną szczególną parabolę, np.  $2y = x^2$ , której ogniskiem jest punkt  $P = (0, 1)$  (rys. 1 artykułu „Łatwe zadanie o paraboli”). Styczne w punktach o rzędnych  $a, b, c$  mają współczynniki kierunkowe równe wartościom pochodnej funkcji  $y = \frac{x^2}{2}$ , czyli  $a, b, c$ .

Równaniami tych stycznych są zatem odpowiednio  $y = ax - \frac{a^2}{2}$ ,  $y = bx - \frac{b^2}{2}$ ,  $y = cx - \frac{c^2}{2}$ .

Punkty przecięcia  $A, B, C$  tych stycznych wyznaczamy z łatwego układu równań i wychodzi

$$A = \left( \frac{a+b}{2}, \frac{ab}{2} \right), B = \left( \frac{b+c}{2}, \frac{bc}{2} \right), C = \left( \frac{a+c}{2}, \frac{ac}{2} \right).$$

Szukamy okręgu przechodzącego przez te punkty; poszukajmy jego równania:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Podstawiamy za  $x, y$  kolejno współrzędne punktów  $A, B, C$ :

$$\left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - (a+b)p + p^2 + \frac{a^2b^2}{4} - abq + q^2 - r^2 = 0$$

$$\left( \frac{b+c}{2} \right)^2 - (b+c)p + p^2 + \frac{b^2c^2}{4} - bcq + q^2 - r^2 = 0$$

$$\left( \frac{a+c}{2} \right)^2 - (a+c)p + p^2 + \frac{a^2c^2}{4} - acq + q^2 - r^2 = 0.$$

Odejmujemy np. drugie i trzecie równanie od pierwszego

$$\frac{(a+b)^2 - (b+c)^2}{4} - (a-c)p + \frac{a^2b^2 - b^2c^2}{4} - (ab-bc)q = 0$$

$$\frac{(a+b)^2 - (a+c)^2}{4} - (b-c)p + \frac{a^2b^2 - a^2c^2}{4} - (ab-ac)q = 0,$$

skąd po zrozumiałych rachunkach obliczamy w końcu  $p$  i  $q$ , a z ktoregokolwiek z poprzednich trzech równań bez trudu wyznaczamy  $r$ . W wyniku tych obliczeń okazuje się, że równaniem poszukiwanego okręgu jest

$$\left( x - \frac{a+b+c-abc}{4} \right)^2 + \left( y - \frac{ab+bc+ac+1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} (a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2c^2+1).$$

Jak wykazać, że każdy z tych okręgów przechodzi przez ognisko  $P = (0, 1)$  naszej paraboli?

A oto zadanie, którego nie umiemy rozwiązać: dla pewnej krzywej  $C$  (gładkiej, ograniczającej obszar wypukły) wszystkie okręgi opisane na trójkątach utworzonych przez trzy styczne do niej przechodzą przez pewien wspólny punkt. Czy krzywa  $C$  jest parabolą?

2. Rachunki nie były bardzo uciążliwe, choć trudno by było przekonać kogokolwiek, że to lepszy dowód rozważanego twierdzenia o paraboli. Więcej nadziei można by wiązać z szybkimi obliczeniami za pomocą liczb zespolonych; przepisujemy je ze zbioru zadań z *American Mathematical Monthly* (wyd. New York 1957, przekład rosyjski Moskwa 1977; zad. 85). Pominiemy kilka łatwych do sprawdzenia szczegółów.

Pierwszy z nich to zespolone przedstawienie paraboli. Jeżeli liczba zespolona  $t$ , „biega” po okręgu  $|t| = 1$ , to punkt  $z = 1/(1-t)^2$  opisuje parabolę o ognisku  $z = 0$ . Przedstawienie parametryczne stycznej do niej  $z_1 = z(t_1)$  to

$$z = 1/(1-t_1)(1-t)$$

i dwie styczne, przechodzące przez punkty  $z_1 = z(t_1)$  i  $z_2 = z(t_2)$  przecinają się w  $z_{12} = 1/(1-t_1)(1-t_2)$ . Jeśli uświadomimy sobie, że  $z = t \cdot \text{const}$  jest przedstawieniem parametrycznym okręgu, to natychmiast napiszemy przedstawienie parametryczne okręgu przechodzącego przez  $z_{12}, z_{23}$  i  $z_{31}$

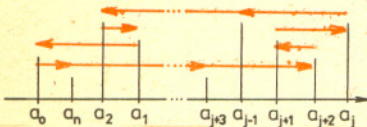
$$z = \frac{1-t}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)},$$

a ten okrąg przechodzi (podstawić  $t = 1$ ) przez ognisko  $z = 0$ , koniec rachunków. Możemy, kontynuując je, otrzymać np. Wnioski 1 i 2 z artykułu „Łatwe zadanie o paraboli”.



