

Następny numer Deltę ukaże się w nakładzie 50.000 egzemplarzy, będzie kosztował 20 zł i znów będzie miał pełnokolorową okładkę.

SPIS TREŚCI

NUMERU 6 (102)

O Zygmuncie Janiszewskim <i>Karol Borsuk</i>	str.	1
Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią (IV) <i>Doc. dr Jerzy Ginter</i>	str.	3
Zadania <i>Prof. dr Roman Dąbrowski</i>	str.	5
O znaczeniu równości <i>Dr Wiktor Bartol</i>	str.	6
Efekty elektrooptyczne i zastosowania ciekłych kryształów <i>Prof. dr Roman Dąbrowski</i>	str.	10
Twierdzenie o dyktatorze <i>Prof. dr Bolesław Kopociński</i>	str.	14
Paradoks trzech zmiennych losowych <i>Prof. dr Bolesław Kopociński</i>	str.	15
Klub 44	str.	16
Zadania, których nie umiemy rozwiązać <i>Patrz w niebo</i>	str.	16
	str.	17

W następnym numerze:

Atraktory

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
 doc. dr Jerzy Bartke
 doc. dr Andrzej Bączyński
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Andrzej Januszajtis
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 dr Henryk Kaczorek
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bohdan Paczyński
 prof. dr Arkadiusz Piekara
 doc. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 doc. dr Grzegorz Sitarski
 prof. dr Jan Stankowski
 doc. dr Kazimierz Stępień

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Po raz ostatni Delta została wydana za pośrednictwem Zakładu Narodowego im. Ossolińskich. Pragniemy serdecznie podziękować Warszawskiemu Oddziałowi Ossolineum za 8,5 letnią współpracę. Szczególnie serdecznie dziękujemy Działowi Techniczno-Produkcyjnemu i jego Kierownikowi, Tadeuszowi Deskurowi, za życzliwą pomoc, radę i naukę, bez której na pewno nie dalibyśmy sobie rady.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówkową, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO i OM W-wa 1531-912
 w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bash Centre, London W 12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 10—

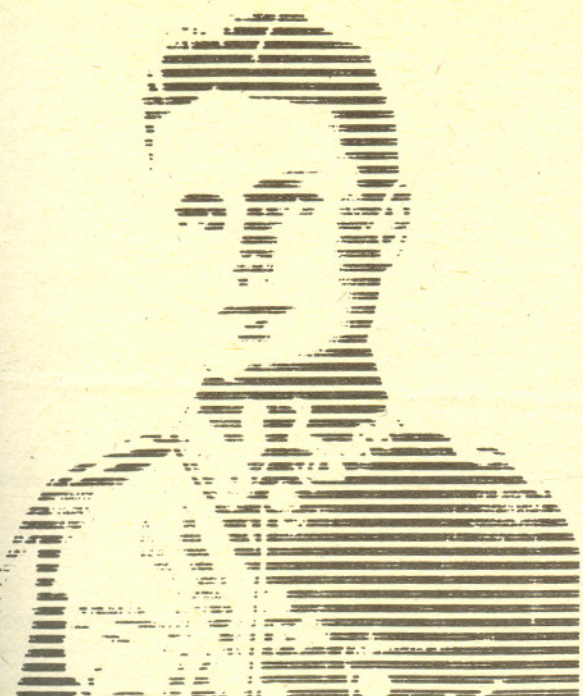
nr indeksu 35723/35550

prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Stefan Turnau
 prof. dr Jerzy Wdowczyk
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 wiceprzewodniczący
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. techn, graf.
 mgr Tomasz Chlebowski
 mgr Maciej Jędrzejczak
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr Marek Kordos — red. naczk.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. naczk.
 dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
 dr Michał Szurek
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. naczk.

Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.:
 papier offsetowy V kl. 70 g. 61 cm
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 2415/14/82 Z-86



60 • LAT POLSKIEJ • SZKOŁY MATEMATYCZNEJ

Jednym z matematyków, którzy wywarli głęboki wpływ na rozwój matematyki polskiej był Zygmunt Janiszewski. Urodził się on w roku 1888 w Warszawie, a po uzyskaniu w roku 1912 stopnia doktora w Paryżu, został w roku 1915 profesorem matematyki odrodzonego Uniwersytetu Warszawskiego. Żył krótko, bo już w roku 1920 zmarł we Lwowie w 32 roku życia. A więc był profesorem UW jedynie przez lat 5. W tym jednak krótkim okresie wpłynął on w decydujący sposób na dalszy rozwój matematyki polskiej, a w szczególności na powstanie tzw. Warszawskiej Szkoły Matematycznej.

Prace badawcze Z. Janiszewskiego należą do topologii, a więc do działu matematyki, zajmującego się specjalnie głębokimi własnościami przestrzeni. W szczególności jest on autorem pięknego twierdzenia dotyczącego rozcinania płaszczyzny przez jej podzbiory, zwanego twierdzeniem Janiszewskiego. Twierdzenie to stanowiło punkt wyjścia dla aksjomatycznego ujęcia topologii płaszczyzny, uzyskanego następnie przez K. Kuratowskiego.

W czasie działalności prof. Janiszewskiego, topologia — jak również takie działy matematyki jak teoria mnogości, podstawy matematyki i teoria funkcji rzeczywistych, były jeszcze w stadium początkowego rozwoju. Wśród wówczas działających matematyków polskich, w topologii pracowali prof. S. Mazurkiewicz i częściowo prof. W. Sierpiński. W teorii mnogości, jak również w podstawach matematyki — prof. W. Sierpiński, a jednocześnie rozwijała się w Warszawie logika matematyczna, której przedstawicielami byli prof. Łukasiewicz i prof. Leśniewski.

Ten stan rzeczy skłonił prof. Janiszewskiego do wysunięcia (w wydawnictwie Nauka Polska) programu skoncentrowania badań matematyków polskich na wyżej wymienionych działach matematyki. Celem tej koncentracji był rozwój twórczości matematycznej w Polsce i zdobycie samodzielnego stanowiska dla matematyki polskiej w skali światowej.

W celu zdobycia tego samodzielnego stanowiska, prof. Janiszewski wysunął koncepcję założenia czasopisma poświęconego wyłącznie pracom badawczym w zakresie topologii i innych działów ściśle związanych z teorią mnogości. Czasopismo to, pod nazwą *Fundamenta Mathematicae*, wśród założycieli którego obok Z. Janiszewskiego figurują S. Mazurkiewicz i W. Sierpiński, powstało w Warszawie, a w roku 1920 ukazał się jego pierwszy tom. Niestety tom ten ukazał się już po przedwczesnej śmierci Zygmunta Janiszewskiego.

Fundamenta Mathematicae były pierwszym na świecie czasopismem matematycznym specjalizującym się — zgodnie z koncepcją Z. Janiszewskiego — jedynie w pewnych działach matematyki. Warto wspomnieć, że w chwili obecnej większość czasopism matematycznych świata przybrała postać mniej lub więcej ustalonej specjalizacji. Tak więc koncepcja zapoczątkowana przez Z. Janiszewskiego okazała się zgodna z naturalnym rozwojem czasopism matematycznych. Mimo to, ukazaniu się pierwszego tomu *Fundamenta Mathematicae* towarzyszył pewien sceptycyzm reprezentowany przez wybitnych matematyków świata, wyrażających wątpliwość, czy czasopismo o tak ograniczonej specjalności będzie mogło się utrzymać. Czas pokazał, że sceptycyzm ten nie był uzasadniony.

FUNDAMENTA MATHEMATICAE

REDAKTOROWIE

STEFAN MAZURKIEWICZ I WACŁAW SIEPPINSKI

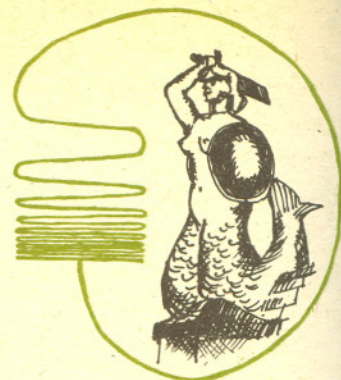
KOMITET REDAKCYJNY

DR STANISŁAW LEŚNIEWSKI DR JAN ŁGRASIEWICZ
DR STEFAN MAZURKIEWICZ DR WACŁAW SIEPPINSKI
PROFESOROWIE UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

TOM I

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W R I O P

WARSZAWA 1920.



Jeszcze w okresie międzywojennym ukazały się 32 tomy *Fundamenta Mathematicae*. Pismo to zdobyło wysoką pozycję w matematyce światowej, a wśród jego współpracowników — obok matematyków polskich — wystąpiło wielu spośród najwybitniejszych matematyków świata.

Matematyka polska, na której rozwój wywarł tak znaczny wpływ program wysunięty przez Zygmunta Janiszewskiego, nie załamała się w strasznym okresie okupacji, gdy systematycznie tępiona była cała kultura polska. Mimo, iż około 50% twórczo pracujących matematyków polskich zginęło z ręki okupanta, już w roku 1945 ukazał się 33 tom *Fundamenta Mathematicae*, a obecnie liczba tomów tego wydawnictwa, zapoczątkowanego przez Z. Janiszewskiego, osiągnęła już setkę.

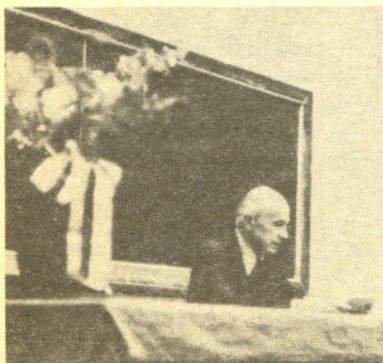
W stu tomach *FM* opublikowanych jest 2650 prac badawczych, w tym 1288 z topologii, 536 z teorii mnogości i podstaw matematyki. Wśród 1170 autorów tych prac jest 207 autorów polskich i 963 zagranicznych (wśród nich 557 z USA). Prace ukazują się w tzw. językach kongresowych, przeważnie jednak (zwłaszcza w okresie powojennym) w języku angielskim.

Skoncentrowanie wysiłku twórczego matematyków polskich na wymienionych już nowych działach matematyki (do których w latach dwudziestych doszedł ważny dział analizy funkcjonalnej, zapoczątkowany we Lwowie przez genialnego matematyka polskiego Stefana Banacha) doprowadziło do dużego rozwoju polskiej myśli matematycznej. Matematyka polska dojrzała i w okresie powojennym rozszerzyła pole swego badania, obejmując wiele innych działów, również działów związanych z zastosowaniami.

Należy jednak stwierdzić, że program koncentracji wysunięty przez Zygmunta Janiszewskiego, jakkolwiek obecnie wymagający już pewnej modyfikacji, w decydujący sposób przyczynił się do rozwoju matematycznej myśli polskiej i do zdobycia przez nią liczącej się w skali światowej pozycji naukowej. Fakt ten jest w znacznym stopniu zasługą działalności Zygmunta Janiszewskiego.

18 października 1978

Karol BORSUK



(odczyt wygłoszony w *Radiodelcie*)

Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią

Część IV. Dlaczego złoto jest złote?

Doc. dr Jerzy GINTER

W poprzednich trzech częściach tego cyklu mówiliśmy o własnościach optycznych substancji, które — z punktu widzenia elektrostatyki — są dielektrykami. Oznacza to, że dodatnie i ujemne ładunki są w nich ze sobą związane tak, jak na przykład w atomach czy cząsteczkach. Zupełnie inaczej oddziałuje fala elektromagnetyczna z przewodnikami, czyli substancjami, w których istnieją swobodne nośniki ładunku. Metale, jak wiadomo, dobrze przewodzą prąd elektryczny. Wiemy także, że większość metali słabo absorbuje i emituje promieniowanie elektromagnetyczne, natomiast bardzo dobrze je odbija. Na przykład srebro — używane do pokrywania lusterek — odbija przeszło 90% promieniowania widzialnego. Zdolność absorpcyjna i emisyjna metali w podczerwieni także jest bardzo niewielka, a odbijająca znaczna. Wiemy to np. z doświadczeń, omawianych w pierwszej części tego cyklu. Łatwo także stwierdzić, że bardzo duża jest zdolność odbijania promieniowania radiowego. Każdy może zrobić proste doświadczenie: włożyć grający odbiornik tranzystorowy do aluminiowego garnka z pokrywką i zaobserwować wywołaną tym zmianę w odbiorze audycji. Dobrze dla porównania umieścić ten sam odbiornik w pojemniku plastikowym i pudełku tekturowym. (Uwaga — nie można posłużyć się odbiornikiem sieciowym, bo przewody zasilające działają jak antena).

Wiemy jednak, że zdolność odbijająca metali musi zależeć od długości fali. Folia aluminiowa nie przepuszcza praktycznie zupełnie promieniowania widzialnego, a jest bardzo przezroczysta dla promieni Roentgena. Przebieg współczynnika odbicia dla trzech typowych metali — złota, srebra i glinu — w zakresie podczerwieni, obszaru widzialnego i bliskiego nadfioletu przedstawia rysunek. Przyjrzyjmy się przebiegowi dla srebra: dla małych częstości odbicie jest bardzo duże (powyżej 90%) i stałe w dość szerokim zakresie — aż do połowy obszaru widzialnego. Natomiast w bliskim nadfiolecie odbicie spada gwałtownie (poniżej 10%), a potem znów wzrasta (do ok. 30%).

Czy możemy zrozumieć, dlaczego tak się dzieje? Aby zjawisko opisać dokładnie, należałoby rozwiązać równania Maxwella dla ośrodka materialnego ze swobodnymi ładunkami. Tego robić tu nie będziemy; ograniczymy się do rozważań jakościowych.

1. Swobodny nośnik ładunku w polu periodycznie zmiennym

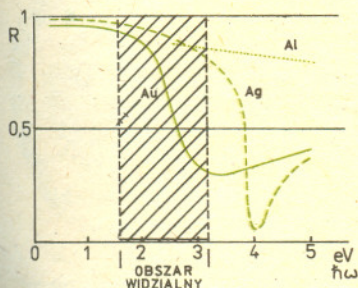
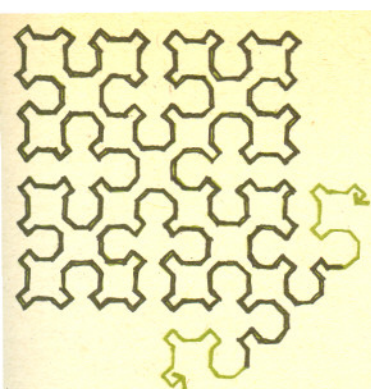
Zastanówmy się przede wszystkim, czym różni się ruch ładunku związanego w „mikrooscylatorze” od ruchu ładunku swobodnego. Fakt, że ładunek jest swobodny, oznacza, że współczynnik sprężystości k równy jest zero. A więc formalnie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0$. Ruch odbywa się więc tylko pod wpływem zewnętrznej, periodycznie zależnej od czasu, siły

$$(1) \quad F = F_0 \sin \omega t.$$

Pod wpływem pola elektrycznego fali swobodne ładunki mogą poruszać się ruchem periodycznym, a amplitudę określa wzór wyprowadzony w części II, w którym trzeba położyć $\omega_0 = 0$. W ten sposób otrzymujemy następującą zależność wychylenia od czasu:

$$(2) \quad x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t.$$

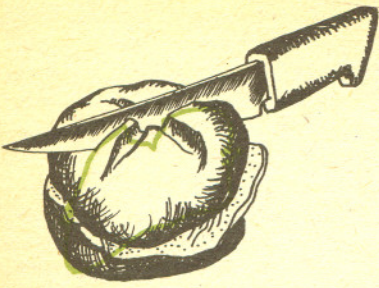
Wynik jest dość dziwny: pod wpływem periodycznie zmiennej siły ładunki swobodne poruszają się periodycznie, ale wychylenie ma zawsze zwrot przeciwny do zwrotu działającej siły. Ruch harmoniczny ma więc fazę przeciwną w stosunku do działającej siły, podobnie jak to miało miejsce dla oscylatora przy $\omega > \omega_0$. Widać ponadto, że amplituda tego ruchu silnie zależy od częstości — maleje odwrotnie proporcjonalnie do jej kwadratu.



W części II znaleźliśmy amplitudę drgań oscylatora, na który działa periodycznie zmienna siła wymuszająca o częstości ω i amplitudzie F_0 . Jest ona równa

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, k jest współczynnikiem sprężystości, a m masą oscylatora.



2. Budowa metalu i oddziaływanie z promieniowaniem

W metalu istnieją dwa rodzaje ładunków — swobodne i związane. Typowe swobodne atomy metalu mają elektrony silnie związane (wypełniają one powłoki wewnętrzne) oraz elektrony związane słabo, tzw. elektrony walencyjne. Te ostatnie stosunkowo łatwo oderwać. Zachodzi to na przykład wtedy, kiedy powstaje wiązanie jonowe atomu metalu z atomem niemetalu. Na przykład przy tworzeniu chlorku sodu elektron walencyjny sodu oddawany jest atomowi chloru (powstają w ten sposób jony Na^+ i Cl^-). W metalu oddziaływanie elektronów walencyjnych wybranego atomu z innymi atomami jest tak silne, że elektrony walencyjne odrywają się od swoich atomów „macierzystych” i zaczynają się prawie swobodnie poruszać w całej objętości substancji. Są to właśnie ładunki swobodne, odpowiedzialne za przepływ prądu.

Oprócz tego istnieją jednak elektrony związane, „mikrooscylatory” w sensie omawianym w poprzednich częściach cyklu. Chmury elektronowe powłok wewnętrznych atomów mogą wykonywać drgania. Częstości tych drgań są na ogół większe od częstości odpowiadających obszarowi widzialnemu i bliskiemu nadfioletowi.

Ważne jest to, że wychylenia elektronów swobodnych są w przeciwfazie z siłą, a ich amplituda maleje ze wzrostem częstości. Wychylenia chmur elektronowych są natomiast w fazie z siłą (jesteśmy poniżej częstości rezonansowej), a ich amplituda rośnie ze wzrostem częstości (zbliżamy się do rezonansu). Możliwe jest więc, że dla pewnej częstości, prądy związane z ruchem drgającym obu tych rodzajów ładunków będą równe, ale przeciwnie skierowane i sumaryczny prąd będzie równy zero. Innymi słowy — dla tej częstości fala elektromagnetyczna nie wywołuje żadnego prądu w materiale. Ośrodek powinien zachowywać się więc „jak próżnia” i nie powinien odbijać promieniowania. Tak właśnie można wyjaśnić występowanie ostrego minimum w zależności odbicia od częstości dla srebra.

Dla częstości większych od częstości obserwowanego minimum przeważa prąd elektronów związanych i srebro zachowuje się jak dielektryk. Promieniowanie (nadfioletowe) odbija się od niego, jak światło od szyby szklanej czy od kryształku cukru.

Dla częstości mniejszej od częstości minimum odbicia przeważa prąd nośników swobodnych, dla którego wychylenie jest przeciwne w fazie do przyłożonej siły, pochodzącej od pola elektrycznego fali. W tym zakresie częstości pojawia się zupełnie nowy efekt: w materiale nie może się rozchodzić zwykła fala o sinusoidalnej zależności pola elektrycznego (i magnetycznego) od położenia. Może istnieć tylko pole, zanikające wykładniczo z odległością od powierzchni. A więc prąd płynie tylko w cienkiej warstewce pod powierzchnią metalu — tylko tam gdzie wnika pole fali (jest to tzw. „warstwa naskórkowa”). Zjawisko to związane jest z faktem, że faza prądu nie jest zgodna z fazą pola — niestety nie możemy tutaj tego efektu szczegółowo opisać matematycznie.

Ładunki płynące w warstwie naskórkowej wysyłają falę elektromagnetyczną. Fala ta ma taką fazę, że całkowicie wygasa w materiale (w zjawisku interferencji) falę przychozącą. W głębi metalu fala więc nie istnieje. Na zewnątrz metalu pojawia się jednak nowa fala — ta, którą nazywamy falą odbitą.

Dla większości metali obszar minimum odbicia przypada w nadfiolecie. Cały zakres widzialny jest bardzo silnie odbijany — metale są „srebrne”. Wyjątek stanowią miedź i złoto (oraz ich stopy), dla których minimum odbicia przypada w obszarze widzialnym. Odbijają one dobrze promieniowanie o niskiej częstości (długofalowe) — a więc czerwone, pomarańczowe i żółte — a słabo światło o wysokiej częstości — zielone, niebieskie i fioletowe. Dlatego złoto i miedź mają charakterystyczne zabarwienie.

Jeżeli promieniowanie niebieskie jest przez złoto odbijane słabo, powinno ono lepiej przez ten metal przechodzić. Łatwo to stwierdzić, przyglądając się cienkiej warstewce złota — na przykład na kieliszku ze złoconym brzęzkiem. Obserwowana w świetle przechodzącym („pod światło”) jest ona wyraźnie niebieska.

Pozostaje jeszcze wyjaśnić, dlaczego minimum odbicia dla złota i miedzi przypada w obszarze widzialnym, a nie w nadfiolecie. Sprawy te wykraczają jednak poza zakres naszego artykułu. Poza tym należy powiedzieć, że w powyższych rozumowaniach zaniedbywaliśmy procesy rozpraszania energii w czasie ruchu nośników. Jeżeli wziąć je pod uwagę, należy zmodyfikować wzór (2), który dla $\omega \rightarrow 0$ przewiduje nieskończony wzrost prądu. Dla bardzo małych częstości prędkość (a więc i prąd) jest zgodna w fazie z polem elektrycznym. Tak jest przy przepływie prądu zmiennego o niskiej częstości w przewodnikach. Przypadku tego nie będziemy tu jednak dokładniej omawiać.

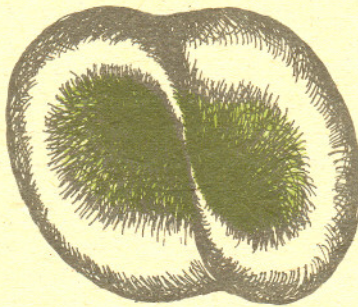
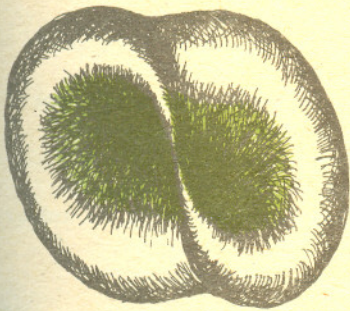
3. Podsumowanie

W czterech kolejnych krótkich artykułach starałem się pokazać, na czym polega oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią. Starałem się uzmysłowić Czytelnikowi, że wszystko zależy od tego, jaki jest ruch ładunków, czyli jaki prąd płynie w ośrodku materialnym. W szczególności — jaki prąd wzbudza przychodząca fala elektromagnetyczna. Omówiliśmy tylko dwa stosunkowo proste przypadki: ośrodek nieprzewodzący (dielektryczny), w którym istnieją „mikroscylatory” z dobrze określonymi częstotliwościami drgań własnych, oraz ośrodek przewodzący, w którym istnieją nośniki swobodne. Pominięliśmy natomiast wiele innych interesujących zjawisk związanych z oddziaływaniem promieniowania elektromagnetycznego z materią.