### Rozwiązanie zadania M 303

Zaznaczając punkty  $a_0, a_1, \dots, a_n$  na osi liczbowej możemy zinterjetować  $S$  jako sumę kwadratów długości odcinków przedstawionych



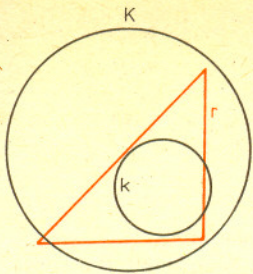
na rysunku. Zauważmy, że jeżeli  $1 < i < n$ , to jeden z odcinków musi zawierać przedział  $(a_{i-1}, a_{i+1})$ . Wynika stąd łatwo, że oznaczając  $d_i = a_i - a_{i-1}$  mamy

$$S \geq 2d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + 2d_{n-2}^2 + 2d_{n-1}d_n + \dots + 2d_{n-1}d_n.$$

Równocześnie dla uporządkowania

$$\begin{aligned} (a_0, \dots, a_n) &= \\ &= \begin{cases} (a_0, a_2, \dots, a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \dots, a_1) & \text{dla } n = 2k \\ (a_0, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, \dots, a_1) & \text{dla } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

mamy  $S = 2d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + 2d_{n-2}^2 + 2d_{n-1}d_n + \dots + 2d_{n-1}d_n$ , czyli poszukiwane minimum.



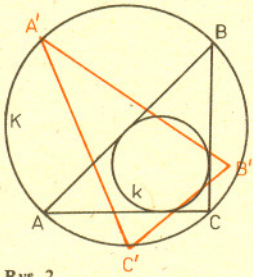
Rys. 1

3. Zamięmy na rysunkach w naszym wyjściowym zadaniu parabolę na inną stożkową — okrąg. To znaczy: poprowadźmy trzy proste styczne do okręgu (innymi słowy: opiszmy trójkąt na okręgu). Przez punkty przecięcia tych prostych przeprowadźmy nowy okrąg (tzn. opiszmy okrąg na trójkącie opisanym na wyjściowym okręgu, rys. 1). Oto kilka zadań, jakie podpowiada taka konfiguracja:

1° Dany jest okrąg  $k$ . Jakie ciekawe własności ma zbiór okręgów opisanych na trójkątach opisanych na  $k$ ?

2° Dane są dwa okręgi  $k$  i  $K$ . Kiedy znajdzie się trójkąt wpisany w  $K$ , a opisany na  $k$ ?

Jeżeli  $R$  i  $r$  oznaczają odpowiednio promienie koła opisanego na trójkącie  $T$  i wpisanego weń, to — jak wiadomo — odległość ich środków jest równa  $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ ; stąd można wyprowadzić kompletną odpowiedź na pytanie 2°. Możemy też podać inny, „dynamiczny” dostateczny i konieczny warunek. Z dowolnego punktu  $A \in K$  poprowadźmy styczną do  $k$ , przez punkt przecięcia tej stycznej z  $K$  następną styczną do  $k$  i jeszcze jedną (rys. 2). Jeżeli trzecia styczna trafi z powrotem na  $A$ , to dobrze, trójkąt znaleźliśmy. A jeśli nie? Wziąć inny punkt i próbować? Na pewno też nic nie wyjdzie:



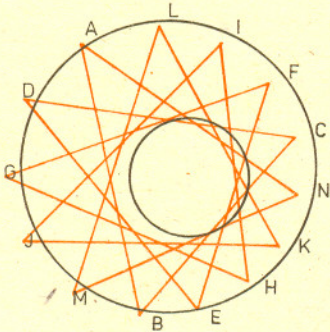
Rys. 2

Każdy punkt okręgu  $K$  opisanego na trójkącie  $T$  jest wierzchołkiem pewnego trójkąta wpisanego w  $K$ , a opisanego na okręgu  $k$  wpisanym w  $T$ ; można to wykazać samodzielnie lub zajrzeć do książeczki Tadeusza Iwańca „Geometria okręgów i sfer” (Biblioteczka Delt, M3, WSiP, 1980 r., zad. 32 na str. 37).

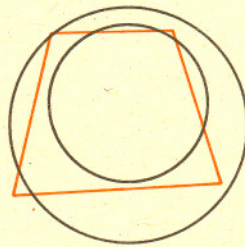
4. Co będzie, gdy opisana właśnie procedura nie da trójkąta; trzecia styczna nie trafi z powrotem w punkt wyjściowy? Może wyjść czworokąt i oto rysunek 3 sugeruje następne zagadnienia

3° Kiedy na czworokącie można opisać i wpisać okrąg?