Do takich należą na przykład:

emisja widma ciągłego (a nie liniowego) przez rozgrzane ciała stałe i ciecze, zależność rozchodzenia się światła w tzw. kryształach dwójłomnych od jego polaryzacji i fakt, że fala elektromagnetyczna może być wysyłana nie tylko przez powłoki elektronowe atomów, ale także przez ich jądra.

Wszystkie te zjawiska można jednolicie wyjaśnić w ramach współczesnej fizyki.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 298. Wyrazy a_1, a_2, \dots, a_{15} rosnącego postępu arytmetycznego są liczbami pierwszymi. Wykazać, że $a_{15} > 400000$.

Rozwiązanie na str. 14

M 299. Mając dany punkt A i proste p, q zbudować trójkąt ABC podobny do danego trójkąta $A_0B_0C_0$ i taki, że $B \in p, C \in q$.

Rozwiązanie na str. 15

M 300. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2y + 2z. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 7

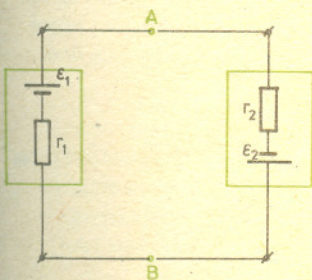
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 115. Dwa źródła o siłach elektromotorycznych \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 oraz opornościach wewnętrznych r_1 i r_2 połączone według schematu pokazanego na rysunku 1. Jaki prąd popłynie przez bezoporowy przewodnik po zwarciu nim punktów A i B ? Dla jakich wartości parametrów prąd nie popłynie, jeśli obwód zewrzymy przewodnikiem o oporności R ?

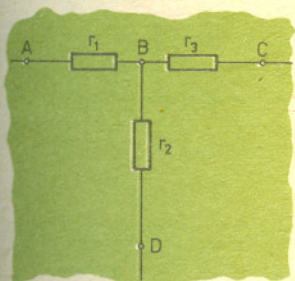
Rozwiązanie na str. 9

F 116. Rysunek 2 przedstawia dostępną część układu oporników. Jak, nie rozrywając połączeń, zmierzyć oporności r_1, r_2, r_3 , jeżeli dysponuje się omomierzem i przewodami do zestawiania obwodów?

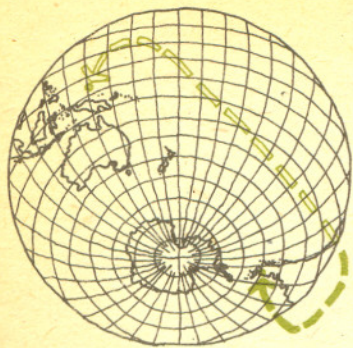
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 1



Rys. 2



O znaczeniu równości

Dr Wiktor BARTOL

Czy język francuski jest bogatszy od polskiego? Tak postawione pytanie rodzi następne: co to właściwie znaczy „bogatszy”? Czy bogatszy jest ten język, który ma więcej słów, czy ten, w którym można więcej wyrazić, który pozwala dokładniej opisywać rzeczywistość? I wreszcie — dlaczego takie pytania pojawiają się w *Delcie*?

Nie będziemy mówili tu ani o języku francuskim, ani o języku polskim. Zajmiemy się językiem matematyki — bo przecież matematyka ma swój język i to nie jeden.

Upraszczać nieco można powiedzieć, że przedmiotem badań matematyka są pewne obiekty, operacje na nich określone i relacje wyrażające związki między nimi. I tak np. matematyk-analityk (czyli zajmujący się analizą matematyczną) bada przede wszystkim liczby rzeczywiste, funkcje określone na zbiorach liczb rzeczywistych (od funkcji najprostszych, takich jak dodawanie i mnożenie, aż po bardzo złożone — można je zresztą na ogół zdefiniować wychodząc od tych prostych), a także pewne relacje, jak np. relacja niewiększości. Po to by móc wygłaszać i zapisywać zdania mówiące o badanych obiektach trzeba mieć zatem nazwy dla interesujących nas funkcji i relacji, a także zmienne, które mogłyby reprezentować obiekty. Czasem możemy też potrzebować nazw dla pewnych konkretnych obiektów, które z jakichś powodów chcielibyśmy wyróżnić. Wróćmy do naszego analytyka: musi on mieć nazwę dla funkcji dodawania (niech będzie nią „ d ”) i nazwę dla mnożenia (wybermy symbol „ m ”), a także nazwę dla relacji niewiększości — użyjmy tu tradycyjnego symbolu „ \leq ”. Pozwólmy mu też używać nazwy „ 0 ” do określenia tej jedynej liczby rzeczywistej, która dodana do jakiegokolwiek liczby nie zmienia jej wartości oraz nazwy „ 1 ” do określenia tej jedynej liczby rzeczywistej, przez którą można pomnożyć dowolną liczbę nie zmieniając jej wartości. Niech x, y, z itp. będą zmiennymi, reprezentującymi liczby rzeczywiste. Oznaczmy wreszcie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przez R . Dziedzinę badań matematyka-analytyka możemy teraz opisać wymieniając nazwy interesujących go obiektów, funkcji i relacji: $(R, d, m, \leq, 0, 1)$ — rozumiejąc, że „ d ” i „ m ” są nazwami funkcji dwuargumentowych, „ \leq ” jest nazwą relacji dwuargumentowej (tzn. mówiącej o związku między dwoma obiektami), a „ 0 ” i „ 1 ” są nazwami pewnych wyróżnionych elementów zbioru R .

W tym momencie zajął mi przez ramię mój przyjaciel, matematyk-mnogościowiec (a więc zajmujący się teorią mnogości czyli teorią zbiorów). „Jak to — powiada — przecież opisałeś tu dziedzinę, którą ja się właśnie zajmuję. Interesują mnie własności podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Zbiór wszystkich takich podzbiorów nazwałem R , nazwę „ d ” nadałem operacji sumowania zbiorów, nazwa „ m ” oznacza operację iloczynu (części wspólnej) zbiorów (są to więc nazwy funkcji dwuargumentowych), natomiast symbol „ \leq ” jest w moim systemie nazwą relacji zawierania. Użyłem też nazwy „ 0 ” dla zbioru pustego i nazwy „ 1 ” dla zbioru wszystkich liczb naturalnych — który jest przecież sam swoim podzbiorem.”

Wobec takiego podobieństwa zaczęliśmy poszukiwać własności, które pozwoliłyby odróżnić jedną dziedzinę od drugiej. Oczywiście mogliśmy wyrazić taką własność tylko w języku zawierającym symbole „ R ”, „ d ”, „ m ” itd.; umówiliśmy się też, że w każdym języku — a więc i w naszym — będzie występował symbol „ $=$ ”, który będziemy interpretować (czyli rozumieć) zawsze jako równość. Na początek wybraliśmy własność następującą:

$$m(x, y) = m(y, x).$$

„Moja dziedzina ma tę własność — powiedział mnogościowiec — jeśli wezmę iloczyn dwóch dowolnych podzbiorów x i y , to otrzymany zbiór będzie równy iloczynowi podzbiorów y i x .” Przekonał się też, że jeśli rozumieć „ m ” jako mnożenie liczb rzeczywistych, to również w dziedzinie liczb rzeczywistych występuje powyższa własność — jest to przecież przemienność mnożenia. Szukaliśmy więc dalej:

$$x \leq d(x, y).$$

Sprawdziliśmy najpierw dziedzinę mojego przyjaciela, stwierdzając, że ma ona powyższą własność: rzeczywiście, każdy zbiór jest zawarty w swojej sumie z dowolnym zbiorem y . Czy powyższa nierówność będzie prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y (gdy „ d ” jest dodawaniem)?

Łatwo zauważyliśmy, że nie: jeśli x jest liczbą 2, a y liczbą -10 , to nierówność nie będzie prawdziwa. Tak więc znaleźliśmy własność odróżniającą dwie rozpatrywane przez nas dziedziny, opisane tym samym językiem.

Zachęceni tym sukcesem, zastanawialiśmy się dalej: czy można znaleźć taką rozróżniającą własność dającą się zapisać przy pomocy najprostszej relacji, jaką jest równość? Okazało się, że tak.

Taką własnością jest np.

$$x = d(x, x).$$

Jest ona spełniona przez dowolny podzbiór zbioru liczb naturalnych (gdy „ d ” interpretujemy jako sumę zbiorów), natomiast nie każda liczba rzeczywista ją spełnia (gdy „ d ” oznacza sumę liczb rzeczywistych).

Wypisując wszystkie te własności dziedziny mojego przyjaciela mnogościowca, które dadzą się wyrazić przy pomocy relacji równości jako jedynej relacji, wyznaczylibyśmy pewną klasę dziedzin: tych, którym te własności przysługują. I tak np. do tej klasy należałyby dziedzina składająca się z rodziny wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru A oraz operacji sumy i iloczynu zbiorów z wyróżnionym zbiorem pustym i całym zbiorem A (co może ciekawsze, do tej klasy należałyby także wszystkie tzw. algebry Boole'a; to stwierdzenie nie jest już jednak całkiem trywialne). Jak widzieliśmy wyżej, nie należy do wyznaczonej klasy zbiór liczb rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem, zerem i jedynką.

Jak wyglądają klasy dziedzin — w przypadku, gdy jedyną rozpatrywaną relacją jest równość, dziedziny nazywamy algebraami — a więc, jak wyglądają klasy algebr, które dadzą się w podobny sposób opisać przy pomocy pewnego zbioru równości? Mówiąc inaczej: jakie klasy algebr można scharakteryzować przy pomocy równości? *A scharakteryzować* — to znaczy znaleźć taki zbiór równości E , że algebra należy do charakteryzowanej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy jest w niej prawdziwa każda równość ze zbioru E .

Odpowiedź na powyższe pytania została udzielona w latach trzydziestych XX wieku przez amerykańskiego matematyka Garretta Birkhoffa, który zapoczątkował badania abstrakcyjnych struktur składających się ze zbioru i operacji określonych na tym zbiorze. Algebra uniwersalna (tak został nazwany ten kierunek badawczy) zajmuje się takimi własnościami struktur, które nie zależą od tego, czym są ich elementy i jak konkretnie są na nich określone operacje.

Aby móc tu przedstawić ową odpowiedź Birkhoffa, musimy uściślić lub wprowadzić kilka pojęć właśnie z zakresu algebry uniwersalnej. Każdą strukturę postaci (A, f_1, \dots, f_n) , gdzie A jest pewnym niepustym zbiorem, a f_1, \dots, f_n są operacjami na zbiorze A (a więc funkcjami, które elementom zbioru A — a mogą to być funkcje niekoniecznie jednej zmiennej — przyporządkowują znów elementy tego zbioru), nazwiemy algebra. Napisałem wyżej, że operacje w algebrze mogą być funkcjami „niekoniecznie jednej zmiennej”; mogą to być funkcje o więcej niż jednej (i wtedy sprawa jest jasna) bądź mniej niż jednej zmiennej (argumentcie). Ale czy może istnieć funkcja bez zmiennych? Otóż tak — i można takie funkcje dokładnie opisać na gruncie teorii mnogości. Tu zauważmy, że wartość funkcji „bez zmiennych” musi być stała, bo przecież od niczego nie może zależeć. Każda taka funkcja wybiera zatem jakiś element ze zbioru A , możemy ją więc z tym elementem utożsamiać. Okazuje się zatem, że w ten sposób zawarliśmy w naszym pojęciu algebry także to, że mogą w niej występować jakieś elementy wyróżnione.

Będziemy mówili, że algebry (A, f_1, \dots, f_n) i (B, g_1, \dots, g_m) są podobne, jeśli mają tyle samo operacji (czyli $n = m$) i ponadto operacje jednej z nich mają tyle samo argumentów, co odpowiednie operacje drugiej; mówiąc dokładniej, dla każdego $i = 1, \dots, n$, operacje f_i i g_i mają tyle samo argumentów, są funkcjami tej samej liczby zmiennych. I tak np. algebra $(R, +, \cdot, 0, 1)$ liczb rzeczywistych z operacjami dodawania, mnożenia, zerem i jedynką jest podobna do algebry $(P(N), \cup, \cap, \emptyset, N)$, gdzie $P(N)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych N , \cup i \cap są odpowiednio operacjami sumy i iloczynu zbiorów, a zbiór pusty \emptyset i zbiór wszystkich liczb naturalnych N są wyróżnionymi elementami zbioru $P(N)$. Właśnie dlatego, że algebry te są podobne, mogliśmy używać do ich opisu tego samego języka, przedstawionego na początku artykułu (pomijamy tu relację \leq).

Niech więc $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ i $B = (B, g_1, \dots, g_m)$ będą algebraami podobnymi. Przekształcenie $h: A \rightarrow B$ nazwiemy *homomorfizmem* pierwszej algebry w drugą, jeśli dla każdej operacji f_i oraz dowolnych elementów $a_1, \dots, a_{k_i} \in A$ (gdzie k_i jest liczbą argumentów operacji f_i — a więc i g_i) zachodzi równość

$$h(f_i(a_1, \dots, a_{k_i})) = g_i(h(a_1), \dots, h(a_{k_i})).$$



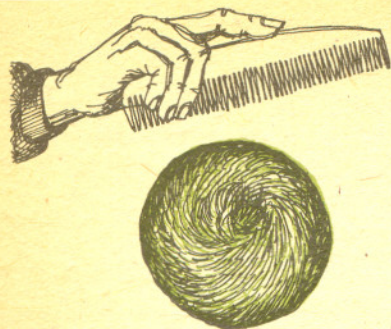
Rozwiązanie zadania M 300. Podstawiając $a = x$, $b = -y$, $c = -z$ w tożsamości

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

otrzymamy z pierwszego równania

$$0 = x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + zx) = (x - y - z)(x^2 + (y - z)^2 + x(y + yz + zx)).$$

skąd, wobec dodatniości x , y , z , wynika, że $x - y - z = 0$, czyli $x = y + z$. Z drugiego równania mamy teraz $x^2 = 2x$, skąd otrzymujemy, że $x = 2$ i $y = z = 1$.



Mówiąc prościej: jeśli najpierw wykonamy na elementach a_1, \dots, a_k algebry A operację f_i , a wynik tego działania przeniesiemy przy pomocy funkcji h do algebry B , to otrzymamy to samo, co przy przeniesieniu do algebry B elementów a_1, \dots, a_k i wykonaniu na ich obrazach operacji g_i . O takiej funkcji h algebraicy mówią krótko, że „zachowuje operacje”.

Jeśli przy tym funkcja h przeprowadza zbiór A na zbiór B (czyli każdy element zbioru B jest obrazem — ze względu na h — pewnego elementu zbioru A), to algebrę B nazwiemy *obrazem homomorficznym* algebry A . Możemy np. łatwo sprawdzić, że algebra $(R, +)$ jest obrazem homomorficznym algebry (R^+, \cdot) — gdzie R^+ jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych — ze względu na homomorfizm $h: R^+ \rightarrow R$ taki, że $h(a) = \log a$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a .

Zatrzymajmy się na chwilę przy algebrze (R^+, \cdot) . Zauważmy, że jeśli wykonamy mnożenie dowolnych dwóch liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1]$, to otrzymamy znów liczbę należącą do tego przedziału; możemy więc powiedzieć, że przedział $(0,1]$ jest zamknięty ze względu na jedyną operację algebry (R^+, \cdot) ; nie jest tak np. z przedziałem $(1,2)$ ani z podzbiorem $\{1/2, 1/3, 1/4\}$. Każdy podzbiór zbioru R^+ , który ma taką własność, nazwiemy *podalgebrą* algebry (R^+, \cdot) . Ogólniej, gdy $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ jest dowolną algebrą, a B jest podzbiorem zbioru A takim, że wykonanie którejkolwiek z operacji f_1, \dots, f_n na elementach ze zbioru B daje w wyniku element zbioru B , to B nazwiemy *podalgebrą* algebry A . Ścisłej mówiąc, podalgebrą będzie algebra $B = (B, f_1, \dots, f_n)$ z operacjami zredukowanymi do zbioru B , ale przecież wskazaliśmy już operacje mówiąc o algebrze A , więc tu możemy je pominąć. Możemy sprawdzić, że oprócz przedziału $(0,1]$ podalgebrami algebry (R^+, \cdot) są np. przedział $(0, \frac{1}{2})$, zbiór liczb całkowitych dodatnich, zbiór liczb wymiernych dodatnich, ale nie zbiór wszystkich liczb pierwszych.

Potrąfimy już otrzymać z danej algebry A nowe algebry przekształcając A przez homomorfizm albo wybierając z niej podzbiory zamknięte ze względu na wszystkie operacje algebry A . Musimy teraz omówić konstrukcję nieco bardziej skomplikowaną.

Niech $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ i $B = (B, g_1, \dots, g_n)$ będą algebrami podobnymi. Utwórzmy ze wszystkich elementów zbioru A i zbioru B pary tak, aby w każdej parze na pierwszym miejscu był element zbioru A , a na drugim — element zbioru B . Taką parę utworzoną z elementu $a \in A$ i elementu $b \in B$ oznaczmy symbolem $\langle a, b \rangle$, a $A \times B$ niech będzie zbiorem wszystkich par tego typu. I tak np. gdy $A = B = R$, to zbiorem wszystkich takich par (czyli zbiorem $R \times R$) jest zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych, który możemy utożsamić z płaszczyzną euklidesową. Zdefiniujemy w zbiorze $A \times B$ operacje F_1, \dots, F_n tak, aby otrzymać algebrę $(A \times B, F_1, \dots, F_n)$ podobną do algebr A i B . Przypuśćmy dla uproszczenia, że f_i i g_i są operacjami dwuargumentowymi — zatem F_i też musi być operacją dwuargumentową. Niech $\langle a, b \rangle$ i $\langle a_1, b_1 \rangle$ będą parami ze zbioru $A \times B$; wówczas $F_i(\langle a, b \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle) = \langle f_i(a, a_1), g_i(b, b_1) \rangle$. Operacja F_i działa więc „na współrzędnych”. Jej wartością dla danych dwóch par $\langle a, b \rangle$ i $\langle a_1, b_1 \rangle$ jest para, w której na pierwszym miejscu jest wynik działania operacji f_i pierwszej algebry A na „pierwszych współrzędnych” tych par, a na drugim miejscu jest wynik działania operacji g_i drugiej algebry B na „drugich współrzędnych”. Jeśli więc np. $A = B = (R, +)$, to w zbiorze $R \times R$ definiujemy „dodawanie” tak: $\langle x, y \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x + x_1, y + y_1 \rangle$. Algebrę zbudowaną w powyższy sposób z algebr A i B nazywamy *produktem* algebr A i B i oznaczamy przez $A \times B$.

Nietrudno taką konstrukcję uogólnić i mówić o produkcie trzech, czterech itd. algebr. Myślę, że potraficie to zrobić bez kłopotu. Dodajmy jeszcze, że można zbudować produkt nie tylko skończonej rodziny algebr, ale także nieskończonej rodziny algebr podobnych. W takim przypadku jednak konstrukcja wymaga bardziej zawilego opisu, pominiemy ją zatem.

Jesteśmy już teraz w stanie przytoczyć obiecane twierdzenie Birkhoffa, mówiące o klasach charakteryzowanych przez równości (jak mówią matematycy — *definiowalnych równościowo*). Otóż:

Klasa \mathcal{K} algebr podobnych jest definiowalna równościowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta ze względu na obrazy homomorficzne, podalgebry i produkty.

Co to znaczy, że klasa jest zamknięta ze względu na jakąś konstrukcję? Znaczy to, że jeśli wykonamy taką konstrukcję na algebrach należących do tej klasy, to otrzymamy algebra, która znów do tej klasy należy. W szczególności, klasa \mathcal{K} jest zamknięta ze względu na obrazy homomorficzne, jeśli każdy obraz homomorficzny algebry należącej do \mathcal{K} też należy do klasy \mathcal{K} ; podobnie \mathcal{K} jest zamknięta ze względu na podalgebry, jeśli każda podalgebra algebry należącej do \mathcal{K} też do \mathcal{K} należy. Wreszcie \mathcal{K} jest zamknięta ze względu na produkty, jeśli produkt dowolnej rodziny algebr z klasy \mathcal{K} jest znów algebra należącą do \mathcal{K} .

Twierdzenie Birkhoffa mówi więc, że przy pomocy równości można opisać te i tylko te własności algebr, które są zachowywane przy przekształceniach homomorficznych, które przechodzą z algebry na podalgebrę i które nie giną przy budowaniu produktu z algebr mających te własności.

Nie będziemy przytaczać pełnego dowodu tego twierdzenia. Zauważmy tylko, że jeśli pewne równości są prawdziwe w algebrze A , to tym bardziej jest tak w każdej podalgebrze algebry A , bo elementy tej podalgebry są przecież także elementami algebry A . Równości te są także prawdziwe w każdym obrazie homomorficznym A , gdyż homomorfizm przyporządkowuje oczywiście — tak jak każda funkcja — równym elementom elementy równe, zachowując przy tym operacje. Wreszcie, jeśli pewne równości są prawdziwe na każdej „współrzędnej” produktu algebr, to prawdziwe są także i w całym produkcie, w którym operacje, jak pamiętamy, określone są właśnie „na współrzędnych”. Widać z powyższego rozumowania, że prawdziwość równości zachowywana jest przez podalgebry, obrazy homomorficzne i produkty, a zatem każda klasa definiowalna równościowo jest zamknięta ze względu na te konstrukcje.

Dowód tego, że każda klasa \mathcal{K} zamknięta ze względu na obrazy homomorficzne, podalgebry i produkty jest definiowalna równościowo nie da się tu przedstawić w sposób podobnie prosty. Polega on na pokazaniu, że każda algebra, w której prawdziwe są wszystkie równości prawdziwe jednocześnie we wszystkich algebrach z klasy \mathcal{K} — jest obrazem homomorficznym pewnej algebry z \mathcal{K} (do jej zbudowania używa się produktów i podalgebr), a więc z założenia do klasy \mathcal{K} też należy. Wynika stąd, że zbiór tych równości charakteryzuje jednoznacznie klasę \mathcal{K} .

Klasą definiowalną równościowo jest np. klasa wszystkich algebr Boole'a i klasa wszystkich grup, rozumianych jako algebry z operacją składania, odwracania i z wyróżnionym elementem neutralnym względem składania (jednością). Nie można natomiast scharakteryzować przy pomocy równości klasy wszystkich algebr (A, f_1, \dots, f_n) takich, że zbiór A ma dokładnie 2 elementy: produkt dwóch takich algebr będzie miał przecież 4 elementy, nie będzie więc do tej klasy należał. Nie jest to dziwne — własność bycia zbiorem 2-elementowym nie jest własnością algebraiczną, nie dotyczy działania operacji na zbiorze, podczas gdy równość mówi zawsze o tym, że stosując w różny sposób operacje algebry otrzymujemy zawsze to samo. Nie jest też definiowalna równościowo klasa wszystkich grup, rozumianych jako algebry z jedną tylko operacją składania. Dla przykładu, grupą jest algebra (R^+, \cdot) , bo istnieje w niej element neutralny względem mnożenia (jest nim liczba 1), a dla każdego elementu istnieje element odwrotny (dla liczby $r \in R$ jest nim liczba $\frac{1}{r}$). Algebra ta ma jednak podalgebrę — a mianowicie zbiór liczb całkowitych dodatnich — która grupą nie jest.