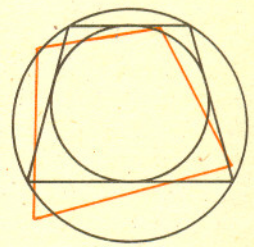
4° Czy przy innym punkcie wyjściowym również dostaniemy czworokąt (rys. 4)?



Rys. 5



Rys. 3



Rys. 4

A gdy przez kolejne prowadzenie stycznych nie powstanie czworokąt? Spójrzmy na rysunek 5. Są na nim dwa okręgi nie położone w żaden specjalnie szczególny sposób. Z punktu  $A$  zewnętrznego okręgu prowadzimy styczną do wewnętrznego, z punktu  $B$  przecięcia tej stycznej z okręgiem zewnętrznym następną styczną itd. Powstaje estetyczna, choć nierównoramienna gwiazda  $ABCDEFGHIJKLMN$ . Jak przewidzieć, znając tylko wzajemne położenie okręgów, jaką gwiazdkę otrzymamy? Gdy okręgi są współśrodkowe, odpowiedź jest prosta: gwiazda będzie  $n$ -ramienna, jeżeli stosunek promieni wynosi

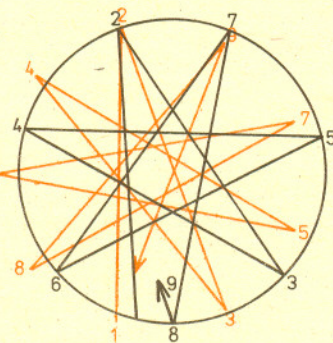
$$\frac{r}{R} = \cos \frac{\pi m}{n}, \text{ gdzie } m, n \text{ — całkowite}$$

i ułamek  $m/n$  nieskracalny.

A gdzie zapowiedziany w tytule bilard? Nasze gwiazdki (takie jak na rys. 5) wyglądają jak tory kul odbijających się od brzegów kołowego bilardu, ale oczywiście takimi torami nie są — z wyjątkiem przypadku, gdy okręgi są współśrodkowe. Bilard kołisty widzimy na rys. 6.

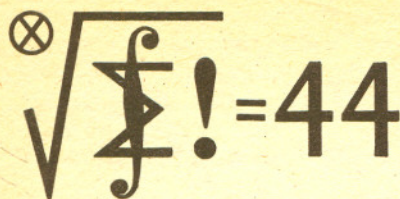
Zaznaczone kolorem punkty 1, ..., 9 tworzą trajektorię okresową dla obrotu (okręgu) określonego wzorem  $\alpha \rightarrow \alpha + \frac{8}{9} \pi^*$ . Nie jest ona przyciągająca.

Na tym samym rysunku widzimy, że przy rysowaniu gwiazdek mały błąd na początku kumuluje się szybko (por. uwagę w pierwszej części artykułu Pawła Góry). Ciekawe własności innych bilardów, np. eliptycznego, można znaleźć w „Kalejdoskopie matematycznym” Hugona Steinhausa.



Rys. 6





## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr.  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

## Klub 44

### Zadania nr 25, 26, 27

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.X.82 r.

25. Dla jakich wartości  $a$  z przedziału  $0 < a < 1$  ciąg  $a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}}, \dots$  jest zbieżny? (por. zadanie 13).

26. Czy czworokąt o przekątnych prostopadłych, opisany na kole, może mieć wszystkie boki różnej długości?

27. Udowodnić, że jeżeli  $m, n$  są liczbami naturalnymi takimi, że  $\sum_{k=1}^n k! = m^2$ , to również

$$\sum_{k=1}^m k! = n^2.$$

## Rozwiązania zadań z numeru 3/1982

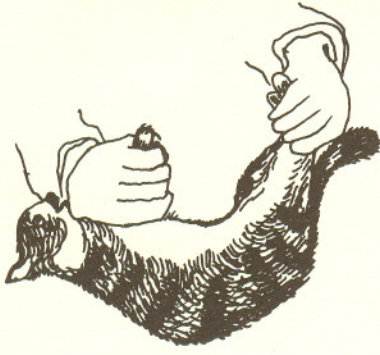
19. Obie strony badanej nierówności — oznaczmy je  $L$  i  $P$  — są funkcjami parzystymi i  $2\pi$ -okresowymi, a więc wystarczy ograniczyć się do przedziału  $\langle 0, \pi \rangle$ . Dla  $x \in \langle \pi/2, \pi \rangle$  mamy  $L \leq 0, P > 0$ , więc  $L < P$ . Dla  $x = 0$  mamy  $L = \sin 1, P = 1$ , więc  $L < P$ . Pozostaje do rozpatrzenia przypadek gdy  $x \in (0, \pi/2)$ . W nierówności  $\sin t < t$  (prawdziwej dla  $t > 0$ ) podstawiamy  $t = \cos x$  i dostajemy  $L < \cos x$ , a następnie podstawiamy  $t = x$  i stosujemy do obu stron funkcję cosinus (która w rozpatrywanym przedziale jest malejąca); otrzymujemy  $P > \cos x$ , skąd  $L < P$ . Zatem nierówność  $L < P$  jest spełniona dla wszystkich rzeczywistych wartości  $x$ .