Klasy definiowalne równościowo mają wiele interesujących własności. Jeśli \mathcal{K} jest taką klasą, to istnieje zbiór równości E taki, że algebra A należy do klasy \mathcal{K} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia wszystkie równości ze zbioru E . Mogą być jednak spełnione w algebrze A należącej do \mathcal{K} także równości spoza zbioru E , których nie spełniają inne algebry z \mathcal{K} . Dla przykładu, w klasie wszystkich grup istnieje grupa jednoelementowa, spełniająca równość $x = y$ (równość ta mówi, że wszystkie elementy tej grupy są równe, a więc ma ona tylko jeden element); oczywiście żadna grupa, która ma więcej elementów, tej równości nie spełnia. Zawsze jednak istnieją w klasie \mathcal{K} definiowalnej równościowo algebry (i to dowolnie duże), które nie spełniają żadnej innej równości poza równościami ze zbioru E — są to tzw. algebry wolne. Równości spełnione w tych algebrach są więc równościami spełnionymi w całej klasie \mathcal{K} . Co więcej, z jednej tylko takiej algebry wolnej można otrzymać wszystkie pozostałe algebry z klasy \mathcal{K} stosując przekształcenia homomorficzne, wybierając podalgebry albo budując produkty.

Okazuje się, że język używający jednego tylko „czasownika”, jednej relacji — równości — jest dostatecznie bogaty, by mówić o wielu własnościach algebr, by opisać wiele znanych klas algebr, a także — by sprawić wiele satysfakcji matematykom.



Rozwiązanie zadania F 115. Różnica potencjałów między punktami A i B przed zwarcie jest równa

$$U_{AB} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}$$

Przez bezoporowy przewodnik zwierający popłynie więc prąd, narastający aż do wartości (różnica prądów zwarcia źródeł):

$$I_{AB} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}$$

Różnica potencjałów U_{AB} zmaleje wtedy do zera, jednak prąd będzie nadal płynął dzięki bezoporowości przewodnika.

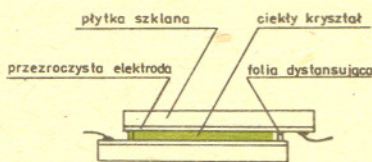
Prąd między punktami A i B nie popłynie (niezależnie od oporności przewodnika zwierającego), jeśli przed zwarcie $U_{AB} = 0$, tzn. $\mathcal{E}_1 r_2 = \mathcal{E}_2 r_1$.

O ciekłych kryształach Autor pisał w ubiegłorocznej listopadowej *Delcie*. Tam też odsyłamy Czytelnika zainteresowanego budową i innymi niż elektrooptyczne własnościami ciekłych kryształów.

Efekty elektrooptyczne i zastosowania ciekłych kryształów

Prof. dr Roman DĄBROWSKI

Efekty elektrooptyczne w ciekłych kryształach są związane ze zmianą ich własności optycznych pod wpływem pola elektrycznego. Do najważniejszych tego typu efektów zaliczamy: efekt skręconego nematyka — „twist effect”; efekt dynamicznego rozpraszania, efekt przejścia fazowego cholesteryk-nematyk i efekty „gością — gospodarza” z barwnikami pleochroicznymi.



Komórka ciekłokrystaliczna

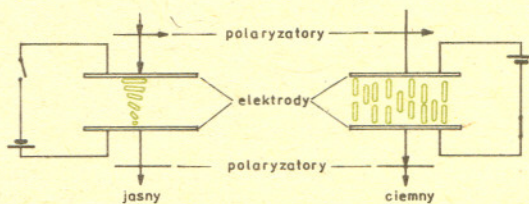
Nematyki to ciekłe kryształy o najniższym stopniu uporządkowania. Długie osie cząsteczek nematyka są ułożone równolegle, a poza tym cząsteczki są rozmieszczone w przestrzeni chaotycznie. W przypadku cholesteryka można wybrać płaszczyznę, w której cząsteczki ułożone są jak w nematyku. Jednak wtedy w kolejnych, równoległych warstwach ich długie osie będą obrócone o pewien określony kąt. Utworzona w ten sposób struktura śrubowa decyduje o wielu własnościach cholesteryków. Skręcony nematyk ma budowę taką jak fragment śruby cholesteryka (mniej niż 1/4 zwoju).

Efekty elektrooptyczne bada się w cienkich warstwach ciekłych kryształów ($5 \div 30 \mu\text{m}$). W tym celu buduje się komórkę składającą się z dwóch równoległych płytek szklanych z naniesionymi po stronie wewnętrznej przezroczystymi elektrodami z tlenku indowo-cynowego. Odległość między płytkami utrzymywana jest za pomocą pasków folii, umieszczonych wzdłuż krawędzi. Przestrzeń między płytkami wypełnia się ciekłym kryształem.

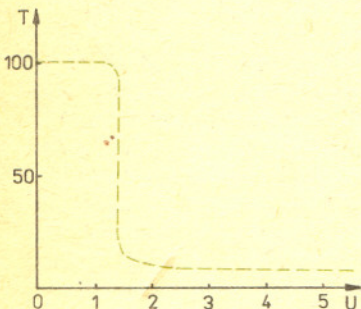
Efekt skręconego nematyka

wymaga stosowania ciekłego kryształu z większą od zera anizotropią dielektryczną. Przez odpowiednią obróbkę powierzchni elektrod, np. rabingowanie, wywołuje się ustawienie cząsteczek długimi osiami równoległe do powierzchni płytek. Jednocześnie płytki są tak złożone, żeby cząsteczki skręcały się o kąt 90° przy przejściu od płytki dolnej do górnej.

Rabingowanie polega na tworzeniu na powierzchni szkła subtelnych defektów zorientowanych w tym samym kierunku (mikrorowki), na przykład przez pocieranie tkaniną.



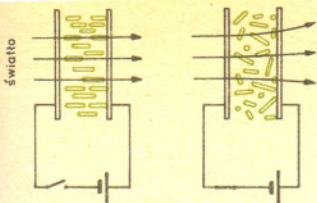
Komórka twistowa i zasada jej działania



Zależność transmisji $|T|$ komórki twistowej od napięcia. O jakości komórki decyduje kontrast $|K|$, tj. stosunek transmisji poniżej progu do transmisji przy danym napięciu.

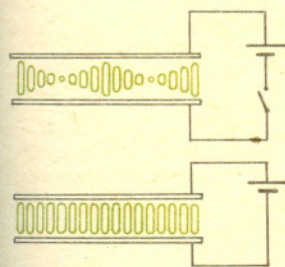
Taka orientacja cząsteczek jest aktywna optycznie — zdolna do skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Jeżeli światło spolaryzowane przechodzi przez warstwę ciekłego kryształu o strukturze skręconego nematyka, to jego płaszczyzna polaryzacji ulega skręceniu o kąt skręcenia molekuł. Po przyłożeniu pola elektrycznego zmienia się orientacja molekuł, a warstwa ciekłego kryształu nie skręca płaszczyzny polaryzacji. Jeżeli taką warstwę ciekłego kryształu umieścić między dwoma polaryzatorami, których kierunki polaryzacji są ustawione prostopadłe, to bez pola elektrycznego przepuszcza ona światło (jest jasna), natomiast po przyłożeniu pola elektrycznego, światło nie przechodzi przez warstwę (staje się ciemna). Istotnym z punktu widzenia zastosowań parametrem opisującym komórkę ciekłokrystaliczną jest transmisja, czyli stosunek natężenia światła wychodzącego z komórki do natężenia światła padającego. Zależność transmisji od przyłożonego napięcia pokazuje rysunek. Jeżeli napięcie progowe mieszaniny kilku związków ciekłokrystalicznych wynosi $1-2 \text{ V}$, to zwykle już dla 3 V transmisja wynosi najwyżej 10% wartości poniżej progu. Czas potrzebny do przeorientowania warstwy oraz czas powrotu do stanu wyjściowego po wyłączeniu pola zależą od temperatury. Przy 20°C wynoszą przeciętnie $0,1$ i $0,2 \text{ s}$. Efekt skręconego nematyka jest efektem bezprądowym. Zużywana moc jest minimalna, pobór prądu wynosi $0,1-0,5 \mu\text{A}$ na 1 cm^2 powierzchni i zależy od czystości ciekłego kryształu.

Efekt dynamicznego rozpraszania



Zasada działania komórki z dynamicznym rozpraszaniem.

Fala elektromagnetyczna ma polaryzację liniową, gdy wektor natężenia pola elektromagnetycznego (zawsze prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali) nie zmienia kierunku w czasie. Jeśli fala jest złożeniem dwóch fal o tych samych częstościach i amplitudach, które poruszają się w tym samym kierunku i których fazy różnią się o $\frac{\pi}{2}$, to mówimy, że ma polaryzację kołową.



Zasada działania komórki z efektem przejścia fazowego cholesteryk-nematyk.

Wartość anizotropii dielektrycznej określona jest wzorem

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$$

gdzie ϵ_{\parallel} (ϵ_{\perp}) — przenikalność dielektryczna ciekłego kryształu zorientowanego długimi osiami równoległe (prostopadłe) do kierunku pola elektrycznego.

Energia zgromadzona w jednostkowej objętości kondensatora jest równa

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

gdzie ϵ to przenikalność dielektryczna w kierunku pola elektrycznego E . Dlatego też dla $\Delta\epsilon > 0$ cząsteczki dążą do ustawienia prostopadłego do powierzchni płytek (minimum energii), a gdy $\Delta\epsilon < 0$ — do ustawienia równoległego.

jest obserwowany w nematykach o ujemnej anizotropii, $\Delta\epsilon < 0$. Nematyk powinien charakteryzować się ponadto przewodnictwem właściwym około $10^8 \div 10^9 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Przewodnictwo reguluje się przez wprowadzenie odpowiednich domieszek jonotwórczych. Poza tym dla tego efektu jest wymagane, aby w stanie bez pola elektrycznego cząsteczki samorzutnie ustawiały się długimi osiami prostopadle do powierzchni elektrod.

Po przyłożeniu stałego lub wolnozmiennego pola elektrycznego cząsteczki starają się ułożyć długimi osiami równoległe do powierzchni elektrod (wynika to z warunku $\Delta\epsilon < 0$). Jednocześnie to równoległe ułożenie jest zaburzone ruchem przepływających jonów. Jony te są zwykle luźno związane z kilkoma sąsiednimi cząsteczkami ciekłego kryształu i przemieszczają się wraz z nimi. Dzięki temu w warstwie ciekłego kryształu powstaje ruch turbulentny. Pod wpływem tego ruchu tworzą się obszary o różnej orientacji cząsteczek. Ze względu na dużą anizotropię współczynników załamania nematyków ($\Delta n \approx 0,2$) między różnie zorientowanymi obszarami istnieje wiele granic działających jak ośrodki rozpraszające. Praktycznie efekt dynamicznego rozpraszania obserwuje się jako przejście klarownej warstwy ciekłego kryształu do warstwy mlecznobiałej. Jest to historycznie pierwszy efekt wykorzystywany w praktyce. Jednak znaczny przepływ prądu wywołuje elektrolizę i reakcję na elektrodach, zwiększa pobór mocy i wpływa na skrócenie czasu pracy komórki. Czerpany prąd wynosi $2 \div 20 \mu\text{A}$ na 1 cm^2 powierzchni dla napięcia 20 V. Napięcie progowe $U_p = 10 \div 15 \text{ V}$.

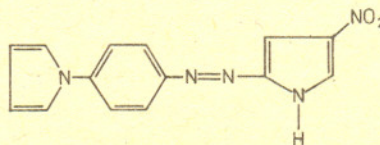
Efekt przejścia fazowego cholesteryk-nematyk

obserwuje się w aktywnych optycznie ciekłych kryształach o dodatniej anizotropii dielektrycznej. Realizowany jest praktycznie w mieszaninach złożonych z nematyków o dużej $\Delta\epsilon$ i cholesteryków mających krótki skok śruby. Dla obserwowania efektu nie jest wymagana obróbka powierzchni elektrod nadająca jej zdolność orientowania warstwy ciekłego kryształu ani stosowanie polaryzatorów. W stanie wyjściowym (bez pola) mieszanina ciekłokrystaliczna w cienkiej warstwie ma strukturę odpowiadającą przypadkowej orientacji spirali, których osie są często równoległe do powierzchni płytek szkła. W tym stanie warstwa silnie rozprasza światło i jest mlecznobiała. Po włączeniu napięcia wyższego niż napięcie progowe, cząsteczki ciekłego kryształu zmieniają orientację na prostopadłą do powierzchni płytek szklanych (spirała rozkręca się) i komórka staje się przezroczysta. Po usunięciu napięcia warstwa powraca do rozpraszającego stanu wyjściowego pod działaniem molekularnych sił elastycznych, w tym przypadku, głównie sił skręcających wywołanych asymetrią cząsteczki cholesteryka. Napięcie progowe dla indukowanej polem elektrycznym przemiany fazowej cholesteryk-nematyk jest wyższe niż dla dwóch wyżej wymienionych efektów i wynosi od 10 do 40 V.

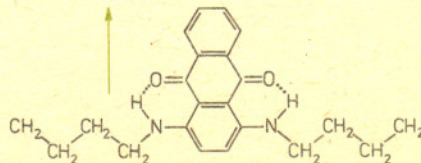
Efekt „gościa-gospodarza”

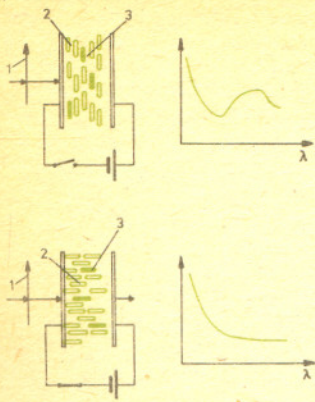
Opisane wyżej efekty elektrooptyczne pozwalają na uzyskanie obrazów czarnobiałych. Jeżeli jednak do mieszaniny ciekłokrystalicznej wprowadzić barwnik pleochroiczny, można uzyskać obrazy barwne.

Barwnik pleochroiczny charakteryzuje się tym, że ma różne współczynniki absorpcji światła w kierunku równoległym i prostopadłym do długiej osi cząsteczki. W związku z tym w zależności od ułożenia cząsteczki barwnika w stosunku do kierunku rozchodzenia się światła liniowo spolaryzowanego, będzie ono albo absorbowane albo przepuszczane. Przykładem barwnika pleochroicznego mającego oscylator absorpcji o kierunku równoległym do długiej osi jest związek



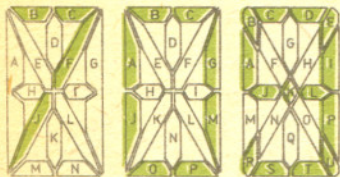
a barwnika mającego oscylator absorpcji położony prostopadłe do długiej osi barwnika związek





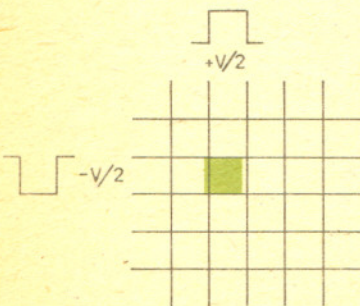
Zasada działania komórki wykorzystującej barwnik pleochroiczny.

- 1 — polaryzator
- 2 — cząsteczka ciekłego kryształu
- 3 — cząsteczka barwnika pleochroicznego



Wzory elektrod wskaźników cyfrowo-literowych

Ciekły kryształ między dwiema równoległymi płytkami szklanymi porządkuje się homogenicznie, tj. długimi osiami cząsteczek równoległe do płytek, bądź homeotropowo tj. prostopadle do powierzchni płytek.



Zasada działania matrycy

Oba barwniki są niebieskie. Pierwszy absorbuje światło spolaryzowane, gdy swoją długą osią jest skierowany prostopadle do kierunku rozchodzenia się światła tj. równoległe do wektora natężenia pola elektrycznego światła spolaryzowanego liniowo. Natomiast drugi barwnik absorbuje światło, gdy swoją długą osią jest ułożony w kierunku rozchodzenia się światła. Jeżeli pierwszy z barwników umieścić w ciekłym kryształzie o $\Delta\epsilon > 0$ i uporządkować warstwę ciekłego kryształu homogenicznie, to w tym stanie będzie on absorbował światło w zakresie widzialnym. Po przyłożeniu pola elektrycznego warstwa ciekłego kryształu przeorientowuje cząsteczkę barwnika do położenia homeotropowego i barwa warstwy zanika. Pierwszy barwnik w ciekłym kryształzie o $\Delta\epsilon > 0$ umożliwia zatem realizację bezbarwnego obrazu na barwnym tle. W ciekłym kryształzie o $\Delta\epsilon < 0$ powstaje natomiast barwny obraz na bezbarwnym tle. W tym przypadku stan wyjściowy wymaga porządkowania homeotropowego. Z drugim barwnikiem przejście z układu zabarwionego do bezbarwnego jest realizowane w odwrotnej kolejności.

Ciekłe kryształy znajdują głównie zastosowanie do budowy wskaźników i do pomiaru temperatury. Wskaźniki ciekłokrystaliczne są masowo stosowane w zegarkach elektronicznych i kalkulatorach. Równie powszechne są termometry pokojowe i lekarskie. Umożliwiają one pomiar temperatury oraz obserwowanie rozkładu temperatur na dużych powierzchniach.

Wskaźnik jest zbudowany podobnie do komórki pokazanej na pierwszym rysunku, różni się od niej tylko tym, że na jednej z elektrod przedniej ściany jest wytrawiony wzór. W przypadku wskaźników cyfrowych lub cyfrowo-literowych stosuje się wzory elektrod pokazane obok. Przyłożenie napięcia pomiędzy wybrane segmenty przedniej płytki, np. BCFJ, i wspólną elektrodę płytki tylnej powoduje zmianę orientacji warstw ciekłego kryształu i pozwala obserwować cyfrę 7. Wybierając inne elementy można przedstawić dowolną cyfrę od 0 do 9, a także wszystkie litery alfabetu. Celem przeorientowania warstwy można wykorzystać układ realizujący dowolny z omówionych czterech efektów elektrooptycznych. Obecnie wykorzystuje się jednak głównie efekt skręconego nematyka.

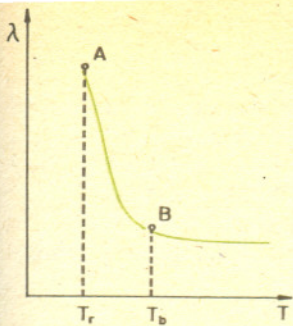
Bardziej uniwersalne, ale także bardziej skomplikowane są wskaźniki matrycowe. Na płytkach szklanych wytrawia się paskowe elektrody. Po złożeniu płytek tworzą one wiersze i kolumny. Punkt na przecięciu dwóch pasków jest wyświetlany przez jednoczesne podanie napięcia na kolumnę i wiersz, odpowiadające współrzędnym tego punktu. Różnica napięć na wierszu i kolumnie jest tak dobrana, by pozwalała przeorientować cząsteczki ciekłego kryształu tylko w miejscu krzyżowania się wiersza z kolumną. Wskaźniki matrycowe pozwalają wyświetlić obraz o dowolnym kształcie.

Termometr ciekłokrystaliczny jest to nałożona na pasek czarnej folii warstwa ciekłego kryształu (cholesteryka) przykryta drugim podobnym paskiem. Jeżeli w zewnętrznym pasku wycięte są obszary o kształcie cyfr, to uzyskamy barwny obraz o tym kształcie. Do pomiaru temperatury stosuje się cholesteryki, które mają skok śruby leżący w zakresie długości światła widzialnego. Wykorzystuje się tu zjawisko dichroizmu kołowego i zjawisko selektywnego odbicia. Dichroizm kołowy polega na tym, że światło białe przechodzące przez warstwę cholesteryka zostaje spolaryzowane kołowo. Dzieje się tak dlatego, że warstwy, na przykład prawoskrętnej cholesteryka odbijają całkowicie światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie, a przepuszczają światło spolaryzowane lewoskrętnie. Lewoskrętny ciekły kryształ będzie przepuszczał tylko światło spolaryzowane prawoskrętnie. Odbite od kolejnych, tak samo ułożonych, warstw cholesteryka fale elektromagnetyczne interferują. Wzmocnienie następuje dla długości fali (warunek Bragga):

$$\lambda = P \cdot \cos\beta,$$

gdzie β jest kątem padania światła na warstwę ciekłego kryształu a P skokiem śruby. Fale o innych długościach są wygaszane. Jeżeli P jest dobrane tak, że długość fali światła odbitego jest w zakresie widzialnym, to efekt selektywnego odbicia obserwowany jest jako zabarwienie ciekłego kryształu.

Skok śruby nie jest stały, ale zmienia się z temperaturą. Zwykle zmniejsza się ze wzrostem temperatury. Dlatego, gdy temperatura rośnie, obserwuje się zmianę barwy, od czerwonej do fioletowej.

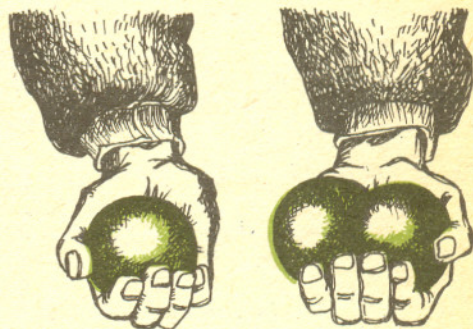


Zależność długości światła selektywnie odbijanego od temperatury dla cholesteryka. T_r , T_b — temperatury odbicia światła czerwonego i fioletowego.

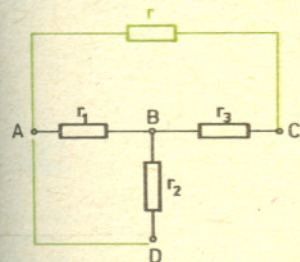
Do wykonania termometru pokojowego konieczne jest sporządzenie szeregu mieszanin ciekłych kryształów (kompozycji), w których określona barwa pojawia się w określonym, żądanym zakresie temperatur. Wytwarza się na przykład szereg kompozycji, dla których dominująca barwa zielona pojawia się co 1°C .

Kompozycje ciekłokrystaliczne przeznaczone do rejestracji rozkładu temperatur na powierzchniach wybiera się tak, aby charakteryzowały się szeroką gamą wyraźnych barw, ponieważ ułatwia to obserwowanie różnic temperatur poszczególnych obszarów. Warunkiem wizualizacji rozkładu temperatury na powierzchniach jest zaabsorbowanie światła przechodzącego przez warstwę ciekłego kryształu. Nie może się ono odbijać od podłoża, ponieważ wtedy będzie się mieszać ze światłem odbitym selektywnie od warstw cholesteryka i obserwator nie zaobserwuje efektu powstania barwy. W tym właśnie celu podłoże pod ciekły kryształ pokrywa się warstwą czerni.

Skok spirali cholesteryka zmienia się również pod wpływem pochłaniania par związków organicznych i dlatego zjawisko selektywnego odbicia jest także wykorzystywane do wykrywania zanieczyszczeń w powietrzu.