20. Dzielimy każdą ścianę na trójkąty łącząc wierzchołki z punktami styczności ścian z kulą wpisaną. Każdemu trójkątowi czerwonemu  $T_c$  odpowiada trójkąt zielony  $T_z$ , zawarty w sąsiedniej ścianie, mający z trójkątem  $T_c$  wspólny bok. Jest to odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Odpowiadające sobie trójkąty są przystające, mają więc równe pola, a zatem sumy pól ścian czerwonych i zielonych są równe.

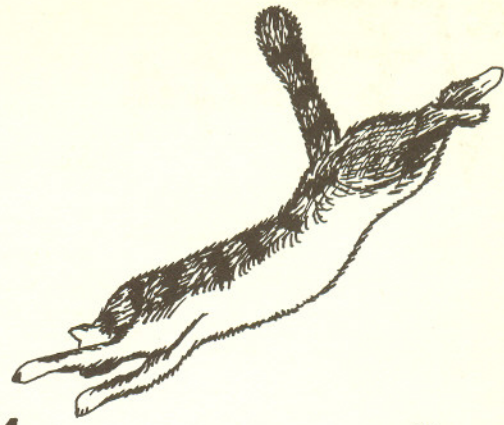
W każdym z rozpatrywanych trójkątów  $T$  oznaczmy przez  $\varphi(T)$  kąt przy wierzchołku stanowiącym punkt styczności ściany z kulą. Oczywiście  $\sum \varphi(T_c) = 2\pi n_c, \sum \varphi(T_z) = 2\pi n_z$ , gdzie  $n_c$  i  $n_z$  oznaczają odpowiednio liczbę ścian czerwonych i zielonych, a sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie trójkąty czerwone i zielone. Z uwagi na przystawanie parami trójkątów  $T_c$  i  $T_z$  te dwie sumy są równe, a więc  $n_c = n_z$ .

21. Przejście do granicy przy podstawieniu (3) jest niedopuszczalne: w definicji pochodnej  $f'(x)$  jako granicy ilorazu różnicowego liczba  $x$  jest wielkością stałą.

1.



4.



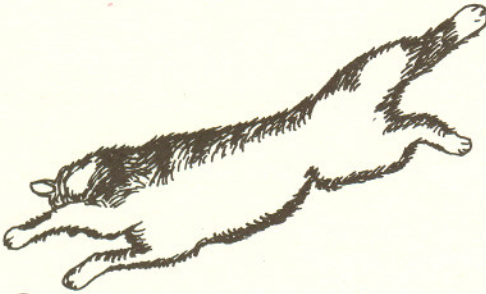
2.



5.



3.



6.



#### Rozwiązanie zadania F 118

Na podstawie wielu fotografii spadającego kota stwierdzono, że najczęściej zaraz po puszczeniu do góry łapami kot wygina grzbiet. Przednia i tylna część kota zaczynają się następnie obracać w tym samym kierunku, każda wokół własnej osi. Moment pędu związany z tym obrotem kompensowany jest przez obrót całego kota w kierunku przeciwnym. Wygięcie kota powoduje, że prędkość kątowa pierwszego obrotu jest większa niż drugiego, dzięki czemu kot może spaść na cztery łapy.

Aby ocenić ten efekt liczbowo, rozważmy cztery jednakowe masy połączone nieważkimi prętami jak na rysunku. W punkcie  $X$  pręty połączone są przegubem. Moment bezwładności  $I$  dwóch mas względem osi  $k$  jest dwukrotnie mniejszy niż moment bezwładności względem osi  $l$  przechodzącej przez środek masy, a momenty pędu są odpowiednio równe

$$M_k = \omega l \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad M_l = 2I\Omega,$$

gdzie  $\omega, \Omega$  są prędkościami obrotu względem  $k$  i  $l$ . Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że  $\Omega = \omega \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Dla  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  obrót wokół osi  $k$  jest dwukrotnie szybszy niż względem  $l$ . Ruch taki, zwany „kocim obrotem” jest też czasami stosowany podczas skoków do wody.