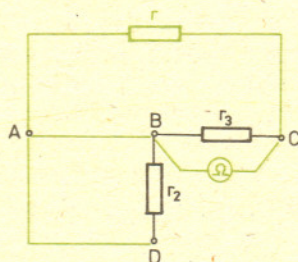


Rozwiązanie zadania F 116. Przewody połączeniowe, jeśli uznać je za pozbawione oporności, mogą służyć do zwierania dostępnych punktów układu. Przyjmijmy, że decydujemy się zmierzyć oporność r_3 . Po zwarceniu punktu A z D , schemat zastępczy układu przedstawia rysunek:



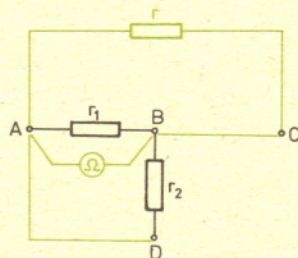
r — jest opornością niedostępnej części układu ze zwartymi punktami A i D .

Należy teraz:



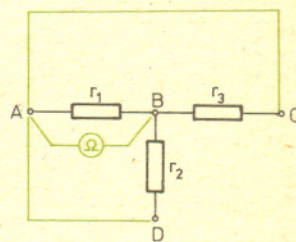
1. Zewrzeć A z B i zmierzyć oporność (R_1) pomiędzy B i C . Jest ona równa

$$(1) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_3}$$



2. Zamienić miejscami przewód zwierający i miernik. Wskazanie przyrządu (R_2) wiąże z pozostałymi opornościami zależność:

$$(2) \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$



3. Pozostawić omomierz w tym samym miejscu, zwierając dla odmiany A z C . Miernik wskaże oporność (R_3) spełniającą relację:

$$(3) \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

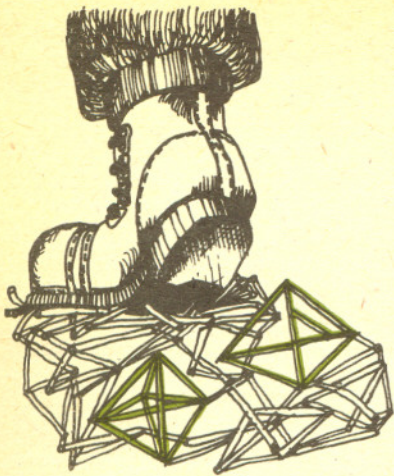
Dodając stronami (1) i (3) oraz odejmując (2) otrzymujemy

$$r_3 = \frac{2R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}$$

Proponujemy zastanowienie się nad następującymi problemami:

1. Czy przytoczona wyżej procedura daje się efektywnie stosować w przypadku, gdy węzeł B zawiera więcej niż trzy elementy?
2. Zamiast omomierza dysponujemy źródłem napięcia oraz idealnymi miernikami: napięcia i prądu. Jak zestawzić układ pomiarowy, aby na podstawie jednej pary odczytów wskaźni wyznaczyć r_3 ?

Twierdzenie o dyktatorze



Nietrudno stworzyć teoretyczny model wyborów np. prezydenckich, w których zwycięża kandydat uzyskujący mniej głosów — często dzieje się tak i naprawdę przy wyborach pośrednich. Do różnych paradoksów może też dojść, gdy liczba możliwości do wyboru przekracza 2 (jeden z nich widzimy w artykule B. Kopocińskiego w tym numerze *Delty*). W 1950 r. Kenneth Arrow (Nagroda Nobla w dziedzinie ekonomii, 1972) odkrył głębokie i zadziwiające prawo: gdy $n \geq 2$ osób wybiera spośród $m \geq 3$ możliwości, to pewne naturalne i rozsądne wyglądające reguły tego wyboru mogą być spełnione tylko w warunkach dyktatury.

Będziemy to ilustrować na prostym przykładzie $n = 2$, $m = 3$. Dwie osoby: I i II rozpatrują trzy możliwości A, B, C. Każda osoba ustala swoją listę preferencji, np. I uważa, że $A < C < B$ (A jest gorsze niż C, C jest gorsze niż B), zaś dla II jest $B < A < C$. Ze wszystkich indywidualnych list preferencji (u nas: dwu) ma powstać ostateczna kolejność projektów (kandydatów, drużyn piłkarskich itd.) A, B, C. Procedurę ustalania tej ostatecznej listy oznaczmy przez Φ i nazwijmy procedurą kompromisu lub krótko kompromisem. W naszym przykładzie ($n = 2$, $m = 3$) możliwych układów list indywidualnych jest $(3!)^2$, ogólny wzór $((m!)^n)$ jest zrozumiały. Oznaczmy przez P ten $(m!)^n$ -elementowy zbiór wszystkich zestawów list. Kompromis Φ przyporządkowuje każdemu elementowi p zbioru P pewną kolejność możliwości A, B, C, ...

Najprostszym przykładem Φ jest dyktatura: Φ (zespół list) = lista sporządzona przez I. Zrozumiałe jest, że procedura „kompromisu” nie może być dowolną funkcją i że następujące dwa warunki na Φ są najzupełniej rozsądne:

- 1) jednomyślność: jeżeli wszystkie osoby uznają $A < B$, to na liście kompromisowej będzie również $A < B$;
- 2) niezależność: jeśli dla dwóch zestawów list preferencji $p_1 \in P$ i $p_2 \in P$ zbiór osób uznających $A < B$ jest w obu przypadkach ten sam, to porządek A i B na kompromisowej liście $\Phi(p_1)$ jest taki sam, jak na $\Phi(p_2)$.

W naszym dwuelementowym przykładzie: kompromis każdego list, w których I stawia $B < A$, a II stawia $A < B$, musi ustawiać A i B w jednakowym porządku. Jeżeli tym porządkiem jest $B < A$, to powiemy, że I dyktuje II w sprawie (A, B).

Podstawowy lemat o wymianie głosi, że jeżeli I dyktuje w sprawie (A, B), to również dyktuje w (A, C) i (B, C), a więc dyktuje w każdej sprawie, tj. jest dyktatorem. Ale (gdy $n = 2$, dwie osoby) jedna z osób na pewno dyktuje np. w (A, B); dyktuje zatem w ogóle! W małżeństwie jedna ze stron jest dyktatorem, chyba, że nie przestrzegają reguł 1) i 2).

Gdy $n > 2$, twierdzenie o istnieniu dyktatora jest pewnym twierdzeniem algebry. Oznaczmy przez \mathcal{D} zbiór wszystkich „grup dyktujących”, tzn. $D \in \mathcal{D}$, gdy funkcja „kompromisu” Φ jest wyznaczona przez swoje wartości dla list ułożonych przez członków grupy D . Jest dość oczywiste, że

a) wszystkie osoby tworzą „grupę dyktującą”,


$$b) \quad D_1, D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D},$$

$$c) \quad E \supset D, D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \in \mathcal{D},$$

tj. \mathcal{D} jest filtrem w rodzinie podzbiorów zbioru wszystkich „decydentów”. Główny wynik Kennetha Arrowa można sformułować tak: przy założeniach 1) i 2) ten filtr jest ultrafiltrem a odpowiednie twierdzenie algebraiczne mówi, że istnieje wtedy jednoosobowa „grupa dyktująca”, czyli dyktator.

Zwolennicy pluralizmu zadowolili się mogą rezultatem (B. Peleg, 1978) podającym inne, również naturalne i rozsądne warunki na funkcję Φ , które już dopuszczają istnienie niedyktatorskich „kompromisów”. Szczegóły znaleźć można w pracy tegoż autora w czasopiśmie *Econometrica*, 46, str. 153—161, 1978 r.

(opr. red. na podstawie *Mathematics Calendar* 1981)

 Rozwiązanie zadania M 298. Niech $p < 15$ będzie liczbą pierwszą. Gdyby $a_1 = p$, to $a_{p+1} = a_1 + pr = p(r+1)$ byłoby złożone wbrew założeniu. Oznaczmy teraz przez r_k resztę z dzielenia $k \cdot r$ przez p . Jeżeli $p \nmid r$, to r_1, \dots, r_{p-1} wyczerpują wszystkie liczby $1, 2, \dots, p-1$ i wobec tego znajdzie się takie k , że $r_k = p-s$, gdzie s jest resztą z dzielenia a_1 przez p . Ale wtedy $plak_{k+1} = a_1 + k \cdot r$ wbrew założeniu i wobec tego p musi dzielić r . Wynika stąd, że $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid r$, więc $a_{15} > 14r > 400000$.

Paradoks trzech zmiennych losowych

Prof. dr Bolesław
KOPOCIŃSKI

Mówimy, że gracz B bije gracza A, jeżeli częściej z nim wygrywa niż przegrywa. Wśród graczy, np. szachistów znane jest następujące zjawisko: gracz B bije gracza A, gracz C bije gracza B i gracz A bije gracza C.

Zjawisko to można sformalizować następująco: forma każdego gracza jest zmienną losową, a wygrywa gracz, który w danej próbie ma wyższą formę. Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio formy graczy A, B, C. Z opisu zjawiska wynika, że może być $P(Y > X) > 1/2$, $P(Z > Y) > 1/2$, $P(X > Z) > 1/2$.

Rozgrywki szachowe mają na celu liniowe uporządkowanie graczy. Ich formy, a więc odpowiednie zmienne losowe możemy uporządkować mówiąc, że zmienna losowa Y , „jest większa” od zmiennej losowej X , jeżeli $P(Y > X) > 1/2$. Niestety okazuje się, że ta relacja nie jest przechodnia. Fakt ten nosi nazwę paradoksu trzech zmiennych losowych Steinhausa i Trybuły (zob. S. Trybuła, On the Paradox of Three Random Variables, *Zastosowania Matematyki*, V (1961), str. 321—332).

Istnienie paradoksu wyjaśnia następujący przykład. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość 1 albo 4 z rozkładem prawdopodobieństwa $P(X = 1) = p$, $P(X = 4) = 1 - p$, niech zmienna losowa Y przyjmuje wartość 2 czyli $P(Y = 2) = 1$, zaś zmienna losowa Z — wartość 0 albo 3 z rozkładem prawdopodobieństwa $P(Z = 0) = 1 - p$, $P(Z = 3) = p$. Przy założeniu, że zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, $0 < p < 1$, obliczamy

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= P(Y = 2, X = 1) = P(Y = 2)P(X = 1) = p, \\ P(Z > Y) &= P(Z = 3, Y = 2) = P(Z = 3)P(Y = 2) = p, \\ P(X > Z) &= P(X = 1, Z = 0) + P(X = 4, Z = 0) + P(X = 4, Z = 3) = \\ &= P(X = 1)P(Z = 0) + P(X = 4)P(Z = 0) + P(X = 4)P(Z = 3) = 1 - p^2. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,618 \dots$, to po prawej stronie mamy zawsze tę samą wartość $0,618 \dots$, a więc mamy paradoks.

Traktując zadanie bardziej ogólnie możemy zapytać, dla jakich trójek liczb rzeczywistych a, b, c istnieją takie niezależne zmienne losowe X, Y, Z , że $P(Y > X) = a$, $P(Z > Y) = b$, $P(X > Z) = c$. Odpowiedź jest następująca: Oznaczmy

$$\alpha(a, b) = \begin{cases} \max\left(1 - ab, \frac{1 - a}{b}, \frac{1 - b}{a}\right) & \text{gdy } a + b > 1, \\ 1 & \text{gdy } a + b \leq 1, \end{cases}$$

przy czym $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. Trójka X, Y, Z niezależnych zmiennych losowych spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 - \alpha(1 - a, 1 - b) \leq c \leq \alpha(a, b).$$

W szczególności, jeżeli $a = b = c$, to

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq c \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618 \dots$$

Fakt ten wzmacnia poprzednio rozważany przykład. Okazuje się bowiem, że dopuszczając zmienne losowe o dowolnym zbiorze wartości nie można paradoksu uczynić bardziej wyrazistym.

Założenie niezależności formy poszczególnych szachistów we wzajemnych próbach jest pewną idealizacją rzeczywistości, możliwą do przyjęcia. Istnieją jednak sytuacje, w których niezależności nie ma i wówczas paradoksalność sytuacji może być wyraźniejsza. Przypuśćmy, że zebranie ma podjąć pewną uchwałę wybierając spośród trzech jej projektów A, B, C, biorąc pod rozwagę pary projektów i wybierając większością głosów „lepszy” z każdej pary. Każdy projekt ma pewną wartość preferencyjną określoną na zbiorze zebranych. Oznaczmy przez $A < B$ to, że wyborca przedkłada projekt B nad A. Przy trzech projektach możliwy jest podział zgromadzenia na sześć frakcji; przypuśćmy, że ujawnią się jedynie trzy frakcje

$$\begin{aligned} 1/3 \text{ zgromadzenia uznaje } A < B < C, \\ 1/3 \text{ zgromadzenia uznaje } B < C < A, \\ 1/3 \text{ zgromadzenia uznaje } C < A < B. \end{aligned}$$

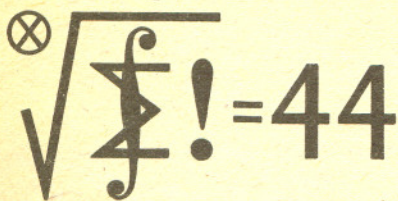
Nietrudno spostrzec, że zebrani większością 2/3 głosów wybiorą projekt B spośród A, B, projekt C spośród B, C i projekt A spośród C, A.



Rozwiązanie zadań M 299. Jeżeli ABC jest szukanym trójkątem, to obracając B wokół A o kąt $\ast BAC = \ast B_0A_0C_0$ do położenia B' zauważymy, że C jest obrazem B' przy jednokładności o środku A i stosunku

$$\frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{A_0C_0}{A_0B_0}$$

Wynika stąd, że C jest punktem wspólnym prostej q i prostej p' powstałej z p przez wykonanie opisanego wyżej obrotu i jednokładności. Znaleźnienie B nie przedstawia już trudności. Widać ponadto, że jeżeli kąty między p i q są różne od $\ast B_0A_0C_0$, to zadanie ma dwa rozwiązania odpowiadające dwu różnym kierunkom obrotu B , w przeciwnym razie może istnieć 0, 1 lub nieskończenie wiele rozwiązań.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 2/1982

16. Gdyby ciąg $\{x_n\}$ był ściśle rosnący, mielibyśmy $x_n \geq n-1$ dla każdego n . Weźmy $n = 2^k$, gdzie $k \geq \max(5, x_2)$. Otrzymujemy sprzeczność, bo wówczas $2^k - 1 \leq x_{2^k} = kx_2 \leq k^2 < 2^k - 1$.

17. Udowodnimy twierdzenie dla dowolnego ograniczonego obszaru wypukłego W , niekoniecznie wielokąta. (Jest ono prawdziwe i bez założenia wypukłości, dla każdego obszaru ograniczonego krzywą zamkniętą, ale dowód jest znacznie trudniejszy).

Dla dowolnej prostej l przecinającej obszar W zbudujemy kwadrat, którego przekątną jest odcinek $l \cap W$, i weźmy pod uwagę jego dwa wierzchołki P, Q nie leżące na l . Będziemy mówili, że prosta l jest: typu (1), gdy punkty P i Q leżą wewnątrz W ; typu (2), gdy P i Q leżą na zewnątrz W ; typu (3), gdy P i Q leżą na brzegu W . Korzystając z wypukłości W można niezbyt trudno wykazać (pominiemy tę część dowodu), że każdą prostą nie należącą do żadnego z tych trzech typów można przez przesunięcie równoległe sprowadzić do jednego z tych typów oraz że przesunięcie równoległe nie może zmienić typu prostej. Widać, że typy (1) i (2) są stabilne, tj. mała zmiana kierunku prostej typu (1) [lub (2)] nie zmienia jej typu. Natomiast zmiana kierunku na prostopadły przeprowadzi prostą typu (1) na prostą typu (2) i odwrotnie. Dowód twierdzenia sprowadza się do pokazania, że istnieje co najmniej jedna prosta typu (3). Założmy, że tak nie jest, tzn. że każda prosta jest z dokładnością do przesunięcia typu (1) lub (2). Ustalmy pewien kierunek ze zwrotem jako zerowy i przyporządkujmy każdej wartości kąta $\alpha \in (0, \pi)$ liczbę $f(\alpha)$ równą 1 lub 2 w zależności od tego, czy proste nachylone do kierunku zerowego pod kątem α należą do typu (1) czy (2). Z uwagi na stabilność tych typów funkcja f jest ciągła, a zatem stała. Sprzeczność, bo $f(0) \neq f(\pi/2)$.

18. Wśród rozpatrywanych $\binom{8}{3} = 56$ trójkątów jest 8 trójkątów o bokach $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$,

24 trójkąty o bokach $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ i 24 trójkąty o bokach $(1, 1, \sqrt{2})$. Ich pola równe są odpowiednio $\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2$. Zatem wartość oczekiwana badanej zmiennej losowej (pola trójkąta) wynosi

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{56} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{24}{56} + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{56} = \frac{1}{14} (\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3) = 0,641 \dots$$

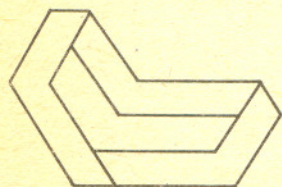
Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Nasz kolega PROOF, dostarczający zwykle materiału do tego kącika umie chwilowo rozwiązać wszystkie znane mu zadania ze szkolnej geometrii elementarnej. Wobec tego zadanie, którego nie umiemy rozwiązać nie tylko my, ale i czytelnicy *Journal of Recreational Mathematics*.

Łatwo złożyć wielokąt (np. kwadrat) z czterech mniejszych kwadratów. Przeciwnie płytki stykają się narożnikami. Nie można oczywiście ułożyć ich tak, by każdy z każdym graniczył wzdłuż jakiejś linii. Na użytek zadania wymyślmy następujące określenie: Czworoblokiem nazywamy figurę podzieloną na cztery przystające wielokąty w ten sposób, że część wspólna każdego z nich zawiera odcinek.

Jeden z takich czworobloków widzimy na rysunku. Jak widać, nie jest on wypukły. Czy są i wypukłe czworobloki? Tego właśnie nie wiemy.

(wg *Journal of Recreational Mathematics*, 11 (4), 1979)



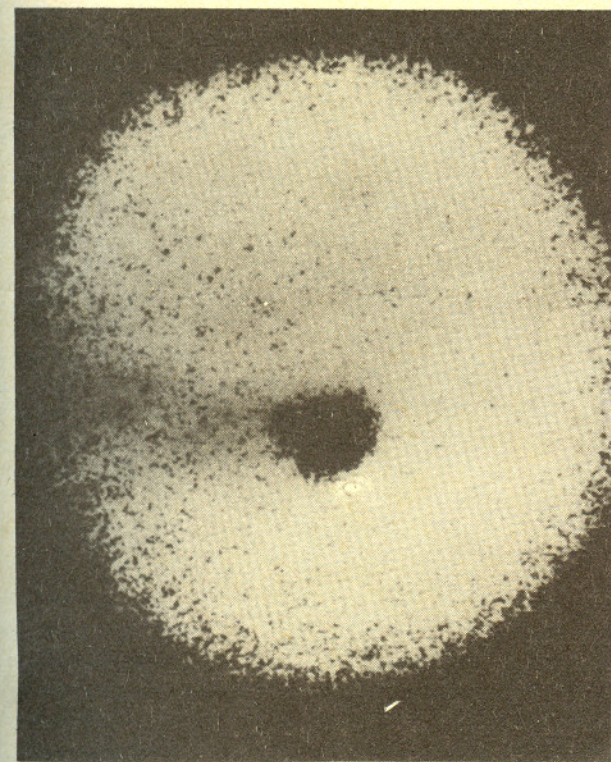
Znowu przychodzi lato i krótkie noce nie pozwalają na prowadzenie obserwacji wymagających bardzo ciemnego nieba. Jednak oczywiście astronomowie nie przestają prowadzić badań — najlepiej o tym świadczy odkrycie, znane kolekcjonerom ciekawostek, o którym chcemy dzisiaj opowiedzieć.

Cztery lata temu, 22 czerwca 1978 dwaj astronomowie James Christy i Robert Harrington pracujący w Obserwatorium Marynarki Wojennej we Flagstaff w Arizonie (USA), gdzie letnie noce są dużo ciemniejsze niż w Polsce (dlaczego?), wykonywali zdjęcia najdalszej dotychczas odkrytej planety Układu Słonecznego, Plutona, w celu przeprowadzenia dokładnego pomiaru jej położenia. W czasie dokonywania tego pomiaru Christy stwierdził, że obraz Plutona jest wyraźnie wydłużony. Po dokładnej analizie wykluczono możliwość drgnięcia teleskopu w czasie ekspozycji (obrazy okolicznych gwiazd na tej samej kliszy były okrągłe) i zasugerowano, że wydłużony obraz Plutona spowodowany jest istnieniem nieznanego przedtem bliskiego towarzysza. Fotografie zrobione w następnych dniach potwierdziły tę hipotezę (patrz zdjęcie obok). Nowo odkrytego satelitę nazwano *Charon*. Odległość obu ciał na sferze niebieskiej nie przekracza nigdy 1". 6 lipca ogłoszono o odkryciu, co spowodowało poruszenie wśród astronomów, spośród których wielu rozpoczęło badania układu. Dzisiaj wiemy już o nim dość dużo, jak również o samym Plutonie. Odległość środków obu ciał wynosi 19000 ± 1000 km (20 razy mniej niż odległość Ziemia — Księżyc). Okres obiegu — 6,39 dnia. Jest to układ bardzo ciasny zważywszy, że średnica Plutona wynosi ok. 4000 km (3 razy mniej niż Ziemi), natomiast Charona ok. 1200—2000 km (wynik ten uzyskano w r. 1980 obserwując czas trwania zaćmienia słabej gwiazdy przez Charona; wyobraźcie sobie jak ogromny jest ten księżyc dla obserwatora oglądającego go z powierzchni planety). Stosunek mas obu obiektów wynosi ok. 10:1, masa Plutona natomiast $1,37 \times 10^{25}$ g (40 razy mniej niż Ziemi), gęstość ok. $0,5$ g/cm³. Siły przyływowe w układzie powodują, że rotacje Plutona i Charona są zsynchronizowane, tzn. oba obiekty zwrócone są do siebie zawsze tymi samymi stronami, a więc ewentualny leniwy, nie lubiący podróżować obserwator miałby zawsze drugie ciało nad głową albo w ogóle nie wiedziałby o jego istnieniu.

Pluton, który został odkryty w 1930 roku ma również dziwną orbitę wokół Słońca. Niedługo po jego odkryciu stwierdzono, że tor jego biegu jest wyraźnie wydłużony, w perihelium Pluton zbliża się do Słońca bardziej niż Neptun. Fakt ten pozwolił już w 1936 roku R. A. Lyttletonowi na wysunięcie hipotezy, że może kiedyś Pluton był księżycem Neptuna, który urwał się na skutek nieznannej katastrofy.

Odkrycie Charona komplikuje ten obraz, ponieważ trudno sobie wyobrazić stabilny układ Neptun-Pluton-Charon. Wydaje się prawdopodobne, jak pokazał około rok temu D.N.C. Lin z Obserwatorium Licka (Kalifornia), że układ Pluton-Charon powstał po oderwaniu się od Neptuna, w wyniku rozpadu zbyt szybko wirującego pra-Plutona. Jest to więc zupełnie nowe spojrzenie na tworzenie się układów planeta-satelita.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Obraz układu Pluton-Charon uzyskany 2 lipca 1978

Pluton — rzymskie imię Hadesa — surowego boga świata zmarłych. Jego państwo oddzielone było od świata żywych rzeką Styks. Dusze zmarłych przewoził (za jednego obola włożonego zmarłemu do ust) Plutonowi tą rzeką jego niewolnik — starzec Charon.